Appunti del corso di

ANALISI VETTORIALE

Davide Venturelli, anno 2015/2016

Per info, segnalazioni o quant'altro:
venturelli.1591191 at studenti.uniroma1.it

ANALISI VETTORIALE

TESTI:

- MARCELLINI, FUSCO, SBORDONE
- BARUTELLO, CONTI, FERRARIO, TERRACINI, VERZINI
- PAGANI, SALSA
- GIUSTI

$\mathbb{R}^m = \{ \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m),\ x_i \in \mathbb{R}\ \ \forall i = 1, \dots, m \}$

① È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$\underline{x}+\underline{y} = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \dots)$

$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

$\hookrightarrow$ PROPRIETÀ:

a. $\underline{x}\cdot\underline{x} = |\underline{x}|^2 \geq 0$ e $|\underline{x}|^2 = 0$ SSE $\underline{x} = 0$ (DEFINITO POSITIVO)

b. $\underline{x}\cdot\underline{y} = \underline{y}\cdot\underline{x}$ (SIMMETRICO)

c. $\underline{x}\cdot(\lambda \underline{y}_1 + \mu \underline{y}_2) = \lambda\, \underline{x}\cdot\underline{y}_1 + \mu\, \underline{x}\cdot\underline{y}_2$ (BILINEARE)

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \mathbb{R}^m$

ANCHE NO ← d. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$|\underline{x}+\underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}| \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

② È UNO SPAZIO EUCLIDEO

$K \neq 0$ INSIEME NON VUOTO

$\underline{x}$ · · $\underline{y}$ $\quad |\underline{x}-\underline{y}| = \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2}$

(K, d) SPAZIO METRICO SE RISPETTA

a. $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ SSE $x = y$

b. $d(x,y) = d(y,x)$

c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in K$

È UNO SPAZIO EUCLIDEO POICHÈ ABBIAMO SCELTO

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

$|\underline{x}|_2^2 = \underline{x}\cdot\underline{x}$ (DISTANZA, METRICA), NORMA EUCLIDEA

IN GENERALE,

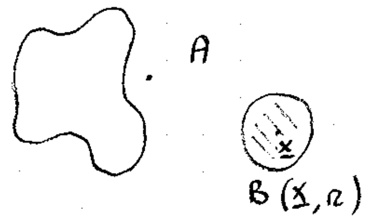
$|\underline{x}|_p = \left[\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right]^{1/p}$

$|\underline{x}-\underline{y}|_p = \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}$

CHE RISPETTANO GLI ASSIOMI SOPRA PER $p \geq 1$.

· DEF.

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ (SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^m$)



A È UN APERTO DI $\mathbb{R}^m$ SE

$\forall \underline{x} \in A \quad \exists r > 0$ t.c. $\{\underline{y} : |\underline{y} - \underline{x}| < r\} \subseteq A$

$B(\underline{x}, r) = \{|\underline{y} - \underline{x}| < r\} \subseteq A$

BALL (SE È CHIUSA, SCRIVO $\overline{B(\underline{x}, r)} = \{|\underline{y} - \underline{x}| \leq r\}$)

· DEF.

SE $\underline{P}$ È t.c.

$\forall r > 0 \quad B(\underline{P}, r) \cap A \neq \emptyset$

$B(\underline{P}, r) \cap C(A) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \underline{P}$ È DI FRONTIERA PER A

COMPLEMENTARE: $C(A) = \mathbb{R}^m \setminus A$

· DEF.

IL COMPLEMENTARE DI UN APERTO SI DICE CHIUSO.

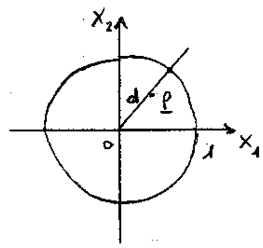
· ESEMPIO

$A = B(\underline{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$

È APERTO?

FRONTIERA DI A:

$\{|x| = 1\}$



$\underline{P} \in A \Rightarrow |\underline{P}| < 1$, INFATTI

$|\underline{P}| = |\underline{P} - \underline{0}| = d(0, P) = d \in [0, 1)$

$r_0 = \dfrac{1-d}{2} \quad \Rightarrow \quad B(\underline{P}, r_0) \subseteq A$

SCELGO r_0 E PROVO A DIMOSTRARE CHE B COSÌ DEFINITA È INTERAMENTE CONTENUTA IN A.

$\forall \underline{q} \in B(\underline{P}, r_0) \quad |\underline{q}| < 1$, INFATTI

$$|\underline{q}| = |\underline{q} - \underline{P} + \underline{P}| \underset{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{|\underline{q} - \underline{P}|}_{\wedge\, r_0} + |\underline{P}| < r_0 + d = \frac{1-d}{2} + d = \frac{1}{2}(1+d) < 1$$

SI È QUINDI PROVATO CHE $|\underline{q}| < 1 \Rightarrow \underline{q} \in A$

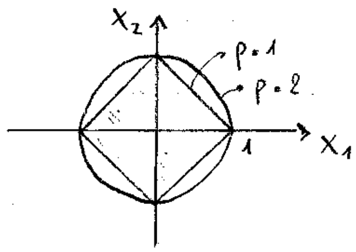
COROLLARIO

$C(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : |\underline{x}| \geq 1\}$ È UN CHIUSO.

CONSIDERIAMO

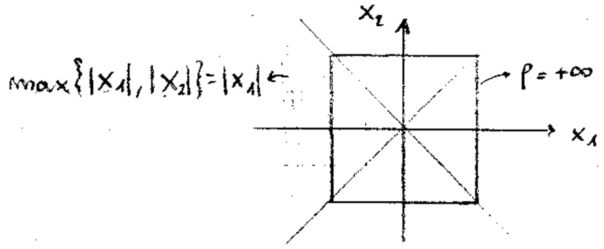
$$A_p = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : |\underline{x}|_p < 1 \} \qquad \text{CON} \qquad |\underline{x}|_p = \left[|x_1|^p + |x_2|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$A_1 = \{ |\underline{x}|_1 = |x_1| + |x_2| < 1 \}$$



$$\lim_{p \to +\infty} |\underline{x}|_p = \max\{ |x_1|, |x_2| \} = |\underline{x}|_\infty$$

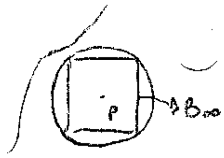
$$A_\infty = \{ |x|_\infty < 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$



IN GENERALE,

$$A_p \subseteq A_q \quad \text{SE } p \leq q$$

IL CONCETTO DI APERTO NON DIPENDE DALLA NORMA SCELTA.



· DEF:

$$A \subseteq \mathbb{R}^m, \quad A \neq \emptyset$$

DIREMO CHE A È CONVESSO SE

$$\forall \underline{p}, \underline{q} \in A \quad \{ \lambda \underline{p} + (1-\lambda)\underline{q}, \ \forall \lambda \in [0,1] \} \subseteq A$$

$$\underline{q} + \lambda(\underline{p} - \underline{q})$$

· DEF:

A È LIMITATO SE

$$\exists R > 0 \ \text{t.c.} \ A \subseteq B(\underline{0}, R)$$

A È CONNESSO SE

$\forall \underline{p}, \underline{q} \in A$ $\exists$ UNA CURVA CHE LI UNISCE CONTENUTA IN A.

A È COMPATTO SE

A È CHIUSO E LIMITATO

· DEF.

UNA FUNZIONE E' UNA COPPIA (f, A)

$$f: \quad A \longrightarrow \mathbb{R} / \mathbb{R}^k \qquad A \subseteq \mathbb{R}^m$$
$$\underline{x} \longrightarrow f(\underline{x})$$

SI DICE GRAFICO DI f

$$\{(\underline{x}, f(\underline{x})),\ \underline{x} \in A,\ f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^k\} \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$$

· DEF.

P E' DI ACCUMULAZIONE PER $A \subseteq \mathbb{R}$ SE

$$\exists \{P_k\} \subseteq A \qquad P_k \to P$$

LO E' PER $A \subseteq \mathbb{R}^k$ SE

$$\forall r > 0 \quad (B(P, r) \cap A) \setminus \{P\} \neq \emptyset$$

· DEF.

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ FUNZIONE, P DI ACCUMULAZIONE PER A.
ALLORA DIREMO CHE

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{P}} f(\underline{x}) = \underline{l} \in \mathbb{R}^k$$

SE $\qquad \mathbb{R}^k \ni f(\underline{x}) \in B(\underline{l}, \varepsilon) \qquad \mathbb{R}^m \ni \underline{x} \in B(\underline{P}, \delta) \setminus \{\underline{P}\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(P, \varepsilon) > 0 \quad \text{t.c.} \ |f(\underline{x}) - \underline{l}| < \varepsilon \quad \text{SE } 0 < |\underline{x} - \underline{P}| < \delta$$

f SI DICE CONTINUA IN $\underline{P} \in A$ SSE

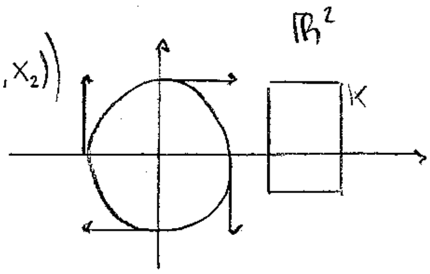
$$\lim_{\underline{x} \to P} f(\underline{x}) = f(P)$$

- **TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE**
  - WEIERSTRASS
  - VALORI INTERMEDI (ESISTENZA DEGLI ZERI)
  - TEOREMA PONTE
  - PERMANENZA DEL SEGNO

TUTTI QUESTI TEOREMI, ESSENDO LEGATI AL CONCETTO DI ORDINAMENTO, HANNO SENSO SOLO SE L'OUTPUT DELLA FUNZIONE È IN $\mathbb{R}$.

- **ESEMPIO:**

$$F(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \left(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \right)$$



$$F: \underset{\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}}{\overset{\shortparallel}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

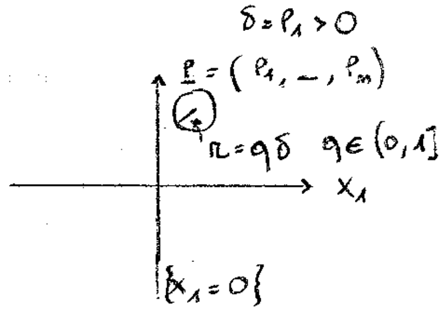
K È COMPATTO, f_1 E $f_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. VOGLIO DIMOSTRARE CHE IL CAMPO È LIMITATO IN K.

$\Downarrow$ WEIERSTRASS

$$m_1 \leq f_1 \leq M_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \max\{|m_1|, |M_1|\}$$
$$m_2 \leq f_2 \leq M_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \max\{|m_2|, |M_2|\}$$

$$0 \leq \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

- **ESEMPIO** SULLA PERMANENZA DEL SEGNO



$A = \{x_1 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ È APERTO?

$\tilde{A} = \{F(x_1, \dots, x_m) > 0\}$ $\qquad$ $B = \{0 < |x| \leq R\}$

$\underline{\rho} \in \tilde{A} \Rightarrow F(\underline{\rho}) > 0$

$F(\underline{x}) > 0$ SE $|\underline{x} - \underline{\rho}| < r$ (TH. PERMANENZA DEL SEGNO)

$\quad \hookrightarrow \underline{x} \in B(\underline{\rho}, r)$ $\qquad$ QUINDI È APERTO.

$\tilde{C} = \{F(\underline{x}) \leq 0\} = \mathcal{C}(\tilde{A})$, QUINDI È CHIUSO. B NÉ UNO, NÉ L'ALTRO.

· PROPOSIZIONE

SIANO $\{A_i\}_{i \in I}$ APERTI
$\{C_j\}_{j \in J}$ CHIUSI

① $\bigcup_i A_i$ È APERTO
② $\bigcap_j C_j$ È CHIUSO
③ $\bigcap_{i=1}^{N} A_i$ È APERTA
④ $\bigcup_{j=1}^{K} C_j$ È CHIUSO

} SOLO SE L'UNIONE / INTERSEZIONE È FINITA

· DEF.

SIA $f : A \to \mathbb{R}$
$A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO
$\underline{p} \in A$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$

LA DERIVATA DIREZIONALE DI f IN $\underline{p}$ LUNGO $\underline{v}$ È

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{p}) = \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{p} + h\underline{v}) - f(\underline{p})}{h}\right] \in \mathbb{R}$$ (SE ESISTE!)

SE $\underline{v} = \underline{e}_j$,

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_j}(\underline{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{p})$$ DERIVATA PARZIALE.

· ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2)(x_1 - x_2^2)$$

$\underline{p} = (x_1, x_2)$
$\underline{v} = (v_1, v_2)$

$$\frac{f(x_1 + hv_1, x_2 + hv_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$= \frac{[(x_1 + hv_1)^2 + (x_2 + hv_2)][(x_1 + hv_1) - (x_2 + hv_2)^2] - (x_1^2 + x_2)(x_1 - x_2^2)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\Big\{(x_1^2 + 2hx_1v_1 + h^2v_1^2 + x_2 + hv_2)(x_1 + hv_1 - x_2^2 - h^2v_2^2 - 2hx_2v_2)$$
$$- (x_1^3 - x_1^2x_2^2 + x_1x_2 - x_2^3)\Big\}$$

$$= \frac{1}{h}\{2hx_1^2 v_1 - 2hx_1v_1x_2^2 + hv_2x_1 - hv_2x_1x_2^2 + hv_1x_1^2 + hv_1x_2 - 2hx_2v_2x_1^2 - 2hv_2x_2^2\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_1, x_2) = 2x_1^2 v_1 - 2x_1v_1x_2^2 + v_2x_1 - v_2x_1x_2^2 + v_1x_1^2 + v_1x_2 - 2x_1^2x_2v_2 - 2v_2x_2^2$$

PIÙ SEMPLICE CON LE DERIVATE PARZIALI:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$\underline{x} + h\underline{e}_1 = (x_1 + h, x_2, \ldots, x_m)$$

$$\frac{f(x_1+h, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{h}$$

È UNA DERIVATA CHE GIÀ SAPEVO CALCOLARE.

CALCOLIAMO:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1(x_1 - x_2^2) + (x_1^2 + x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_2$$

CHE OTTENGO ANCHE SOSTITUENDO SOPRA A $\underline{v} = (v_1, v_2)$ IL VETTORE $\underline{e}_1(1, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 3x_2^2 - 2x_1^2 x_2$$

· <u>DEF.</u>

SIA $f: A \to \mathbb{R}$,

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO

$p \in A$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad \forall i = 1, \ldots, m$

CHIAMERÒ <u>VETTORE GRADIENTE</u>

$$\nabla f(\underline{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\underline{p})\right)$$

· RELAZIONE TRA GRADIENTE E DERIVATA DIREZIONALE

$$\frac{f(x_1+hv_1,\, x_2+hv_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{v_1}{v_1}\left[f(x_1+hv_1,\, x_2+hv_2) - f(x_1, x_2+hv_2)\right] + \left[f(x_1, x_2+hv_2) - f(x_1,x_2)\right]\frac{v_2}{v_2}\right\}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

$$= \underline{v} \cdot \underline{\nabla} f(\underline{P}) \equiv \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_1, x_2)$$ (VERO SE f È DIFFERENZIABILE)

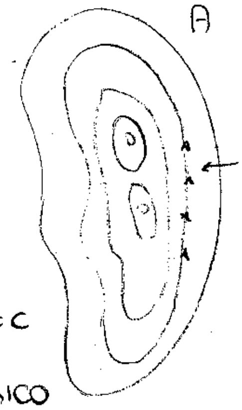
· SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL GRADIENTE

$$f(x_1(t),\, x_2(t)) = \text{cost.} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}\left[f(x_1(t),\, x_2(t))\right] = 0$$ (HO DERIVATO I DUE MEMBRI) *

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_2'(t)$$



$$= \underline{\nabla} f(x_1(t), x_2(t)) \cdot \underline{v}(t) = \underline{\nabla} f(\underline{P}(t)) \cdot \underline{T}(t)$$

COL SIGNIFICATO DI VELOCITÀ,

OSSERVO CHE LUNGO DERIVATA DELLA CURVA, OVVERO LA TANGENTE: $\underline{v} = (x_1'(t), x_2'(t))$

LA CURVA NON SI PROIETTANO COMPONENTI DI "CRESCITA" DI f:

$$\underline{\nabla} f(\underline{P}(t)) \cdot \underline{T}(t) = 0$$

IL GRADIENTE È ORTOGONALE ALLE CURVE DI LIVELLO.

INOLTRE ESSO È DIRETTO NELLA DIREZIONE DI <u>MASSIMA CRESCITA</u>:

DETTO $\underline{v}$ UN VERSORE GENERICO E θ L'ANGOLO TRA $\underline{v}$ E $\underline{\nabla} f$,

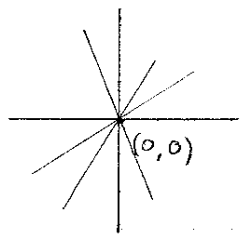
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \underline{\nabla} f \cdot \underline{v} = \|\underline{\nabla} f\| \cdot \|\underline{v}\| \cos\theta = \|\underline{\nabla} f\| \cos\theta$$

CHE È MASSIMO QUANDO $\theta = 0$, OSSIA $\underline{v}$ È PARALLELO A $\underline{\nabla} f$.

*NOTA: SE $f(x) \equiv \text{cost.}$, OGNI SUO PUNTO È PUNTO DI MASSIMO / MINIMO.

· ESEMPIO

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$



È CONTINUA IN $(0,0)$?

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} F(x_1,x_2) \overset{?}{=} F(0,0) = 0$$

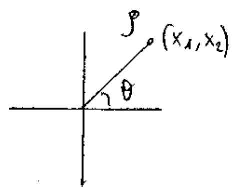
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad t.c. \quad |F(x_1,x_2)| < \varepsilon \quad \text{SE} \quad |(x_1,x_2)| < \delta$$

MI METTO SU UNA GENERICA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE,

$$x_2 = m x_1 \qquad m \in \mathbb{R}$$

$$F(x_1, m x_1) = \frac{m x_1^2}{m^2 x_1^2 + x_1^2} = \frac{m}{m^2+1} \qquad x_1 \neq 0$$

A SECONDA DI CHE RETTA SCELGO, OTTENGO UN LIMITE DIVERSO.



=> QUESTO LIMITE NON ESISTE.

CAMBIO SISTEMA DI RIFERIMENTO E USO LE COORDINATE POLARI.

$$\begin{cases} x_2 = \rho \sin\theta \\ x_1 = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{SE} \quad \begin{matrix} \rho > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

IL CAMBIO È BIUNIVOCO.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$

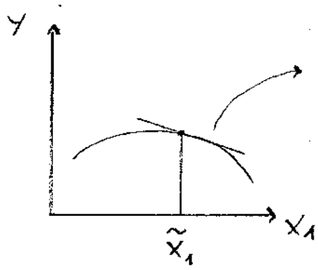
$$F(\rho,\theta) = \frac{\rho\sin\theta \cdot \rho\cos\theta}{\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$$

LA FUNZIONE DIPENDE UNICAMENTE DALL'ANGOLO, IL CHE SPIEGA PERCHÉ NON POSSA ESSERE CONTINUA IN $(0,0)$.

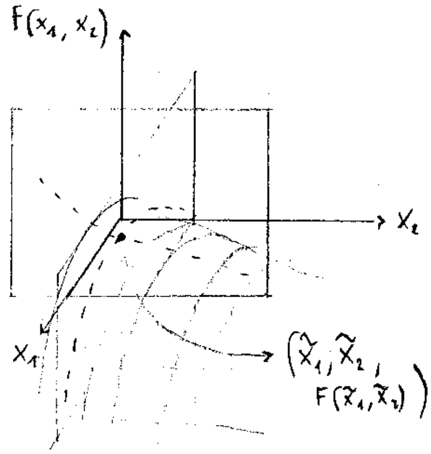
SI NOTI CHE AMMETTE COMUNQUE DERIVATE PARZIALI IN $(0,0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

· DERIVATE PARZIALI



$$Y = m(x_1 - \tilde{x}_1) + F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$



<u>DEF</u>:

- $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

① ϕ È <u>DERIVABILE</u> IN $x = a$ SE

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} = \phi'(a) \in \mathbb{R}$$

② $\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x-a) + o(|x-a|)$ CON $\lim_{x \to a} \frac{o(|x-a|)}{|x-a|} = 0$

③ ESISTE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI ϕ

- $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A APERTO, $\bar{x} \in A$. VOGLIO POTER SCRIVERE:

$$F(\tilde{\underline{x}} + \underline{h}) - F(\tilde{\underline{x}}) - \underline{L} \cdot \underline{h} = o(|\underline{h}|)$$

$\underline{h}$ È UN VETTORE, A TENDERE A ZERO È LA SUA NORMA.

DIREMO CHE F È <u>DIFFERENZIABILE</u> IN $\tilde{x}$ SSE

$\exists\ \underline{L} \in \mathbb{R}^m$ t.c.

$$\lim_{|\underline{h}| \to 0} \frac{F(\tilde{\underline{x}} + \underline{h}) - F(\tilde{\underline{x}}) - \underline{L} \cdot \underline{h}}{|\underline{h}|} = 0$$

MA CHI È $\underline{L}$?

$\underline{h} = t\, \underline{e}_i$, $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\tilde{\underline{x}} + t\underline{e}_i) - F(\tilde{\underline{x}}) - L \cdot (t\underline{e}_i)}{t} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\tilde{\underline{x}} + t\underline{e}_i) - F(\tilde{\underline{x}})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot \underline{L} \cdot \underline{e}_i}{t} = \underline{L} \cdot \underline{e}_i = L_i$$

COMPONENTE LUNGO e_i

PERCIO'

$$L_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}) \quad \Rightarrow \quad \underline{L} = \underline{\nabla} F(\tilde{x})$$

$$\frac{F(\tilde{\underline{x}}+\underline{h}) - F(\tilde{\underline{x}}) - \underline{L}\cdot\underline{h}}{|\underline{h}|} \cdot |\underline{h}| \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0$$

HO MOLTIPLICATO PER $|h|$, LEGIT

$$\underbrace{\left[F(\tilde{\underline{x}}+\underline{h}) - F(\tilde{\underline{x}})\right]}_{\downarrow\, |\underline{h}|\to 0 \;\; 0} \simeq \underline{L}\cdot\underline{h}, \quad \text{INFATTI} \quad 0 \le |L\cdot h| \le |L|\cdot|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

VERO AL LIMITE

CAUCHY/SCHWARTZ

OVVERO F È CONTINUA

=> SE F È DIFFERENZIABILE ALLORA È CONTINUA E HA TUTTE LE DERIVATE PARZIALI. *

POSSO SCRIVERE

$$F(\tilde{x}+h) = \underbrace{F(\tilde{x}) + \nabla F(\tilde{x})\cdot h}_{} + o(|h|)$$

EQ. DELL'IPERPIANO TANGENTE AL GRAFICO DI F IN $(\tilde{x}, F(\tilde{x})) \in \mathbb{R}^{m+1}$

* ALTRA DIM: $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \left(f(\underline{x}_0) + \underline{\nabla} f(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0) + o(|\underline{x}-\underline{x}_0|)\right) = f(\underline{x}_0)$

- ESEMPIO

$$F(x_1, x_2) = |\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 \qquad \underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2)$$

$$\underline{\nabla} F(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2) = 2(x_1, x_2) = 2\underline{x}$$

$$\underline{\nabla} F(\underline{\ell}) = 2\underline{\ell}$$

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{F(\underline{\ell}+\underline{h}) - F(\underline{\ell}) - \underline{\nabla} F(\underline{\ell})\cdot\underline{h}}{|\underline{h}|} = 0$$

SE QUESTO È VERO, ALLORA F È DIFFERENZIABILE IN $\underline{O}$.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(p_1+h_1)^2+(p_2+h_2)^2-p_1^2-p_2^2-2\,\underline{p}\cdot\underline{h}}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} = 0$$

IN POLARI,

$$\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

$F(\underline{p}) + \nabla F(\underline{p})\cdot(\underline{x}-\underline{p}) = x_{m+1}$ È L'EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO.

$\Pi: \quad p_1^2+p_2^2+2(p_1x_1+p_2x_2) \qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

EQUAZIONE DELL' IPERPIANO.

PARAMETRI DIRETTORI: $2p_1x_1$ E $2p_2x_2$

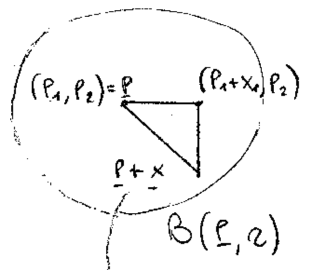
- <u>TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE</u>

$F: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO $\qquad \underline{p}\in A$

F CONTINUA

$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{p})$ SIANO CONTINUE IN UN INTORNO DI $\underline{p}$, $B(\underline{p},r)$ $\forall i=1,\dots,m$

$\Rightarrow$ F È DIFFERENZIABILE IN $\underline{p}$.



$\underline{p}+\underline{x} = (p_1+x_1, p_2+x_2)$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

$F(\underline{p}+\underline{x}) - F(\underline{p})$

$= F(p_1+x_1,p_2+x_2) - F(p_1,p_2) \pm F(x_1+p_1,p_2)$

$= F(x_1+p_1,x_2+p_2) - F(x_1+p_1,p_2) + F(x_1+p_1,p_2) - F(p_1,p_2)$

LAGRANGE $= \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x_1+p_1,\xi)\,x_2 + \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\eta,p_2)\,x_1$

PERCORRO UNA SPEZZATA LUNGO GLI ASSI DI CUI CONOSCO LA CONTINUITÀ. IN $\mathbb{R}^m$, LO FACCIO m VOLTE.

DOVE

$$\rho_2 < \xi < \rho_2 + x_2$$

$$\rho_1 < \eta < \rho_1 + x_1$$

OTTENGO

$$F(\rho+x) - F(\rho) - \frac{\partial F}{\partial x_2}(\rho_1+x, \xi)\, x_2 - \frac{\partial F}{\partial x_1}(\eta, \rho_2)\, x_1 = 0$$

MA PER DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\rho_1+x_1, \xi) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\rho_1+x_1, \rho_2) + o(1)$$

PER $|x| \to 0$, OVVERO QUALCOSA CHE $\to 0$ SE $|x| \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\eta, \rho_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\rho_1, \rho_2) + o(1)$$

PER $x_1 \to 0$

PERCIÒ

$$F(x+\rho) - F(\rho) - \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(\rho_1, \rho_2) + o(1)\right] x_1 - \left[\frac{\partial F}{\partial x_2}(\rho_1+x_1, \rho_2) + o(1)\right] x_2 \overset{?}{=} o(|x|)$$

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{F(x+\rho) - F(\rho) - \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(\rho_1,\rho_2)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\rho_1+x_1,\rho_2)x_2 + o(1)(x_1+x_2)\right]}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} = 0$$

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{F(x+\rho) - F(\rho) - \frac{\partial F}{\partial x_1}(\rho_1,\rho_2)x_1 - \frac{\partial F}{\partial x_2}(\rho_1+x_1,\rho_2)x_2}{|x|} = \lim_{|x|\to 0} \frac{o(1)(x_1+x_2)}{|x|}$$

MA

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{o(1)(x_1+x_2)}{|x|} = \lim_{\rho\to 0} \frac{o(1)(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)}{\rho} = 0$$

LIMITATA
(LO SONO $\sin\theta$ E $\cos\theta$)

QUINDI F È DIFFERENZIABILE.

DERIVATE PARZIALI SUCCESSIVE

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$$

TEOREMA DI SCHWARZ

$f: \underset{\mathbb{R}^m \text{ APERTO}}{\overset{\cap}{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

$P \in A$, $f \in C^1(B(P,r))$ CONTINUA CON DERIVATE PARZIALI CONTINUE

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ E $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ SIANO CONTINUE IN $B(P,r)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P)$$

DEF:

H_f MATRICE HESSIANA

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \ddots & \\ \vdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(P) \end{pmatrix}$$

- FORMULA DI TAYLOR

$$F: \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{A} \to \mathbb{R}$$ APERTO

F SIA DI CLASSE $C^2(A)$

$p \in A$

$$F(x) = F(p) + \nabla F(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}\left[H_f(p)(x-p)\right] \cdot (x-p) + o\left(|x-p|^2\right)$$

• IL GRADIENTE È LA DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA

SI È DIMOSTRATO CHE

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \underline{\nabla} f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

ALLORA, USANDO LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0) \right| = \left| \underline{\nabla} f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \right| \leq |\underline{\nabla} f(\underline{x}_0)| \cdot |\underline{v}| = |\underline{\nabla} f(\underline{x}_0)|$$

SE $\underline{v}$ È UN VERSORE. MA ALLORA

$$-|\underline{\nabla} f(x_0)| \leq \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \leq |\underline{\nabla} f(\underline{x}_0)|$$

E I DUE ESTREMI SONO RAGGIUNTI PER

$$\underline{v} = \pm \frac{\underline{\nabla} f(\underline{x}_0)}{|\underline{\nabla} f(\underline{x}_0)|}$$

• DERIVARE FUNZIONI COMPOSTE

SIA

$$\underline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)) \qquad t \in \mathbb{R}$$

UN VETTORE DI $\mathbb{R}^m$ LE CUI COMPONENTI SONO FUNZIONI DERIVABILI:

$$\underline{x}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_m'(t))$$

SIA f UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}(t)$. ALLORA

$$F(t) = f(\underline{x}(t))$$

È DIFFERENZIABILE NELLA VARIABILE t E SI HA

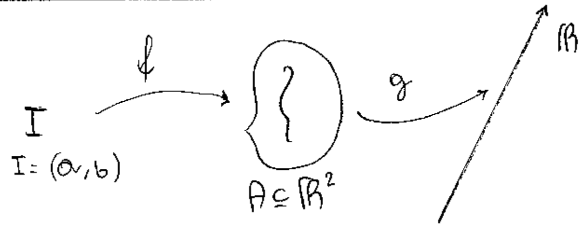
$$F'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\underline{x}(t))}{\partial x_i} x_i'(t) \qquad \text{(CHAIN RULE)}$$

$$= \langle \underline{\nabla} F(\underline{x}) \mid \underline{x}'(t) \rangle$$

· DOVE CERCO I MASSIMI E I MINIMI?

- PUNTI IN CUI $\nabla f = 0$ (DAL TEOREMA DI FERMAT, VALIDO PERÒ SOLO SU UN APERTO E SE f È DERIVABILE).
- PUNTI DI SOSPETTA NON DERIVABILITÀ.
- PUNTI DI FRONTIERA (PARAMETRIZZAZIONI).

- FUNZIONI COMPOSTE



$$F(t) = g(\underline{f}(t))$$
$$\underline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

f_1, f_2 DERIVABILI $\Rightarrow$ $f_i(t_0+h) = f_i(t_0) + f_i'(t_0)h + o(h) \quad i = 1,2$

g DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ $g(\underline{p}+\underline{w}) - g(\underline{p}) - \underset{\displaystyle \nabla g(\underline{p})}{\underset{\downarrow}{\underline{L}}} \cdot \underline{w} = o(|\underline{w}|)$ *

$Im(\underline{f}) \subseteq A$

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(\underline{f}(t_0+h)) - g(\underline{f}(t_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(\underline{f}(t_0)+\underline{f}'(t_0)h + \underline{o}(h)) - g(\underline{f}(t_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\nabla g(\underline{f}(t_0)) \cdot \underline{f}'(t_0)h + o(h)\right)$$

IN REALTÀ $\nabla g \cdot \underline{o}(h)$, CHE È ANCORA UN $o(h)$.

$$= \nabla g(\underline{f}(t_0)) \cdot \underline{f}'(t_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial g}{\partial f_i}(t_0) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial t}(t_0)$$

HO SCRITTO $\underline{o}(h)$ PERCHÉ STO INDICANDO PIÙ RELAZIONI SCALARI.

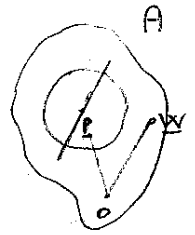
* LO POSSO SCRIVERE COME (DEFINIZIONE DI DIFFERENZIABILITÀ):

$$\lim_{|\underline{w}|\to 0} \frac{g(\underline{p}+\underline{w}) - g(\underline{p})}{|\underline{w}|} = \lim_{|\underline{w}|\to 0} \frac{\nabla g(\underline{p}) \cdot \underline{w}}{|\underline{w}|}$$

E VEDERE

$$\underline{p} \sim \underline{f}(t_0)$$
$$\underline{w} \sim \underline{f}'(t_0)h + \underline{o}(h)$$

· DERIVATA DIREZIONALE



CONSIDERO $A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO E

$$\underline{x}(t) = \underline{p} + t\,\underline{w} \quad , \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

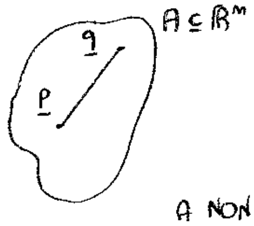
SEGMENTO PASSANTE PER $\underline{p}$.

SIA $f : A \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{w}}(\underline{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}(t)) - f(\underline{x}(0))}{t} = \nabla f(\underline{x}(0)) \cdot \underline{x}'(0) = \nabla f(\underline{p}) \cdot \underline{w}$$

OVVERO SE LA CURVA IN QUESTIONE È LA RETTA GENERATA DA $\underline{w}$ RITROVO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA DIREZIONALE RISPETTO A $\underline{w}$.

· TEOREMA DI LAGRANGE

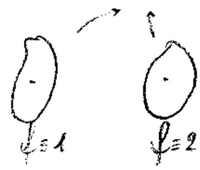


A APERTO E CONNESSO

$f : A \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE

$\underline{p}, \underline{q} \in A$

A NON CONNESSO



ALLORA $\exists\, \underline{\xi} \in A$: $\quad f(\underline{p}) - f(\underline{q}) = \nabla f(\underline{\xi}) \cdot (\underline{p} - \underline{q})$

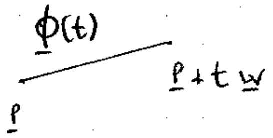
COROLLARIO:

SE $\nabla f(\underline{p}) = \underline{0} \quad \forall \underline{p} \in A$, ALLORA f È COSTANTE.

· MATRICE HESSIANA

$$F(t) = f(\underline{p} + t\underline{w})$$

$$f \in C^2(B(\underline{p}, r)) \quad , \quad r > 0$$



UN SEGMENTO È DI FATTO $\in C^\infty$.

PROBLEMA: ESPRIMERE L'INCREMENTO DI f LUNGO UNA CERTA DIREZIONE $\underline{w}$. SI È VISTO CHE LO SI PUÒ FARE SEGUENDO f LUNGO IL SEGMENTO PARAMETRIZZATO $\underline{p} + t\underline{w}$.

POSSO SCRIVERE

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2} F''(0) t^2 + o(t^2)$$

$$F(0) = f(\underline{p})$$

$$F'(0) = \underline{\nabla} f(\underline{p}) \cdot \underline{\phi}'(t=0) = \underline{\nabla} f(\underline{p}) \cdot \underline{w}$$

CHI È $F''(0)$?

INTANTO,

$$F'(t) = \nabla f(\underline{p} + t\underline{w}) \cdot \underline{w} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\underline{p} + t\underline{w}) w_i$$

$$F''(t) = \quad ? \quad = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} (\underline{p} + t\underline{w}) \cdot w_j \right)$$

INFATTI

$$G_i'(t) = \frac{d}{dt} g_i(\underline{p} + t\underline{w}) = \nabla g_i(\underline{p} + t\underline{w}) \cdot \underline{w} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_i) \Big|_{\underline{p}+t\underline{w}} \cdot w_j$$

QUINDI

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\underline{p} + t\underline{w}) w_j w_i$$

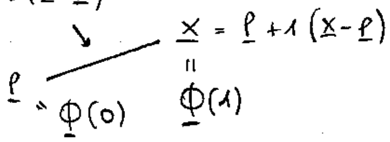
$$= H_f \, \underline{w} \cdot \underline{w}$$

↑

MATRICE HESSIANA,

FORMA QUADRATICA

$$\underline{\phi}(t) = \underline{p} + t(\underline{x} - \underline{p})$$



ALLORA

$$f(\underline{x}) = f(\underline{p}) + \underline{\nabla} f(\underline{p}) \cdot (\underline{x} - \underline{p}) + \frac{1}{2} \left[H_f(\underline{p})(\underline{x} - \underline{p}) \right] \cdot (\underline{x} - \underline{p}) + o(|\underline{x} - \underline{p}|^2)$$

(HO USATO L'ESPANSIONE DI $F(1)$, SE NO t^2 NON SE NE VA!)

FORME QUADRATICHE

$A = (a_{ij})$

$\underline{v} = (v_i)$ $\quad i,j = 1, \dots, m$

COSA POSSO FARE CON A?

$$A\underline{v} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki} v_i \right)_{k=1,\dots,m}$$

$$v \cdot (A \cdot v) = (x\ y)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(A\underline{v}) \cdot \underline{v} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki} v_i \right) v_k = \sum_{k,i=1}^{m} a_{ki} v_i v_k = \langle Av, v \rangle$$

FORMA QUADRATICA

STUDIO DI FUNZIONE

DEF:

$\underline{p}$ È UN PUNTO CRITICO DI f SSE $\quad \nabla f(\underline{p}) = 0$

PRENDIAMO

$\underline{x} \sim \underline{p} \iff (\underline{x} \in B(\underline{p}, \varepsilon))$ CON ε PICCOLO.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{p}) + \nabla f(\underline{p}) \cdot (\underline{x} - \underline{p}) + \frac{1}{2} H_f(\underline{p})(\underline{x} - \underline{p}) \cdot (\underline{x} - \underline{p}) + o(|\underline{x} - \underline{p}|^2)$$

SE $\underline{p}$ È CRITICO, $\nabla f(\underline{p}) = 0$ E SI HA

$$f(\underline{x}) - f(\underline{p}) = \frac{1}{2} H_f (\underline{x} - \underline{p}) \cdot (\underline{x} - \underline{p}) + o(|\underline{x} - \underline{p}|^2)$$

SE VOGLIO CONOSCERE IL SEGNO DI QUESTO PRODOTTO A PRESCINDERE DA CHI È $(\underline{x} - \underline{p})$, DEVO STUDIARE COME OPERA H_f.

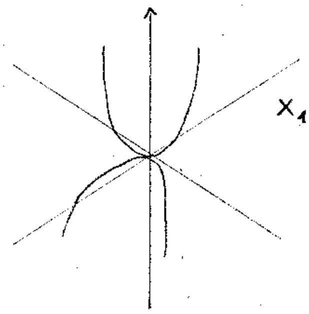
DEF:

$A \in M_m(\mathbb{R})$ (SPAZIO DELLE MATRICI REALI $m \times m$)

1. A È DEFINITA POSITIVA SSE
   $A\underline{v} \cdot \underline{v} > 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^m$
2. A È SEMIDEFINITA POSITIVA SSE
   $A\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^m$
3. A È DEFINITA NEGATIVA SSE
   $A\underline{v} \cdot \underline{v} < 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^m$
4. A È SEMIDEFINITA NEGATIVA SSE
   $A\underline{v} \cdot \underline{v} \leq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^m$

CON $\underline{v} \neq \underline{0}$.

· ESEMPIO:



$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
$$A = \mathbb{R}^n$$

CERCO I PUNTI CRITICI.

$$\underline{\nabla} f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}) \right) = 2(x_1, x_2)$$

$$\underline{\nabla} f(x_1, x_2) = \underline{0} \quad \text{SSE} \quad (x_1, x_2) = (0,0)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = Hf$$

$$Hf\, \underline{v} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2(v_1^2 + v_2^2) > 0$$

DEFINITA POSITIVA.

ALLORA

$$f(x_1, x_2) - f(0,0) > 0$$
$$f(x_1, x_2) > f(0,0) \qquad \forall (x_1, x_2) \in B((0,0), \varepsilon) \qquad \text{MINIMO.}$$

SE AVESSI

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$
$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{PUNTO DI SELLA.}$$

DEF:

$f \in C^2(A)$, $P \in A$ PUNTO CRITICO, ALLORA

$H_f(P)$ DEFINITO POSITIVO $\Rightarrow$ P PUNTO DI MINIMO LOCALE

$H_f(P)$ DEFINITO NEGATIVO $\Rightarrow$ P PUNTO DI MASSIMO LOCALE

$H_f(P)$ NON DEFINITO $\Rightarrow$ P PUNTO DI SELLA

· ESEMPIO

$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$

$f_{x_1} = 4x_1^3 \qquad f_{x_1x_1} = 12x_1^2 \qquad f_{x_1x_2} = 0$

$f_{x_2} = 4x_2^3 \qquad f_{x_2x_2} = 12x_2^2$

$(0,0)$ UNICO PUNTO CRITICO DI f.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ SEMIDEFINITO (POSITIVO O NEGATIVO).

IL TEST DELL'HESSIANO È INCONCLUSIVO.

È CHIARO PERÒ CHE SI TRATTA DI UN MINIMO.

· ESERCIZIO

TRA TUTTI I PARALLELEPIPEDI AVENTI LE LUNGHEZZE DEGLI SPIGOLI FISSATI, TROVARE QUELLO DI VOLUME MASSIMO.

$\begin{cases} V = xyz \\ x + y + z = l_0 \end{cases} \qquad x, y, z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A = \{x, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$z = l_0 - x - y \quad \Rightarrow \quad V(x,y) = xy(l_0 - x - y) = l_0xy - x^2y - xy^2$

$\nabla V(x,y) = (l_0y - 2xy - y^2,\ l_0x - x^2 - 2xy) = (y(l_0 - 2x - y),\ x(l_0 - x - 2y))$

$\begin{cases} 2x + y = l_0 \\ x + 2y = l_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = l_0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{3} l_0 \\ x = y \end{cases}$

FUNZIONI VETTORIALI

$\underline{f}: A \to \mathbb{R}^m$ DIFF. BILE $\qquad \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})) \in \mathbb{R}^m$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

$g: B \to \mathbb{R}^k$ DIFF. BILE $\qquad Im(\underline{f}) \subseteq B$

$B \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\lim_{|\underline{w}| \to 0} \frac{|\underline{f}(\underline{x}+\underline{w}) - \underline{f}(\underline{x}) - L \cdot \underline{w}|}{|\underline{w}|} = 0$$

L STAVOLTA È UNA MATRICE.

$L = (l_{ij})$

$$L\underline{w} = \left(\sum_{j=1}^{n} l_{kj} w_j \right)_{k=1,\dots,m}$$

(RIGA, COLONNA)

$$(L\underline{w})_1 = \sum_{j=1}^{n} l_{1j} w_j \underset{\text{DIFFERENZIAB.}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} w_j = \nabla f_1(\underline{x}) \cdot \underline{w}$$

PERCIÒ

$$L = (l_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = J_{\underline{f}}$$

MATRICE JACOBIANA

CHE COSTRUISCO ACCOSTANDO I GRADIENTI DELLE f_i MESSI IN RIGHE.

CONSIDERIAMO ORA

$F(x) = g(\underline{f}(x))$

$F: A \to \mathbb{R}^k$

$$\underset{M_{k\times n}}{\underset{\cap}{J_F(\underline{x})}} = \underset{M_{k\times m}}{\underset{\cap}{J_g(\underline{f}(\underline{x}))}} \cdot \underset{M_{m\times n}}{\underset{\cap}{J_{\underline{f}}(\underline{x})}}$$

- STUDIO DI FUNZIONE - ESEMPIO

$$f(x_1,x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1-x_2)^2 + 2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 4(x_1-x_2) \equiv 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 4(x_1-x_2) \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^3 = (x_1-x_2) \\ x_1^3 + x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 = -x_2^3 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_1 = 0 \ ; \quad x_1(x_1^2-2) = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$A \ (a_1 = 0 \ , \ a_2 = 0 \ )$

$B \ (b_1 = \sqrt{2} \ , \ b_2 = -\sqrt{2} \ )$

$C \ (c_1 = -\sqrt{2} \ , \ c_2 = \sqrt{2} \ )$

CALCOLIAMO L'HESSIANO:

$f_{x_1x_1} = 12x_1^2 - 4 \qquad f_{x_1x_2} = 4$

$f_{x_2x_2} = 12x_2^2 - 4$

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2-4 & 4 \\ 4 & 12x_2^2-4 \end{pmatrix}$$

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \det : 0 \\ Tr : -8 \end{matrix}$$

SEMIDEFINITA NEGATIVA, $\lambda_{1,2} = \{-8, 0\}$

$$Hf(B) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \det : > 0 \\ Tr : > 0 \end{matrix}$$

$$Hf(C) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = Hf(B)$$

$\Rightarrow$ B, C MINIMI LOCALI

RECALL:

λ AUTOVALORE SE $\exists \, \underline{v} \neq \underline{0} \ : \ A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$A \sim \Lambda$

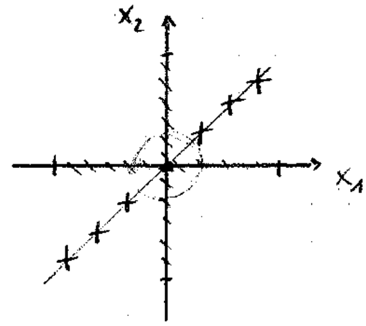
$\det(A) = \det(\Lambda) = \lambda_1\lambda_2$

$Tr(A) = Tr(\Lambda) = \lambda_1 + \lambda_2$

$\Lambda \underline{v} \cdot \underline{v} = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2$

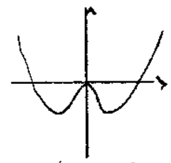
SE $\underline{v} = (v_1, v_2)$

COSA FACCIO CON A?



$$f(x_1,x_2) - f(0,0) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1-x_2)^2 \equiv \phi$$
(SHIFT NELL'ORIGINE, IN VERTICALE)

$$\phi(x_1,0) = x_1^4 - 2x_1^2$$



$$\phi(0,x_2) = x_2^4 - 2x_2^2$$

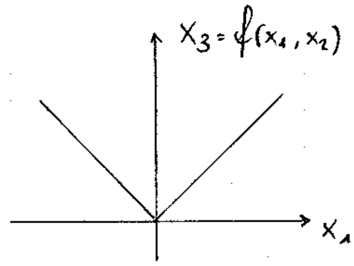
LUNGO GLI ASSI, SEMPRE NEGATIVA.

$$\phi = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$$
$$\tilde{\phi}(\rho,\theta) = \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 2\rho^2(\cos\theta - \sin\theta)^2$$

C'È UNA DIREZIONE CHE RENDE PICCOLO QUESTO CONTRIBUTO: LUNGO ESSA ϕ RISCHIA DI DIVENTARE POSITIVA.

RETTA $\theta = \frac{\pi}{4} \iff x_1 = x_2$
$$\phi(x_1,x_1) = 2x_1^4$$

ALLORA A È UN PUNTO DI SELLA.



- ESEMPIO

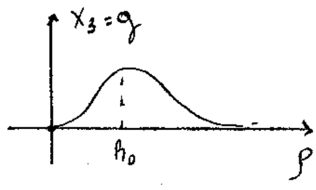
$$f(x_1,x_2) = |(x_1,x_2)| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

$$g(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)\,e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right)$$

CON
$$f(\rho,\theta) = \rho$$
SI HA
$$\nabla f = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\,,\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$$

PER g,
$$g(\rho,\theta) = \rho^2 e^{-\rho^2}$$



· FOCUS: LA MATRICE JACOBIANA

SIA

$\underline{f}: \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n \text{ APERTO}}}{U} \to \mathbb{R}^m$. ALLORA LA MATRICE JACOBIANA DI f IN $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

CALCOLATE IN $\underline{x}$: $\underset{\text{R-C}}{(J_f)_{ij}} = \dfrac{\partial f_i(\underline{x})}{\partial x_j}$

$\underline{f}$ SI DICE ALLORA DIFFERENZIABILE IN $\underline{x} \in U$ SE ESISTE UNA APPLICAZIONE LINEARE

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (DI CUI J_f È LA MATRICE ASSOCIATA)

TALE CHE VALGA

$$\underline{f}(\underline{x} + \Delta\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}) = L(\underline{x})\Delta\underline{x} + o(\Delta\underline{x})$$

SI NOTI CHE SE $\underline{f}$ È DIFFERENZIABILE, ALLORA TUTTE LE DERIVATE PARZIALI CHE COSTITUISCONO J_f ESISTONO.

- SE $m = 1$, J_f DIVENTA UN VETTORE n-DIMENSIONALE, OVVERO $\nabla f(\underline{x})$.
- SE $n = 1$, f PARAMETRIZZA UNA CURVA IN $\mathbb{R}^m$; IL SUO DIFFERENZIALE È UNA FUNZIONE CHE DEFINISCE LA DIREZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO.
- SE $m = n = 1$, J_f SI RIDUCE A UN NUMERO, PARI ALLA DERIVATA.

· ESEMPIO

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 x_2 x_3$$

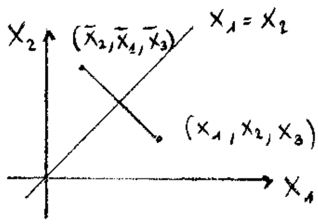
$\{x_1, x_2, x_3 \neq 0\} = E \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO (INFATTI È UNIONE FINITA DI $\begin{matrix} x_k > 0 \\ x_k < 0 \end{matrix}$, APERTI).

CERCHIAMO I PUNTI CRITICI LIBERI DELLA FUNZIONE.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1^2} + x_2 x_3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{1}{x_2^2} + x_1 x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{1}{x_3^2} + x_1 x_2$$

INFATTI f È PARI RISPETTO AGLI ASSI; È SIMMETRICA RISPETTO ALL' IPERPIANO $x_1 = x_2$, O $x_2 = x_3$, O $x_1 = x_3$.



PER CERCARE I PUNTI CRITICI, RISOLVO

$$\begin{cases} f_{x_1} = 0 \\ f_{x_2} = 0 \\ f_{x_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = x_1 x_2 x_3 \\ \dfrac{1}{x_2} = x_1 x_2 x_3 \\ \dfrac{1}{x_3} = x_1 x_2 x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = s$$

$$\frac{1}{s} = s^3 \Rightarrow s^4 = 1 \Rightarrow s = \pm 1$$

PERCIÒ

$P(1,1,1)$ $Q(-1,-1,-1)$ $\in E$ SONO PUNTI CRITICI.

SI NOTA CHE

$$f(-x_1, -x_2, -x_3) = -f(x_1, x_2, x_3) \iff f(-\underline{x}) = -f(\underline{x})$$

MI BASTA QUINDI STUDIARE UN SOLO PUNTO.

CERCO L'HESSIANO:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = +\frac{2}{x_1^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = +\frac{2}{x_2^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^3} = \frac{2}{x_3^3}$$

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1^3} & x_3 & x_2 \\ x_3 & \frac{2}{x_2^3} & x_1 \\ x_2 & x_1 & \frac{2}{x_3^3} \end{pmatrix} \qquad H_f(\underline{P}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

VOGLIO STUDIARE:

$$H\underline{v}\cdot\underline{v} \quad \begin{matrix} >0 \\ \gtrless \\ <0 \end{matrix}$$

$$H = P^{-1}\Lambda P$$

NOTA:
φ PORTA DA $\mathcal{B}_{CAN}$ A $\mathcal{B}_\lambda$, ENTRAMBE ORTONORMALI: MA ALLORA φ È UNA ISOMETRIA LINEARE, RAPPRESENTATA DA UNA MATRICE ORTOGONALE P. IN PARTICOLARE, P CONSERVA IL PRODOTTO SCALARE E SI HANNO
$\langle v | v \rangle = \langle \varphi(v) | \varphi(v) \rangle \qquad {}^tP \cdot P = Id \qquad {}^tP = P^{-1}$

$$P^{-1}\Lambda P\underline{v}\cdot\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \Lambda P\underline{v}\cdot P\underline{v} \qquad (\langle P^{-1}\Lambda P v | v \rangle = \langle PP^{-1}\Lambda P v | P v \rangle)$$

$$\Lambda \underline{w}\cdot\underline{w} = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_m w_m^2$$
$$\geq \lambda_1 (w_1^2 + \dots + w_m^2)$$
$$= \lambda_1 |\underline{w}|^2 > 0$$

· TEOREMA

H DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI $\{\lambda_1 \dots \lambda_m\}$

1. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \_ \leq \lambda_m \quad \Rightarrow$ H È DEFINITA POSITIVA.
2. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \_ \leq \lambda_m < 0 \quad \Rightarrow$ H È DEFINITA NEGATIVA.
3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_m \quad \Rightarrow$ H NON È DEFINITA.

· NOTA:

$$\det(H_f - \lambda) = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) = \lambda^2 - Tr(H_f) + \det(H_f)$$

CERCHIAMO GLI AUTOVALORI:

$$P(\lambda) = \det(H - \lambda I) = (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) + 2$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

IN GENERALE,

$$P(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \_ + a_{m-1}\lambda + a_m$$

- <u>REGOLA DI CARTESIO</u>

$\lambda_i > 0 \quad i = 1, \_, m \quad$ SSE

$a_{2K} > 0 > a_{2K+1} \quad K = 0, \_, m/2 \qquad$ COEFFICIENTI PARI POSITIVI E DISPARI NEGATIVI.

$\lambda_i < 0 \quad i = 1, \_, m \quad$ SSE

$a_j > 0$

NEL NOSTRO CASO,

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4$$

ALLORA TUTTI I λ_i SONO POSITIVI: H È DEFINITA POSITIVA.

NE SEGUE CHE $\underline{P}$ È PUNTO DI MINIMO E, PER SIMMETRIA, $\underline{Q}$ È PUNTO DI MASSIMO.

- <u>OSSERVAZIONE</u>

$F(\underline{x}) = A\underline{x} \cdot \underline{x} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^m$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$

PRENDO IL SOTTOINSIEME

$S^{m-1} = \{ |\underline{x}|^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^m$

$|\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \_ + x_m^2 = 1$

CHE OTTENGO COME

$A = \{ |\underline{x}|^2 \geq 1 \} \cap B = \{ |x|^2 \leq 1 \} \qquad$ CHIUSI,

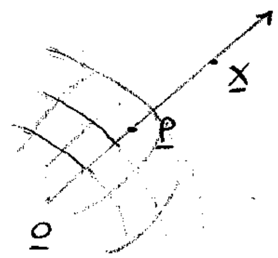
PERCIÒ È CHIUSO. ESSENDO ANCHE LIMITATO, È COMPATTO.

APPLICO QUINDI WEIERSTRASS: $\exists\, M > m$,

$$M = F(\underline{p}_0) \geq F(\underline{x}) \geq m = F(\underline{q}_0) \qquad \forall\, \underline{x} \in S^{m-1}$$

PRENDIAMO

$$\underline{x} \notin S^{m-1}, \ \underline{x} \neq \underline{0}$$



ALLORA

$$\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \in S^{m-1} \equiv \underline{p}$$

E POSSO SCRIVERE

$$\underline{x} = |\underline{x}| \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$$

CALCOLO

$$F(\underline{x}) = A\underline{x} \cdot \underline{x} = \left(A\, |\underline{x}| \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \right) \cdot |\underline{x}| \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \qquad \text{USO LA LINEARITÀ,}$$

$$= |\underline{x}|^2 \left(A \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \right) = |\underline{x}|^2 \left(A\underline{p} \cdot \underline{p} \right) \qquad \text{CON } m \leq A\underline{p} \cdot \underline{p} \leq M$$

ALLORA

$$m |\underline{x}|^2 \leq F(\underline{x}) \leq M |\underline{x}|^2 \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^m$$

(NON SOLO PER I PUNTI SULLA SFERA)

EFFETTIVAMENTE, m E M COINCIDONO RISPETTIVAMENTE CON GLI AUTOVALORI λ_1 E λ_m DI A.

INFATTI, NELLA BASE DI AUTOVETTORI VALE

$$F(\underline{x}) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \qquad \lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_m$$

$$|\underline{x}|^2 = \sum_i x_i^2$$

$$\lambda_1 |\underline{x}|^2 = \sum_i \lambda_1 x_i^2 \leq \underbrace{\sum_i \lambda_i x_i^2}_{\equiv\, F(\underline{x})} \leq \sum_i \lambda_m x_i^2 = \lambda_m |\underline{x}|^2$$

E POICHÈ MI SPOSTO IN $\mathcal{B}_\lambda$ TRAMITE UN'ISOMETRIA (CHE CONSERVA LA NORMA), QUESTO RISULTATO È VALIDO IN GENERALE.

· ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^4 \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} f_{x_1} = 2x_1 + 3x_2 \equiv 0 \\ f_{x_2} = 3x_1 + 8x_2^3 \equiv 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \\ -\frac{9}{2}x_2 + 8x_2^3 = 0 \end{cases}$$

OTTENGO I PUNTI CRITICI

$O(0,0) \quad A\left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right) \quad B\left(\frac{9}{8}, -\frac{3}{4}\right)$

CALCOLO

$f_{x_1x_1} = 2 \quad f_{x_2x_2} = 24x_2^2 \quad f_{x_1x_2} = 3$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 24x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(\underline{A}) = Hf(\underline{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 27/2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Tr > 0 \\ \det = 18 > 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{A}, \underline{B} \text{ P.TI DI MINIMO}$$

$$Hf(\underline{O}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Tr > 0 \\ \det = -9 < 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{O} \text{ È UNA SELLA}$$

· ESEMPIO

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$(x_1, x_2) \in E = \left\{ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ COMPATTO, INFATTI $E \subseteq B(0, a+b)$

CERCHIAMO IL MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI (PREVISTI DA WEIERSTRASS).

$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2)$

$\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$ SSE $\underline{x} = 0$

$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ NON DEFINITA: SELLA. (QUINDI NON È min O max)

DEVO STUDIARE CHE COSA SUCCEDE SULLA FRONTIERA.

SCRIVO DELLE EQUAZIONI PARAMETRICHE PER LA FRONTIERA:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

CONSIDERO

$$F\big|_{\partial E} = F\big(x(t), y(t)\big)\Big|_{t\in[0,2\pi]} = \phi(t)$$

(∂E È LA FRONTIERA DI E)

$$\phi(t) = a^2\cos^2 t - b^2\sin^2 t$$

SFRUTTO A MIO VANTAGGIO IL FATTO CHE LA FRONTIERA È UNIDIMENSIONALE.

$$\phi'(t) = -2(a^2+b^2)\cos t \sin t \equiv 0$$

SSE

$$t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$
$$t = 0, 2\pi$$

$$\phi(0) = \phi(2\pi) = a^2 = \phi(\pi) \qquad \max_E(F)$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -b^2 \qquad \min_E(F)$$

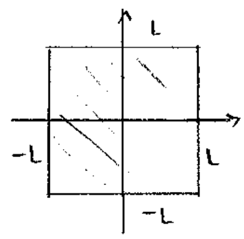
PUNTI DI MAX E MIN ASSOLUTI.

- ESERCIZIO

$$F(x_1, x_2) = e^{x_1} \cdot x_2 \qquad F \in C^\infty$$

$$(x_1, x_2) \in Q = \{|x_1|, |x_2| \le L\}$$

LIMITATO DA $L\sqrt{2}$.



$$\nabla F(x_1, x_2) = (e^{x_1} x_2, e^{x_1}) = e^{x_1}(x_2, 1)$$

$$\Rightarrow \nexists\, p \in Q \text{ t.c. } \nabla f(p) = \underline{0}$$

PERCIÒ MASSIMI E MINIMI SONO DA CERCARE SULLA FRONTIERA.

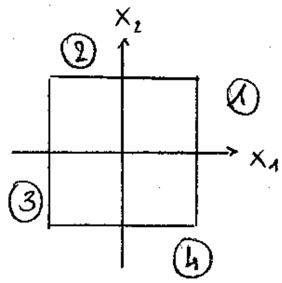
TRA L'ALTRO, ESSENDO GLI SPIGOLI NON DERIVABILI, HO BISOGNO DI 4 CURVE DIVERSE.

1. (L,t) $t \in [-L,L]$

2. (t,L) $t \in [-L,L]$

3. $(-L,t)$ $t \in [-L,L]$

4. $(t,-L)$ $t \in [-L,L]$



① $F\big|_{①} = e^L t, \quad t \in [-L,L]$

$\min\limits_{1}(F) = -Le^L \qquad \max\limits_{1}(F) = Le^L$ (MONOTONA CRESCENTE)

② $F\big|_{②} = Le^t, \quad t \in [-L,L]$

$\min\limits_{2}(F) = Le^{-L} \qquad \max\limits_{2}(F) = Le^L$

③ $F\big|_{③} = e^{-L}t, \quad t \in [-L,L]$

$\min\limits_{3}(F) = -Le^{-L} \qquad \max\limits_{3}(F) = Le^{-L}$

④ $F\big|_{④} = -Le^t, \quad t \in [-L,L]$

$\min\limits_{4}(F) = -Le^L \qquad \max\limits_{4}(F) = -Le^{-L}$ (MONOTONA DECRESCENTE)

$$\underset{\underset{\min\limits_{Q}(F)}{\shortparallel}}{\underset{F(L,-L)}{\shortparallel}}{-Le^L} < -Le^{-L} < Le^{-L} < \underset{\underset{\max\limits_{Q}(F)}{\shortparallel}}{\underset{F(L,L)}{\shortparallel}}{Le^L}$$

· ESEMPIO

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + K\left[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2\right]$$

$$K > 0, \quad (p_1, p_2) \neq 0 \qquad E : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$$

CERCHIAMO IL GRADIENTE

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{x_1}{\rho} + 2K(x_1 - p_1)$$

$$= -\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + 2K(x_1 - p_1) \qquad \equiv 0$$

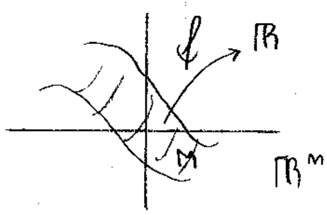
$$\frac{\partial E}{\partial x_2} = -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + 2K(x_2 - p_2) \qquad \equiv 0$$

OVVERO

$$\begin{cases} 2K(x_2 - p_2)(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} = x_2 \\ 2K(x_1 - p_1)(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} = x_1 \end{cases}$$

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

SIANO



$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{DIFFERENZIABILI}$$

CERCO

$$\max_{\underline{x} \in M} f(\underline{x}) \qquad \text{CON} \qquad M = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^m : g(\underline{x}) = 0 \}$$

↳ VINCOLO

(AD ESEMPIO, RICORDIAMO $S^{m-1} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^m : |\underline{x}|^2 - 1 = 0 \}$).

SUPPONIAMO CHE

$$\exists\, \underline{p} \in M \quad \text{t.c.} \quad f(\underline{p}) = \max_M (f)$$

CONSIDERO

$\underline{x}(t)$ CURVA REGOLARE IN M

$$\underline{x} : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^m$$
$$t \mapsto (x_1(t), \dots, x_m(t))$$

$$\left.\begin{array}{l} x_k \in C^1[-\delta, \delta] \quad \forall k = 1, \dots, m \\ |\underline{x}'(t)| = \sum_{j=1}^{m} x_j'^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in [-\delta, \delta] \end{array}\right\} \text{REGOLARE}$$

$$\mathrm{Im}(\underline{x}(t)) \subseteq M$$
$$\underline{x}(0) = \underline{p}$$

ALLORA SI HA

$$f(x(0)) = \max_{[-\delta, \delta]} f(x(t)) = \max_M (f)$$

PER CUI

$$\left.\frac{d}{dt}\left(f(x(t)) \right)\right|_{t=0} = 0$$

$$= \left. \nabla f(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) \right|_{t=0} = \nabla f(\underline{p}) \cdot \underline{x}'(0) = 0$$

CONSIDERO ORA

$$g(\underline{x}(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$ PER COME HO COSTRUITO $\underline{X}(t)$.

ALLORA

$$\frac{d}{dt} g(\underline{x}(t)) = 0 = \underline{\nabla} g(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t)$$

IN PARTICOLARE, SCEGLIENDO $t=0$,

$$\underline{\nabla} g(\underline{P}) \cdot \underline{x}'(0) = 0$$

HO SCOPERTO CHE I GRADIENTI DI f E g SONO ENTRAMBI ORTOGONALI A $\underline{x}'(0)$. $\underline{X}(t)$ È UNA CURVA, $\underline{x}'(t)$ È TANGENTE ALLA CURVA; TUTTI I POSSIBILI $\underline{x}'(t)$ IN UN PUNTO $(t=0)$ FORMANO UN (IPER)PIANO DI DIMENSIONE $n-1$ (INFATTI NON HO SCELTO UNA $\underline{X}(t)$ SPECIFICA).
NE SEGUE CHE I DUE GRADIENTI SONO PARALLELI (SPAZI AFFINI MAGARI DIVERSI, MA CON GLI STESSI VETTORI DI GIACITURA); SCRIVO CHE

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \quad \underline{\nabla} f(\underline{P}) = \lambda_0 \underline{\nabla} g(\underline{P}) \qquad (\mathrm{I})$$

VALIDO PER QUALSIASI $\underline{P}$ PUNTO CRITICO VINCOLATO.

AL CONTRARIO, SUPPORRE VERA (I) IN UN PUNTO $\underline{q}$ SUL VINCOLO IMPLICA CHE $\underline{q}$ SIA UN PUNTO CRITICO VINCOLATO.

SE $\lambda_0 = 0$, IL PUNTO CRITICO È LIBERO $(\underline{\nabla} f(\underline{q}) = 0)$.

IL PARAMETRO λ_0 SI DICE MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE.
DALLA (I) RICAVO

$$\nabla f(\underline{P}) - \lambda_0 \nabla g(\underline{P}) = 0$$

$$\nabla(f(\underline{x}) - \lambda_0 g(\underline{x}))\Big|_{\underline{x}=\underline{P}} = 0$$ PER LINEARITÀ DEL GRADIENTE.

IN CUI PERÒ HO OMESSO IL FATTO CHE $g(\underline{x}) = 0$. (SE MI LIMITO A IMPORLO, RITROVO $\nabla f = 0$).

METTO ALLORA A SISTEMA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x}) \right) = 0 & \forall i = 1, \dots, m \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x}) \right) = 0 & \text{EQUIVALENTE A IMPORRE } g(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

(HO $m+1$ INCOGNITE PERCHÈ C'È λ).

$\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ LAGRANGIANA

MI BASTA ORA CERCARE

$$\nabla \mathcal{L} = \underline{0}$$

I PUNTI CRITICI VINCOLATI SONO I PUNTI CRITICI LIBERI DELLA LAGRANGIANA.

NOTA: PERCHÈ IL METODO FUNZIONI, DEVE ESSERE $\nabla g(\underline{p}) \neq 0 \ \forall \underline{p} \in M$, OVVERO IL VINCOLO DEVE ESSERE REGOLARE.

· ESEMPIO

TROVARE I PUNTI DI $M = \{ x_3^2 = x_1 x_2 + 1 \}$ PIÙ VICINI ALL'ORIGINE.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 - x_1 x_2 - 1$$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(x_3^2 - x_1 x_2 - 1)$$

CERCO

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{L} = 0 = 2x_1 - \lambda(-x_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{L} = 0 = 2x_2 - \lambda(-x_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\mathcal{L} = 0 = 2x_3 - \lambda(2x_3) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L} = 0 = x_3^2 - x_1 x_2 - 1$$ (RITROVO L'EQ. DEL VINCOLO)

RISOLVO QUINDI

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\lambda}{2} x_2 \\ x_2 = -\frac{\lambda}{2} x_1 \\ 2(1-\lambda)x_3 = 0 \\ x_3^2 = x_1 x_2 + 1 \end{cases}$$

$\Big\{ x_1 = \frac{\lambda^4}{4} x_1 \; ; \; \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) x_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda \neq 1 \, , \; x_3 = 0$

$x_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4, \; \lambda = \pm 2 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$-x_1^2 + 1 = 0 \, , \quad x_1 = \pm 1 = -x_2$

TROVO

$P_1(1,-1,0) \quad P_2(-1,1,0)$

SE $\lambda = 1$, $x_3 \neq 0$ E

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2} x_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

INVERTIBILE, $\det \neq 0$
QUINDI INIETTIVA

TROVO

$P_3(0,0,1) \quad P_4(0,0,-1)$

CALCOLO

$f(P_1) = f(P_2) = 2$

$f(P_3) = f(P_4) = 1$

· ESEMPIO

TROVARE MAX E MIN ASSOLUTO DI

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1 x_2 + 3x_2^2 + x_2 x_3 - 2x_3^2$$

SU S^2, CON

$$S^2 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$$

S^2 COMPATTO, F CONTINUA $\Rightarrow$ AMMESSI MAX E MIN (WEIERSTRASS)

$$g(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = x_1^2 - x_1 x_2 + 3x_2^2 + x_2 x_3 - 2x_3^2 - \lambda g(\underline{x})$$

CALCOLO

$\nabla \mathcal{L} = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 - 2\lambda x_2 = 0 \\ x_2 - 4x_3 - 2\lambda x_3 = 0 \\ g(\underline{x}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2(1-\lambda)x_1 \\ x_1 = 6x_2 + x_3 - 2\lambda x_2 \\ x_2 = 2(2+\lambda)x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

VERIFICO CHE $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ NON PORTANO SOLUZIONI.

$$\begin{cases} x_2 = 2(1-\lambda)x_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{2(2-\lambda)} x_2 = \dfrac{1-\lambda}{2+\lambda} x_1 \\ x_1 = 4(3-\lambda)(1-\lambda)x_1 + \dfrac{1-\lambda}{2+\lambda} x_1 \\ \left(4(1-\lambda)^2 + \dfrac{(1-\lambda)^2}{(2+\lambda)^2} + 1\right) x_1^2 = 1 \end{cases}$$

ESSENDO $x_1 \neq 0$, RICAVO

$$4(3-\lambda)(1-\lambda)(2+\lambda) + (1-\lambda) - (2+\lambda) = 0$$

POLINOMIO DI 3° GRADO. OTTENGO 1 o 3 SOLUZIONI; MA SE QUI NE TROVASSI UNA SOLA, NON AVREI TROVATO MASSIMO E MINIMO.

PROVIAMO A RISOLVERE IL PROBLEMA PARAMETRIZZANDO LA FUNZIONE.

USIAMO

$$\begin{cases} x_1 = \cos\vartheta \\ x_2 = \sin\vartheta\cos\varphi \\ x_3 = \sin\vartheta\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi] \end{matrix}$$

RETTANGOLO, QUINDI COMPATTO.

$$\tilde{F}(\vartheta,\varphi) = \cos^2\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + 3\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi$$

$$(\vartheta,\varphi) \in \underset{\substack{\downarrow \\ \text{RETTANGOLO}}}{R} = [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

• <u>ESERCIZIO</u>

TROVA IL PARALLELEPIPEDO DI VOLUME MASSIMO AVENTE LE FACCE PARALLELE AI PIANI COORDINATI E INSCRITTO IN $\{9x_1^2+36x_2^2+4x_3^2=36\}$

$$E=\left\{\frac{x_1^2}{4}+x_2^2+\frac{x_3^2}{9}=1\right\}$$

MI BASTA TROVARE $P(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\in E$ E SFRUTTARE LA SIMMETRIA RISPETTO AGLI ASSI CARTESIANI PER TROVARE TUTTI GLI ALTRI 7 PUNTI.

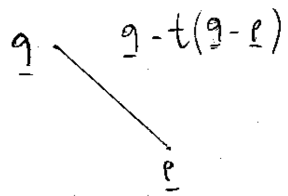
$$V(x_1,x_2,x_3)=8x_1x_2x_3$$ (UGUALE IN TUTTI GLI OTTANTI)

$$\mathcal{L}(\underline{x},\lambda)=8x_1x_2x_3-\lambda\left[9x_1^2+36x_2^2+4x_3^2-36\right]$$

· **DEF**:

$E \subseteq \mathbb{R}^m$ È CONVESSO SE $\forall \underline{p}, \underline{q} \in E$

$(\overline{PQ} =)\ t\underline{p} + (1-t)\underline{q} \in E \qquad \forall t \in [0,1]$



· **DEF**:

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO

È CONVESSA SE È CONVESSO IL SUO EPIGRAFICO, OVVERO

$epi(f) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$

È CONVESSO, CON

$epi(f) = \{ (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^{m+1},\ \underline{x} \in A,\ \forall t \in \mathbb{R} : t \geq f(\underline{x}) \}$

· **TEOREMA**

SE $f : A \to \mathbb{R}$ È CONVESSA E DIFFERENZIABILE, ALLORA

$f(\underline{x}) \geq f(\underline{p}) + \nabla f(\underline{p})(\underline{x} - \underline{p})$ (LA FUNZIONE STA SOPRA I PIANI TANGENTI)

· **TEOREMA**

SE $f : A \to \mathbb{R}$ È CONVESSA E $f \in C^2$, ALLORA

$Hf(\underline{p}) \geq 0$

OVVERO LA MATRICE HESSIANA È SEMIDEFINITA POSITIVA.

· ESERCIZIO

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + K\left[(x_1 - P_1)^2 + (x_2 - P_2)^2\right]$$

$$K > 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

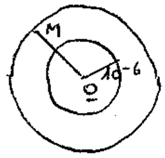
DIMOSTRIAMO CHE IL MINIMO ASSOLUTO ESISTE. NOTO CHE

$$E(x_1, x_2) \geq \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0^+]{} +\infty$$

PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI, $E(x_1, x_2) \xrightarrow[\rho \to 0^+]{} +\infty$. ALLORA

$$E \geq 10^6 \quad \forall (x_1, x_2) \in B(\underline{0}, 10^{-6})$$

ORA CONSIDERO CHE



$$E \geq K\left[(x_1 - P_1)^2 + (x_2 - P_2)^2\right] = K|\underline{x} - \underline{P}|^2$$

$$0 \leq |\underline{x}| = |\underline{x} - \underline{P} + \underline{P}| \leq |\underline{x} - \underline{P}| + |\underline{P}|$$

$$|\underline{x} - \underline{P}| \geq |\underline{x}| - |\underline{P}| \geq 0 \qquad (\text{SUPPONGO } |\underline{x}| > |\underline{P}|)$$

$$|\underline{x} - \underline{P}|^2 \geq (|\underline{x}| - |\underline{P}|)^2 = |\underline{x}|^2 + |\underline{P}|^2 - 2|\underline{x}||\underline{P}|$$

$$E \geq K|\underline{x} - \underline{P}|^2 \geq K\left(|\underline{x}|^2 - 2|\underline{x}||\underline{P}| + |\underline{P}|^2\right) = K\phi(\rho) \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} +\infty$$

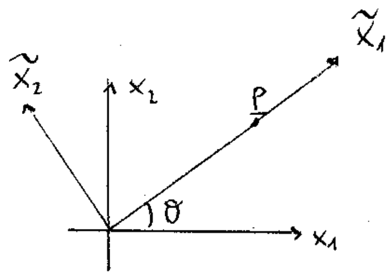
$$\Rightarrow \exists M > 0 \text{ t.c. } |\underline{x}| = \rho > M \Rightarrow \phi(\rho) \geq 10^6$$

CALCOLO

$$\nabla E = \left(-\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + 2K(x_1 - P_1),\ -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} + 2K(x_2 - P_2)\right)$$

INFATTI

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{x_k}{\rho} = -\frac{x_k}{\rho^3}$$



FISSO $(P_1, P_2) = (P, 0)$. CIO' EQUIVALE A RUOTARE GLI ASSI; OTTENGO

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

OTTENGO ALLORA

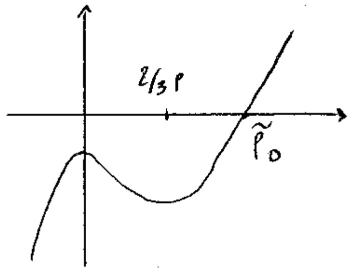
$$\begin{cases} 2k(\tilde{x}_1 - \rho) = \dfrac{\tilde{x}_1}{(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2)^{3/2}} \\ 2k(\tilde{x}_2 - 0) = \dfrac{\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$$2k(\tilde{x}_1 - \rho) = \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_1^3} \qquad \tilde{x}_1 > 0$$

$$2k\tilde{x}_1^2(\tilde{x}_1 - \rho) = 1$$

$$2k\tilde{x}_1^3 - 2k\rho\tilde{x}_1^2 - 1 \equiv h(\tilde{x}_1) = 0$$

$$h'(\tilde{x}_1) = 6k\tilde{x}_1 - 4k\rho\tilde{x}_1$$
$$= 2k\tilde{x}_1(3\tilde{x}_1 - 2\rho) \qquad \tilde{x}_1 = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3}\rho \end{cases}$$



HO TROVATO IL PUNTO STAZIONARIO $(\tilde{\rho}_0, 0)$. APPLICO LE TRASFORMAZIONI INVERSE E TROVO

$$\begin{cases} x_0 = \tilde{\rho}_0 \cos\vartheta \\ y_0 = \tilde{\rho}_0 \sin\vartheta \end{cases}$$

· <u>ESEMPIO</u>

$$f(x_1, x_2, x_3) = A\underline{x} \cdot \underline{x}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in S^2 = \{|x|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$A \in M_3(\mathbb{R})$$

WEIERSTRASS $\Rightarrow$ $\exists\, \underline{p} \in S^2$, $\exists\, \underline{q} \in S^2$: $f(\underline{q}) \le f(\underline{x}) \le f(\underline{p})$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = A\underline{x}\cdot\underline{x} - \lambda(|\underline{x}|^2 - 1)$$

$$A\underline{x} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i\right)_{j=1\dots3}$$

$$A\underline{x}\cdot\underline{x} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i\right)\cdot(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

ALLORA

$$\mathcal{L}(\underline{x},\lambda) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j - \lambda\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = \sum_i x_i^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = -2\lambda x_1 + \sum_{j=1}^{3}(a_{1j}x_j + a_{j1}x_j) \qquad \text{INFATTI HO } \sum_{j=1}^{3}(a_{1j}x_1x_j + a_{j1}x_1x_j)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = -2\lambda x_2 + \sum_j(a_{2j}x_j + a_{j2}x_j)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_3} = \quad " \qquad "$$

IN FORMA VETTORIALE,

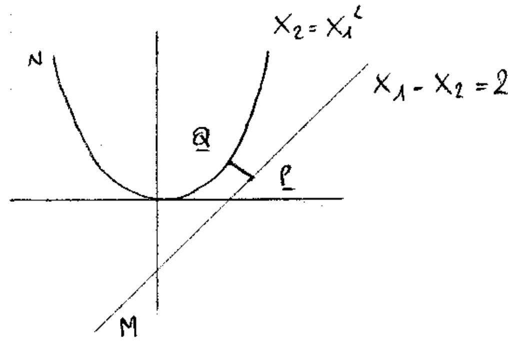
$$2\lambda\underline{x} = \left[\sum_{j=1}^{3}(a_{kj}+a_{jk})x_j\right]_{k=1..3} = (A+{}^tA)\,\underline{x}$$

$$\frac{1}{2}(A+{}^tA)\,\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

$\downarrow$

A_s, <u>MATRICE SIMMETRIZZANTE</u> (E' SIMMETRICA)

IL SISTEMA HA SOLUZIONE PER λ AUTOVALORE DI A_s.



· <u>ESEMPIO</u>

DUE CORSI D'ACQUA: CERCO IL MODO MIGLIORE PER COLLEGARLI.

$$d^2(P,Q) = f(p_1,p_2,q_1,q_2)$$
$$(p_1,p_2)\in M$$
$$(q_1,q_2)\in N$$

SCRIVO

$$\mathcal{L}(p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda, \mu) = \underset{\substack{\parallel \\ (p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}}{f(p_1, p_2, q_1, q_2)} - \lambda(p_1 - p_2 - 2) - \mu(q_1^2 - q_2^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} = 2(p_1 - q_1) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_2} = 2(p_2 - q_2) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 2(q_1 - p_1) - 2\mu q_1 = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 - p_2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 2(q_2 - p_2) + \mu = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = q_1^2 - q_2 = 0$$

RISOLVO E OTTENGO

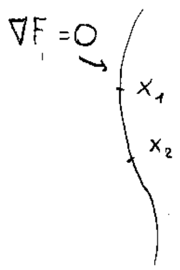
$$q_1 = \frac{1}{2} \quad q_2 = \frac{1}{4} \quad p_1 = \frac{11}{8} \quad p_2 = -\frac{5}{8}$$

DEVE ESSERCI UN MINIMO ASSOLUTO (f COERCITIVA). AVENDO TROVATO UN PUNTO, SONO SICURO CHE SIA IL MINIMO.

· COSA SUCCEDE QUANDO HO UNA <u>CURVA DI PUNTI CRITICI</u>?

$$\frac{F(x(1)) - F(x(2))}{x(1) - x(2)} = \frac{d}{dt} F(x(\tilde{t})) = \underbrace{\nabla F}_{=0,\ \text{PUNTO CRITICO}} \cdot x'(\tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad F \text{ COSTANTE}$$

(LAGRANGE



$$\frac{d^2}{dt^2} F(\underline{x}(t)) = 0 \qquad \text{(NON PERCHE' } \dot{F} = 0, \text{ MA PERCHE' } F = \text{COST. !)}$$

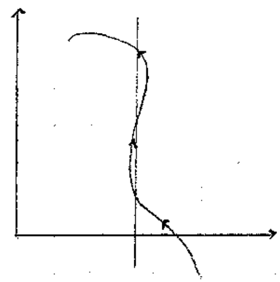
$$\shortparallel$$

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla F(x(t)) \cdot x'(t)\right) = \left[H_F(\underline{x}(t))\, x'(t) \cdot x'(t)\right] + \underbrace{\nabla F(x(t))}_{=0} \cdot x''(t)$$

$$H_F(\ell) \cdot x'(t) \cdot x'(t) = 0$$

OVVERO QUALSIASI VETTORE TANGENTE ALLA CURVA E' UN AUTOVETTORE CON AUTOVALORE ZERO PER LA MATRICE HESSIANA H_F.
SE NE DEDUCE CHE H_F HA L'AUTOVALORE ZERO ED E' PERCIO' SICURAMENTE SEMIDEFINITA.

· <u>ESEMPIO</u>



$f(x_1, x_2) = 0$ (L'INSIEME DEL PIANO IN CUI $f = 0$)

$E : \{ f(x_1, x_2) = 0 \}$ $\quad (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \underline{\tilde{x}} \in E$

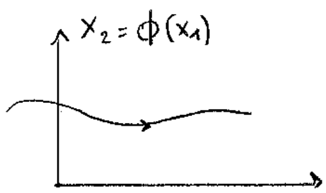
QUANDO POSSO COSTRUIRE LA CURVA IN FIGURA?

AD ESEMPIO, SIA

$f = x_1^2 + x_2^2$

LA CURVA IN E DOVREBBE AVERE COME SOSTEGNO UN PUNTO. BENE CHE VADA, LA VELOCITA' E' NULLA E NON SAREBBE UNA CURVA REGOLARE.

SIA



$$\{ f(x_1, x_2) = x_2 - \phi(x_1) = 0 \} = E = \Gamma_\phi$$

$$\underset{t \in [a,b]}{(t, \phi(t))} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} (1, \phi'(t)) \qquad |x'(t)| \neq 0$$

$$|x'(t)| = \left[1 + |\phi'(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (DI DINI)

SCRIVERE $f(x_1, x_2) = 0$ DEFINISCE UNA RELAZIONE TRA x_1 E x_2. MOSTRIAMO SOTTO QUALI IPOTESI TALE RELAZIONE È UNA FUNZIONE IN UN INTORNO DI $\tilde{\underline{x}}$; QUI IL LUOGO DEGLI ZERI PUÒ ESSERE VISTO COME IL GRAFICO DI $x_2 = \phi(x_1)$.

$f: \underset{\mathbb{R}^2 \text{ APERTO}}{A} \to \mathbb{R} \qquad f \in C^1(A)$

$\tilde{\underline{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in A \quad t.c. \quad f(\tilde{\underline{x}}) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{\underline{x}}) \neq 0$ $\left[\text{SE È UGUALE A 0, GUARDO } \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\underline{x}}) \neq 0. \text{ FALLISCO SE } \nabla f = 0\right]$ *

ALLORA

$\exists \ (\tilde{x}_1 - \delta; \tilde{x}_1 + \delta)$ E $(\tilde{x}_2 - \delta_1; \tilde{x}_2 + \delta_1)$

$\phi: (\tilde{x}_1 - \delta; \tilde{x}_1 + \delta) \to (\tilde{x}_2 - \delta_1; \tilde{x}_2 + \delta_1), \quad \phi \in C^1$

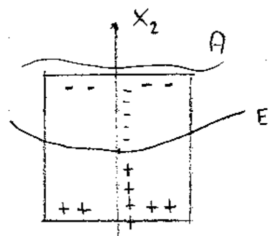
(·) $f(x_1, \phi(x_1)) = 0 \qquad x_1 \in (\tilde{x}_1 - \delta, \tilde{x}_1 + \delta)$

(·) $$\phi'(x_1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \phi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \phi(x_1))}$$

$x_2 = \phi(x_1)$ FUNZIONE DEFINITA IMPLICITAMENTE DA $f(x) = 0$ IN UN INTORNO DEL PUNTO $\tilde{\underline{x}}$.

$\forall x_1 \in (\tilde{x}_1 - \delta, \tilde{x}_1 + \delta)$

DIMOSTRAZIONE:



PRIMA SEGUO $f(\tilde{x}_1, x_2)$, POI $f(x_1, \tilde{x}_2 + \delta_1)$ E $f(x_1, \tilde{x}_2 - \delta_1)$

SUPPONIAMO, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{\underline{x}}) < 0$. (PER LA PERMANENZA DEL SEGNO, RESTA POSITIVA IN TUTTO UN RETTANGOLO).

ALLORA $\forall x_1 \in [\tilde{x}_1 - \delta, \tilde{x}_1 + \delta]$

$\exists! x_2 = \phi(x_1)$ t.c.

$x_2 = \phi(x_1) \in [\tilde{x}_2 - \delta_0, \tilde{x}_2 + \delta_0]$ $\Rightarrow$ IN TUTTO L'INTORNO RETTANGOLARE, $f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \phi(x_1)$

$f(x_1, x_2 = \phi(x_1)) = 0$

(TEOREMI DELLA PERMANENZA DEL SEGNO E DI ESISTENZA DEGLI ZERI, MONOTONÌA).

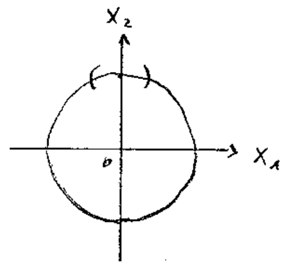
MANCA DA DIMOSTRARE CHE $\phi \in C^1$ (OMETTIAMO QUESTA PARTE).

* LA RICHIESTA SERVE AD ASSICURARSI CHE L'INSIEME DI LIVELLO DI f NON DEGENERI IN UN PUNTO: INFATTI SE SCRIVO $f(x_1, x_2) = 0$ STO CERCANDO LE INTERSEZIONI TRA IL GRAFICO DI f E IL PIANO $x_3 = 0$.

· ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = K^2, \quad K \neq 0 \qquad (I)$$

$$E = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - K^2 = 0 \}$$



$$\nabla f(x_1, x_2) = 2(x_1, x_2)$$

NEI PUNTI IN CUI $f_{x_1} = 0$ NON TROVO UNA FUNZIONE ϕ.

$$\nabla f(0,1) = 2(0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1) \neq 0$$

ALLORA

$\exists\ \delta, \delta_0$ t.c.

$$\phi : (0-\delta, 0+\delta) \to (1-\delta_0, 1+\delta_0)$$

$$x_1^2 + \phi^2(x_1) = 1$$ ϕ È DEFINITA IMPLICITAMENTE DA (I).

$$\phi^2(x_1) = 1 - x_1^2$$

$$\phi(x_1) = \sqrt{1-x_1^2} \qquad x_1 \in [-\delta, \delta]$$

$$\phi'(x_1) = -\frac{2x_1}{2\phi(x_1)} = -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

A CONFERMA DELL' ULTIMO PUNTO DEL TEOREMA DI DINI.

· COME RICAVO LA <u>FORMULA DI DERIVAZIONE</u>?

$$f(x_1, \phi(x_1)) = 0$$

DERIVANDO RISPETTO A x_1 (<u>TOTALMENTE</u>),

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \phi(x_1)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \phi(x_1)) \cdot \phi'(x_1) = 0$$

$$\phi'(x_1) = -\frac{f_{x_1}(x_1, \phi(x_1))}{f_{x_2}(x_1, \phi(x_1))}$$

(SE NELL' INTORNO $f = 0$, A MAGGIOR RAGIONE LO È LA SUA DERIVATA)

DERIVANDO ANCORA,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, \phi(x_1)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, \phi(x_1)) \cdot \phi'(x_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, \phi(x_1)) \cdot \phi'(x_1) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, \phi(x_1)) |\phi'(x_1)|^2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \phi(x_1)) \cdot \phi''(x_1) = 0$$

SOSTITUENDO NELLA PRECEDENTE PER $\phi'(x_1)$ E RIARRANGIANDO,

$$\phi''(x_1) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \phi(x_1))\right]^3}$$

COME SI OTTIENE ANCHE DERIVANDO L'ESPRESSIONE PER $\phi'(x_1)$.

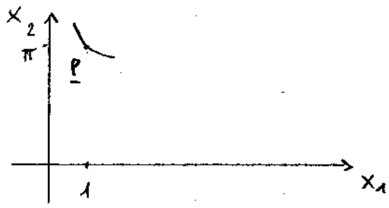
· ESERCIZIO

$f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1 x_2 + \pi$

$\underline{P}(1, \pi) \qquad f(\underline{P}) = 0$

$\nabla f = (-x_2, \cos x_2 - x_1)$

$\nabla f(1, \pi) = (-\pi, -2)$



POSSO APPLICARE IL TEOREMA DI DINI:

$x_2 = \phi(x_1)$

$\exists\ \phi \in C^1(1-\delta, 1+\delta) \quad \delta > 0 \quad t.c.$

$f(x_1, \phi(x_1)) = 0 \quad \forall x_1 \in (1-\delta, 1+\delta)$

SO CHE

$\phi(1) = \pi$

$$\phi'(x) = -\frac{f_{x_1}(x_1, \phi(x_1))}{f_{x_2}(x_1, \phi(x_1))}$$

$$\phi'(1) = -\frac{-\pi}{-2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi''(x) = -\frac{[f_{x_1x_1} + f_{x_1x_2}\phi']f_{x_2} - f_{x_1}[f_{x_2x_1} + f_{x_2x_2}\phi']}{(f_{x_2})^2}$$

$$= -\frac{[f_{x_1x_2} + f_{x_1x_2}(-f_{x_1}/f_{x_2})]f_{x_2} - f_{x_1}[f_{x_2x_1} + f_{x_2x_2}(-f_{x_1}/f_{x_2})]}{(f_{x_2})^2}$$

$$\phi''(x_1) = - \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\,\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^3}$$

SCRIVIAMO LA MATRICE HESSIANA:

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO

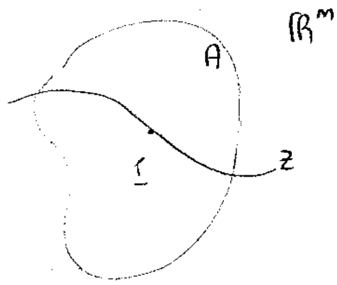
$$\phi''(1) = - \frac{-2(-1)\cdot(-\pi)(-2)}{(-2)^3} = \frac{\pi}{2}$$

NON SO ESPRIMERE ESPLICITAMENTE ϕ, MA POSSO SCRIVERE

$$x_2 = \phi(x_1) = \pi - \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

CHE DEFINISCE LA PARABOLA CON CUI APPROSSIMO ϕ IN UN INTORNO DI $\underline{p}$.

- TEOREMA DI DINI IN PIÙ VARIABILI



$f: A \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO

$z = \{ f(\underline{x}) = 0 \}$

$\underline{p} \in z \cap A$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{p}) \neq 0$$

SE È VERA QUEST'ULTIMA CONDIZIONE, ALLORA

$x_k = \phi(\tilde{\underline{x}})$ CON $\tilde{\underline{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$

$\phi \in C^1\left(B(\tilde{\underline{p}}, \delta), \mathbb{R}\right)$

$f(\tilde{\underline{x}}, \phi(\tilde{\underline{x}})) = 0 \quad \forall \tilde{\underline{x}} \in B(\tilde{\underline{p}}, \delta) \qquad \left(f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \phi(\tilde{\underline{x}}), x_{k+1}, \ldots, x_m) \right)$

$\phi(\tilde{\underline{x}})$ VIVE IN $\mathbb{R}^{m-1}$

$z \subseteq \mathbb{R}^m$

HO CHE, POICHE' $f(x_1, \dots, x_{k-1}, \phi(\tilde{x}), \dots) = 0$,

$$\tilde{x} \to (\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) \xrightarrow{f}$$

IN REALTA' E' COMPOSTA!

$$\frac{d}{dx_j}\left(f(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) \right) = 0 \qquad \text{(DERIVATA TOTALE)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0 \qquad \forall j \neq k$$

ALLORA

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\tilde{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))}{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))}$$

· <u>ESEMPIO</u>

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_2^4 + x_3^2 + \sin x_3$$

$$g(\underline{0}) = 0, \quad \underline{0} \in Z \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\nabla g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 8x_2 + 8x_2^3, 2x_3 + \cos x_3)$$

$$\nabla g(\underline{0}) = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow x_3 = \psi(x_1, x_2) \in C^1(\underset{\mathbb{R}^2}{B(\underline{0}, \delta)})$$

$$\psi(0,0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right|_{\underline{0}} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right|_{\underline{0}} = -\frac{0}{1} = 0$$

L'ORIGINE COME PUNTO DI $\mathbb{R}^2$ E' PUNTO CRITICO DI ψ.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))}{\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))} \qquad j = 1, 2.$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial g}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x_3} \right)^2}$$

CERCHIAMO L'HESSIANO.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 8(1+3x_2^2) \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} = 2 - \sin x_3$$

CALCOLIAMO

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = - \frac{(g_{x_1x_2} + g_{x_1x_3}\psi_{x_2})g_{x_3} - g_{x_1}(g_{x_3x_2} + g_{x_3x_3}\psi_{x_2})}{(g_{x_3})^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = - \frac{(g_{x_2x_2} + g_{x_2x_3}\psi_{x_2})g_{x_3} - g_{x_2}(g_{x_3x_2} + g_{x_3x_3}\psi_{x_2})}{(g_{x_3})^2}$$

CALCOLO L'HESSIANO NEL PUNTO:

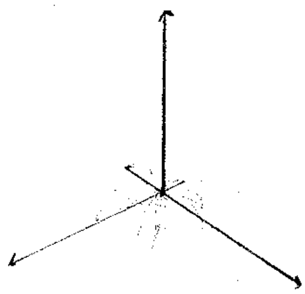
$$g_{x_2x_2}\Big|_{\underline{0}} = 8 \qquad g_{x_3x_3}\Big|_{\underline{0}} = 2$$

SOSTITUISCO E TROVO

$$\psi_{x_1x_1} = -2$$
$$\psi_{x_1x_2} = 0$$
$$\psi_{x_2x_2} = -8$$

LA MATRICE CHE NE RICAVO È GIÀ DIAGONALE: $\underline{0}$ È PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER ψ.

SI È VISTO CHE



$$x_3 = \psi(x_1, x_2) = \psi(0,0) + \nabla\psi(0,0)\cdot(x_1,x_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(H_\psi(0,0)(x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2)\right) + o(x_1^2+x_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

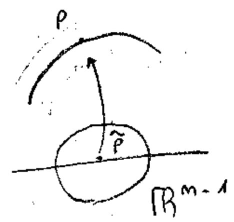
$$= -x_1^2 - 4x_2^2$$

· GIUSTIFICAZIONE TEOREMA MOLTIPLICATORI

$$g(\underline{x}) = 0$$

$$\nabla g(\underline{p}) \neq 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_m}(\underline{p}) \neq 0$$



$$Z = \{g(\underline{x}) = 0\} \text{ "=" } \Gamma_\phi \{(x_1, \ldots, x_{m-1}, \phi(\tilde{\underline{x}}))\}$$

$$\hookrightarrow \tilde{\underline{x}} = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathcal{B}(\tilde{\underline{p}}, \delta)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\underline{p}} + t\underline{v} \qquad \underline{v} \in \mathbb{R}^{m-1}$$

$$(\tilde{\underline{x}}(t), \phi(\tilde{\underline{x}}(t))) \in Z \qquad \forall |t| < \delta$$

(LO SI RIVEDE DOPO IN MODO PIÙ APPROFONDITO)

· ESEMPIO

$d^2(\underline{x}, \underline{p})$ (DISTANZA AL QUADRATO: LA VOGLIO MINIMIZZARE)

$\underline{p}\ (2, 1, -1)$

$\underline{x} \in \{x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3+1)^2 - \lambda(x_1 + x_2 - x_3 - 1)$$

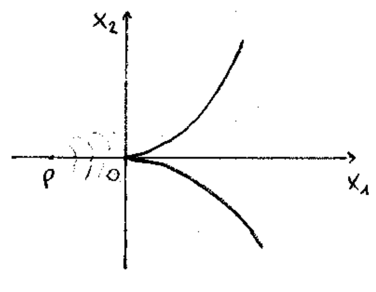
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = 2(x_1-2) - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} = 2(x_2-1) - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_{x_3} = 2(x_3+1) + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} = x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\lambda + 2 \\ x_2 = \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2}\lambda - 1 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\lambda + 2 + 1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases} \text{ MINIMO.}$$

· ESEMPIO

$d^2(\underline{x}, \underline{p})$

$\underline{p}\ (-1, 0)$

$\underline{x} \in M = \{x_2^2 - x_1^3 = 0\}$



$$x_1^3 = x_2^2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 > 0 \\ x_2 = \sqrt{x_1^3} \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 < 0 \\ x_2 = -\sqrt{x_1^3} \end{cases}$$

(DEVE ESSERE $x_1 > 0$)

COME LA PARAMETRIZZO?

$$\begin{cases} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = t^{2/3} \end{cases}$$

$$x_2'(t) = 1$$
$$x_1'(t) = \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}$$

L'ORIGINE È PROBLEMATICA (CUSPIDE), MA È CHIARO CHE IL MINIMO (CHE ESISTE, PERCHÈ LA FUNZIONE È COERCITIVA E IL VINCOLO È UN INSIEME CHIUSO) SARÀ PROPRIO LÌ.

SCRIVO LA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_2^2 + (x_1+1)^2 - \lambda(x_2^2 - x_1^3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = 2(x_1+1) + 3\lambda x_1^2 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_3} = x_2^2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \qquad 2x_2(1-\lambda) = 0 \begin{cases} \cancel{x_2 = 0} \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-6}}{3}$$

IL PROBLEMA NON È RISOLUBILE COL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE. INFATTI,

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3$$
$$\nabla f(x_1, x_2) = (-3x_1^2, 2x_2)$$ CHE È NULLO IN $\underline{0}$.

POSSO AGIRE COSÌ:

$$M = \{x_1^3 = x_2^2\} = \{(t^{2/3}, t) \; t \in \mathbb{R}\}$$

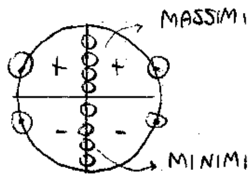
$$\phi(t) = d(\underline{x}(t), P) = (t^{2/3}+1)^2 + t^2 = t^2 + t^{4/3} + 2t^{2/3} + 1$$
$$\phi'(t) = 2t + \frac{4}{3} t^{1/3} + \frac{4}{3} t^{-1/3}$$

IN $t=0$ HO UN PROBABILE CANDIDATO PER UN PUNTO CRITICO.

$$\phi'(t) = \frac{6t^{4/3} + 4t^{2/3} + 4}{3t^{1/2}} = 0 \Rightarrow 6s^2 + 4s + 4 = 0 \quad \text{CON } \Delta < 0.$$

NON HO PUNTI STAZIONARI MA IL MINIMO ESISTE, QUINDI È QUELLO IN $t=0$.

· ESERCIZIO



$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$

$D = \{ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$

$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 x_2 , x_1^2) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (0,t) \quad t \in [-1,1]$

NON ESSENDO PUNTI ISOLATI, L'HESSIANO SARÀ SEMIDEFINITO. INFATTI

$$H_f(0,t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ORIGINE È PUNTO DI SELLA.

CERCO PUNTI CRITICI LUNGO IL BORDO:

$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = 2x_1x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} = x_1^2 - 2\lambda x_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad x_2 = \lambda \quad \text{(HO GIÀ STUDIATO } x_1 = 0\text{)}$$

$$\begin{cases} x_1^2 = 2\lambda^2 \\ x_1^2 + \lambda^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{2}\,|\lambda| = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = x_2 \end{cases}$$

MASSIMI ASSOLUTI: $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$

MINIMI ASSOLUTI: $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}} \right)$

SE SI FOSSE PARAMETRIZZATO,

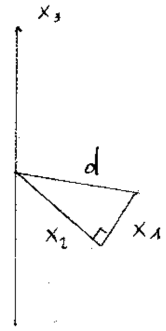
$\varphi(t) = \cos^2 t \sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\varphi'(t) = \ldots + \cos t \left[\cos^2 t - 2\sin^2 t\right]$ PIÙ COMPLICATO.

· ESERCIZIO

$$M = \{ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad x_3 > 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$



CERCO MINIMI E MASSIMI. MI ASPETTO CHE SIA INFERIORMENTE LIMITATA:

$$x_1^2 + x_2^2 = (1 + x_3^2) > 0$$

APPLICO

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2, x_3)$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - \lambda (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = 2x_1 - 2\lambda x_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_3} = 2\lambda x_3 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1(1-\lambda) = 0 \quad (2) \\ 2x_2(1-\lambda) = 0 \\ 2\lambda x_3 = 0 \quad (1) \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2 \end{cases}$$

(2): $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm 1, \ \lambda = 1$; $\lambda = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$

(1): $\cancel{\lambda = 0} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 1 + x_3^2 = 0$; $x_3 = 0$

PERCIÒ HO OTTENUTO

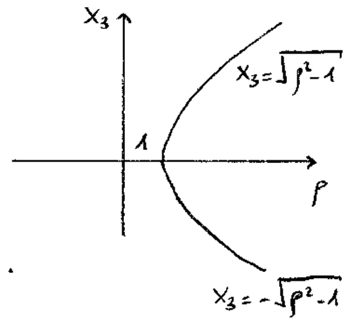
$$\lambda = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

CAMBIO DI VARIABILI E PASSO IN CILINDRICHE:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \\ x_2 = \rho \sin\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

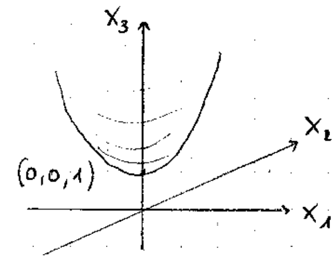
$$M = \{ \rho^2 = 1 + x_3^2 \}$$

$$f(\rho, \theta, x_3) = \rho^2$$



f SI OTTIENE RUOTANDO IL GRAFICO $\rho - x_3$ ATTORNO ALL'ASSE x_3. QUANDO $\rho^2 = 1$ HO DEI PUNTI DI MINIMO.

- TEOREMA DI DINI PER GIUSTIFICARE LAGRANGE



$$M = \{x_3 = 1 + x_1^2 + x_2^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3$$

SCRIVIAMO

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_3 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + 1 - x_3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = -2\lambda x_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} = -2\lambda x_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_3} = 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = x_1^2 + x_2^2 + 1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

SI AVEVA

$$M = \{g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 + 1 = 0\}$$

SE

$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ CURVA REGOLARE $\in M$

$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0,0,1) = V$

$f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\Big|_{t=0} \leq f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ INFATTI IN $t=0$ f HA UN MINIMO

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{(TEOREMA DI FERMAT)}$$

$$\| $$

$$\nabla f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))\Big|_{t=0}$$

IL SOSTEGNO DELLA CURVA SODDISFA IL VINCOLO, PERCIÒ

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) - x_3(t) + 1 = 0 \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

DERIVANDO,

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) + x_2^2(t) - x_3(t) + 1\right) = 0$$

$$\|$$

$$2x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) - x_3'(t) = 0$$

$$(2x_1(t), 2x_2(t), -1) \cdot (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)) = 0$$

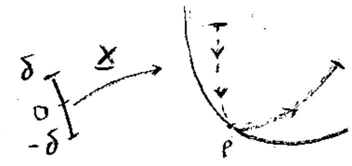
$$\nabla g(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \underline{x}'(t) = 0$$

HO SCOPERTO CHE

$$\nabla g(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) = 0 \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta)$$

IN PARTICOLARE È VALIDA PER $t = 0$.

E



$$\nabla f(\underline{x}(0)) \cdot \underline{x}'(0) = 0$$

$$(0,0,1) \cdot (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))\Big|_{t=0} = 0$$

IL TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE AFFERMA ALLORA CHE

$$\nabla f(\underline{p}) = \lambda \nabla g(\underline{p})$$

COME SI GIUSTIFICA

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(\underline{x}(0)) \cdot \underline{x}'(0) = 0 \\ \nabla g(\underline{x}(0)) \cdot \underline{x}'(0) = 0 \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \nabla f(\underline{p}) = \lambda \nabla g(\underline{p})$$

PER DINI, POICHÈ

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}(\underline{p}) \neq 0$$

$P(0,0,1)$

$\nabla g(\underline{p}) = (0,0,-1)$

POSSO VEDERE

$$M = \{g = 0\}$$

COME

$$g(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) = 0$$

$$M = \{x_3 = \phi(x_1, x_2)\}$$

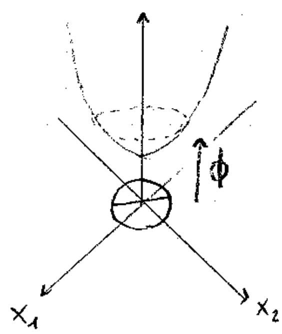
→ LA SUPERFICIE È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE ϕ

(ϕ VIVE IN $\mathbb{R}^{m-1}$, g IN $\mathbb{R}^m$)

SE SOLLEVO

$$x_1 = \alpha t \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \beta t$$



SUL PARABOLOIDE, OTTENGO

$$x_3(t) = \phi(x_1(t), x_2(t)) = \phi(\alpha t, \beta t)$$

HO COSTRUITO LA CURVA

$$x(t) = (\alpha t, \beta t, \phi(\alpha t, \beta t))$$

CALCOLO

$$x'(t) = \left(\alpha, \beta, \nabla\phi(\alpha t, \beta t) \cdot (\alpha, \beta)\right)$$

OSSERVO CHE

$$|\underline{x}'(t)| \neq 0 \quad \text{SE} \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$ (LA CURVA E' REGOLARE)

PER DINI,

$$\nabla\phi(\underline{x}(0)) = \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_3}}, -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_3}} \right)\Bigg|_{\underline{P} = \underline{x}(0)} = (0,0)$$

(VEDI PRIMA, E' UN CASO PARTICOLARE)

$$\underline{x}'(0) = (\alpha, \beta, 0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{VETTORE} \in \langle e_1, e_2 \rangle$$ *

POSSO COSTRUIRE IN QUESTO MODO TUTTO IL PIANO TANGENTE IN $\underline{P}$?
CERTO, MI BASTA SCEGLIERE LE COPPIE $(\alpha, \beta) = (1,0)$ o $(0,1)$ PER GENERARE TUTTO IL PIANO.

ALLORA HO

$$\begin{aligned} \nabla f &\perp \langle e_1, e_2 \rangle \\ \nabla g &\perp \langle e_1, e_2 \rangle \end{aligned} \Rightarrow \nabla f, \nabla g \in \langle e_3 \rangle$$

SPAZIO GENERATO DA e_1, e_2

* NOTA

$$\underline{x}'(0) = (\alpha, \beta, 0)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LA DERIVATA DI UNA CURVA NON E' "LA TANGENTE" ALLA CURVA, SONO I VETTORI DI GIACITURA DEL PIANO TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO.

IN GENERALE,

$$\underline{x}'(0) = (\alpha, \beta, \alpha\phi_x + \beta\phi_y)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \phi_x \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi_y \end{pmatrix}$$

· ESEMPIO

$$\left\{ x_1^3 + x_2^3 - 3a x_1 x_2 = 0 \right\} = F \qquad \text{FOLIUM DI CARTESIO} \qquad (a \neq 0)$$

VOGLIO CAPIRE SE È LIMITATA (SO GIÀ CHE È UN CHIUSO).

PRENDO

$$h(x_1, x_2) = x_1$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 - \lambda\left(x_1^3 + x_2^3 - 3a x_1 x_2\right) \qquad \text{STRUTTURA STANDARD}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = 1 - \lambda(3x_1^2 - 3a x_2) = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} = -\lambda(3x_2^2 - 3a x_1) = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 3a x_1 x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda \cancel{=} 0 \\ x_2^2 = a x_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^3} x_2^6 + x_2^3 - 3a \frac{1}{a} x_2^3 = 0 \ ; \qquad \frac{x_2^3}{a^3}\left[x_2^3 - 2a^3\right] = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 & \Rightarrow \cancel{x_1 \neq 0} \\ x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot a & \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{4}\, a \end{cases}$$

L'UNICO PUNTO CRITICO È $\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{2}\, a \\ x_2 = \sqrt[3]{4}\, a \end{cases}$.

PERCIÒ LA FUNZIONE F NON HA COME IMMAGINE UN COMPATTO.

· ESEMPIO

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_3$$

$$M = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, \ a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \right\} \qquad R > 0, \ (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = x_3 - \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2\right) - \mu\left(a x_1 + b x_2 + c x_3\right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1} = -2\lambda x_1 - a\mu \\ \mathcal{L}_{x_2} = -2\lambda x_2 - b\mu \\ \mathcal{L}_{x_3} = 1 - 2\lambda x_3 - c\mu \\ \mathcal{L}_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 \\ \mathcal{L}_{\mu} = a x_1 + b x_2 + c x_3 \end{cases}$$

① $\lambda = 0$ $\begin{cases} \mu \cancel{=} 0 \\ (a, b) = (0, 0) \Rightarrow c \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{c} \end{cases}$

$x_3 = 0$,

$x_1^2 + x_2^2 = R^2$ TUTTI PUNTI ALLA STESSA QUOTA. (EQUATORE)

② $\lambda \neq 0$

$x_1 = -\dfrac{a\mu}{2\lambda} \qquad x_2 = -\dfrac{b\mu}{2\lambda} \qquad / \ \mu = 0 = x_1 = x_2, \ x_3 = \dfrac{1}{2\lambda}$

$\lambda = \pm \dfrac{1}{2R}, \ c = 0$

SONO IL POLO NORD E IL POLO SUD.

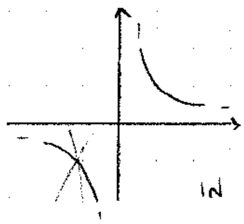
③ INFINE, SE $c \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0$ E ...

ESEMPIO

$f(\underline{x}) = x_1 + \dots + x_m$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^m$

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$



$M = \left\{ \prod_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$ CHE NON È LIMITATO.

CI RESTRINGIAMO AL CASO IN CUI $x_i > 0 \ \forall i$.

GLI IPERPIANI CON $x_i = 0$ NON HANNO INTERSEZIONI CON M.

CON QUESTA SCELTA, M È CHIUSO E f È INFERIORMENTE LIMITATA.

SCRIVO

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} x_i - \lambda \left(\prod_{i=1}^{m} x_i - 1 \right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_i} = 1 - \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x_j = 0 & \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x_j = \dfrac{1}{\lambda} \quad i = 1, \dots, m \\ \mathcal{L}_\lambda = \prod_{i=1}^{m} x_i - 1 = 0 & \Rightarrow \quad x_i = \lambda \ \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

$x_i \neq 0$

PERCIÒ

$\lambda^m = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

PUNTO CRITICO:

$x_0 = (1, \dots, 1)$ ED È L'UNICO. È ALLORA DI MINIMO.

$f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in M$

RICAPITOLIAMO:

$M = \{ \prod x_i = 1 \}$

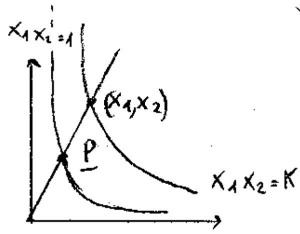
$\underline{x} \in M$, $\underline{x} \notin B(0, R) \Rightarrow \sum x_i^2 \geq R^2$, $\prod x_i = 1$

$x_i = t \Rightarrow \prod_{j \neq i} x_j = \frac{1}{t}$

$x_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2 \geq t^2$

SE $\|\underline{x}\| \to +\infty$, ALLORA $x_i \to +\infty$ PER ALMENO UNA i.

SE $\underline{x} \in B(0,R)$, TUTTE LE x_i SONO LIMITATE. FUORI DALLA PALLA LA FUNZIONE f ASSUME VALORI GRANDI: IL MINIMO NELLA PALLA È MINIMO ASSOLUTO.



$\underline{\rho} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{K}}, \frac{x_2}{\sqrt{K}}\right)$

POICHÈ $f(\underline{x}_0) = m$, ALLORA

$$\forall \underline{x} \in M \qquad x_1 + \ldots + x_m \geq m$$

RISCALO UN GENERICO PUNTO IN $\mathbb{R}^m$ SECONDO

$$\underline{x} \longrightarrow \frac{\underline{x}}{(\Pi_i x_i)^{1/m}} \in M \equiv \underline{\rho}(\underline{x})$$

$$f(\underline{\rho}(\underline{x})) \geq m$$

$$\Rightarrow \sum_i \rho_i(\underline{x}) \geq m \quad \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt[m]{\Pi_i x_i}} + \ldots + \frac{x_m}{\sqrt[m]{\Pi_i x_i}} \geq m$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m} \geq \sqrt[m]{\Pi_i x_i}$$

MEDIA ARITMETICA MEDIA GEOMETRICA

· ESERCIZIO

$$F(x,y,z) = e^{z} + x^2y^2z - e^{xy} + x^4 - y^4$$

$$F_z = e^{z} + x^2y^2 \qquad\qquad F_y = 2x^2yz - xe^{xy} - 4y^3$$

$$F_x = 2xy^2z - ye^{xy} + 4x^3$$

$$F_z(\underline{0}) \neq 0 \underset{\text{DINI}}{\Rightarrow} z = h(x,y) \text{ t.c. } F(x,y,h(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in B(\underline{0},\delta) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$h(0,0) = 0$$

MOSTRA CHE $\underline{0}$ È PUNTO CRITICO PER h.

$$F(x,y,h(x,y)) = 0$$

DERIVO RISPETTO A x,

$$F_x(x,y,h) + F_z(x,y,h)\cdot h_x(x,y) = 0$$

$$h_x(0,0) = -\frac{F_x(0,0,h(0,0))}{F_z(0,0,h(0,0))} = -\frac{F_x(\underline{0})}{F_z(\underline{0})} = 0$$

DERIVO RISPETTO A y,

$$F_y(x,y,h) + F_z(x,y,h)\cdot h_y(x,y) = 0$$

(POSSO VEDERLO COME FUNZIONE COMPOSTA,

$$\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(x,y)}} \xrightarrow[g]{} \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{(x,y,h(x,y))}} \qquad J_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_x & h_y \end{pmatrix} \qquad F\circ g \to (F_x\ F_y\ F_z)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_x & h_y \end{pmatrix}\ )$$

$$h_y(0,0) = -\frac{F_x(\underline{0})}{F_y(\underline{0})} = 0$$

CERCO L'HESSIANO:

$$F_{xx} + F_{xz}h_z + F_{zx}h_x + F_{zz}(h_x)^2 + F_z h_{xx} = 0$$

$$F_{xx}(\underline{0}) = 0, \quad F_{xy}(\underline{0}) = -1, \quad F_{yy}(\underline{0}) = 0, \quad F_{yz}(\underline{0}) = 0, \quad F_{zz}(\underline{0}) = 1,$$

$$F_{xz}(\underline{0}) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

DERIVO RISPETTO A Y,

$$F_{xy} + F_{xz} h_y + F_{zy} h_x + F_{zz} h_x h_y + F_z h_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

(LA FUNZIONE IMPLICITA HA LA STESSA REGOLARITÀ DI F, DA CUI L'HO RICAVATA, E $F \in C^\infty$).

DERIVO RISPETTO A Y (DUE VOLTE),

$$F_{yy} + F_{yz} h_y + F_{zy} h_y + F_{zz} h_y^2 + F_z h_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

PERCIÒ

$$H_h \Big|_{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{L'ORIGINE È UN PUNTO DI SELLA.}$$

RICAPITOLINO: PUNTI STAZIONARI VINCOLATI.

SI È VISTO CHE MINIMI E MASSIMI DI UNA FUNZIONE f POSSONO CADERE
- NEI PUNTI INTERNI DI NON DERIVABILITÀ
- NEI PUNTI STAZIONARI (LIBERI)
- SULLA FRONTIERA DELL'APERTO A DI DEFINIZIONE DI f.

SUPPONIAMO CHE LA FRONTIERA DI A, ∂A, SIA IL SOSTEGNO DI UNA CURVA REGOLARE A TRATTI (COMPOSTA DA UN NUMERO FINITO DI CURVE REGOLARI).

POSSO INDIVIDUARE TALE SOSTEGNO (DI UNA CURVA IN $\mathbb{R}^2$, DI UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$...) COME L'INTERSEZIONE TRA IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE CON INSIEME DI DEFINIZIONE IN $\mathbb{R}^m$ (LA SUA TERZA COORDINATA È IN $\mathbb{R}^{m+1}$) E UN IPERPIANO (DI DIMENSIONE m, MA CHE IMMAGINO RAPPRESENTATO IN $\mathbb{R}^{m+1}$); VIVE QUINDI IN $\mathbb{R}^m$.

AD ESEMPIO, CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

PRENDIAMO L'INSIEME

$$\{g(x,y) = 0\} \equiv \mathcal{G}$$

CHE POSSO IMMAGINARE COME L'INTERSEZIONE TRA IL GRAFICO

$$z = g(x,y)$$

E IL PIANO

$$z = 0 .$$

È IMPORTANTE NOTARE CHE ALLA FINE DELLA FIERA IL VINCOLO (E QUINDI IL SOSTEGNO DELLA CURVA REGOLARE DI CUI ORA PARLIAMO) VIVE NELL'INSIEME DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE f ($\mathcal{G} \subseteq A$).

SIA $\mathcal{G}$ IL SOSTEGNO DELLA CURVA

$$\underline{x}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

IL PROBLEMA SI TRADUCE NEL CERCARE MASSIMI E MINIMI DELLA RESTRIZIONE DI f A $\mathcal{G}$.

OVVERO

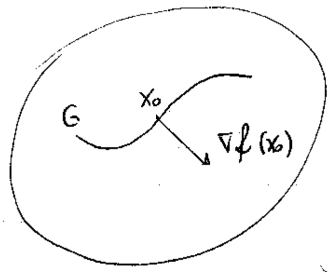
$$f|_{\mathcal{G}}$$

MA DATO CHE LA CURVA $\underline{x}(t)$ DESCRIVE $\mathcal{G}$ AL VARIARE DI t IN $[a,b]$, IL PROBLEMA È ANALOGO A CERCARE I PUNTI STAZIONARI DI

$$F(t) = f(x_1(t), x_2(t))$$

PER DEFINIZIONE, QUESTI SI TROVANO NEI PUNTI IN CUI

$$\frac{d}{dt} F(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) = 0$$



OVVERO NEI PUNTI IN CUI IL GRADIENTE DI f È ORTOGONALE ALLA CURVA.

SE ∇f NON FOSSE ORTOGONALE ALLA CURVA, ALLORA ESISTEREBBE UNA SUA COMPONENTE NON NULLA LUNGO LA DIREZIONE DELLA CURVA (TANGENTE). MA QUESTO SIGNIFICA CHE f STA CRESCENDO (DECRESCENDO) LUNGO LA CURVA: NON HO UN MASSIMO (MINIMO).

ORA PER DINI, SOTTO CERTE CONDIZIONI, QUESTA CURVA $\underline{x}(t)$ ESISTE. INFATTI, AMMETTIAMO CHE SIA

$$g_y(\underline{x}_0) \neq 0$$

NEL PUNTO CRITICO $\underline{x}_0$. IL TEOREMA DI DINI CI DICE CHE IN TUTTO UN INTORNO DI $\underline{x}_0$ È DEFINITA IMPLICITAMENTE

$$x_2 = \phi(x_1)$$

DALLA RELAZIONE

$$g(x_1, x_2) = 0, \qquad \text{E SI HA} \qquad g(x_1, \phi(x_1)) = 0 \text{ IN TUTTO L'INTORNO.}$$

QUESTO VUOL DIRE CHE POSSO IMMAGINARE L'INSIEME $\mathcal{G}$ COME IL GRAFICO DELLA FUNZIONE COSÌ OTTENUTA. IN PRATICA,

$$\mathcal{G} = \{ g(x_1, x_2) = 0 \} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{G} = \{ x_2 = \phi(x_1) \}$$

CHI È LA CURVA $\underline{x}(t)$? BASTA SCEGLIERE

$$\underline{x}(t) = (t, \phi(t))$$

RESTA DEFINITA

$$G(t) = g(\underline{x}(t))$$

IL VINCOLO $\mathcal{G}$ È DEFINITO COME IL LUOGO DEGLI ZERI DI $g(x,y)$. SI È COSTRUITA LA CURVA $\underline{x}(t)$ IN MODO CHE VALGA

$$G(t) = g(\underline{x}(t)) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

MA ALLORA, IN PARTICOLARE, DERIVO I DUE MEMBRI E OTTENGO

$$G'(t) = \nabla g(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) = 0 \quad \forall t$$

QUESTO VALE IN PARTICOLARE IN t_0 SE $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$. ALLORA HO

$$\nabla g(\underline{x}_0) \cdot \underline{x}'(t_0) = 0$$

$$\nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{x}'(t_0) = 0$$

N.B.: RISOLVERE QUESTA SIGNIFICA TROVARE LO SPAZIO ORTOGONALE A $\underline{x}'(t_0)$ IN $\mathbb{R}^2$, OVVERO UNA RETTA.

DA CUI SEGUE CHE I DUE GRADIENTI SONO PROPORZIONALI,

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{IN } \underline{x}_0 .$$

SI NOTI CHE, PERCHÉ CIÒ SIA VERO, DEVE ESISTERE

$$\underline{x}'(t_0) = (1, \phi'(t_0)) = \left(1, -\frac{g_x(t_0, \phi(t_0))}{g_y(t_0, \phi(t_0))}\right)$$

A SALVARCI È SOLTANTO L'IPOTESI INIZIALMENTE FATTA PER CUI

$$g_y(\underline{x}_0) \neq 0 .$$

RIPETIAMO IL RAGIONAMENTO FATTO IN $\mathbb{R}^3$. STAVOLTA HO UNA

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

E UN VINCOLO

$$\mathcal{G} = \{ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \} \quad <=> \quad \mathcal{G} = \{ x_3 = \phi(x_1, x_2) \}$$

QUEST'ULTIMO IN FORZA DEL TEOREMA DI DINI, AVENDO SUPPOSTO

$$g_z(\underline{x}_0) \neq 0 .$$

IN PRATICA STO ASSIMILANDO IL SOSTEGNO DI UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$ AL GRAFICO DELLA FUNZIONE DI DUE VARIABILI

$$x_3 = \phi(x_1, x_2) .$$

UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$ È UNA FUNZIONE

$$\underline{x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\underline{x} = (x_1(\alpha,\beta), x_2(\alpha,\beta), x_3(\alpha,\beta))$$

AD OGNI PUNTO DEL PIANO $\alpha\beta$ ASSOCIO UN'ORDINATA. RESTA DEFINITA

$$F(\alpha,\beta) = f(x_1(\alpha,\beta), x_2(\alpha,\beta), x_3(\alpha,\beta)) = f(\underline{x}(\alpha,\beta))$$

CHE HA PUNTI STAZIONARI DOVE SI ANNULLA

$$J_F = J_f \cdot J_{\underline{x}} = \nabla f \cdot J_{\underline{x}} = (f_x \; f_y \; f_z) \begin{pmatrix} \partial_\alpha x_1 & \partial_\beta x_1 \\ \partial_\alpha x_2 & \partial_\beta x_2 \\ \partial_\alpha x_3 & \partial_\beta x_3 \end{pmatrix} \equiv 0$$

$$\begin{pmatrix} \partial_\alpha x_1 & \partial_\beta x_1 \\ \partial_\alpha x_2 & \partial_\beta x_2 \\ \partial_\alpha x_3 & \partial_\beta x_3 \end{pmatrix} = (\underline{x}_\alpha \,,\; \underline{x}_\beta)$$

VETTORI DI GIACITURA DEL PIANO TANGENTE (LA MATRICE HA RANGO 2).

QUESTO EQUIVALE A RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} (f_x \; f_y \; f_z) \begin{pmatrix} \partial_\alpha x_1 \\ \partial_\alpha x_2 \\ \partial_\alpha x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ (f_x \; f_y \; f_z) \begin{pmatrix} \partial_\beta x_1 \\ \partial_\beta x_2 \\ \partial_\beta x_3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

PER CIASCUNA DELLE DUE EQUAZIONI STO CERCANDO IL SOTTOSPAZIO ORTOGONALE A UN VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ (QUELLO DEI ∂_α O ∂_β), CIOÈ UN PIANO. L'INTERSEZIONE TRA DUE PIANI MI DÀ UNA RETTA. SIMILMENTE,

$$J_G = J_g \cdot J_{\underline{x}} = 0 \qquad \text{PER COSTRUZIONE DI } \underline{x}.$$

NE SEGUE CHE RISOLVENDO IL SISTEMA PER g OTTENGO ANCORA UNA RETTA - LA STESSA. ALLORA ∇f E ∇g SONO LINEARMENTE DIPENDENTI.

CHI È, INFINE, "$\underline{x}(t)$"? MI BASTA SCEGLIERE

$$\underline{x}(\alpha,\beta) = (\alpha, \beta, \phi(\alpha,\beta))$$

SI NOTI CHE, NEL PUNTO STAZIONARIO (α_0, β_0),

$$J_{\underline{x}}(\alpha_0,\beta_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{g_x(\alpha_0,\beta_0,\phi(\alpha_0,\beta_0))}{g_z(\alpha_0,\beta_0,\phi(\alpha_0,\beta_0))} & -\dfrac{g_y(\alpha_0,\beta_0,\phi(\alpha_0,\beta_0))}{g_z(\alpha_0,\beta_0,\phi(\alpha_0,\beta_0))} \end{pmatrix}$$

LA CUI ESISTENZA È ASSICURATA DALLA CONDIZIONE

$$g_z(\underline{x}_0) \neq 0 .$$

SI NOTI INFINE CHE $\underline{x}(\alpha,\beta)$ COSÌ DEFINITA È SEMPRE UNA SUPERFICIE REGOLARE.

· ESONERO 1, REMINDERS

· FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

· DIMOSTRARE CHE È ILLIMITATA: BASTA TROVARE UNA DIREZIONE LUNGO CUI f ESPLODE.

· DIMOSTRARE LA COERCITIVITÀ: MINORARE CON $|x^2+y^2|$ OPPURE PASSARE IN POLARI E STUDIARE $\lim_{\rho \to \infty}$.

· MOSTRARE CHE f È DIFFERENZIABILE: TRAMITE DEFINIZIONE. PER VEDERE CHE NON LA È, BASTA CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}$ TRAMITE DEFINIZIONE E TRAMITE $\nabla f \cdot \underline{v}$ E MOSTRARE CHE SONO DIVERSI.

· CONTINUITÀ: STUDIO f LUNGO DIVERSE DIREZIONI, SE FUNZIONA PASSO IN POLARI O VADO DI MAGGIORAZIONI.

· IL JACOBIANO DI UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI È FATTA DAI GRADIENTI DELLE f_i MESSI IN RIGHE.

· LE HESSIANE SEMIDEFINITE VANNO CONTROLLATE, SI STUDIA IL SEGNO DI

$$\phi(\underline{x}) = f(\underline{x}) - f(\underline{A})$$

DOVE $\underline{A}$ È IL PUNTO CRITICO (SHIFT NELL'ORIGINE).

· REGOLA DI CARTESIO: SEGNI ALTERNI, $\lambda_i > 0$; TUTTI POSITIVI, $\lambda_i < 0 \ \forall i$.

· MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

· MOSTRARE L'ILLIMITATEZZA DI UN VINCOLO: SI STUDIA $f(\underline{x}) = x_i$ LUNGO IL VINCOLO (CON DIVERSI x_i SE NECESSARIO).

· USA WEIERSTRASS PER SAPERE A PRIORI SE HO MASSIMI E MINIMI, UTILE ANCHE LA COERCITIVITÀ.

· UNA CURVA DI PUNTI CRITICI HA SEMPRE HESSIANO SEMIDEFINITO.

- TEOREMA DI DINI

- LA PRIMA FORMULA DI DERIVAZIONE SI OTTIENE IMPONENDO

$$\frac{d}{dx_1} f(x_1, \phi(x_1)) = 0 \qquad \text{(CURVA DI PUNTI CRITICI)}$$

- LA DERIVATA SECONDA VALE

$$\phi''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}$$

FUNZIONI IMPLICITE A VALORI VETTORIALI

SUPPONIAMO

$$\begin{cases} G_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \\ \vdots \\ G_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$\underline{G}(\underbrace{\underline{x}, \underline{y}}_{\in \mathbb{R}^{n+m}}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$$

SE È APPLICAZIONE LINEARE (O IN OGNI CASO IN PRIMA APPROSSIMAZIONE),

$$A\underline{x} + B\underline{y} = \underline{0} \qquad \underline{G}(\underline{x}, \underline{y}) = A\underline{x} + B\underline{y}$$

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad J_{G,y} = \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{y}} = B \quad \text{DETTO JACOBIANO.}$$

$$B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$$

VOGLIO ESPLICITARE ORA PER $\underline{y}$:

$$B\underline{y} = -A\underline{x}$$

$$\underline{y} = -B^{-1}A\underline{x} \qquad \text{POSSIBILE SE } \det B \neq 0$$

TEOREMA (DINI)

$$\underline{G} : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^{n+m} \text{ APERTO}}}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\underline{G} \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$$

$$(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in A \ \text{ t.c. } \ \underline{G}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{0}$$

$$\det\left(\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{y}}\right)\Bigg|_{(\underline{x}_0, \underline{y}_0)} \neq 0$$

ALLORA $\exists \delta, \sigma > 0$, ϕ t.c.

① $\underline{y}_0 = \underline{\phi}(\underline{x}_0)$

② $\underline{\phi} \in C^1[B(\underline{x}_0, \delta) \times B(\underline{y}_0, \sigma)]$

③ $\underline{G}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0} \quad \forall (\underline{x}, \underline{y}) \in B(\underline{x}_0, \delta) \times B(\underline{y}_0, \sigma)$

SSE $\underline{y} = \underline{\phi}(\underline{x})$

④ $J_{\underline{\phi}(\underline{x})} = -\left(\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{y}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{x}}\Bigg|_{(\underline{x}, \underline{\phi}(\underline{x}))}$

$\forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$

· ESEMPIO

$$\begin{cases} (x_1+x_2)^2 + y_1^2 x_2 + 2y_2 - 6 = 0 & \equiv \quad G_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 y_2 - 2x_1 x_2 - 3 = 0 & \equiv \quad G_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 x_2 & 2 \\ 2y_1 y_2 & y_1^2 \end{pmatrix} \equiv J$$

$$\det(J) = 2y_1^3 x_2 - 4y_1 y_2$$
$$= 2y_1(y_1^2 x_2 - 2y_2)$$

CONSIDERO IL PUNTO

$$P(0,1,1,2)$$

IN CUI

$$J|_P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(J)\big|_P = -6 \neq 0$$

PER DINI,

$$\exists\ \underline{\phi}(x_1, x_2) = (\phi_1(x_1,x_2), \phi_2(x_1,x_2)) \quad \text{t.c.} \quad (y_1, y_2) = \underline{\phi}(x_1, x_2)$$

IN PARTICOLARE,

$$(1,2) = \underline{\phi}(0,1)$$

CALCOLIAMO IL JACOBIANO DI ϕ:

$$J_\phi = -\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)$$

CERCHIAMO

$$\left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(P)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

MINORI/ DETERMINANTE E ALLA FINE TRASPONGO.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) & 2(x_1+x_2)+y_1^2 \\ 2(x_1+x_2)-2x_2 & -2(x_1-x_2)-2x_1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Big|_{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

PERCIÒ

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

POSSO ORA SCRIVERE, SVILUPPANDO ATTORNO A $(x_1, x_2) = (0, 1)$,

$$\left(\phi_1(x_1,x_2), \phi_2(x_1,x_2)\right) = (1, 2) + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + o\left(\left(x_1^2 + (x_2-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

TORNANDO A NOI,

$$\underline{G}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$$

$(\underline{x}, \underline{y})$ VICINI A $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ IN CUI $G = 0$

$$G(x,y) - \underset{\underline{0}}{\underset{\parallel}{G(x_0, y_0)}} = J_G \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - x_0 \end{pmatrix} + o(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

ALLORA SE VOGLIO IL LUOGO DEGLI ZERI $G(x,y) = 0$, TRASCURO L'O PICCOLO E VALE

$$y = y_0 - \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x - x_0)$$

INFATTI

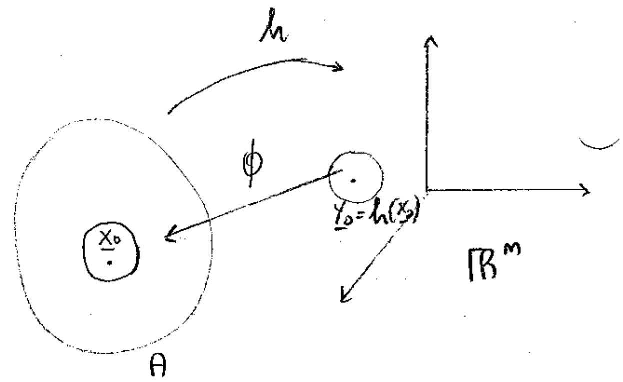
$$J_G \equiv 0 = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(y - y_0)$$

$$G(\underline{x}, \underline{y}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1} G(x,y) = 0$$

$$\underbrace{\underline{y} - \left(\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{y}}\right)^{-1} \underline{G}(\underline{x}, \underline{y})}_{T(\underline{y})} = \underline{y}$$

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE



$h : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$h \in C^1(A)$, $\underline{x}_0 \in A$

$\underline{y}_0 = h(\underline{x}_0)$

$\det(J_h(\underline{x}_0)) \neq 0$

ALLORA

$$\exists \delta, \sigma > 0, \quad \phi : B(\underline{y}_0, \delta) \to B(\underline{x}_0, \sigma) \quad \text{t.c.}$$

1. $\underline{\phi}(B(\underline{y}_0, \delta)) = B(\underline{x}_0, \sigma) \qquad \phi \in C^1$

2. $\underline{\phi}(\underline{h}(\underline{x})) = \underline{x} \qquad \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$

   $\underline{h}(\underline{\phi}(\underline{y})) = \underline{y} \qquad \forall \underline{y} \in B(\underline{y}_0, \sigma)$

ESEMPIO: COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\vartheta = h_1(\rho, \vartheta) \\ x_2 = \rho \sin\vartheta = h_2(\rho, \vartheta) \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = \underline{h}(\rho, \vartheta)$$

$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} & \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\det(J_h) = \rho \neq 0 \qquad$ SSE $\rho > 0$.

È QUINDI UN CAMBIO DI COORDINATE CHE POSSO SEMPRE USARE (LOCALMENTE).*

DIFFEOMORFISMO:

INVERTIBILE, CON SIA LEI CHE L'INVERSA DIFFERENZIABILI.

* PER POTERLO DIRE GLOBALMENTE HO BISOGNO DI IPOTESI PIÙ FORTI DI BIUNIVOCITÀ E UNIFORMITÀ.

ESEMPIO

$$\{ g(x_1, x_2, x_3) = c \} = M$$
$$\{ h(x_1, x_2, x_3) = k \} = N$$

$$g, h \in C^1(\mathbb{R}^3)$$
$$P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in (M \cap N) \qquad \underline{G}(P) = \underline{0}$$

SIA

$$\underline{G}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ h(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

SCRIVIAMO

$$J_{\underline{G}} = \left(\begin{array}{c|cc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{array} \right) \longrightarrow \frac{\partial(g, h)}{\partial(x_2, x_3)}$$

SE

$$\det \left(\frac{\partial(g, h)}{\partial(x_2, x_3)} \right) \neq 0$$

ALLORA

$$\exists\, \delta, \sigma > 0 \quad \underline{\phi} : \underbrace{(\bar{x}_1 - \delta, \bar{x}_1 + \delta)}_{= B(\bar{x}_1, \delta) \subseteq \mathbb{R}}^{I} \longrightarrow \overbrace{B((\bar{x}_2, \bar{x}_3), \sigma)}^{L}, \quad \phi \in C^1$$

$$\underline{G}(x_1, x_2, x_3) = \underline{0} \quad \text{SSE} \quad (x_2, x_3) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1)) \qquad (x_1, x_2, x_3) \in I \times L$$

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = X(t)$$
$$= (t, \phi_1(t), \phi_2(t))$$

$$X'(t) = (1, \phi_1'(t), \phi_2'(t))$$ CHE NON È MAI NULLO.

LA PARAMETRIZZAZIONE È REGOLARE.

· INTEGRALI IMPROPRI

DEF:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA SI DICE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SSE

$$\inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \overline{S}(f,P) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \overline{S}(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx$$

TRE DIFETTI CHE VORREI ELIMINARE:

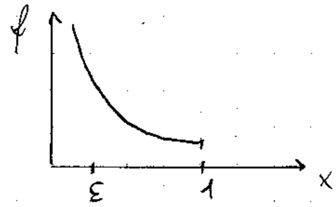
· f LIMITATA

· DEFINITA SU UN COMPATTO

· OK, DUE DIFETTI.

· ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x \in (0,1]$$



$0 < \varepsilon < 1$

FISSO $\varepsilon > 0$. NOTO CHE

① IN $[\varepsilon, 1]$ $f(x)$ È LIMITATA.

$$\exists \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{1/2}\right]_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon})$$

CALCOLO

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

· DEF

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN

$(a+\varepsilon, b)$ $\forall \varepsilon > 0$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO. ALLORA SE

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

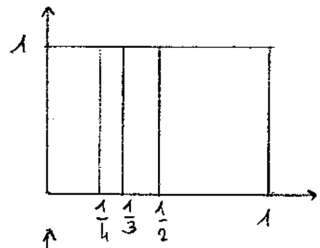
DIREMO CHE f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO (O GENERALIZZATO) IN (a,b),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

· ESEMPIO

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [0,1] \setminus \{ \frac{1}{m}, m \geq 1 \} \\ 0 & x = \frac{1}{m},\ m \geq 1 \end{cases}$$

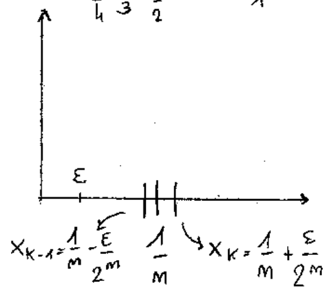


PER OGNI SCELTA DI ε,

$\overline{S} = 1$

$$\underline{S} = 1 \cdot (\underset{\downarrow}{\ }) + 0 \cdot \left[\sum_{m \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{m-1}} + \varepsilon \right]$$

LUNGHEZZA DI TUTTI GLI ALTRI INTERVALLI $\Rightarrow 1 - \sum_{m \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{m-1}} - \varepsilon$



$$x_K - x_{K-1} = \frac{2\varepsilon}{2^m} = \frac{\varepsilon}{2^{m-1}}$$

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{m-1}} = \varepsilon \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 2\varepsilon$$

PERCIÒ AVREI

$\underline{S} = 1 \cdot (1 - 3\varepsilon)$

IN REALTÀ HO MANDATO LA SERIE A $+\infty$ MA AVREI DOVUTO TRONCARLA PRIMA. IN GENERALE, VALE

$\underline{S} \geq 1 - 3\varepsilon$

E AL LIMITE PER $\varepsilon \to 0$ LE DUE SOMME COINCIDONO.

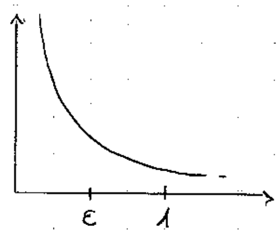
· ESEMPIO - INTEGRALE CAMPIONE x^α IN $(0,1]$

$$f(x) = x^\alpha, \quad x \in (0,1], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

SE $\alpha \geq 0$, f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN.

SE $\alpha < 0$,

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_\varepsilon^1 & \alpha < 0, \neq -1 \\ \left[\ln(|x|) \right]_\varepsilon^1 & \alpha = -1 \end{cases}$$



SE $\alpha \neq -1$,

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - \varepsilon^{\alpha+1}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha} > 0 & \text{SE } \alpha+1 > 0, \ \alpha > -1 \\ +\infty & \text{SE } \alpha+1 < 0, \ \alpha < -1 \end{cases}$$

SE $\alpha = -1$,

$$I_\varepsilon = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\ln(1)}} - \ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} +\infty$$

PERCIÒ $f(x)$ È SEMPRE INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO. SI HA

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} & \text{SE } \alpha > -1 \\ +\infty & \text{SE } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

· DEF.

$f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN (a, M) $\forall M > a$. ALLORA

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

· ESEMPIO - INTEGRALE CAMPIONE x^α IN $[1,+\infty)$

$f(x) = x^\alpha$, $x \in [1,+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^M f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]_1^M & \alpha \neq -1 \\ \left[\ln(x)\right]_1^M & \alpha = -1 \end{cases}$$

SE $\alpha = -1$,

$$\lim_{M\to+\infty} \left[\ln(x)\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} \ln(M) = +\infty$$

SE $\alpha \neq -1$,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{\alpha+1}\left[M^{\alpha+1}-1\right] = \begin{cases} +\infty & \alpha+1>0,\ \alpha>-1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha+1<0,\ \alpha<-1 \end{cases}$$

IN GENERALE,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{SE } \alpha \geq -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \text{SE } \alpha < -1 \end{cases}$$

· ESEMPIO

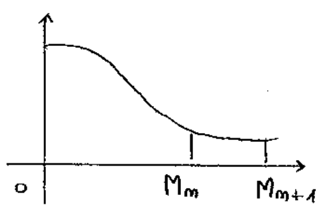
$f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. SU $[-M,M]$ e^{-x^2} INTEGRABILE SECONDO R.

$$\int_{-M}^{M} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^M e^{-x^2}\,dx$$

COSTRUISCO

$\{M_m\}$ $M_m \to +\infty$, CON $\{M_m\}$ CRESCENTE E

$$2\int_0^{M_m} e^{-x^2}\,dx = a_m$$



M_m È CRESCENTE, QUINDI $\{a_m\}$ È MONOTONA,

$a_{m+1} > a_m$

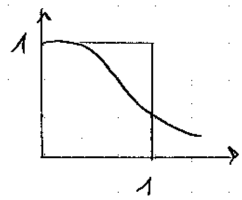
MA ALLORA $\{a_m\}$ È REGOLARE E $\lim_{m\to+\infty} a_m = \sup\{a_m\}$

CONSIDERO

$$0 \le \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^M e^{-x^2} dx \le \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^M x e^{-x^2} dx$$

INFATTI

$$x e^{-x^2} \ge e^{-x^2} \quad \forall x \ge 1$$



CONTINUO A MAGGIORARE CON

$$\le 1 + \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_1^M = 1 - \frac{1}{2} e^{-M^2} + \frac{1}{2} e^{-1} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 1 + \frac{1}{2e}$$

ABBIAMO SCOPERTO CHE

$$\lim_{m \to +\infty} a_m = \sup\{a_m\} \le 1 + \frac{1}{2e}$$

USANDO IL TEOREMA PONTE DIMOSTRO CHE $\phi(M) = \int_0^M e^{-x^2} dx$ NON ESPLODE.

OPPURE, POICHE'

$$\phi(M) < \phi(M+h)$$

USO IL TEOREMA DEI CARABINIERI.

ALTRA POSSIBILE MAGGIORAZIONE:

$$\int_1^M e^{-x^2} dx \le \int_1^M \frac{K}{x^2} dx$$

VERA SE

$$\phi(x) = \frac{K}{x^2} - e^{-x^2} \ge 0 \qquad [1, +\infty)$$

$$\phi(1) = K - \frac{1}{e} > 0$$

$$\phi'(x) = -\frac{K}{x^3} + 2x e^{-x^2} = \frac{2x^4 - K e^{x^2}}{x^3 e^{x^2}} = 0$$

E' FACILE SCEGLIERE K IN MODO CHE $\phi'(x) < 0$ SEMPRE.

- ## TEOREMA DEL CONFRONTO

$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq M$

SE $\lim_{M \to +\infty} \int_a^M g(x)dx = l \in (0, +\infty]$

$\Rightarrow \quad \exists \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq l$

QUESTO VALE ANCHE CON GLI INTEGRALI IMPROPRI IN $(0, a]$ (DI II SPECIE, O SU INTERVALLI LIMITATI). LO STESSO VALE PER I COROLLARI SOTTO.

PER GLI INTEGRALI IMPROPRI DI I SPECIE VALE LA CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA, COME PER LE SERIE. → NON E' SUFFICIENTE!

VALE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

- ## COROLLARIO

SE $\exists \int_a^{+\infty} |f(x)| dx = l \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow \quad \left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$

$-|f| \leq f \leq |f|$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

RESTA DA DIMOSTRARE CHE ESISTA (NON OSCILLI)

- ## COROLLARIO

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (E R-INTEGRABILE IN TUTTI GLI INTERVALLI $[a, M]$)

SE $\exists \alpha > 1$ TALE CHE

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha |f(x)| = 0$ (OVVERO SE $\exists \beta < -1$ t.c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{x^\beta} = 0$)

SI E' MOSTRATO CHE CONVERGE

$\Rightarrow \quad \exists \int_a^{+\infty} f(x)dx = l \in \mathbb{R}$

INFATTI

$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha |f(x)| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) : \ x^\alpha |f(x)| \leq \varepsilon \ \forall x > M$

$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{x^\alpha}$ CHE CONVERGE SE $(-\alpha) < -1$, $\alpha > 1$.

- ALTRO CRITERIO: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ CONVERGE $\iff \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ CONVERGE

f POSITIVA E DECRESCENTE

· ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad , \quad x \geq 1 .$$

VOGLIO STUDIARE

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \left\{ \left[\frac{-\cos(x)}{x} \right]_1^M - \int_1^M (-\cos x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \right\}$$

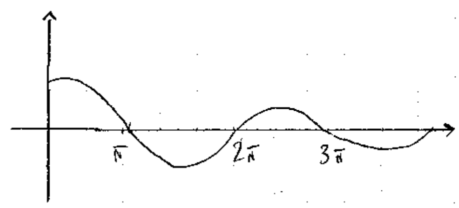
$$= \lim_{M\to+\infty} \left\{ \cos(1) - \underbrace{\frac{\cos(M)}{M}}_{\downarrow\, 0} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\, dx \right\}$$

DOVE SI È INTEGRATO PER PARTI. NOTO

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

PERCIÒ L'INTEGRALE CONVERGE (f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO).
SI OSSERVI CHE

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx = +\infty$$



(IL TEOREMA DI PRIMA NON VALE AL CONTRARIO. SI NOTI CHE IL CASO È ANALOGO A QUELLO DESCRITTO NEL TEOREMA DI LEIBNIZ PER LE SERIE).

STUDIAMO

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{1}{2(k+1)\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi(k+1)}$$

SOMMANDO SU TUTTI I K HO UNA SERIE ARMONICA, CHE DIVERGE.

ESERCIZIO

$$\int_0^1 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

PROBLEMATICO PER $x \to 1$.

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{(x-1)^{-\frac{2}{3}+1}}{1/3}\right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[3\varepsilon^{1/3}+3\right] = 3$$

CHIAMO

$x-1 = s$

E CAMBIO VARIABILI SCRIVENDO

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon} s^{-\frac{2}{3}}\,ds$$ PROBLEMATICA PER $s^\alpha \sim 0$, CON $\alpha = -\frac{2}{3} > -1$.

POTEVO CONCLUDERE SUBITO CHE f FOSSE INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO.

RICAPITOLANDO: CRITERI DI CONVERGENZA

① TEOREMA DEL CONFRONTO

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \int g(x) \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int f(x) \text{ CONVERGE} \\ \int f(x) \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int g(x) \text{ DIVERGE} \end{array}$$

② CONVERGENZA ASSOLUTA

$\int |f(x)|$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\int f(x)$ CONVERGE

③ CONFRONTO ASINTOTICO

a. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f, g HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO

b. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\Rightarrow$ SE $\int_a^b g(x)$ CONVERGE, CONVERGE ANCHE $\int_a^b f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ $\Rightarrow$ SE $\int_a^b g(x)$ DIVERGE, DIVERGE ANCHE $\int_a^b f(x)$

SI NOTI CHE, NELLA b., SAPERE CHE $g(x)$ DIVERGE NON IMPLICA CHE $f(x)$ DIVERGA (INFATTI f STA SOTTO g E FA QUELLO CHE VUOLE). LE STESSE CONDIZIONI VALGONO PER INTEGRALI IN $[a, +\infty)$ E $x \to +\infty$.

④ CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

SE $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ CONVERGE ED ESISTE $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, ALLORA TALE LIMITE È NULLO.

(ALTRIMENTI $\exists M > 0$ t.c. $|x| > x_0 \Rightarrow |f(x)| > M$ E

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{+\infty} f \ge \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{+\infty} M = +\infty \quad)$$

⑤ CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE (CRITERIO DI CAUCHY)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \gamma > 0$ t.c. $|x_1 - x_2| < \gamma \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$

- INTEGRALI CAMPIONE

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \text{SE } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{SE } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{SE } \alpha \leq 1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \text{SE } \alpha > 1 \end{cases}$$

- LIMITE ASINTOTICO

$$f(x) \sim g(x) \text{ PER } x \to a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- TIPS

$\ln(1+t) \leq t$ $\qquad$ $\ln(1+t) \sim t$ PER $t \to 0$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $\qquad$ (INFATTI $(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x + o(x)$,

$(e^x - 1) \sim x$ PER $x \to 0$. $\qquad$ $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$)

- STRATEGIA

INDIVIDUA DOVE SONO I PROBLEMI E SPEZZA L'INTEGRALE IN PIÙ PARTI COSÌ DA METTERLI IN EVIDENZA, QUINDI STUDIA LE PARTI SEPARATAMENTE.

- ALTRI SVILUPPI DI TAYLOR

$\text{ARCTAN}(x) \sim x$ PER $x \to 0$, $\sim \frac{\pi}{2}$ PER $x \to \infty$.

$\text{TAN}(x) \sim x$, $\text{ARCSIN}(x) \sim x$ PER $x \to 0$.

$$\int \frac{1}{(\text{POL I}^\circ)(\text{POL II}^\circ)} = \int \left[\frac{A}{(\text{POL I}^\circ)} + \frac{B(\text{POL II}^\circ)' + C}{(\text{POL II}^\circ)} \right]$$

· CURVE PARAMETRICHE

$\underline{\phi} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

CURVA PARAMETRICA :

$t \to \underline{\phi}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$

$\underline{\phi} \in C^1([a,b], \mathbb{R}^3)$ ALMENO A TRATTI (SI PENSI A UN QUADRATO)

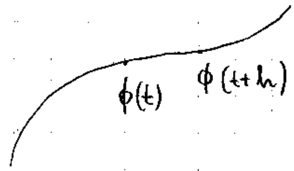
SI DICE SOSTEGNO DI ϕ

$\{ \underline{\phi}(t),\ \forall t \in [a,b] \} = Im(\phi)$

UNA CURVA PARAMETRICA È REGOLARE SE

$\underline{\phi} \in C^1([a,b], \mathbb{R}^3)$

$|\underline{\phi}'(t)| = |\underline{v}(t)| \neq 0 \qquad \forall t \in (a,b)$



$$R_{\underline{\phi}} = \frac{\underline{\phi}(t+h) - \underline{\phi}(t)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \underline{\phi}'(t)$$

DETERMINO UNA RETTA IN $\mathbb{R}^3$ SECONDO (RETTA SECANTE)

$$\begin{cases} x_1(t) = \phi_1(t) + s\cdot(\phi_1(t+h) - \phi_1(t)) \cdot \frac{1}{h} \\ x_2(t) = \phi_2(t) + s\cdot(\phi_2(t+h) - \phi_2(t)) \cdot \frac{1}{h} \\ x_3(t) = \phi_3(t) + s\cdot(\phi_3(t+h) - \phi_3(t)) \cdot \frac{1}{h} \end{cases}$$

($\frac{1}{h}$ È UNA COSTANTE, STO SEMPLICEMENTE RISCALANDO)

SE MANDO h A ZERO IN QUESTA RELAZIONE RITROVO L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE. LA RISCRIVO ALLORA COME

$$\begin{cases} x_1(t) = \phi_1(t) + s\,\phi_1'(t) \\ x_2(t) = \phi_2(t) + s\,\phi_2'(t) \\ x_3(t) = \phi_3(t) + s\,\phi_3'(t) \end{cases}$$

CHE POSSO OTTENERE TRAMITE SVILUPPO DI TAYLOR.

(VEDI P. 233 PER MAGGIOR CHIAREZZA SU QUESTO PUNTO)

· <u>DEF</u>

SIA

$\underline{\phi} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ CURVA PARAMETRICA REGOLARE , $t_0 \in (a,b)$.

COSTRUISCO

$$\underline{T}_{\phi(t_0)} = \underline{T}(t_0) = \frac{\underline{\phi}'(t_0)}{|\underline{\phi}'(t_0)|}$$

CHE È IL VERSORE TANGENTE.

· <u>ESEMPIO</u>

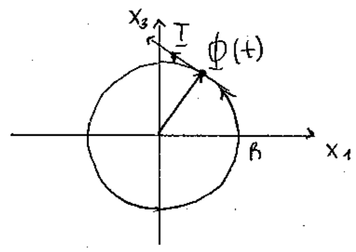
$\underline{\phi}(t) = (R\cos t, 0, R\sin t)$

$R > 0$

$|\underline{\phi}(t)| = R$

$\underline{\phi}'(t) = (-R\sin t, 0, R\cos t)$

$|\underline{\phi}'(t)| = R$ REGOLARE.



IL VERSORE TANGENTE È

$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{\phi}'(t)}{|\underline{\phi}'(t)|} = (-\sin t, 0, \cos t)$$

· <u>ESEMPIO</u>

$\underline{\phi}(t) = (R\cos t, R\sin t, Ht)$ $R, H > 0$ ELICA

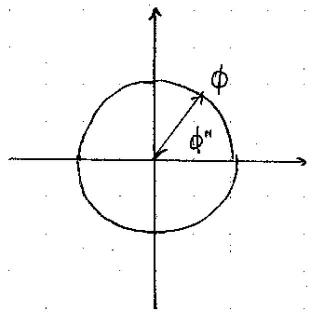
$\underline{\phi}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, H)$ $\underline{\phi}$ È REGOLARE.

$$\underline{T}(t) = \frac{(-R\sin t, R\cos t, H)}{\sqrt{R^2 + H^2}}$$

ESEMPIO 1

$$\underline{\phi}''(t) = \underline{v}'(t) = -R(\cos t, 0, \sin t)$$

$$|\underline{\phi}''| = R$$



SI NOTI CHE

$$\underline{\phi}''(t) = -\underline{\phi}(t)$$

ESEMPIO

$$|\underline{v}(t)| = 1$$

$$\underset{\overset{|||}{0}}{\frac{d}{dt}|v(t)|^2} = \frac{d}{dt}(\underline{v}\cdot\underline{v}) = 2\underline{v}\cdot\underline{v}' = 2\underline{v}\cdot\underline{a}$$

DA CUI

$$\underline{v}\cdot\underline{a} = 0$$

- IN GENERALE

$$|\underline{T}(t)|^2 = 1 \qquad \text{PER DEFINIZIONE DI MODULO DI UN VERSORE}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{T}\cdot\underline{T}) = 2\,\underline{T}\cdot\underline{N}$$

DEF:

SI DICE VERSORE NORMALE A $\underline{\phi}$

$$\underline{N}(t) = \frac{\frac{d}{dt}\underline{T}(t)}{|\underline{T}'(t)|}$$

PER DEFINIZIONE,

$$\underline{v}(t) = |\underline{v}(t)|\cdot\underline{T}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\underline{v}(t) = \underline{a}(t) = \frac{d|\underline{v}(t)|}{dt}\cdot\underline{T} + |\underline{v}(t)|\cdot\frac{d\underline{T}}{dt}$$

COMPONENTE NORMALE

- ESPRESSIONE PER ESTESO DI $\underline{T}$ E $\underline{N}$

$\underline{\phi} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

CURVA PARAMETRICA REGOLARE.

$$\frac{\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}''}{|\underline{\phi}'|}$$
$$\parallel$$

$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{\phi}'(t)}{|\underline{\phi}'(t)|} \qquad |\phi'(t)| = \left((\phi_1')^2 + (\phi_2')^2 + (\phi_3')^2\right) \qquad \frac{d}{dt}|\phi'(t)| = \frac{1}{2}(|\underline{\phi}'|)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,(\phi_1'\phi_1'' + \phi_2'\phi_2'' + \phi_3'\phi_3'')$$

$$\underline{N}(t) = \frac{d}{dt}(\underline{T}(t)) = \frac{\left(\phi_1''|\underline{\phi}'| - \phi_1' \frac{\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}''}{|\underline{\phi}'|},\ \phi_2''|\phi'| - \phi_2' \frac{\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}''}{|\phi'|},\ \phi_3''|\phi'| - \phi_3' \frac{\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}''}{|\underline{\phi}'|}\right)}{|\underline{\phi}'|^2}$$

$$= \frac{\left(\phi_1''|\underline{\phi}'|^2 - \phi_1'(\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}''),\ \phi_2''|\underline{\phi}'|^2 - \phi_2'(\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}''),\ \phi_3''|\underline{\phi}'|^2 - \phi_3'(\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}'')\right)}{|\underline{\phi}'(t)|^3}$$

$$= \frac{1}{|\underline{\phi}'|}\,\underline{\phi}'' - \underline{\phi}' \frac{(\underline{\phi}' \cdot \underline{\phi}'')}{|\underline{\phi}'|^3}$$

- PARAMETRO D'ARCO

SI IMMAGINI DI VOLER RIPARAMETRIZZARE $Im(\underline{\phi})$ CON UN'ALTRA CURVA, IN MODO CHE

$|\underline{\Psi}'(s)| = 1$

S È DETTO PARAMETRO D'ARCO.

$\underline{\phi}(t)$

$t = h(s)$

$h : [0,L] \to [a,b]$

ALLORA

$\underline{\Psi}(s) = \underline{\phi}(h(s))$

$\underline{\Psi}'(s) = \underline{\phi}'(h(s)) \cdot h'(s)$

SI PUÒ COSTRUIRE

$$h'(s) = \frac{\Psi_j'(s)}{\phi_j'(h(s))} \qquad \forall j = 1,\dots,3$$

NOTA: DATA $\underline{\phi}(t)$, $t \in [a,b]$,

$$S(t) = \int_a^t |\underline{\phi}'(\tau)|\,d\tau$$

È L'ASCISSA CURVILINEA. PER IL TFCI,
(ϕ È C^1, S DERIV.)

$$S'(t) = |\underline{\phi}'(t)|$$

ALLORA S È MONOTONA, QUINDI INVERTIBILE:

$$t = t(s) \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\underline{\phi}'(t(s))|}$$

HO OTTENUTO LA PARAMETRIZZAZIONE

$$\underline{\Psi}(s) = \underline{\phi}(t(s)) \qquad s \in [0,L]$$

CON VELOCITÀ RISPETTO A S

$$\frac{d\underline{\Psi}(s)}{ds} = \underline{\phi}'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\underline{\phi}'(t(s))}{|\underline{\phi}'(t(s))|}$$

$$|\underline{\Psi}'(s)| = 1$$

(VEDI P. 241)

INOLTRE

$$\underline{N}(s) = \frac{\Psi''(s)}{|\Psi''(s)|}$$

- DEF:

VERSORE BINORMALE A $\underline{\phi}(t)$

$$\underline{B}(t) = \frac{\underline{T}(t) \wedge \underline{N}(t)}{|\underline{T} \wedge \underline{N}|}$$

- DEF:

TETRAEDRO DI FRENET DELLA CURVA

$\underline{T}, \underline{N}, \underline{B}$

- ESEMPIO

$\underline{\phi} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$\tilde{\underline{\phi}}(t) = \underline{\phi}(2t)$

$\tilde{\underline{\phi}} : \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$

$$\tilde{\underline{\phi}}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\tilde{\underline{\phi}}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\underline{\phi}(2t)\right) = 2\left(\underline{\phi}'(2t)\right)$$

$|\tilde{\underline{\phi}}'| = 2|\underline{\phi}'|$ LA VELOCITÀ È DOPPIA.

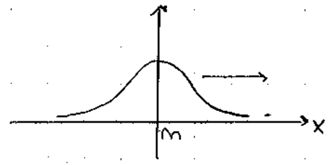
· SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

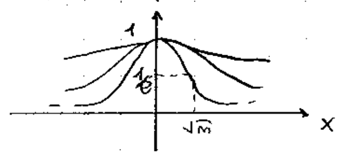
$f_n : \underset{\mathbb{R}}{[a,b]} \to \mathbb{R}$

· ESEMPI

$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$



$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} = e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2}$ $\qquad \frac{x}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{n}$



· DEF

$\{f_n\} \subseteq C^0[a,b]$, OPPURE $C(\mathbb{R})$.

f_n CONVERGE A f PUNTUALMENTE SE

$\forall x \in \begin{smallmatrix}[a,b] \\ \mathbb{R}\end{smallmatrix} \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

SE HO UN PUNTO IN $\mathbb{R}^n$,

$P^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n) \longrightarrow (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

· LO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE HA DIMENSIONE INFINITA.

SIANO

$k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$ E I POLINOMI IN $[0,1]$, $C[0,1]$.

$\lambda x^k + \mu x^j = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$ CON x^k, x^j MONOMI GENERICI.

SCELGO ALLORA DUE VALORI ARBITRARI DI x,

$x = 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 0$

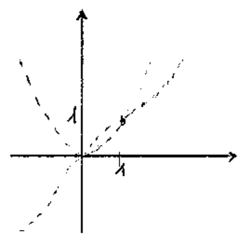
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2^k}\lambda + \frac{1}{2^j}\mu = 0$

OTTENGO

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \frac{1}{2^j}\left(\frac{\lambda}{2^m} + \mu\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$$

MA ALLORA TUTTI I MONOMI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.
LO SPAZIO DEI POLINOMI (DI GRADO NON FISSATO) HA INFINITE DIMENSIONI. MA I POLINOMI SONO UN SOTTOINSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE, CHE QUINDI A MAGGIOR RAGIONE FORMANO UNO SPAZIO A INFINITE DIMENSIONI.

· ESEMPIO



$f_m(x) = x^m$ (C)

$f_m(x) = e^{-\frac{x^2}{m}}$ (B)

$f_m(x) = e^{-(x-m)^2}$ (A)

A. FISSO $\bar{x} \in \mathbb{R}$,

$$f_m(\bar{x}) = e^{-(\bar{x}-m)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$ PUNTUALMENTE.

B. $\bar{x} \in \mathbb{R}$,

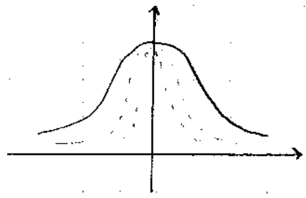
$$f_m(\bar{x}) = e^{-\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{m}}\right)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$ PUNTUALMENTE.

C. $\bar{x} \in \mathbb{R}$,

$$f_m(\bar{x}) = \begin{cases} +\infty & \text{SE } \bar{x} > 1 \\ 1 & \text{SE } \bar{x} = 1 \\ 0 & \text{SE } |\bar{x}| < 1 \\ \nexists & \text{SE } \bar{x} \leq -1 \end{cases}$$

· ESEMPIO

$$f_m = e^{-mx^2} = e^{-(\sqrt{m}\,x)^2}$$



FISSATO $\bar{x}$,

$$f_m(\bar{x}) \xrightarrow[m \to \infty]{} \begin{cases} 1 & \text{SE } \bar{x} = 0 \\ 0 & \text{SE } \bar{x} \neq 0 \end{cases}$$

SI NOTI CHE CONVERGE A UNA FUNZIONE CHE È FUORI DALLO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE.

· DEF

$C[a,b]$ SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE SU UN INTERVALLO CHIUSO, LIMITATO.

$f, g \in C[a,b]$

DEVO DEFINIRE UNA DISTANZA.

$$d(f,g) \overset{?}{=} |f(x) - g(x)|$$

RISPETTA POSITIVITÀ E SIMMETRIA. L'UGUAGLIANZA DEVE VALERE PER TUTTI GLI X. L'INTEGRALE NON VA BENE, PERCHÉ NON RISENTE DI CAMBIAMENTI DELLA FUNZIONE IN UN SINGOLO PUNTO.

SE VALE PER TUTTI GLI X, ALLORA VALE IN PARTICOLARE PER L'ESTREMO SUPERIORE (VICEVERSA, SE VALE PER IL SUP VALE PER TUTTI).

SI DEFINISCE QUINDI

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty$$

DIMOSTRIAMO CHE È UNA DISTANZA.

- $\|f - g\|_\infty \geq 0$
- $\|f - g\|_\infty = 0 \Rightarrow f = g$

INFATTI

$$0 = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \geq |f(x)-g(x)| \geq 0$$

$\forall x \in [a,b]$

LA SIMMETRIA È BANALE.

RIMANE LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$|f(x)-g(x)| = |f(x) \pm h(x) - g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)| \leq$$

$$\leq \|f-h\|_\infty + \|h-g\|_\infty$$

I PASSAGGI VALGONO CHIARAMENTE $\forall x \in [a,b]$, QUINDI

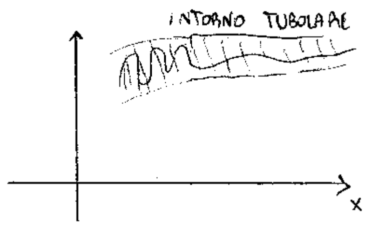
$$\|f-g\|_\infty \leq \|f-h\|_\infty + \|h-g\|_\infty$$

- DEF: CONVERGENZA UNIFORME

$\{f_m\} \subseteq C[a,b]$

$$d(f_m, f) \longrightarrow 0$$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x)-f(x)| \geq |f_m(x)-f(x)| \ \forall x$$



f_m CONVERGE AD f UNIFORMEMENTE SE $d(f_m, f) \to 0$, O ALTERNATIVAMENTE

$|f_m(x) - f(x)| \to 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ t.c.

$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$, SE $m \geq N$, $\forall x \in [a,b]$

SI NOTI CHE LA CONVERGENZA PUNTUALE RICHIEDE

$\forall x \in [a,b]$, $f_m(x) \longrightarrow f(x)$

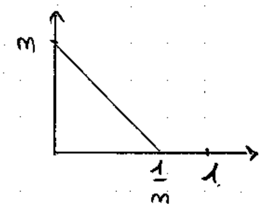
$\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N = N(\varepsilon, x)$ t.c.

$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ SE $m \geq N$

· ESEMPIO

$$f_m(x) = x^m \qquad x \in [0,1]$$



$$g_m(x) = \begin{cases} m - m^2 x & x \in [0, \frac{1}{m}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{m}, 1] \end{cases}$$

SI HA CHE, PUNTUALMENTE,

$$f_m(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$$

$$g_m(x) \longrightarrow g(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \in (0,1] \end{cases}$$

VALE

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{m \to \infty} f_m(x)\,dx \quad ?$$

PER LE f,

$$\int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1} \longrightarrow 0$$

PER LE g,

$$\int_0^1 g_m(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{m}} (m - m^2 x)\,dx = \left[m x - \frac{m^2}{2} x^2\right]_0^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{2}$$

CHE È IN EFFETTI L'AREA DEL TRIANGOLO. $\left(\frac{1}{m} \cdot m \cdot \frac{1}{2}\right)$

PER LA DISTANZA,

$$|f_m(x) - f(x)| = f_m(x) - f(x) = \begin{cases} x^m & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_m(x) - f(x)| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad f \text{ NON CONVERGE UNIFORMEMENTE!}$$

$\downarrow$

IN EFFETTI NON È CONTINUA,
NON HO UN MASSIMO.

SI NOTI CHE LA CONVERGENZA UNIFORME IMPLICA QUELLA PUNTUALE:

$$0 \leftarrow \sup |f_m(x) - f(x)| \geq |f_m(x) - f(x)| \geq 0$$

NON È VERO IL CONTRARIO.

· TEOREMA

$$\{f_m\} \subseteq C[a,b]$$

$$\| f_m - f \|_\infty = d(f_m, f) \to 0$$

ALLORA

$$\lim_{m \to +\infty} \int_a^b f_m(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

$$M_m = \| f_m - f \|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{SUCCESSIONE INFINITESIMA.}$$

$$f(x) - M_m \leq f_m(x) \leq f(x) + M_m \qquad \forall x \in [a,b]$$

INFATTI

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_m(x) - f(x)| = M_m$$

MA ALLORA POSSO SCRIVERE, PER LA MONOTONÌA DELL' INTEGRALE,

$$\int_a^b (f(x) - M_m)\,dx \leq \int_a^b f_m(x)\,dx \leq \int_a^b (f(x) + M_m)\,dx$$

PER LINEARITÀ,

$$\int_a^b (f(x) - M_m)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b M_m\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + M_m)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b M_m\,dx$$

MA

$$\int_a^b M_m \, dx = M_m (b-a) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \, , \quad \text{PERCHÈ } M_m \to 0.$$

PERCIÒ

$$\int_a^b f(x)dx - M_m(b-a) \leq \int_a^b f_m(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + M_m(b-a)$$

AL LIMITE PORTA ALLA TESI PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI.

ATTENZIONE: NON FUNZIONA SU INTERVALLI ILLIMITATI (INTEGRALI IMPROPRI).

- TEOREMA

$(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO.
(ANCHE DETTO SPAZIO DI BANACH)

- DEF

$\{f_m\} \subseteq (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

$\{f_m\}$ È DI CAUCHY SE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{m} = \bar{m}(\varepsilon)$ t.c.

$\|f_m - f_{m+p}\|_\infty < \varepsilon$ SE $m \geq \bar{m}$

COMPLETO <=> OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY HA LIMITE.

DIMOSTRAZIONE (FATTA MALE, VEDI DOPO)

$\{f_m\}$ È SUCCESSIONE DI CAUCHY.

FISSO $\bar{x} \in [a,b]$ E GUARDO

$\{f_m(\bar{x})\}$

SO CHE

$|f_m(\bar{x}) - f_{m+p}(\bar{x})| \leq \|f_m - f_{m+p}\|_\infty$ SUCCESSIONE DI CAUCHY, LA POSSO RENDERE PICCOLA A PIACERE

PERCIÒ $\{f_m(\bar{x})\}$ È DI CAUCHY IN $\mathbb{R}$:

MA ALLORA, POICHÈ OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY HA LIMITE (È UN SSE), $f_n(\bar{x}) \longrightarrow l(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ (INFATTI $\mathbb{R}$ È COMPLETO).

DEFINISCO ORA

$$f(x) = l(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

f È CONTINUA IN $[a,b]$ (OVVERO, APPARTIENE A $C[a,b]$)? LO È SE

$$\forall \bar{x} \in [a,b], \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x) \ \text{t.c.} \ |f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ SE } |x - \bar{x}| < \delta .$$

SI AVEVA

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE CONVERGE,

$$|f(\bar{x}) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(\bar{x}) - f_n(x)|$$

FISSO ε E SCRIVO

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - f(x)| &= |f(\bar{x}) \pm f_n(\bar{x}) \pm f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\le \underset{\text{SE } n \ge \bar{n}_1(\varepsilon, \bar{x})}{\varepsilon} + \underset{\substack{\text{SE } |x - \bar{x}| < \delta \\ \uparrow \\ f_n(x) \text{ È CONTINUA}}}{\varepsilon} + \underset{\text{SE } n \ge \bar{n}_2(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

UNA VOLTA SUPERATO UN CERTO $n \ge \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, MI BASTA SCEGLIERE δ DELLA DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI $f_n(x)$ E RITROVO LA TESI.

<u>NOTA SUCCESSIVA</u>:

HO IL SENTORE CHE QUI CI SIANO SCRITTE UN SACCO DI CAZZATE, PERCIÒ RIDIMOSTRO IL TEOREMA.

R1 - DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE DI CAUCHY $\{f_n\}$ DOVE LE f_n SONO FUNZIONI CONTINUE SU $[a,b]$. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE

$$\{f_n\} \to f \in C[a,b]$$

DOVE LA CONVERGENZA È INTESA NEL SENSO

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

PER DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE DI CAUCHY,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad t.c.$$

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \sup_{[a,b]} |f_n - f_{n+p}| < \varepsilon$$

FISSATO $\bar{x} \in [a,b]$,

$$|f_n(\bar{x}) - f_{n+p}(\bar{x})| \leq \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

SI È COSÌ DIMOSTRATO CHE LA SUCCESSIONE NUMERICA $\{f_n(\bar{x})\}$ È UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY IN $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. POICHÈ $\mathbb{R}$ CON LA NORMA EUCLIDEA È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO (VEDI P. 344),

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\bar{x}) = l(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

DEFINISCO ORA, AL VARIARE DI x IN $[a,b]$,

$$f(x) = l(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\{f_n(x)\}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f(x)$. NELLA CONDIZIONE DI CAUCHY, NULLA MI VIETA DI FAR TENDERE $p \to \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad t.c. \quad SE \quad n \geq N,$$

$$\sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

IN QUANTO SI È VISTO CHE $f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE A $f(x)$. QUELLA CHE ABBIAMO SCRITTO È PROPRIO LA CONDIZIONE DI CONVERGENZA UNIFORME. RESTA SOLO DA DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $f(x)$ COSÌ COSTRUITA È CONTINUA SU $[a,b]$.

NELLA CONDIZIONE SOPRA FISSIAMO $m_0 > N(\varepsilon)$. FISSIAMO ANCHE $x_0 \in [a,b]$ E DIMOSTRIAMO CHE $f(x)$ È CONTINUA IN x_0 :

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) \pm f_{m_0}(x) \pm f_{m_0}(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f_{m_0}(x)| + |f_{m_0}(x) - f_{m_0}(x_0)| + |f_{m}(x_0) - f(x_0)|$$

LA PRIMA SI MAGGIORA CON ε PER CONVERGENZA UNIFORME, COSÌ COME LA TERZA (QUEST'ULTIMA ANCHE SOLO PER CONVERGENZA PUNTUALE*).
INFINE SI RICORDA CHE $f_{m_0}(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA, PERCIÒ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{m_0}(x) - f_{m_0}(x_0)| < \varepsilon$$

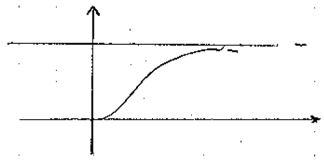
SI È MOSTRATO COSÌ CHE LA FUNZIONE $f(x)$ È CONTINUA:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

* IN REALTÀ NON BASTA, ALTRIMENTI $N = N(\varepsilon, x)$.

· ESERCIZIO

$$f_m(x) = \frac{m^2x^2}{1+m^2x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$



SE FISSO $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE A

$$f_m(x) \to f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad (\text{INFATTI } f_m(0) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N})$$

$f(x)$ NON È CONTINUA, QUINDI $f_m(x)$ NON VI PUÒ CONVERGERE UNIFORMEMENTE IN $\mathbb{R}$ (E NEMMENO IN $[-\delta, \delta]$ - CONTIENE L'ORIGINE).

SIA $0 < a < b$.

$f_m \to 1$ UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$?

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_m(x) - 1| = ?$$

$$|f_m(x) - 1| = (1 - f_m(x)) = 1 - \frac{m^2x^2}{1+m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2x^2}$$

CHE È UNA FUNZIONE DECRESCENTE IN $[a,b]$. PERCIÒ

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_m(x) - 1| = (1 - f_m(a)) = \frac{1}{1+m^2a^2} = M_m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

PERCIÒ

$f_m \to 1$ UNIFORMEMENTE IN $[\underset{a>0}{a}, b]$, O ANCHE IN $[a, +\infty)$

VERIFICHIAMO SE VALE, NELL' INTERVALLO $[-1,1]$, L'OPERAZIONE DI SCAMBIO TRA LIMITE E INTEGRALE, OVVERO SE

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-1}^{1} f_m(x)\,dx \overset{?}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} f_m(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{m^2x^2}{1+m^2x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+m^2x^2}\right)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+m^2x^2}\right) dx \qquad \begin{aligned} mx &= t \\ m\,dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \int_{-m}^{m} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{m}\, dt$$

$$= \frac{1}{m}\int_{-m}^{m} \frac{1}{1+t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{m}\, \mathrm{ARCTG}(t)\Big|_{-m}^{m}$$

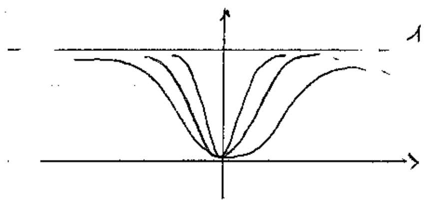
PERCIÒ

$$\int_{-1}^{1} f_m(x)\, dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{2\,\mathrm{ARCTG}(m)}{m}$$

$$= 2\left(1 - \frac{\mathrm{ARCTG}(m)}{m}\right) \longrightarrow 2 = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

HO SCOPERTO CHE È VERO.

ALTERNATIVAMENTE, OSSERVO CHE



$$0 \le f_m(x) \le 1$$

$$0 \le \int_{-1}^{1} f_m(x)\, dx \le \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

MA, POICHÉ f È PARI,

$$\int_{-1}^{1} f_m(x)\, dx = 2\int_{\varepsilon}^{1} f_m(x)\, dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_m(x)\, dx$$

IN $[\varepsilon, 1]$ f_m CONVERGE UNIFORMEMENTE, PERCIÒ

$$\int_{\varepsilon}^{1} f_m(x)\, dx \longrightarrow \int_{\varepsilon}^{1} 1\, dx = (1-\varepsilon)$$

PER LA SECONDA PARTE, OSSERVO CHE

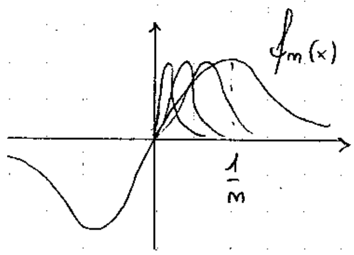
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_m(x)\, dx \le 2\varepsilon$$

$$2(1-\varepsilon) \le \int_{-1}^{1} f_m(x)\, dx \le 2(1-\varepsilon) + 2\varepsilon = 2$$

CHE AL LIMITE TENDE A 2.

· ESERCIZIO

$$f_m(x) = \frac{mx}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



$$a^2+b^2 \geq 2|ab|$$

$$1+m^2x^2 \geq 2|mx| = 2m|x|$$

$$1 \geq \frac{2m|x|}{1+m^2x^2}$$

PERCIÒ

$$|f_m(x)| \leq \frac{1}{2}$$

FISSO $\bar{x} \in \mathbb{R}$

$$\frac{m\bar{x}}{1+m^2\bar{x}^2} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \bar{x} \neq 0 \\ 0 & \bar{x} = 0 \end{cases}$$

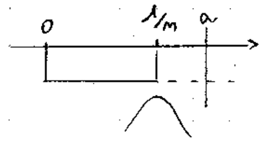
HO SCOPERTO CHE

$f_m \to 0$ PUNTUALMENTE (E 0 È UNA FUNZIONE CONTINUA).

CERCO

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - 0| = \max_{\{x>0\}} f_m(x)$$ (INFATTI f_m È DISPARI)

$$f_m'(x) = \frac{m(1-m^2x^2)}{(1+m^2x^2)^2}$$ IL MASSIMO È ASSUNTO IN $x = \frac{1}{m}$



$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - 0| = f_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0$$

NONOSTANTE 0 FOSSE UN BUON CANDIDATO, f_m NON VI CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $\mathbb{R}$.

VEDIAMO SE LO FA IN $[a, +\infty)$, $a>0$.

PER m SUFFICIENTEMENTE GRANDE, SI HA $a > \frac{1}{m}$ E OSSERVANDO LA DERIVATA SI NOTA CHE f_m È DECRESCENTE IN $[a, +\infty)$, PERCHÈ $\frac{1}{m}$ È INFINITESIMA.

ALLORA IL MASSIMO È ASSUNTO IN a,

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - 0| = f_n(a) = -\frac{na}{1+n^2a^2} = M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

PERCIÒ SI HA CONVERGENZA UNIFORME A 0 IN $[a,+\infty)$.

COSA POSSIAMO DIRE SUGLI INTEGRALI?

$$\int_a^{+\infty} 0\,dx = 0 \quad , \quad a>0 \quad \text{(IN SENSO IMPROPRIO)}.$$

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx = ?$$

$$\int_a^{M} f_n(x)\,dx = \int_a^{M} \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2n}\int_a^{M} \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2)\Big|_a^M = \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{1+n^2M}{1+n^2a}\right) \xrightarrow[M\to+\infty]{} +\infty$$

NON VALE L'OPERAZIONE DI SCAMBIO TRA INTEGRALE E LIMITE: INFATTI L'INTERVALLO NON È LIMITATO.

(NEL TEOREMA DI IERI,

$$M_n(b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

MA QUESTO È VERO SOLO SE $(b-a)$ È UNA QUANTITÀ LIMITATA).

· ESERCIZIO

$$f_n(x) = x - \frac{1}{n}x^n$$

STUDIAMO LA SUCCESSIONE DI f_n E DELLE SUE DERIVATE

$$f_n'(x) = 1 - x^{n-1}$$

IN $x \in [0,1]$.

FISSATO $\bar{x} \in [0,1]$,

$$f_m(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{1}{m}\bar{x}^m \longrightarrow \bar{x}$$

PERCIÒ

$$f_m \xrightarrow[\text{PUNT.TE}]{} f(x) = x$$

STUDIO LA CONVERGENZA UNIFORME, PERCHÈ $f(x)$ È CONTINUA.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left(\frac{1}{m}x^m\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MONOTONA CRESCENTE}}}{\frac{1}{m}x^m\Big|_{x=1}} = \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

PERCIÒ SI HA ANCHE CONVERGENZA UNIFORME.

STUDIAMO LA SUCCESSIONE DELLE DERIVATE. FISSATO $\bar{x}$,

$$f'_m(\bar{x}) = 1 - \bar{x}^{m-1} \longrightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \bar{x} \in [0,1) \\ 0 & \text{SE } \bar{x} = 1 \end{cases}$$

PUNTUALMENTE; NON UNIFORMEMENTE, INFATTI $g(x)$ NON È CONTINUA.

MI CHIEDO SOTTO QUALI IPOTESI

$$f_m \to f \qquad \text{E} \quad g = f'$$
$$f'_m \to g$$

<u>TEOREMA</u>

$\{f_m\} \subseteq C^1[a,b]$

$f_m \to f$ UNIFORMEMENTE.

$f'_m \to g$ UNIFORMEMENTE.

ALLORA

$f \in C^1[a,b]$

$f'(x) = g(x)$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{array}{ccccc} f_m(x) & = & f_m(a) & + & \int_a^x f_m'(s)\,ds \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{UNIFORME}} \\ f(x) & = & f(a) & + & \int_a^x g(s)\,ds \end{array} \qquad \forall x \in [a,b]$$

ALLORA

$$f \in C^1$$

(INFATTI LA FUNZIONE INTEGRALE È DERIVABILE PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE E $g(x)$ È CONTINUA).
INOLTRE, SEMPRE PER IL TH. FONDAMENTALE, DERIVANDO LA RELAZIONE SI OTTIENE

$$f'(x) = g(x)$$

ESEMPIO

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\sin(mx) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f_m'(x) = \cos(mx)$$

FISSATO $\bar{x} \in \mathbb{R}$,

$$\left| f_m(\bar{x}) = \frac{1}{m}\sin(mx) \right| \le \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \qquad \text{PUNTUALMENTE.}$$

STUDIO

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - 0| = \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \qquad \text{UNIFORMEMENTE IN } \mathbb{R}.$$

PER LE DERIVATE, FISSO $\bar{x} \in \mathbb{R}$ E

$$f_m'(\bar{x}) = \cos(m\bar{x}) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{SE } x = 0 \\ \nexists & \text{SE } x \neq 0 \end{cases}$$

- OSS.

$X = \left(C^k[a,b], \|\cdot\|_{C^k}\right)$ È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO.

$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \_ + \|f^{(k)}\|_\infty$

$d(f,g) = \|f-g\|_{C^k}$

- ESEMPIO

$f_m(x) = x^m \qquad x \in [0,1] \ , \quad f \in C^0[a,b]$

$$f_m \xrightarrow[\text{PUNT.}]{} f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$$

MI CHIEDO SE

$$\tilde{d}(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$$

È UNA DISTANZA.

* DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

LA TESI SEGUE INTEGRANDO, PER LA MONOTONIA DELL' INTEGRALE.

* SIMMETRICA E SEMPRE POSITIVA.

* $\tilde{d}(f,g) = 0$ SSE $f = g$

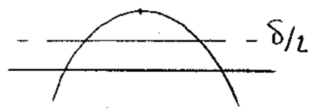
SUPPONGO, PER ASSURDO, $\tilde{d}(f(x), g(x)) = 0$ MA $f \neq g$. ALLORA $\exists \ \bar{x} \in [0,1]$ t.c. $|f(\bar{x}) - g(\bar{x})| = \delta > 0$

SE f, g SONO CONTINUE, LO È ANCHE $|f-g|$

PER IL TH. DELLA PERMANENZA DEL SEGNO,

$$\exists\ (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon) \quad t.c. \quad |f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{2}\delta \qquad \forall x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$$

$\varepsilon > 0$



ALLORA

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \geq \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} \frac{1}{2}\delta\,dx = \varepsilon\delta > 0 \qquad |f(x)-g(x)| - \frac{\delta}{2} > 0$$

CHE È ASSURDO.

TORNANDO ALLA NOSTRA $f_m(x) = x^m$, SI OSSERVA CHE

$$\tilde{d}(f_m, f) = \int_0^1 |x^m - 0|\,dx = \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1} \longrightarrow 0$$

LA SUCCESSIONE

x^m

È DI CAUCHY. UNO SPAZIO METRICO È COMPLETO SE OGNI SUA SUCCESSIONE DI CAUCHY HA LIMITE (NELLO SPAZIO STESSO); MA QUI SI VEDE CHE NELLO SPAZIO METRICO

$$(C^0[a,b], \tilde{d}) \equiv \Omega$$

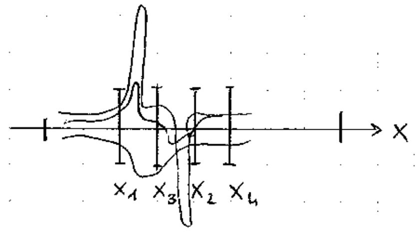
LA SUCCESSIONE x^m CONVERGE A UNA FUNZIONE CHE NON È CONTINUA (È FUORI DA Ω). SE NE DEDUCE CHE Ω NON È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO.

· HIGHLIGHT

CONVERGENZA PUNTUALE

$\forall \bar{x}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 = m_0(\bar{x}, \varepsilon)$ ($\bar{x}$ FISSATO!)

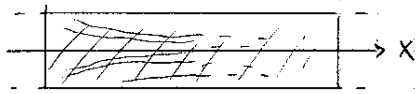
$\Rightarrow |f_m(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall m > m_0$



CONVERGENZA UNIFORME

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} = \bar{m}(\varepsilon)$

$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I, \forall m > \bar{m}$



IN PARTICOLARE (E EQUIVALENTEMENTE)

$\sup |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

· SERIE DI FUNZIONI

$\{f_m\} \subseteq C[a,b]$

$$S_K(x) = \sum_{m=1}^{K} f_m(x)$$

$\sum_{m=1}^{K} f_m(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN $[a,b]$ SE

$$\forall \bar{x} \in [a,b], \quad \sum_{m=1}^{K} f_m(\bar{x}) = S_K(\bar{x}) \xrightarrow[K\to\infty]{} S_\infty(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\bar{x})$$

SI RIDUCE ALLA CONVERGENZA DI UNA SERIE NUMERICA.

· DEF

$\{f_m\} \subseteq C[a,b]$

DIREMO CHE LA SERIE $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$ SE

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{m=1}^{K} f_m(x) - \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x) \right| \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$$

OVVERO SE

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{m=K+1}^{+\infty} f_m(x) \right| \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$$

- ESEMPIO

$$f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1]$$

HA SENSO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \quad ?$$

$$\sum_{n=1}^{K} x^n = \frac{x - x^{K+1}}{1-x} \qquad (\text{PER } x \neq 1)$$

$$(x + x^2 + x^3 + \_ + x^K)$$

$$(1-x)\sum_{n=1}^{K} x^n = \sum_{n=1}^{K} x^n - x\sum_{n=1}^{K} x^n = (x + x^2 + \_ + x^K) - (x^2 + x^3 + \_ + x^{K+1})$$

SE $K \to +\infty$, POICHE' STIAMO IN $[0,1]$

$$\sum_{n=1}^{K} x^n = \frac{x - x^{K+1}}{1-x} \xrightarrow[K\to\infty]{} \frac{x}{1-x}$$

PERCIO' HO LA CONVERGENZA PUNTUALE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

STUDIAMO

$$\left|\sum_{n=1}^{K} f_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=K+1}^{+\infty} f_n(x)\right|$$

NEL NOSTRO CASO,

$$\sum_{n=K+1}^{+\infty} x^n = \frac{x^{K+1}}{1-x}$$

CERCHIAMO CHI E'

$$\sup_{x\in[0,1)} \left(\frac{x^{K+1}}{1-x}\right) = +\infty$$

PERCIO' LA SERIE NON CONVERGE UNIFORMEMENTE A $\dfrac{x^{K+1}}{1-x}$ IN $[0,1)$.

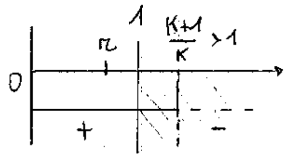
SCELGO $r < 1$ E CONSIDERO $[0, r]$.

$$\sup_{x \in [0,r]} \left| \sum_{m=k+1}^{+\infty} x^m \right| = \sup_{x \in [0,r]} \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

$$(x^{k+1} + x^{k+2} + \dots + x^j) - (x^{k+2} + \dots + x^{j+1})$$
$$\Rightarrow \frac{x^{k+1} - x^{j+1}}{1-x} \xrightarrow[j \to \infty]{} \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{x^k \left[(k+1) - kx \right]}{(1-x)^2}$$



IN $[0, r]$ f È MONOTONA CRESCENTE, QUINDI

$$\sup_{x[0,r]} \frac{x^{k+1}}{1-x} = \frac{r^{k+1}}{1-r} = M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \qquad (r < 1)$$

PERCIÒ IN $[0, r]$ SI HA CONVERGENZA UNIFORME.

· <u>ESERCIZIO</u>

$$\sum_{m=0}^{+\infty} e^{mx} = \sum_{m=0}^{+\infty} (e^x)^m$$

DIMOSTRARE:

1. LA SERIE CONVERGE $\forall x < 0$.
2. CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $(-\infty, \delta]$, $\delta < 0$.
3. CALCOLARE LA SOMMA.

1. $(e^x)^m \to 0$

SSE $e^x < 1$

SSE $x < 0$ $\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} (e^{\bar{x}})^m < +\infty$ SE $\bar{x} < 0$ (SERIE GEOMETRICA)

2.

$$\sup_{x \in (-\infty, 0)} \left| \sum_{m=0}^{+\infty} e^{mx} - \sum_{m=0}^{k} e^{mx} \right| = \sup_{x \in (-\infty, 0)} \left| \sum_{m=k+1}^{+\infty} e^{mx} \right| = \sup_{x \in (-\infty, 0)} \frac{(e^x)^{k+1}}{1 - e^x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{(k+1)x}}{1 - e^x} = +\infty \qquad \text{(ESPLODE IN 0).}$$

NON HO CONVERGENZA UNIFORME IN $(-\infty, 0)$

CERCHIAMO

$$\sup_{x\in(-\infty,\delta]} \frac{e^{(k+1)x}}{1-e^{x}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{MONOTONIA}}}{=} \left.\frac{e^{(k+1)x}}{1-e^{x}}\right|_{x=\delta} = \frac{e^{(k+1)\delta}}{1-e^{\delta}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad (\delta \text{ È NEGATIVO})$$

PERCIÒ HO CONVERGENZA UNIFORME IN $(-\infty, \delta]$.

INFATTI È NECESSARIO AVER PRIMA CALCOLATO LA SOMMA INFINITA IN FUNZIONE DI K.

CONVERGENZA TOTALE

SPESSO CALCOLARE IL SUP DI UNA SERIE È IN PRATICA DIFFICILE. INTRODUCIAMO QUINDI UNA CONVERGENZA PIÙ FORTE CHE IMPLICHI QUELLA UNIFORME.

DIREMO CHE

$\sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x)$ CONVERGE TOTALMENTE IN $[a,b]$ SE, DATA $\{M_m\}$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x)| = M_m \quad \forall m \qquad \text{E} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} M_m < +\infty$$

(FUNZIONA ANCHE CON $f_m \leq M_m$ - CRITERIO DI WEIERSTRASS)

ESEMPIO

$$f_m(x) = x^m \qquad x \in [0,1]$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} x^m = \frac{x}{1-x} \qquad x \in [0,1)$$

$$\sup_{x\in[0,r]} \left| \sum_{m=k+1}^{+\infty} x^m \right| = \sum_{m=k+1}^{+\infty} r^m = \frac{r^{k+1}}{1-r} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

ALLORA $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. STUDIAMO LA TOTALE,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sup_{x\in[0,r]} |x^m| = \sum_{m=1}^{+\infty} r^m = \frac{r}{1-r} < +\infty$$

· TEOREMA

SE $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE IN $[a,b]$, ALLORA LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$.

PROOF: $\sup\left|\sum_{n=K+1}^{\infty} f_n(x)\right| \underset{\text{D.T.}}{\leq} \sup \sum_{n=K+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \sup |f_n(x)| = \sum_{n=K+1}^{\infty} M_n$

SE $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ CONVERGE, ALLORA AL $\lim_{K\to\infty}$ TOLGO ELEMENTI FINO A RENDERLA 0.

· ESEMPIO

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-x} \qquad x \in [0,+\infty)$$

CI CHIEDIAMO SE CONVERGE UNIFORMEMENTE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

INIZIAMO SUBITO DALLA CONVERGENZA TOTALE (IN GENERE È PIÙ SEMPLICE).

STIMIAMO

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{\{x\geq 0\}} \left|\frac{(-1)^n}{n} e^{-x}\right| = \sup_{\{x\geq 0\}} \left(\frac{e^{-x}}{n}\right) = \frac{1}{n} = M_n$$

M_n È LA SERIE ARMONICA,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

PERCIÒ

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ NON CONVERGE TOTALMENTE.

DOBBIAMO RICORRERE A UNA STIMA DIRETTA DEL SUP PER LA CONVERGENZA UNIFORME.

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left| \sum_{n=K+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-x}}{n} \right|$$

SFRUTTIAMO IL <u>CRITERIO DI LEIBNIZ</u>.

CRITERIO DI LEIBNIZ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{CONVERGE SE:}$$

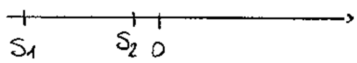
(1) $a_n \geq 0$ (A TERMINI POSITIVI)

(2) $a_{n+1} \leq a_n$ (DECRESCENTE, ALMENO DEBOLMENTE)

(3) $a_n \to 0$ (INFINITESIMA)

DIMOSTRAZIONE

COSTRUISCO LE SUCCESSIONI



$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^n a_n$$

$$S_{2k+1} = \sum_{n=1}^{2k+1} (-1)^n a_n$$

RAGIONO COSÌ:

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = S_1 + \overbrace{a_2 - a_3}^{>0} \geq S_1 \quad \Rightarrow \quad S_7 \geq S_5 \geq S_3 \geq \dots \geq S_1$$

$$S_4 = S_2 - \underbrace{a_3 + a_4}_{<0} \geq S_6 \quad \Rightarrow \quad S_2 \geq S_4 \geq \dots \geq S_{2k}$$

LA SUCCESSIONE DEI DISPARI È CRESCENTE, QUELLA DEI PARI È DECRESCENTE. LA DISTANZA TRA S_{2k+1} E S_{2k} È

$$S_{2k+1} - S_{2k} = a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ALLORA

$$S_{2k+1} \to l \leftarrow S_{2k}$$

LE DUE SOTTOSUCCESSIONI CONVERGONO ALLO STESSO LIMITE, QUINDI CONVERGE LA SUCCESSIONE INIZIALE.

TORNANDO A NOI,

$$\sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^m e^{-x}}{m} = \underbrace{\frac{(-1)^{k+1} e^{-x}}{k+1} + \frac{(-1)^{k+2} e^{-x}}{k+2}}_{(**)} + \underbrace{\frac{(-1)^{k+3} e^{-x}}{k+3} + \dots}_{(*)}$$

CONSIDERO $(*)$,

$$(-1)^{k+2} \underbrace{\left[\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right]}_{>0} e^{-x}$$

SE K È DISPARI, QUESTA QUANTITÀ È NEGATIVA.

$$\sum_{m=k+1}^{+\infty} f_m \leq \frac{(-1)^{k+1} e^{-x}}{k+1}$$

INFATTI SOMMO OGGETTI CHE, PRESI A COPPIE, DANNO SEMPRE QUANTITÀ NEGATIVE.

SE CONSIDERO INVECE $(**)$ SEMPRE CON K DISPARI, SCOPRO CHE

$$0 \leq \sum_{m=k+1}^{+\infty} f_m$$

SCEGLIENDO K PARI, RAGIONANDO ALLO STESSO MODO

$$0 \geq \sum_{m=k+1}^{+\infty} f_m \geq \frac{(-1)^{k+1} e^{-x}}{k+1}$$

MA ALLORA VALE IN GENERALE

$$\left| \sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^m e^{-x}}{m} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{k+1} e^{-x}}{k+1} \right|$$

ORA POSSO STIMARE

$$\sup \left| \sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^m e^{-x}}{m} \right| \leq \sup_{[0,+\infty)} \frac{e^{-x}}{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

CONVERGE TOTALMENTE E QUINDI ANCHE UNIFORMEMENTE.

· TEOREMA

$\{f_n\} \subseteq C[a,b]$ t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE.

ALLORA:

① $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \in C[a,b]$

LA SERIE CONVERGE A UNA FUNZIONE CONTINUA.

② $\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

È VALIDO LO SCAMBIO TRA SOMMATORIA E INTEGRAZIONE SU INTERVALLI LIMITATI.

③ SE $\{f_n\} \in C^1[a,b]$ E

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = H(x) \end{array}\right\} \text{CONVERGENZA UNIFORME}$$

(IN REALTÀ PER LA f_n BASTA LA CONVERGENZA PUNTUALE GRAZIE AL RISULTATO ②).

$\Rightarrow \quad S \in C^1[a,b]$ E $S'(x) = H(x)$

VALE LO SCAMBIO TRA SOMMATORIA E DERIVAZIONE.

· CONCENTRIAMOCI SULLE f_n COSTRUITE COME

$f_n(x) = a_n(x-x_0)^n \qquad a_n \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$

ALLORA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

È DETTA SERIE DI POTENZE.

SENZA PERDERE DI GENERALITÀ, EFFETTUO IL CAMBIO

$y = x - x_0$

- TEOREMA

DATA LA SERIE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ VALE UNA DELLE SEGUENTI:

(1) LA SERIE CONVERGE SOLO PER $x=0$.

(2) LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE $\forall x \in \mathbb{R}$ E UNIFORMEMENTE IN $[-M,M]$.

(3) $\exists!\ R>0$ t.c. LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE IN $(-R,R)$, CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[-R+\delta, R-\delta]$ E NON CONVERGE IN $\mathbb{R} \setminus [-R,R]$.

- TEOREMA

DATA LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

IL RAGGIO DI CONVERGENZA R È TALE CHE

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left[\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}$$

I CASI 1,2,3 CORRISPONDONO A $R=0, +\infty, R\in\mathbb{R}$.

- ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n!}(n+1)! = (n+1) \to +\infty$$

- ESEMPIO

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!}$$

$$a_m = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{m} \\ \\ 0 \end{cases}$$ INFATTI NELLA SERIE SI PERDONO TUTTI I TERMINI DISPARI.

USANDO IL CRITERIO DELLA RADICE,

$$\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{1}{m!}} \\ 0 \end{cases}$$

MA

$m! > K^m \quad \forall K$ E PER $m >> 1$.

ALLORA

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m!}} < \sqrt[m]{\frac{1}{K^m}} = \frac{1}{K}$$ CON K SCELTO A PIACERE, PERCIÒ $\leq 0 \xRightarrow{\text{RADICE PARI}} = 0$

IN QUESTO MODO HO ELIMINATO IL PROBLEMA E SCOPERTO CHE IL RAGGIO DI CONVERGENZA È COMUNQUE $\frac{1}{0} = +\infty$.

- ESEMPIO

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{1+2^m} x^m \qquad a_m = \frac{1}{1+2^m}$$

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{1}{1+2^m} \cdot \frac{1+2^{m+1}}{1} = \frac{1+2^{m+1}}{1+2^m} \to 2$$

PERCIÒ CONVERGE PUNTUALMENTE IN $(-2,2)$ E UNIFORMEMENTE IN $[-2+\delta, 2-\delta] \quad \delta \in (0,2)$

SIA $x=2$,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{1+2^m} = +\infty$$

SE $x=-2$,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m 2^m}{1+2^m}$$ NON CONVERGE.

· OSSERVAZIONE

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$$

CONSIDERO LA SERIE DELLE DERIVATE,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cdot m x^{m-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} (k+1) x^k$$

APPLICO IL CRITERIO DEL RAPPORTO,

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} = \frac{m a_m}{(m+1) a_{m+1}} = \underbrace{\frac{m}{m+1}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{a_m}{a_{m+1}}}_{\downarrow\, R} \longrightarrow R$$

HO

$$S(x) = \sum_{m \geq 0} a_m x^m$$

$$S'(x) = \sum_{m \geq 1} m a_m x^{m-1}$$

DERIVO UN'ALTRA VOLTA,

$$S''(x) = \sum_{m \geq 2} m(m+1) a_m x^{m-2} \qquad S^{(k)}(x) = \sum_{m \geq k} \frac{m!}{(m-k)!} a_m x^{m-k}$$

CON LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA: $S(x) \in C^\infty$.

CALCOLIAMO

$$S(0) = a_1$$
$$S'(0) = 1 \cdot a_1$$
$$S''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_1$$
$$\vdots$$
$$S^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

MA ALLORA IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE K DI $S(x)$ ATTORNO ALLO ZERO È

$$T_k(S,0)(x) = a_0 + a_1 x + \frac{2!\, a_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{k!\, a_k}{k!} x^k = \sum_{m=0}^{k} a_m x^m$$

FUNZIONI CON LA PROPRIETÀ DI ESSERE C^∞ E DI COINCIDERE CON IL LORO POLINOMIO DI TAYLOR SONO DETTE ANALITICHE.

· ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1 \equiv R$$

NOTO CHE

$$n x^{n-1} = (x^n)'$$

ALLORA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

· ESERCIZIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \qquad\qquad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 \qquad\qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \longrightarrow 1$$

$\ell = 1, \ R = 1$

CONVERGONO ENTRAMBE PUNTUALMENTE IN $(-1,1)$.

IL TEOREMA NON DICE COSA SUCCEDE AGLI ESTREMI. CONTROLLIAMO QUINDI A MANO.

① $x = 1$,

$$\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$x = -1$,

$$\left|\sum \frac{(-1)^n}{n^2}\right| < +\infty$$

LA SERIE ① CONVERGE PUNTUALMENTE IN $[-1,1]$.

② $x = 1$,

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$x = -1$,

$$\left|\sum \frac{(-1)^n}{n}\right| < +\infty \qquad \text{(LEIBNIZ)}$$

LA SERIE ② CONVERGE PUNTUALMENTE IN $[-1,1)$.

· ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

$$a_n = n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1 = \ell$$

$R = \frac{1}{\ell} = 1$ RAGGIO DI CONVERGENZA. $\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE IN $(-1,1)$

SI PUO' VEDERE CHE CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[a,b] \subseteq (-1,1)$.

VOGLIO CALCOLARE LA SOMMA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{\substack{n=0\\(1)}}^{+\infty} nx \cdot x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n x^{n-1}}_{=\frac{d}{dx}(x^n)} = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{PER } x \in (-1,1).$$

- ESEMPIO

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2m+1}{(m-1)(m+2)} (x-2)^{2m}$$

$$(x-2)^2 = t$$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} a_m t^m \quad , \qquad a_m = \frac{2m+1}{(m-1)(m+2)}$$

CALCOLO

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{2m+3}{m(m+3)} \cdot \frac{(m-1)(m+2)}{2m+1} = \frac{(2m+3)(m-1)(m+2)}{m(2m+1)(m+3)} \longrightarrow 1$$

$$l = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE PER $t \in (-1, 1)$.

CAMBIO A

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SUPERFLUA}}}{-1 <} (x-2)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 3$$

$x^2 < 1$
$|x| < 1$
$-1 < x < 1$

HO CONVERGENZA UNIFORME PER TUTTI GLI INTERVALLI CHIUSI CONTENUTI IN $(1, 3)$. COSA SUCCEDE AGLI ESTREMI?

SOSTITUISCO $x = 1$, $x = 3$ E NOTO CHE LA SERIE NON CONVERGE.

- OSSERVAZIONE

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$$

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \to l \in (0, +\infty)$$

$$\parallel$$

$$\sqrt[m]{|a_m|} \to l$$

OVVERO

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} = \bar{m}(\varepsilon) \quad t.c.$$

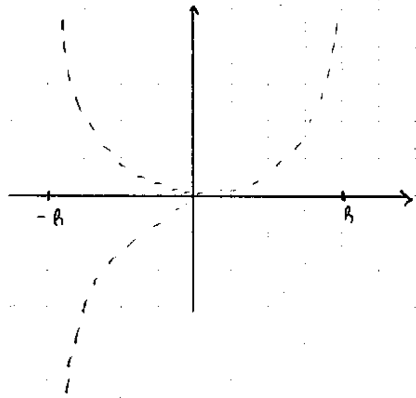
$$l - \varepsilon < \sqrt[m]{|a_m|} < l + \varepsilon \qquad \forall m \geq \bar{m}$$

SUPPONENDO

$\ell - \varepsilon > 0$

ELEVO AL QUADRATO LA DISUGUAGLIANZA E OTTENGO

$(\ell-\varepsilon)^2 < |a_m| < (\ell+\varepsilon)^m$



SIA

$a_m > 0$

$\sup_{(-R,R)} (a_m x^m) = a_m R^m$

STUDIO LA CONVERGENZA UNIFORME

$\sum_{m=0}^{+\infty} \sup_{(-R,R)} |a_m x^m|$ (USO LA TOTALE)

$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m R^m < +\infty$ (SE AVVIENE QUESTO, SEGUE)

$\Downarrow$

HO CONVERGENZA TOTALE E QUINDI UNIFORME IN $[-R,R]$.

- TEOREMA

DATA LA SERIE DI POTENZE

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$$

SIA

$$\ell := \lim_{m\to+\infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to+\infty} \sqrt[m]{|a_m|}$$

LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE IN $\left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell} = R\right)$.

CONVERGE INOLTRE UNIFORMEMENTE IN TUTTI GLI INTERVALLI $[-R+\delta, R-\delta]$.

NON CONVERGE IN $\mathbb{R} \setminus [-R,R]$.

IN PARTICOLARE, PUÒ CONVERGERE UNIFORMEMENTE IN $[-R,R]$ (MA IL TEOREMA NON CE LO DICE).

DIMOSTRAZIONE

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}$$

FISSO $\bar{x} \in (-R, R)$, $R = \frac{1}{\ell}$.

STUDIO

$$\sum a_n \bar{x}^n$$

E NOTO CHE

$$\sqrt[n]{|a_n||\bar{x}^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|\bar{x}|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |\bar{x}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \cdot |\bar{x}|$$

SE $\ell|\bar{x}|<1$, PER IL CRITERIO DELLA RADICE (CHE POI DIMOSTRIAMO) LA SERIE CONVERGE.

POSSO FARLO CON IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\left| \frac{a_{n+1} \bar{x}^{n+1}}{a_n \bar{x}^n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |\bar{x}| \longrightarrow \ell |\bar{x}|$$

CONVERGE SE

$$\ell |\bar{x}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |\bar{x}| < \frac{1}{\ell} = R$$

COSA POSSO DIRE SULLA CONVERGENZA UNIFORME?

$$\left| \sum_{n=0}^{K} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{K} |a_n||x|^n$$

$$\sup \left| \sum_{n=0}^{K} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{K} \sup \left(|a_n||x|^n \right)$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE + CAUCHY-SCHWARTZ
+
IL SUP DI UNA SOMMA È MINORE DELLA SOMMA DEI SUP

SIA $|x| < (R-\delta)$, CONSIDERO

$$\sum \sup_{(-R+\delta, R-\delta)} \left(|a_n||x|^n \right) = \sum_{n=0}^{K} |a_n| (R-\delta)^n$$

PER MONOTONIA.

ALLORA, USANDO IL CRITERIO DELLA RADICE,

$$\sqrt[n]{|a_n|(R-\delta)^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,(R-\delta) \to \ell(R-\delta) = \ell\,\frac{1}{\ell} - \ell\delta = 1 - \ell\delta$$

ESCLUDENDO GLI ESTREMI $(\delta = 0)$, SI HA CHE IL LIMITE È < 1.

LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE, E QUINDI UNIFORMEMENTE, IN TUTTI GLI INTERVALLI $[-R+\delta, R-\delta]$.

(NOTA: CI SONO CASI IN CUI HO CONVERGENZA UNIFORME - MA NON TOTALE - IN UN ESTREMO).

· ESERCIZIO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |(-1)| = 1 \qquad \Rightarrow \quad R = 1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

PROVO A CALCOLARNE LA SOMMA.

$$(-1)^n x^n = (-x)^n = t^n \qquad t = -x$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

PERCIÒ LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE, IN $(-1, 1)$, A $\dfrac{1}{1+x}$.

· OSSERVAZIONE

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]'$$

INTEGRANDO,

$$\int_0^x [\ln(1+x)]'\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]' dx$$

POSSO SCAMBIARE SOMMA E INTEGRALE PERCHÈ HO CONVERGENZA UNIFORME.

HO SCOPERTO ALLORA CHE

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{m+1}}{m+1} = \ln(1+x)$$ SERIE DI TAYLOR

· <u>ESERCIZIO</u>

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^{2m}$$

$$t = -x^2$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} t^m = \frac{1}{1-t} \quad \text{PER } |t|<1$$

ALLORA

$$\sum_{m\geq 0} (-1)^m x^{2m} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{PER } x\in(-1,1).$$

COME PRIMA, RICONOSCO

$$\frac{d}{dx}\left[\text{ARCTg}(x)\right] = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m x^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left[(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right]$$

INTEGRANDO,

$$\text{ARCTg}(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1}$$

E HO TROVATO UN'ALTRA SERIE DI TAYLOR.

· <u>ESERCIZIO</u>

SIA

a_m = m-ESIMA CIFRA DELLO SVILUPPO DECIMALE DI π

$a_0 = 3 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = 5 \quad \dots$

CONSIDERO LA SERIE DI POTENZE

$$\sum_{m \geq 0} a_m x^m$$

QUANTO VALE $\frac{a_{m+1}}{a_m}$? NON CONVERGE. CONSIDERO ALLORA
(NON E' INFINITESIMO!)

$$1 \leq \sqrt[m]{|a_m|} \leq \sqrt[m]{9} \xrightarrow[m \to \infty]{} 1$$

PERCIÒ LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE, IN $(-1,1)$, A UNA FUNZIONE $S(x)$

CONOSCO IL SUO VALORE IN 0 E IN

$$S\left(\frac{1}{10}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{1}{10}\right) + a_2\left(\frac{1}{100}\right) + \ldots = \pi$$

· ESEMPIO

$$\sum b_m x^m$$

CON $b_m = \begin{cases} 0 & m \text{ PARI} \\ 2^m & m \text{ DISPARI} \end{cases}$

HO LE SOTTOSUCCESSIONI

$$b_{2k} = 0 \qquad \sqrt[2k]{0} = 0$$

$$b_{2k+1} = 2^{2k+1} \qquad \sqrt[2k+1]{|b_k|} = 2 = l$$

IL CRITERIO STUDIATO CONTINUA A VALERE SE SCELGO COME l IL VALORE PIÙ GRANDE TRA QUELLI CHE OTTENGO PER LE VARIE SOTTOSUCCESSIONI.

$$\sum_{m=0}^{k} b_m x^m = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{2k+1} x^{2k+1} = 2x \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(2x)^2\right]^k$$

SCEGLIENDO $t = (2x)^2 = 4x^2$, SCOPRO CHE PER $|x| < \frac{1}{2}$ SI HA CONVERGENZA PUNTUALE A

$$\sum_{m=0}^{+\infty} b^m x^m = 2x \cdot \frac{1}{1-4x^2}$$

· FUNZIONI ANALITICHE

$$f: [a,b) \to \mathbb{R}$$

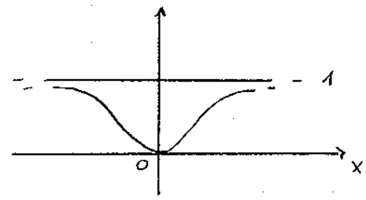
È ANALITICA SE

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

OVVERO SE $f \in C^\infty$ E COINCIDE CON LA SUA SERIE DI TAYLOR.

· ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$



① $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \Rightarrow \quad f \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f''(x) = \left[-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right] e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{4-6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left[\frac{p(x)}{x^{3k}}\right] \sim \underbrace{e^{-t^2} \cdot t^{3k}}_{\downarrow\, t\to+\infty \;\; 0} \cdot \underbrace{p(0)}_{\text{cost.}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

SCRIVO IL POLINOMIO DI TAYLOR.

$$f^{(k)}(0) = 0$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{0}{k!} x^k}_{=0} + R_N(x,0) \xrightarrow[N\to\infty]{\;\times\;} 0$$

LA FUNZIONE $f(x)$ NON COINCIDE CON ZERO IN UN INTORNO DI $x=0$.
NON È VERO CHE L'ERRORE $R_N(x,0)$ È INFINITESIMO.
ALLORA $f(x)$ NON È UNA FUNZIONE ANALITICA IN OGNI INTORNO DI $x_0=0$.
SI NOTI CHE $f(x)$ HA UNO ZERO DI ORDINE INFINITO.

· TEOREMA

$$f \in C^{\infty}(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

SE $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ E $M>0$ t.c. $\forall k>k_0$ VALE

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k!}{\delta^k} \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

ALLORA f È ANALITICA E LA SUA SERIE DI TAYLOR HA RAGGIO DI CONVERGENZA $R \geq \delta$.

PROOF: RESTO IN FORMA DI LAGRANGE,

$$f(x) = T_k(f, x_0) + R_k(f, x_0)$$

$$R_k(f,x_0) = \frac{f^{j}(\xi)}{j!}(x-x_0)^j \leq M\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)^j$$

$(j=k+1)$. POICHÉ $|x-x_0|<\delta$, $R_m \to 0$.

· ESEMPIO

$$f(x) = e^x \quad \text{PER} \quad -\delta < x < \delta$$

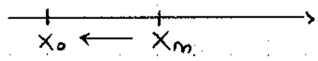
$$e^x < e^{\delta} = M \leq M \frac{k!}{\delta^k}$$

PER QUALSIASI SCELTA DI δ.

· OSSERVAZIONE

SUPPONIAMO f ANALITICA,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$$

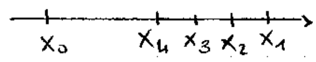


SI SUPPONGA ANCHE

$$f(x_0)=0, \quad \exists \{x_m\} \to x_0 \quad \text{CON} \quad f(x_m)=0 \ \forall m.$$

ALLORA

$$f(x_0) = a_0 = 0.$$



SE

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

ALLORA PER ROLLE

$$\exists \xi_1 \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f'(\xi_1) = 0$$

ALLORA HO COSTRUITO $\{\xi_m\}$ t.c. $\xi_m \to x_0$ E

$$f'(\xi_m) = 0 \quad \forall m$$

SI È SUPPOSTA $f \in C^{\infty}$, QUINDI PER CONTINUITÀ

$f'(x_0) = 0$

OSSERVO CHE

$$a_K = \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_1 = f'(x_0) = 0 \\ a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \end{array}$$

POSSO RIPETERE IL RAGIONAMENTO COSTRUENDO $\{\eta_m\}$ E SCOPRIREI, USANDO ROLLE, CHE $f''(x_0) = 0$. COSÌ VIA, DIMOSTRO CHE $f^{(K)}(x_0) = 0$.

f È IDENTICAMENTE ZERO IN TUTTO L'INTORNO IN CUI VALE LO SVILUPPO.

FOCUS: SERIE DI TAYLOR

SI È VISTO CHE, DATA UNA SERIE DI POTENZE DI RAGGIO DI CONVERGENZA $R > 0$ E LA FUNZIONE SOMMA DELLA SERIE $S(x)$, I COEFFICIENTI DELLA SERIE SI ESPRIMONO MEDIANTE LE DERIVATE DI $S(x)$ COME

$$a_K = \frac{S^{(K)}(x_0)}{K!} \quad \forall K \geq 0$$

(INFATTI $S(x)$ È C^{∞} E IL RAGGIO DI CONVERGENZA DI $S^{(K)}(x)$ È R).

DATA ORA UNA FUNZIONE $f(x)$, SE È POSSIBILE RAPPRESENTARLA COME UNA SERIE DI POTENZE

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K (x - x_0)^K$$

ALLORA f SI DICE ANALITICA, E SI HA NECESSARIAMENTE

$$a_K = \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}$$

SI DICE SERIE DI TAYLOR DI $f(x)$ CENTRATA IN x_0

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!} (x - x_0)^K$$

· ESERCIZIO

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(1-x)^k = x\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)^k = x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(x-1)^k$$

$$(1-x)^k = (-1)^k(\underbrace{x-1}_{t})^k$$

$$\sum (-1)^k t^k$$

$R=1, \qquad -1<t<1 \Rightarrow 0<x<2$

PERCIÒ HO $R=1$ E CONVERGENZA PUNTUALE $\forall x \in (0,2)$.

INOLTRE HO CONVERGENZA TOTALE ($\Rightarrow$ UNIF.) IN $[a,b] \subseteq (0,2)$.

(SE RIPRENDO

$$x\sum(-1)^k(x-1)^k$$

SCOPRO CHE CONVERGE PUNTUALMENTE ANCHE IN 0.)

NOTO CHE

$$\sum(-t)^k = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} \qquad \text{IN } -1<t<1$$

ESCLUDENDO $x=0$,

$$x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(x-1)^k = x\cdot\frac{1}{1+(x-1)} = 1$$

· ESERCIZIO

$$\sum_{k\geq 1}\frac{x^{2k}}{(k-1)!} = x\sum_{k\geq 1}\frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

$x^2=t$

$$\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{(k-1)!} \qquad a_k=\frac{1}{(k-1)!} \qquad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1/k!}{1/(k-1)!} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0 = \ell \Rightarrow R=+\infty$$

CONSIDERIAMO

$$\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}$$

NOTO CHE

$$\left(\frac{x^{2k}}{k!}\right)' = 2\,\frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

PERCIÒ

$$\sum_{k\geq 1} f = \frac{1}{2}x \sum_{k\geq 1} 2\,\frac{x^{2k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{2}x \sum_{k\geq 1}\left(\frac{x^{2k}}{k!}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}x\,\frac{d}{dx}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{k!}\right) = \frac{1}{2}x\,\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = x^2 e^{x^2}$$

· ESERCIZIO

$$\sum_{m\geq 0}(2^m+1)x^m$$

$$a_m = 2^m+1$$

$$\sqrt[m]{2^m+1} \quad \Rightarrow \quad 2 = \sqrt[m]{2^m} \leq \sqrt[m]{2^m+1} \leq \sqrt[m]{2^m+2^m} = 2\sqrt[m]{2^m} \to 2$$

OTTENGO IL LIMITE PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI.

$$R = \frac{1}{2} \quad (\ell = 2)$$

PER $x = \pm\frac{1}{2}$,

$$\sum_{m\geq 0}\left[\frac{2^m+1}{2^m}\right](\pm 1)^m \qquad \text{CHE NON CONVERGE.}$$

ALLORA HO CONVERGENZA PUNTUALE IN $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, UNIFORME IN $[a,b] \subseteq \left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)$.

MI RESTRINGO IN UN INTERVALLO $[a,b]$ IN CUI HO CONVERGENZA UNIFORME (ANCHE DEGLI ADDENDI), ALLORA

$$\sum_{m\geq 0}(2^m+1)x^m = \sum_{m\geq 0}2^m x^m + \sum_{m\geq 0}x^m = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-x}$$

(SI NOTI CHE È RICHIESTA LA CONVERGENZA UNIFORME, INFATTI

$$\sum_{m\geq 0}0 = \sum_{m\geq 0}(1-1) \neq \sum_{m\geq 0}1 - \sum_{m\geq 0}1$$ PERCHÈ NON CONVERGONO).

· ESERCIZIO

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

u È C^1, MA $u' = u$, QUINDI u' È C^1.. MA ALLORA u È C^2 ... E VIA DICENDO.

NOTO CHE $u(x) \in C^\infty(-\delta, \delta)$.

$u' = u \Rightarrow u'(0) = u(0) = 1$

$u'' = u' \Rightarrow u''(0) = u'(0) = 1$

$u^{(k+1)} = u^{(k)} \Rightarrow u^{(k+1)}(0) = u^{(k)}(0) = 1$

ALLORA

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_N$$

MI CHIEDO SE

$$|u^{(k)}(x)| \le M \frac{k!}{\delta^k} \qquad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

POICHÈ LA u È LIMITATA, ALLORA LO È ANCHE u' (PERCHÈ $u = u'$), QUINDI TUTTE LE DERIVATE SUCCESSIVE. VALE

$|u^{(k)}(x)| \le M \qquad \forall x \in (-\delta', \delta')$ UN PO' PIÙ PICCOLO SE SERVE.

PERCIÒ

$$u(x) = u^{(k)}(x) = \sum_{k \ge 0} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \text{IN} \quad [-\delta', \delta']$$

CONSIDERIAMO ORA

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-u^2(x)} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

① $u \in C^\infty(-\delta, \delta)$

$u(0) = 1$

$u'(0) = e^{-u^2(0)} = e^{-1^2} = \frac{1}{e}$

DERIVO E TROVO

$u' = e^{-u^2}$

$u'' = \frac{d}{dx}(e^{-u^2}) = e^{-u^2}(-2uu')$

$$u''(0) = -2u(0)\,u'(0)\,e^{-u^2(0)}$$
$$= -2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} = -\frac{2}{e^2}$$

POSSO OTTENERE IL POLINOMIO DI TAYLOR ALL'ORDINE CHE VOGLIO.

$$u''' = -2\left[u'u'e^{-u^2} + uu''e^{-u^2} + uu'2uu'e^{-u^2}\right]$$

NOTIAMO CHE

$|u''(0)| \leq 2$

$|u'''(0)| \leq 8$

CRESCE COME UN'ESPONENZIALE, COMUNQUE PIÙ DEBOLE DEL FATTORIALE: u È ANALITICA.

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

· CONV. PUNTUALE:

$$f_n(\bar{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\bar{x})$$

$\forall \bar{x}, \forall \varepsilon \ \exists n_0 = n_0(\bar{x}, \varepsilon)$ t.c. $|f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ SE $n > n_0$

· CONV. UNIFORME:

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = \|f_n(x) - f(x)\|_\infty \to 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x$ SE $n > \bar{n}$

UNIFORME => PUNTUALE: $\sup |f_n - f| \geq |f_n - f|$

· $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ È SPAZIO METRICO COMPLETO. SE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A f, ALLORA f È CONTINUA.

· DOVE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

OCCHIO 1: VALE SOLO SU INTERVALLI LIMITATI.

OCCHIO 2: NON È UNA DOPPIA IMPLICAZIONE. LO SCAMBIO PUÒ FUNZIONARE ANCHE SE NON C'È CONVERGENZA UNIFORME.

· SE f_n E f_n' CONVERGONO UNIFORMEMENTE, ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\left(f_n(x)\right) = f'(x)$$

SERIE DI FUNZIONI

$$S_K(x) = \sum_{n=1}^{K} f_n(x)$$

· CONV. PUNTUALE:

$$S_K(\bar{x}) \longrightarrow S_\infty(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{x})$$

· CONV. UNIFORME:

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{K} f_n(x) \right| = \sup \left| \sum_{n=K+1}^{\infty} f_n(x) \right| \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$$

- CONV. TOTALE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| < +\infty \quad \text{(CONVERGE)}$$

- IMPLICAZIONI

TOTALE => TUTTE

UNIFORME, ASSOLUTA, TOTALE => PUNTUALE

- CRITERIO DI LEIBNIZ

$\sum a_n (-1)^n$ CONVERGE SE $a_n > 0$, $a_n \to 0$, $a_{n+1} < a_n$.

SPESSO IL PRIMO TERMINE È PIÙ GRANDE DELLA SOMMA.

- DOVE HO CONVERGENZA UNIFORME,

$S_\infty(x)$ È CONTINUA

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

a) $R = 0$, CONVERGE SOLO PER $x = 0$.

b) $R = \infty$, CONVERGE PUNTUALMENTE $\forall x \in \mathbb{R}$ E UNIFORMEMENTE IN $[-M, M]$ $\forall M$.

c) $R \in \mathbb{R}$, CONVERGE PUNTUALMENTE IN $(-R, R)$, UNIFORMEMENTE IN $[a, b] \subseteq (-R, R)$, NON CONVERGE IN $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$.

· TEOREMA DI ABEL

SE LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE IN $X = R$, ALLORA CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[a, b] \subseteq (-R, R]$.

· SERIE DI TAYLOR NOTEVOLI

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad |x| < 1$$

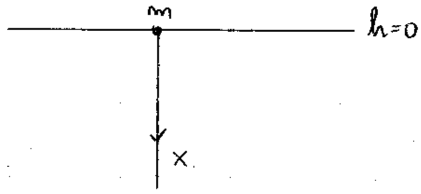
$$\frac{x^m}{1-x} = \sum_{k=m}^{\infty} x^k \qquad |x| < 1$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad |x| < 1$$

- EQUAZIONI DIFFERENZIALI



$$m\underline{x}'' = m\underline{a} = \sum_i \underline{f}$$

$$m x'' = mg - \alpha x'$$

$$x'' + \frac{\alpha}{m} x' = g$$

(EO)

$$x(t) = A + B e^{-\frac{\alpha}{m} t} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

(SP)

$$\bar{x}(t) = ct$$

$$\bar{x}'(t) = c \quad , \quad \bar{x}''(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{mg}{\alpha}$$

INTEGRALE GENERALE :

$$x(t) = \frac{mg}{\alpha} t + A + B e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

- ESEMPIO

$$u'(t) + \frac{1}{1+t^2} u(t) = 1$$

$$u'(t) + a(t) u(t) = b(t)$$

(EO)

$$u'(t) + \frac{1}{1+t^2} u(t) = 0$$

OSSERVO CHE $u(t) = 0$ È SOLUZIONE. QUESTO È VERO PER QUALSIASI OMOGENEA (LA SOLUZIONE È UNO SPAZIO VETTORIALE).

CERCO SOLUZIONI

$u(t) \neq 0$

(CI SONO SEMPRE A MENO CHE LA SOLUZIONE SIA UNO SPAZIO DI DIMENSIONE ZERO).

$$\int_0^t \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt = -\int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = -\mathrm{ARCTg}(t)$$

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{ds}{s} = \ln|s|\Big|_{u(0)}^{u(t)} = \ln\left(\frac{|u(t)|}{|u(0)|}\right) \qquad \text{CON} \quad u(t)=s \;,\; u'(t)\,dt = ds$$

PERCIÒ

$$\ln(|u(t)|) - \ln(|u(0)|) = -\mathrm{ARCTg}(t)$$

$$\frac{|u(t)|}{|u(0)|} = e^{-\mathrm{ARCTg}(t)}$$

$$|u(t)| = |u(0)|\,e^{-\mathrm{ARCTg}(t)}$$

CHE NON È MAI NULLA A MENO CHE SIA $u(0)=0$. MA PERCHÈ QUESTO SIA VERO, DEVE ESSERE $u(t)$ IDENTICAMENTE NULLA (TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY).

HO TROVATO

$$u_0(t) = A\,e^{-\mathrm{ARCTg}(t)} \qquad A \in \mathbb{R}$$

(SP)

$$\bar{u}(t) = a(t)\,e^{-\mathrm{ARCTg}(t)}$$

$$\bar{u}'(t) = a'(t)\,e^{-\mathrm{ARCTg}(t)} + a(t)\,e^{-\mathrm{ARCTg}(t)}\left(-\frac{1}{1+t^2}\right) = e^{-\mathrm{ARCTg}(t)}\left[a'(t) - \frac{1}{1+t^2}\,a(t)\right]$$

SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE NON OMOGENEA,

$$\bar{u}' + \frac{1}{1+t^2}\,\bar{u} = e^{-\mathrm{ARCTg}(t)}\left[a'(t) - \frac{1}{1+t^2}\,a(t)\right] + \frac{1}{1+t^2}\,a(t)\,e^{-\mathrm{ARCTg}(t)} = 1$$

$$a'(t) = e^{\mathrm{ARCTg}(t)}$$

$$a(t) = \int e^{\mathrm{ARCTg}(t)}\,dt$$

CHE SI RISOLVE INTEGRANDO PER PARTI.

· EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA LINEARE DEL 1° ORDINE

$$\boxed{u'(t)+a(t)u(t)=b(t)}$$

(EO)

$u'(t)+a(t)u(t)=0$ CON $a \in C(\mathbb{R})$

$\dfrac{u'(t)}{u(t)} = -a(t)$ INFATTI $u(t) \equiv 0$ È SOLUZIONE, QUINDI LA ESCLUDO.

$\ln(|u(t)|) = -A(t)+c$ CON $A'(t)=a(t)$.

SI NOTI CHE SE a È CONTINUA LA SUA PRIMITIVA ESISTE. SI OTTIENE

$|u(t)| = k e^{-A(t)}$ CON $k=e^c$, VOLENDO.

LO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA È DATO DA

$\{k e^{-A(t)},\ k \in \mathbb{R}\} = \text{SPAN}\{e^{-A(t)}\} \subseteq C^1(-\delta,\delta)$

SI NOTI CHE K PUÒ ESSERE NEGATIVO.

COME DIMOSTRO CHE NON CI SONO ALTRE SOLUZIONI?

MOLTIPLICO L'EQUAZIONE PER UN FATTORE INTEGRANTE,

$e^{A(t)}u'(t) + a(t)u(t)e^{A(t)} = 0$

$(u(t)\, e^{A(t)})' = 0$

HO UNA FUNZIONE C^1 LA CUI DERIVATA È IDENTICAMENTE NULLA.

MA ALLORA LA FUNZIONE È UNA COSTANTE,

$u(t)e^{A(t)} = c$

$u(t) = c\, e^{-A(t)}$

IN QUESTO MODO HO DIMOSTRATO SIA L'ESISTENZA CHE L'UNICITÀ.

(SP)

$\bar{u}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$

L'ESPONENZIALE NON È MAI NULLO; SE ESISTE UNA SOLUZIONE, LA POSSO SCRIVERE COSÌ.

DERIVANDOLA,

$$\bar{u}'(t) = c'(t)e^{-A(t)} + c(t)\left[-a(t)e^{-A(t)}\right]$$ DA SOSTITUIRE IN

$$\bar{u}'(t) + a(t)\bar{u}(t) = b(t)$$ SI OTTIENE:

$$e^{-A(t)}\left[c'(t) - a(t)c(t) + a(t)c(t)\right] = b(t)$$

$$c'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

SE $b \in C(\mathbb{R})$,

$$c(t) = \int_0^t b(s)e^{A(s)}ds$$

$$\bar{u}(t) = e^{-A(t)}\int_0^t b(s)e^{A(s)}ds$$

PERCIÒ TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SONO

$$u(t) = \left[K + \int_0^t b(s)e^{A(s)}ds\right]e^{-A(t)} \qquad K \in \mathbb{R}, \quad A'(t) = a(t)$$

<u>NOTA A POSTERIORI</u>:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \qquad u(t) = \left[K + \int_0^t b(s)e^{-A(s)}ds\right]e^{A(t)} \qquad A'(t) = a(t)$$

IN ANALOGIA CON I SISTEMI LINEARI (L'ESPONENZIALE È LA WRONSKIANA).

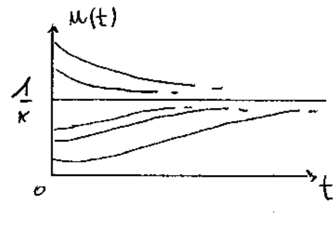
- <u>ESEMPIO</u>

$$u'(t) = u(t)(1 - Ku(t)) = u(t) - Ku^2(t) = f(t, u(t))$$

EQUAZIONE LOGISTICA, $K \in \mathbb{R}^+$.

(NASCE PER CONFUTARE MALTHUS CHE IPOTIZZAVA SOLO LA SUA APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE $u'(t) = u(t)$).

$$f(s) = f(t,s) = s(1-Ks) = 0 \quad \begin{cases} s = 0 \\ s = \frac{1}{K} > 0 \end{cases}$$



PER $s < \frac{1}{K}$, LE SOLUZIONI SONO MONOTONE CRESCENTI, DECRESCENTI PER $s > \frac{1}{K}$. NON INTERSECANO $\frac{1}{K}$, ALTRIMENTI SI PERDEREBBE L'UNICITÀ.

LA RISOLVO COSÌ:

$$\frac{u'}{u(1-Ku)} = 1$$

$$\int_0^t 1\,ds = t = \int_0^t \frac{u'(s)\,ds}{u(1-Ku)} \qquad u'(s)\,ds = dw \quad u(s) = w$$

$$= \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{dw}{w(1-Kw)}$$

$$= \int_{u(0)}^{u(t)} \left[\frac{A}{w} + \frac{B}{(1-Kw)} \right] dw \qquad \frac{A(1-Kw)+Bw}{w(1-Kw)} = \frac{1}{w(1-Kw)}$$

$$= \int_{u(0)}^{u(t)} \left(\frac{1}{w} + \frac{K}{1-Kw} \right) dw$$

$$= \Big[\ln|w| - \ln|1-Kw| \Big]_{u(0)}^{u(t)}$$

$$= \ln\left|\frac{u(t)}{1-Ku(t)}\right| - \ln\left|\frac{u(0)}{1-Ku(0)}\right|$$

$$\left|\frac{u(t)}{1-Ku(t)}\right| = \left|\frac{u(0)}{1-Ku(0)}\right| e^t$$

$$u(t) = A_0 e^t (1-Ku(t))$$

$$(1+KA_0e^t)u(t) = A_0e^t \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{A_0e^t}{1+KA_0e^t}$$

$$u(t) = \frac{\frac{u(0)}{1-Ku(0)} e^t}{1+\frac{Ku(0)}{1-Ku(0)} e^t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{K}$$

LA CRESCITA DELLA POPOLAZIONE SI "AUTOREGOLA" IN BASE ALLA DISPONIBILITÀ DI RISORSE.

· DEF:

(X, d) SPAZIO METRICO COMPLETO.

DIREMO CHE

$T: X \to X$

È UNA CONTRAZIONE SE $\exists \alpha \in (0,1)$ t.c.

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$

· TEOREMA (BANACH - CACIOPPOLI)

$T: (X,d) \to (X,d)$ CONTRAZIONE, ALLORA

$\exists!\, \bar{x} \in X$ t.c. $T(\bar{x}) = \bar{x}$

DIMOSTRAZIONE

SCEGLIAMO $x_0 \in X$. COSTRUIAMO PER RICORRENZA

$$\begin{cases} x_1 = T(x_0) \\ x_{k+1} = T(x_k) = T^{k+1}(x_0) = \underbrace{T(T(T \_ T(x_0)))}_{k+1 \text{ VOLTE}} \end{cases}$$

DIMOSTRIAMO CHE TALE SUCCESSIONE È DI CAUCHY, OVVERO CHE

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ t.c.

$d(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon \quad \forall k \geq N, \forall p$

STIMIAMO

$$d(x_k, x_{k+p}) = d(T(x_{k-1}), T(x_{k+p-1})) = \_ = d(T^k(x_0), T^k(x_p))$$

MA

$$d(T(x_{k-1}), T(x_{k+p-1})) \leq \alpha\, d(x_{k-1}, x_{k+p-1}) = \alpha\, d(T(x_{k-2}), T(x_{k+p-2}))$$
$$\leq \alpha^2 d(x_{k-2}, x_{k+p-2})$$

CONTINUANDO IN QUESTA MANIERA SCOPRO CHE

$$d(x_k, x_{k+p}) \leq \alpha^k d(x_0, x_p) \qquad \text{(I)}$$

STIMA CHE PERÒ DIPENDE ANCORA DA p.

SO CHE

$$
\begin{aligned}
d(x_0,x_p) &\leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_p) \leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+d(x_2,x_p)\\
&\leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+ \_\_ + d(x_{p-1},x_p)\\
&= d(x_0,x_1)+d(T(x_0),T(x_1))+ \_\_ + d(T^{p-1}(x_0),T^{p-1}(x_1))\\
&\leq d(x_0,x_1)+\alpha d(x_0,x_1)+ \_\_ + \alpha^{p-1} d(x_0,x_1)\\
&= d(x_0,x_1)\left[1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+ \_\_ +\alpha^{p-1}\right]
\end{aligned}
$$

PERCIÒ

$$
d(x_0,x_p) \leq d(x_0,x_1)\,\frac{1}{1-\alpha} \qquad \text{(II)}
$$

INFATTI HO SOSTITUITO UNA SOMMA FINITA CON LA SERIE, CHE È CERTAMENTE PIÙ GRANDE. QUESTA STIMA NON DIPENDE DA p.

ALLORA (I E II)

$$
d(x_k,x_{k+p}) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,d(x_0,x_1) = C_1\alpha^k < \varepsilon \qquad \forall k>N
$$

CON

$$
\alpha^k < \frac{\varepsilon}{C_1}
$$

$$
k > \left[\log_\alpha\left(\frac{\varepsilon}{C_1}\right)\right]+1 = N
$$

SI È MOSTRATO CHE

$$
\{x_k\} \text{ È DI CAUCHY} \quad \Rightarrow \quad x_k \to \bar{x} \in X \qquad \text{(III)}
$$

DOBBIAMO MOSTRARE CHE TALE PUNTO RESTA FISSO DOPO LA CONTRAZIONE E CHE È L'UNICO CON QUESTA PROPRIETÀ.

NOTIAMO CHE

$$
T(x_k) = x_{k+1}
$$

$$
|T(x)-T(y)| \leq \alpha\,|x-y|
$$

LA FUNZIONE $T(x)$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ α.

IN PARTICOLARE $T(x)$ È CONTINUA, QUINDI

$$\begin{array}{ccc} T(x_k) & = & x_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\bar{x}) & = & \bar{x} \end{array} \qquad (IV)$$

PERCIÒ $\bar{x}$ È UN PUNTO FISSO.

CONSIDERIAMO ORA

$Z = \{ \text{PTI FISSI DI } T \} \subseteq X$

PRESI $\bar{x}, \bar{y} \in Z$, $\bar{x} \neq \bar{y}$,

$\bar{x} = T(\bar{x})$

$\bar{y} = T(\bar{y})$

CERCO LA LORO DISTANZA:

$$0 < d(\bar{x},\bar{y}) = d(T(\bar{x}),T(\bar{y})) \leq \alpha\, d(\bar{x},\bar{y}) < d(\bar{x},\bar{y})$$

POICHÈ $\alpha < 1$.

MA QUESTO È ASSURDO E LA CONTRADDIZIONE SI RISOLVE SOLO SE

$$d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \qquad (V)$$

· ESEMPIO

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\mathbb{R}$ CON LA NORMA EUCLIDEA.

$$f(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\exists ? \quad x_0 = f(x_0)$$

PER LAGRANGE,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y|$$

$$|f'(x)| = \left| \frac{2}{2(1+x^2)^2} \right| = \frac{|x|}{(1+x^2)^2}$$

MA

$$(1 \pm x)^2 = 1 + x^2 \pm 2x \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(1+x^2) \geq |x|$$

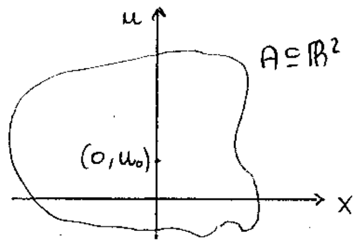
ALLORA

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{2}$$

PERCIÒ $f(x)$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ < 1. È UNA CONTRAZIONE.

· <u>TEOREMA</u> (PICARD - LINDELÖF o CAUCHY - LIPSCHITZ)

DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY



$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

① $f \in C(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO.

② $(0, u_0) \in A$

③ f SIA LIPSCHITZIANA NELLA SUA SECONDA VARIABILE, INDIPENDENTEMENTE DA x:

$$|f(x,u) - f(x,w)| \leq L\,|u-w| \quad \text{IN } A \text{, CON } L \text{ INDIPENDENTE DA } x.$$

ALLORA $\exists !\, u \in C^1(-\delta, \delta)$ TALE CHE

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u'(x) = f(x, u(x)) \end{cases}$$

OVVERO UN'UNICA SOLUZIONE.

DIMOSTRAZIONE

SIA $u(x)$ UNA SOLUZIONE. ALLORA

$$u(x) = u_0 + \int_0^x f(s, u(s))\, ds$$

PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. INFATTI

u È DERIVABILE (E CONTINUA), f È CONTINUA $\Rightarrow$ $f(x, u(x))$ È CONTINUA.

LE FORMULAZIONI DIFFERENZIALE E INTEGRALE SONO EQUIVALENTI.

IDENTIFICO

$$C^0[-\delta, \delta] = X$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [-\delta,\delta]} |f(x) - g(x)|$$

(X, d) SPAZIO METRICO COMPLETO

$$T(v) = u_0 + \int_0^x f(s, v(s))\, ds \quad = w(x)$$

VOGLIO MOSTRARE CHE L'OPERATORE $T(v)$ È UNA CONTRAZIONE.

PRENDO

$$v, w \in C[-\delta, \delta]$$

$$\| T(v) - T(w) \|_\infty = \sup_{x \in [-\delta,\delta]} \left| u_0 + \int_0^x f(s, v(s))\, ds - u_0 - \int_0^x f(s, w(s))\, ds \right|$$

$$\leq \sup_{x \in [-\delta,\delta]} \int_0^x | f(s, v(s)) - f(s, w(s)) |\, ds$$

$$\leq \sup_{x \in [-\delta,\delta]} \int_0^x L | v(s) - w(s) |\, ds \qquad \text{(PER LIPSCHITZIANITÀ)}$$

NON È UN'OPERAZIONE CORRETTA, MA È UNA DISUGUAGLIANZA CERTA.

$$\leq L \| v - w \|_\infty \sup_{x \in [-\delta,\delta]} \int_0^x ds = L \| v - w \|_\infty \cdot \delta$$

HO TROVATO CHE

$$\| T(v) - T(w) \|_\infty \leq (L\delta) \| v - w \|_\infty$$

SCEGLIENDO $\delta < \frac{1}{L}$,

$$d(T(v), T(w)) \leq (L\delta)\, d(v, w) \quad \Rightarrow \quad T(v) \text{ È UNA CONTRAZIONE.}$$

· ESEMPIO

$$u'(x) = x^2 u^2(x)$$ NON LINEARE.

SI OSSERVA CHE $u = 0$ È SOLUZIONE.

SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA?

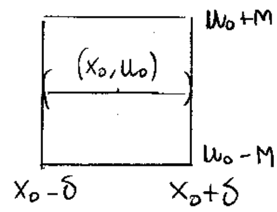
CONTINUA, NON HO RICHIESTE SULLE CONDIZIONI INIZIALI; INFINE,

$$|x^2u^2 - x^2w^2| \le L\,|u-w|$$
$$\shortparallel$$
$$x^2|u-w||u+w|$$

NON È VERO CHE, A PRIORI E $\forall x$, POSSO TROVARE L t.c.

$$x^2|u+w| \le L$$

MA SE MI METTO IN UN RETTANGOLO,



$$x^2|u+w| \le \max\{(x_0-\delta)^2,(x_0+\delta)^2\}\max\{(u_0+M),(u_0-M)\}$$

IN GENERALE, SE $f \in C^1$

$$|f(x,u) - f(x,w)| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,\xi)\right| |u-w| \le M|u-w|$$

MA

$$\frac{\partial f}{\partial u} \in C$$

QUINDI AMMETTE UN MASSIMO SU UN COMPATTO (COME UN RETTANGOLO).

ALLORA, OGNI VOLTA CHE TROVO UN CAMPO $\in C^1$, NON HO BISOGNO DI DIMOSTRARE A MANO LA LIPSCHITZIANITÀ.

TORNANDO A NOI, POICHÉ $u=0$ È SOLUZIONE, TUTTE LE ALTRE SOLUZIONI NON SI ANNULLANO MAI (ALTRIMENTI, SCEGLIENDO L'INTERSEZIONE COME C.I. DI UN PROBLEMA DI CAUCHY AVREI DUE SOLUZIONI DISTINTE).

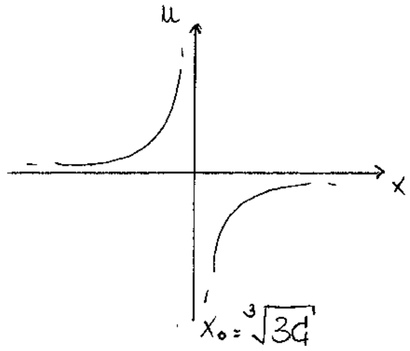
DIVIDO PER u^2:

$$\frac{u'(x)}{u^2(x)} = x^2$$

PASSO ALLE PRIMITIVE:

$$\int \frac{u'(x)\,dx}{u^2(x)} = \int x^2\,dx$$

$$\int \frac{ds}{s^2} \stackrel{''}{=} -\frac{1}{s} + K \qquad u(x) = s \qquad u'(x)\,dx = ds$$



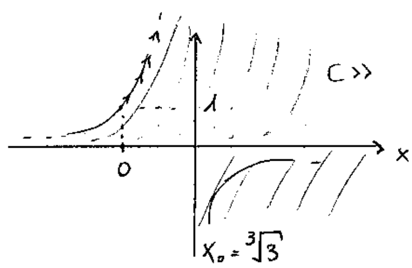
DA CUI

$$-\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{C_1 - \frac{1}{3}x^3}$$ <u>INTEGRALE GENERALE</u>.

PER $C_1 \in \mathbb{R}$, TUTTE LE SOLUZIONI (TRANNE QUELLA NULLA) SONO DESCRITTE DALL' INTEGRALE GENERALE.

SIA DATA $u(0) = 1$. ALLORA

$$C_1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{3}{3 - x^3}$$

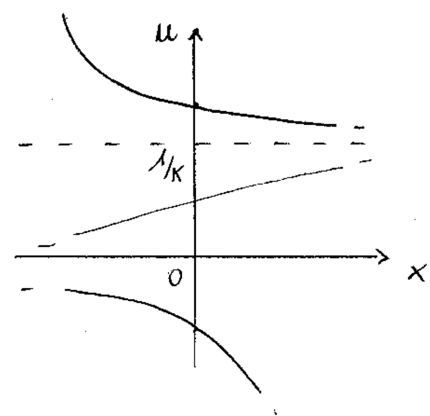


A x_0 LA SOLUZIONE SCAPPA A $+\infty$: STA USCENDO DAI LIMITI FISICI, QUINDI LA DESCRIZIONE NON HA PIÙ SENSO PER $x \geq x_0$.

LA SOLUZIONE DEVE ESISTERE PER INTERVALLI E L'INSIEME MASSIMALE DI DEFINIZIONE DI $u(x)$ COSÌ SCRITTO NON È UN INTERVALLO. QUALE DEI DUE È DA SCEGLIERE? DIPENDE DALLA CONDIZIONE INIZIALE.

· <u>ESEMPIO</u>

$$u'(x) = u(x)\left[1 - K u(x)\right]$$



PUNTI DI EQUILIBRIO:

$$u(x) = 0 \quad , \quad u(x) = \frac{1}{K}$$

CONSIDERO CONDIZIONI INIZIALI NELLE 3 REGIONI

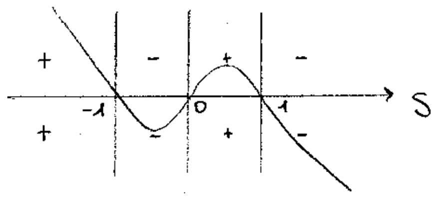
$$u(x_0) > \frac{1}{K} \;, \quad u(x_0) < 0 \;, \quad 0 < u(x_0) < \frac{1}{K}$$

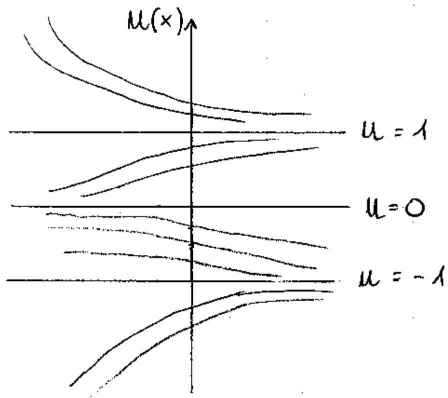
NEL BLOCCO IN MEZZO, LA SOLUZIONE È LIMITATA (QUINDI È SICURAMENTE LIPSCHITZIANA).

· ESEMPIO

$$u'(x) = u(x)\left[1-u(x)\right]\left[1+u(x)\right] \equiv f(u(x))$$

$$f(s) = s(1-s)(1+s) = s - s^3$$





SE SCELGO IL PUNTO INIZIALE TRA -1 E 0,

$u = -1, 0, 1$ SONO EQUILIBRI STABILI.

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = l \quad \Rightarrow \quad u'(x) = u(x) - u^3(x) \longrightarrow l - l^3$$

MA AL LIMITE LA FUNZIONE DEVE ESSERE STAZIONARIA.

$$l - l^3 = l(1-l^2) = 0$$

$$l = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

POICHE' IN TUTTA LA STRISCIA IN CUI È LIMITATA $u'(x)$ È NEGATIVA, IL LIMITE DEVE ESSERE -1.

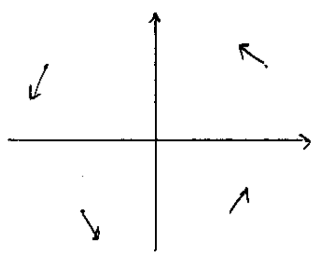
· OSSERVAZIONE

UN'EQUAZIONE DEL I ORDINE* HA SOLUZIONI MONOTONE (MAI OSCILLANTI). INFATTI PER CAMBIARE SEGNO ALLA DERIVATA DEVO ATTRAVERSARE UN EQUILIBRIO, MA QUESTO È IMPOSSIBILE.

· OSSERVAZIONE

$$\underline{u}' = \underline{f}(\underline{u})$$

ESISTE UNA CURVA DI CUI QUESTO CAMPO RAPPRESENTA LA VELOCITÀ.



* SOLO SE È AUTONOMA, OVVERO SE f NON DIPENDE DIRETTAMENTE DA x MA SOLO DA $u(x)$. SE NON È AUTONOMA ANCORA NON POSSO AVERE INTERSEZIONI, MA NON HO PER FORZA SOLUZIONI MONOTONE.

- **ESEMPIO**

$m\underline{a} = \underline{f}$

$m\ddot{x}(t) = f(t, \dot{x}(t), x(t))$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p(t) \\ m\dot{p}(t) = f(t, x, p) \end{cases} \Rightarrow \dot{\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{m} f(t, x, p) \end{pmatrix}$$

DATI

$t_0 \rightarrow \underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0$

SONO SICURO CHE ESISTA UNA SOLUZIONE.

- **EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI**

$u'(x) = a(x) F(u(x))$

CERCO GLI ZERI DI $F(s)$ (SONO LE SOLUZIONI COSTANTI):

$F(s_1) = F(s_2) = \dots = F(s_k) = 0$

ORA PRENDO

$u(x_0) \neq s_j \quad \forall j = 1 \dots k \quad \Rightarrow \quad u(x) \neq s_j$ (OVUNQUE)

DIVIDO PER F E PASSO ALLE PRIMITIVE:

$$\frac{u'(x)}{F(u(x))} = a(x) \quad \Rightarrow \quad H(u(x)) = A(x) + C \quad \text{CON} \quad H'(s) = \frac{1}{F(s)}$$

SE H È INVERTIBILE

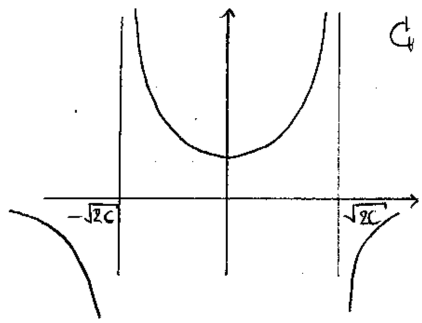
$u(x) = H^{-1}(A(x) + C)$

NOTA:

TOLTI GLI EQUILIBRI IN CUI $F(u(x)) = 0$, LA FUNZIONE $H'(u(x)) = \frac{1}{F(u(x))}$ È BEN DEFINITA E DIVERSA DA ZERO. ALLORA $H(s)$ È CONTINUA E MONOTONA, PERCIÒ SEMPRE INVERTIBILE (ANCHE SE NON NECESSARIAMENTE IN MODO ESPLICITO).

ESEMPIO

$C_1 > 0$



$$u'(x) = x\, u^2(x)$$

$$\frac{u'(x)}{u^2(x)} = x$$

$$-\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{C_1 - \frac{1}{2}x^2}$$

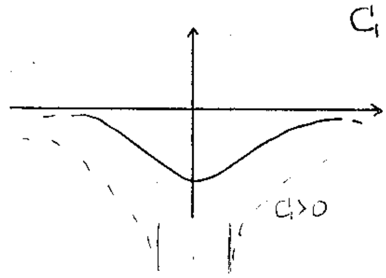
QUALE RAMO PRENDO? DIPENDE DALLE C.I.

PER $C_1 > 0$,

$$2C_1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2C}$$

PER $C_1 = 0$ I DUE ASINTOTI COINCIDONO.

$C_1 < 0$



EQUAZIONI DI BERNOULLI

$$u'(x) = a(x)\cdot u(x) + b(x)\, u^p(x) \qquad p \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

CONSIDERO

$$z(x) = u^K(x) \qquad u = 0 \text{ È SOLUZIONE; LA ESCLUDO.}$$

$$z'(x) = K\, u'(x)\, u^{K-1}(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{K}\,\frac{z'(x)}{z^{\frac{K-1}{K}}(x)} \qquad \left(u^{K-1}(x) = z(x)^{\frac{K-1}{K}} \right)$$

SOSTITUENDO,

$$\frac{1}{K}\,\frac{z'(x)}{z^{\frac{K-1}{K}}(x)} = a(x)\, z^{\frac{1}{K}}(x) + b(x)\, z^{p/K}(x)$$

$$z'(x) = K\left[a(x)z(x) + b(x)\right] \quad \text{SE } K = 1-p \qquad \frac{1}{K} + \frac{K-1}{K} = 1$$

$$\frac{p}{K} + \frac{K-1}{K} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1-p$$

$$z(x) = \left[c + \int K\, b(s)\, e^{KA(s)}\, ds\right] e^{-KA(x)} \qquad K \neq 0 \Rightarrow p \neq 1$$

$$= u^K(x) = u^{1-p}(x)$$

PERCIÒ, IN GENERALE, EFFETTUO IL CAMBIO

$$u(x) = z(x)^{\frac{1}{1-p}} \qquad z(x) = u(x)^{1-p}$$

· ESERCIZIO

$$u'(t) = (1+2t)\, e^{-u(t)}$$

NON ESISTE ALCUNA u COSTANTE CHE ANNULLI IL SECONDO MEMBRO (NON CI SONO EQUILIBRI).

$$\int u'(t) e^{u(t)}\, dt = \int (1+2t)\, dt$$

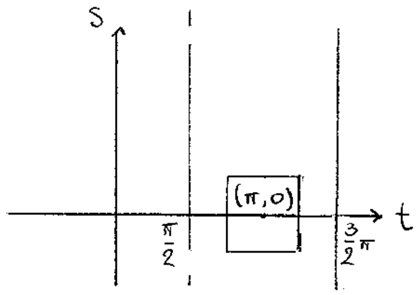
$$e^{u(t)} = t^2 + t + c$$

IN LINEA DI PRINCIPIO È FINITA QUI: BISOGNA ORA VEDERE SE LA FUNZIONE È INVERTIBILE E SE LA POSSO ESPLICITARE. QUI,

$$u(t) = \ln(t^2 + t + c) \qquad c \in \mathbb{R}$$

· ESERCIZIO

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{t}{\cos(u(t))} \\ u(0) = \pi \end{cases}$$

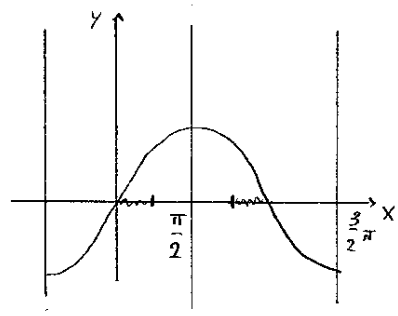


$$f(t, u(t)) = f(t, s) = \frac{t}{\cos(s)}$$ BEN DEFINITA IN UN INTORNO DI $(\pi, 0)$

$$\cos(u(t))\, u'(t) = t$$

$$\sin(u(t)) = \frac{1}{2} t^2 + K$$

$$0 = \sin(\pi) = \frac{1}{2}(0)^2 + K \quad \Rightarrow \quad \sin(u(t)) = \frac{1}{2} t^2$$



INVERTO LA FUNZIONE TRA $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{3}{2}\pi$:

$$u(t) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2} t^2\right)$$

ESERCIZIO

$$u'(t) + t\,u(t) = t^3 u^2(t)$$

SOSTITUISCO

$$u(t) = z^{\frac{1}{1-2}}(t) = \frac{1}{z(t)}$$ (SICCOME 0 È SOLUZIONE SOPRA, $z(t) \neq 0$).

$$u'(t) = -\frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

E OTTENGO

$$-\frac{z'(t)}{z^2(t)} + t\,\frac{1}{z(t)} = t^3\,\frac{1}{z^2(t)}$$

$$-z'(t) + t\,z(t) = t^3$$ (HO MOLTIPLICATO PER $z^2(t)$).

RISOLVO L'OMOGENEA

$$z'(t) - t\,z(t) = 0$$

$$a(t) = -t \quad \Rightarrow \quad z_0(t) = c\,e^{\frac{1}{2}t^2}$$

CERCO LA SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$z_p(t) = c(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$z'_p(t) = c'(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2} + c(t)\,t\,e^{\frac{t^2}{2}}$$

SOSTITUENDO,

$$-(c' + c\,t)\,e^{\frac{t^2}{2}} + t\cdot c\,e^{\frac{t^2}{2}} = t^3$$

$$c'(t) = -t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$c(t) = \int \left[t^2(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}\right]dt = t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - \int 2te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + 2e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(POSSIAMO TRASCURARE LA COSTANTE, ANDRÀ SOLO AD AGGIUNGERSI A QUELLA TROVATA PRIMA). L'INTEGRALE GENERALE È

$$z(t) = t^2 + 2 + c\,e^{\frac{1}{2}t^2}$$

INFINE

$$u(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{t^2 + 2 + c\,e^{t^2/2}}$$

- ESERCIZIO

$$u'(x) - 2u(x) = 2(e^x + x)\sqrt{u(x)} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$u(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(x) = z^2(x)$$

$$u'(x) = 2z'(x)z(x)$$

SOSTITUENDO,

$$2z'z - 2z^2 = 2(e^x + x)z$$

ALTERNATIVAMENTE, POSSO GUARDARE LA PARTE LINEARE DELL'EQUAZIONE

$$u_0'(x) - 2u_0(x) = 0$$

$$u_0(x) = ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

CERCO SOLUZIONI PARTICOLARI NELLA FORMA

$$\bar{u}(x) = c(x)e^{2x}$$

$$\bar{u}'(x) = c'e^{2x} + 2ce^{2x}$$

$$c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} - 2c(x)e^{2x} = 2(e^x + x)\sqrt{c(x)}\,e^x$$

$$c'(x) = \frac{2e^x(e^x + x)}{e^{2x}}\sqrt{c(x)}$$

$$\frac{c'(x)}{\sqrt{c(x)}} = 2 + 2xe^{-x}$$

PASSANDO ALLE PRIMITIVE (INTEGRO IL SECONDO MEMBRO PER PARTI),

$$2\sqrt{c(x)} = 2(x - xe^{-x} - e^{-x}) + k$$

$$c(x) = \left[x(1 - e^{-x}) - e^{-x} + k\right]^2$$

(SI NOTI CHE STAVOLTA NON POSSO TRASCURARE LA COSTANTE PERCHÈ IL PROBLEMA NON È LINEARE; QUESTE SONO TUTTE LE SOLUZIONI, NON USERÒ IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).

· EQUAZIONI OMOGENEE

$$u'(t) = \frac{t^3 + u^3(t)}{t\, u^2(t)} = \frac{t^2}{u^2(t)} + \frac{u(t)}{t}$$

$$f(t, u(t)) \sim f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$$

EQUAZIONI CON QUESTA PROPRIETÀ SONO DETTE OMOGENEE.

$$z(t) = \frac{u(t)}{t}$$

$$z'(t) = \frac{u'(t)t - u(t)}{t^2} = \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2}$$

$$u'(t) = t\left[z'(t) + \frac{u(t)}{t^2}\right] = t\,z'(t) + z(t)$$

(POTEVO TROVARLO ANCHE DERIVANDO $u(t) = t\,z(t)$). SOSTITUENDO,

$$t\,z'(t) + z(t) = \frac{1}{z^2(t)} + z(t) \quad \Rightarrow \quad z'(t)z^2(t) = \frac{1}{t}$$

PASSANDO ALLE PRIMITIVE,

$$\frac{1}{3} z^3(t) = \ln|t| + c$$

$$z(t) = \sqrt[3]{3\ln|t| + c} \quad \Rightarrow \quad u(t) = t\,(3\ln|t| + c)^{\frac{1}{3}}$$

· EQUAZIONI DI RICCATI

$$y'(x) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

LE EQUAZIONI DI RICCATI NON SI INTEGRANO, PERÒ CONOSCENDO UNA SOLUZIONE SE NE TROVANO ALTRE.

AD ESEMPIO,

$$y'(x) = -2(x+1)y^2(x) - 2(2x+3)y(x) - (2x+4)$$

CERCO

$$y(x) = \text{cost.} = c \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = 0$$

SOSTITUENDO,

$$2(x+1)c^2 + 2(2x+3)c + (2x+4) = 0$$

$$2(c+1)^2 x + 2(c+1)(c+2) = 0$$

CHE È VERIFICATA SSE

$$y_0(x) = -1$$

CERCO ORA ALTRE SOLUZIONI NELLA FORMA

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$$

$$y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

SOSTITUENDO,

$$-\frac{z'}{z^2} = -2(x+1)\left(-1+\frac{1}{z^2}\right)^2 - 2(2x+3)\left(-1+\frac{1}{z}\right) - (2x+4)$$

$$= -2(x+1)\left(\underline{1} - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - 2(2x+3)\left(\underline{-1} + \frac{1}{z}\right) - (2x+4)$$

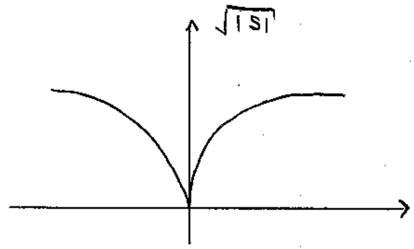
$$= -2(x+1)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z}\right) - 2(2x+3)\frac{1}{z}$$

(INFATTI PER $c=-1$ IL POLINOMIO SI ANNULLA). MOLTIPLICO PER $-z^2$,

$$z'(x) = 2(x+1)(1-2z(x)) + 2(2x+3)z(x)$$

$$= 2z(x) + 2(x+1)$$

· ESEMPIO: TEOREMA DI PEANO



$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt{|u(x)|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$R_i = \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{0}}{h} \longrightarrow \begin{matrix} +\infty & h>0 \\ -\infty & h<0 \end{matrix}$$

SE LA FUNZIONE FOSSE LIPSCHITZIANA, I RAPPORTI INCREMENTALI RIMARREBBERO LIMITATI:

$$\frac{|f(u) - f(w)|}{|u-w|} \leq L$$

QUI NON HO ALCUN L. CIONONOSTANTE,

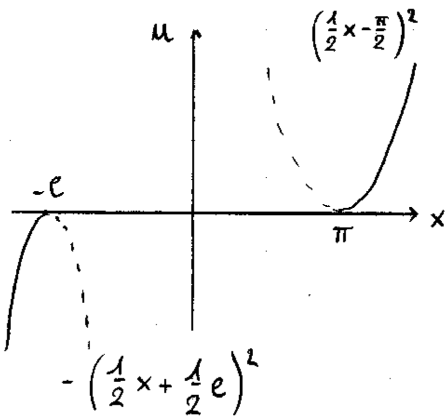
$$\frac{u'(x)}{\sqrt{|u(x)|}} = 1$$

SUPPONENDO $u(x_0) > 0$ E PASSANDO ALLE PRIMITIVE,

$$2\sqrt{u(x)} = x + c$$

$$\sqrt{u(x)} = \frac{1}{2}x + c \quad \Rightarrow \quad u(x) = \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2$$

SE FOSSE $u(x_0) < 0$, $\Rightarrow$ $u(x) = -\left(\frac{1}{2}x + c\right)^2$



LA FUNZIONE COSTRUITA QUI A DESTRA È DI CLASSE C^1 E RISOLVE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

MA SE INVECE DI π, $-e$ AVESSI SCELTO ALTRI DUE VALORI, AVREI COMUNQUE TROVATO UNA SOLUZIONE. NE DEDUCO CHE SI HANNO INFINITE SOLUZIONI DIPENDENTI DA DUE PARAMETRI.

- DEF:

UN PROBLEMA SI DICE BEN POSTO (HADAMARD) SE

1. PER OGNI DATO AMMISSIBILE HO UNA SOLUZIONE.
2. TALE SOLUZIONE È UNICA.
3. LA SOLUZIONE VARIA CON CONTINUITÀ RISPETTO AL DATO.

- ESEMPIO: LEMMA DI GRONWALL

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = \bar{u}_1 \\ u(x_0) = \bar{u}_2 \end{cases} \quad \Big\} \to \quad u_1(x), \ u_2(x)$$

$$u_1(x) = \bar{u}_1 + \int_{x_0}^{x} f(x, u_1(x))\, dx$$

$$u_2(x) = \bar{u}_2 + \int_{x_0}^{x} f(x, u_2(x))\, dx$$

$$\begin{aligned} |u_1(x) - u_2(x)| &= \left| \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \int_{x_0}^{x} \left[f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x)) \right] dx \right| \\ &\leq |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| + \int_{x_0}^{x} | f(x, u_1) - f(x, u_2) |\, dx \\ &\leq |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| + \int_{x_0}^{x} L\, |u_1 - u_2|\, dx \end{aligned}$$

QUEST'ULTIMO PER LIPSCHITZIANITÀ.

SI È SCOPERTO CHE

$$0 \leq \phi(x) \leq c + L \int_{x_0}^{x} \phi(x)\, dx \qquad \text{CON} \quad \phi(x) = |u_1(x) - u_2(x)|.$$

PER GRONWALL,

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|\, e^{L|x - x_0|}$$

QUESTO MI PERMETTE DI QUANTIFICARE COME SI COMPORTA LA SOLUZIONE PER PICCOLE VARIAZIONI DEL DATO INIZIALE.

- LEMMA DI GRONWALL

$\phi : (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

$$0 \le \phi(t) \le c + L\int_{t_0}^{t} \phi(s)\,ds =: \psi(t)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(t) \le c\, e^{L|t-t_0|}$$

DIMOSTRAZIONE:

POICHE' ϕ E' CONTINUA, ψ E' DERIVABILE E

$$\psi'(t) = L\phi(t) \le L\left[c + L\int_{t_0}^{t} \phi(s)\,ds\right] = L\psi(t)$$
$$\psi'(t) - L\psi(t) \le 0$$

QUESTO CONTINUA A VALERE SE MOLTIPLICO PER UNA QUANTITA' NON NEGATIVA,

$$e^{-L(t-t_0)}\left(\psi'(t) - L\psi(t)\right) \le 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)\, e^{-L(t-t_0)}\right) \le 0$$

MA

$$\psi(t)\, e^{-L(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = c$$

INOLTRE

$$\psi(t)\, e^{-L(t-t_0)} \le \psi(t_0)\, e^{-L(t_0-t_0)} = c \qquad \forall t \ge t_0$$

INFATTI PER $t \ge t_0$ TALE FUNZIONE E' DECRESCENTE. ALLORA

$$\psi(t) \le c\, e^{L|t-t_0|} \qquad \forall t$$

E DI CONSEGUENZA

$$\phi(t) \le c\, e^{L|t-t_0|}$$

NOTA: IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO MOSTRA CHE IL PROBLEMA DI CAUCHY SOTTO LE IPOTESI FATTE E' BEN POSTO SECONDO HADAMARD.

· COROLLARIO

$$\begin{cases} u'(t) = f_1(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w'(t) = f_2(t, w(t)) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

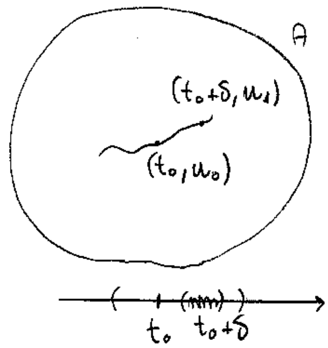
ALLORA SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$|u(t) - w(t)| \leq |u_0 - w_0| \, \|f_1 - f_2\|_\infty \, e^{\tilde{L}|t-t_0|}$$

QUESTO TORNA PARTICOLARMENTE UTILE QUANDO f_1 È UNA FUNZIONE NOTA E f_2 IL SUO POLINOMIO DI TAYLOR.

· ESEMPIO: PROLUNGAMENTO DELLA SOLUZIONE

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \qquad f \in C^1(A) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



$\exists \delta > 0$ t.c.

$\exists! \, u : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY.

SUPPONIAMO DI AVERE UN SECONDO PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0 + \delta) = u_1 \end{cases}$$

CHE COSTRUISCO AD HOC NELL'ESTREMO δ. NELL'INTORNO IN CUI LE DUE SOLUZIONI COESISTONO, DEVONO NECESSARIAMENTE COINCIDERE PER L'UNICITÀ. HO ESTESO COSÌ IL DOMINIO DELLA PRIMA SOLUZIONE (L'HO PROLUNGATA).

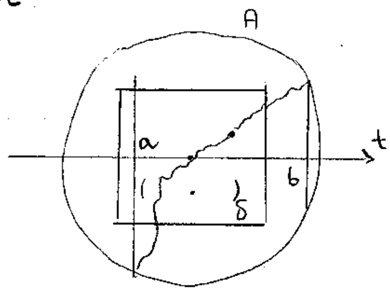
QUAND'È CHE POSSO FARE QUESTO PROLUNGAMENTO?

· TEOREMA

DATO UN PROBLEMA DI CAUCHY, RIPETENDO L'OPERAZIONE DI "PROLUNGAMENTO" DELLA SOLUZIONE SI OTTIENE UNA SOLUZIONE MASSIMALE.

UNA SOLUZIONE MASSIMALE NON PUO' AVERE IL GRAFICO CONTENUTO IN UN COMPATTO $K \subseteq A$ (A APERTO), OVVERO IL GRAFICO ARRIVA SEMPRE ALLA FRONTIERA DI A.

(VEDI P. 459 DISPENSE)

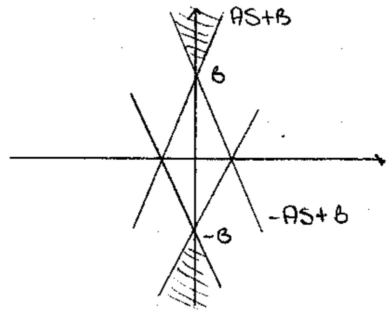


· TEOREMA

SIA $f \in C^1(\mathbb{R}^{m+1})$. SE

$$|f(t,s)| \leq A|s| + B \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad u \in C^1(\mathbb{R})$$



IN ALTRE PAROLE, SE LA FUNZIONE f NON CRESCE PIU' RAPIDAMENTE DI UNA RETTA, POSSO ALLORA ESTENDERE SU TUTTO $\mathbb{R}$ LA SOLUZIONE u.

$$-(A|s|+B) \leq f(t,s) \leq A|s| + B$$

NOTA: f GLOBALMENTE LIPSCHITZIANA CRESCE AL PIU' LINEARMENTE, INFATTI

$$|f(t,y) - f(t,0)| \leq L|y|$$

$$|f(t,y)| \leq |f(t,0)| + |f(t,y) - f(t,0)| \leq |f(t,0)| + L|y|$$

DOVE HO USATO LA DISUGUAGLIANZA TRIANG.

· COROLLARIO

SIA u SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY CON $f(t, u(t))$. SE

$$|f(t, u(t))| \leq A|u(t)| + B$$

$$\Rightarrow \quad u \in C^1(\mathbb{R})$$

NOTA: RICHIEDERE f LIPSCHITZIANA SU TUTTO $(I \times A)$ BASTA A GARANTIRE CHE u ESISTA SU TUTTO I. POSSO ALTRIMENTI RICHIEDERE LA LIPSCHITZIANITA' LOCALE (C^1 VA BENE) E LA CRESCITA AL PIU' LINEARE.

· FOCUS

$$y' = f(t,y) = ay + b$$

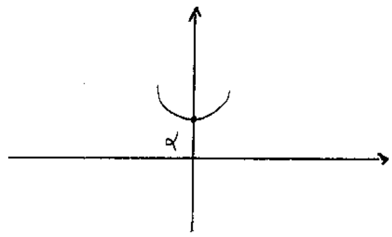
$$y(t) = ce^{at} - \frac{b}{a}$$

a, b COSTANTI. ALLORA LA SOLUZIONE ESISTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

OGNI f CHE CRESCA PIU' LENTAMENTE DI QUESTA PRODUCE SOLUZIONI CHE STANNO SOTTO QUESTA, QUINDI NON ESPLODONO. MI BASTA CHIEDERE LA LIPSCHITZ. LOCALE PER GARANTIRE L'UNICITA'.

· ESEMPIO

$$\begin{cases} u'(t) = \text{ARCTG}(t \cdot u(t)) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$



$f(t,s) = \text{ARCTG}(t \cdot s) \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$u(t) = 0$ È SOLUZIONE, PERCIÒ PER $\alpha > 0$ HO ESISTENZA E UNICITÀ.

SI NOTI CHE 0 È UN PUNTO CRITICO PER LA SOLUZIONE:

$u'(0) = \text{ARCTG}(0 \cdot \alpha) = 0$

STUDIAMOLA QUALITATIVAMENTE. SI HA CHE

$|f(t,s)| \leq \frac{\pi}{2}$

E QUESTO MI GARANTISCE, PER IL TEOREMA APPENA VISTO, CHE

$u : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$

OVVERO POSSO PROLUNGARE LA SOLUZIONE SU TUTTO L'ASSE REALE.

CALCOLO

$$u''(t) = \frac{(t \cdot u(t))'}{1 + t^2 u^2(t)} = \frac{u(t) + t u'(t)}{1 + t^2 u^2(t)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} u''(0) = \alpha > 0 \\ T_2(t,0) = \alpha + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{matrix}$$

CERCO UN ASINTOTO OBLIQUO:

$$m = \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\left[\alpha + \int_0^t \text{ARCTG}(s \cdot u(s))\, ds\right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \text{ARCTG}(s \cdot u(s))\, ds$$

$$u''(t) = \frac{u(t) + t u'(t)}{1 + u^2(t) t^2} \geq \frac{u(t)}{1 + t^2 u^2(t)} \geq \frac{\alpha}{1 + t^2 u^2(t)} > 0 \qquad (u(t) > 0,\ \text{UNICITÀ})$$

ALLORA u È CONVESSA PER $t > 0$, E $u'(t)$ È CRESCENTE.

USANDO DE L'HOPITAL,

$$m = \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\text{ARCTG}(t \cdot u(t))}{1} = \frac{\pi}{2}$$

$$q = \lim_{t\to+\infty} \left[u(t) - \frac{\pi}{2}t\right] = \lim_{t\to+\infty} \alpha + \int_0^t \left[\mathrm{ARCTg}(s\,u(s)) - \frac{\pi}{2}\right] ds$$

SIA $x \in (0, +\infty)$

$$\mathrm{ARCTg}(x) + \mathrm{ARCTg}\left(\frac{1}{x}\right) = \phi(x)$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \equiv \frac{\pi}{2}$$

ALLORA

$$q = \lim_{t\to+\infty} \alpha + \int_0^t \mathrm{ARCTg}\left(\frac{1}{s\,u(s)}\right) ds \sim \int_1^t \frac{1}{s\,u(s)}\, ds$$

ARCTg NON ERA SINGOLARE IN 0.

u E' CONVESSA, QUINDI STA SOPRA LE TANGENTI:

$$u(s) \geq u'(1)(s-1) + u(1)$$

$$\frac{1}{s\,u(s)} \leq \frac{1}{u'(1)s^2 + \dots} \quad \text{CHE CONVERGE.}$$

ALLORA L'INTEGRALE CONVERGE E q ESISTE FINITO.

· <u>ESEMPIO</u>

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + u^2(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

CHE SICURAMENTE CRESCE PIU' RAPIDAMENTE DI UNA RETTA.

$$f(t,s) = t^2 + s^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$u''(t) = 2t + 2u(t)u'(t) > 0$$

IN UN INTORNO DI 0: LOCALMENTE CONVESSA.

$$u'(0) = 1 > 0$$

$$u''(t) = 2t + 2t^2 u(t) + 2u^3(t) \qquad u'''(t) = \dots \quad \Rightarrow \quad u(0) = 1 \quad u'(0) = 1 \quad u''(0) = 2 \quad u'''(0) = 8$$

POSSO SCRIVERE ATTORNO A 0

$$T(t,0) = 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3$$

· ESEMPI

(1) $u'' + \omega^2 u = 0$ OSCILLATORE ARMONICO

(2) $m\underline{a} = e\underline{E} + \frac{e}{c}\underline{v} \wedge \underline{H}$ PARTICELLA CARICA IN MOTO IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO

(1) $\begin{cases} u' = p \\ p' = -\omega^2 u \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}'$

(2) $$\underline{v}' = \frac{e}{m}\underline{E} + \frac{e}{mc}\underline{v} \wedge \underline{H}$$

$$\underline{v} \wedge \underline{H} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = (H_3 v_2 - H_2 v_3,\ H_1 v_3 - H_3 v_1,\ H_2 v_1 - H_1 v_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A\,\underline{v}$$

$$\underline{v}' = \frac{e}{mc}A\,\underline{v} + \frac{e}{m}\underline{E}$$

IN GENERALE,

$$u^{(k)} + f(\underset{\overset{\shortparallel}{p^{(k-1)}}}{u^{(k-1)}}, u^{(k-2)}, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{p}}{u'}, \underset{\overset{\shortparallel}{u}}{u}, t) = 0$$

PUÒ SEMPRE ESSERE RICONDOTTA A UN SISTEMA

$$\begin{cases} p_{k-1}' = -f(p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_1, u, t) \\ p_{k-2}' = p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1' = p_2 \\ u' = p_1 \end{cases}$$

· SISTEMI LINEARI

$$\underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t) + \underline{b}(t)$$

$$\left(\frac{d}{dt} I - A(t)\right)\underline{u}(t) = \underline{b}(t) \qquad \text{CON } \left(\frac{d}{dt} I - A(t)\right) \text{ OPERATORE DIFFERENZIALE } L$$

INFATTI

$$\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

STUDIO

$$M\,\underline{x} = \underline{b}$$

① SISTEMA OMOGENEO

$\underline{u}'(t) - A(t)\,\underline{u}(t) = 0 \qquad (*)$ PER IL TEOREMA DI CAUCHY (ESISTENZA), HA SEMPRE UN NUCLEO NON BANALE. STUDIAMO I PROBLEMI DI CAUCHY

$\underline{u}(0) = \underline{e}_i \qquad (P_i,$ PROBLEMA $i) \qquad i = 1 \dots m$

AD ESEMPIO, IN $\mathbb{R}^2$ SI HANNO

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^{m+1}}}{\underline{f}(t, \underline{u})} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\,u_1 + a_{12}(t)\,u_2 \\ a_{21}(t)\,u_1 + a_{22}(t)\,u_2 \end{pmatrix}$$

$$A(t)\,\underline{u} = \underline{f}(t, \underline{u}) \qquad u \in \mathbb{R}^m$$

f È CONTINUA?

$$a_{ij}(t) \in C^0(\mathbb{R}) \implies \underline{f}(t, \underline{u}) \in C(\mathbb{R}^{m+1})$$

f È LIPSCHITZIANA?

$$|\underline{f}(t, \underline{u}) - \underline{f}(t, \underline{s})| \overset{?}{\leq} L\,|\underline{u} - \underline{s}|$$

$$|A(t)\,\underline{u} - A(t)\,\underline{s}| = |A(t)(\underline{u} - \underline{s})| \leq \|A\|_\infty\,|\underline{u} - \underline{s}|$$

(A È APPLICAZIONE LINEARE SULLO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE).

CON

$\|A\|_\infty = \max_{ij} \|a_{ij}\|_\infty$

NOTA: $\underline{f}(t,\underline{y}) = A(t)\underline{y}$; $\partial_{y_i}(\underline{f}) = \underline{a}_i(t)$

MA $\underline{a}_i(t)$ È CONTINUA, PERCIÒ È ANCHE LIMITATA PER $t \in [a,b]$. LA SOL. ESISTE UNICA E GLOBALE.

PERCIÒ ABBIAMO DIMOSTRATO CHE QUESTO PROBLEMA DI CAUCHY HA UN'UNICA SOLUZIONE:

$P_i \rightarrow \underline{u}_i(t)$

ABBIAMO QUINDI m SOLUZIONI NON BANALI DEGLI m PROBLEMI

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) - A(t)\,\underline{u}(t) = 0 \\ \underline{u}(0) = \underline{e}_i \end{cases} \qquad (*)$$

SIANO $\underline{u}, \underline{w}$ SOLUZIONI DI $(*)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ALLORA

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\lambda \underline{u}(t) + \mu \underline{w}(t)\right)'}_{\phi(t)} &= \lambda \underline{u}'(t) + \mu \underline{w}'(t) \\ &= \lambda A(t)\,\underline{u}(t) + \mu A(t)\,\underline{w}(t) \\ &= A(t)\left[\lambda \underline{u}(t) + \mu \underline{w}(t)\right] \end{aligned}$$

$$\underline{\phi}'(t) = A(t)\,\underline{\phi}(t)$$

SE $\underline{u}, \underline{w}$ SONO SOLUZIONI, LO È ANCHE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE: L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI $(*)$ È UNO <u>SPAZIO VETTORIALE</u> (IN EFFETTI È IL NUCLEO). COSTRUIAMONE QUINDI UNA BASE.

DIMOSTRIAMO CHE

$\{\underline{u}_i(t)\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, OVVERO

$$\lambda_1 \underline{u}_1(t) + \_ + \lambda_m \underline{u}_m(t) = \underline{0} \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0 \ \forall i$$

↳ NON POSSONO DIPENDERE DA t

SCELGO $t = 0$,

$$\lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 + \_ + \lambda_m \underline{e}_m = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = 0 \ \forall j$$

↑ GLI $\underline{e}_i$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SIA ORA $\underline{\phi}(t) \in \mathrm{KER}(L)$. DATE LE COORDINATE ϕ_i, SCRIVO $\underline{\phi}(0)$ COME

$$\underline{\phi}(0) = \phi_1 \underline{e}_1 + \phi_2 \underline{e}_2 + \ldots + \phi_m \underline{e}_m \qquad \phi_i \in \mathbb{R}$$

SIA $\underline{U}(t)$ UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE $\underline{u}_i$,

$$\underline{U}(t) = \phi_1 \underline{u}_1(t) + \ldots + \phi_m \underline{u}_m(t)$$

POICHÈ $\underline{\phi}(t)$ E $\underline{U}(t)$ SONO SOLUZIONI, PER ENTRAMBE VALE

$$\begin{cases} \underline{\phi}'(t) = A(t)\,\phi(t) \\ \underline{\phi}(0) = \sum_i \phi_i\, \underline{e}_i \qquad \phi_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{U}'(t) = A(t)\,\underline{U}(t) \\ \underline{U}(0) = \sum \phi_i\, \underline{u}_i(0) \end{cases}$$

PERCIÒ, PER UNICITÀ,

$$\underline{\phi}(t) = \underline{U}(t) = \sum_i \phi_i \underline{u}_i(t)$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

$$\text{SPAN}\{\underline{u}_i(t)\} = \text{KER}(L)$$

OSSIA I VETTORI $\underline{u}_i$ FORMANO UNA BASE.

SI È PERCIÒ DIMOSTRATO CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI

$$\underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t)$$

È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n.

· <u>PROPOSIZIONE</u>

SIANO $\underline{v}(t)$ E $\underline{w}(t)$ SOLUZIONI DEL PROBLEMA

$$(\cdot) \quad \underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t) + \underline{b}(t) \qquad \underline{b} \text{ VETTORE DI FUNZIONI CONTINUE}$$

ALLORA

$$(\underline{v}-\underline{w}) \in \text{KER}(L) \qquad \begin{aligned} \underline{v}' &= A(t)\underline{v} + \underline{b}(t) \\ \underline{w}' &= A(t)\underline{w} + \underline{b}(t) \end{aligned}$$

INFATTI

$$\begin{aligned} (\underline{v}-\underline{w})' &= (\underline{v}'-\underline{w}') = A(t)\,\underline{v} - A(t)\,\underline{w} + \underline{b}(t) - \underline{b}(t) \\ &= A(t)(\underline{v}-\underline{w}) \end{aligned}$$

MA ALLORA $(\underline{v}-\underline{w})$ È UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE $\underline{u}_i$,

$$\underline{v}(t) - \underline{w}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \underline{u}_i(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underline{v}(t) = \underline{w}(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \underline{u}_i(t) \qquad \text{SOLUZIONE GENERICA DI } (\cdot)$$

- DEF

UNA m-UPLA DI VETTORI INDIPENDENTI
$\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ (BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI)
SI DICE SISTEMA FONDAMENTALE.

- PROPOSIZIONE

$S(t) = (\underline{u}_1(t), \dots, \underline{u}_m(t)) \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $S'(t) = A(t)\,S(t)$
$\underline{u}_i$ SOLUZIONI DI P_i (SISTEMA OMOGENEO)
ALLORA $\exists$ SOLUZIONE DI $(\cdot)$ (SISTEMA COMPLETO) NELLA FORMA
$\underline{w}(t) = S(t)\,\underline{\phi}(t)$
$S(t)$ È DETTA MATRICE FONDAMENTALE (WRONSKIANA).

$$\begin{cases} \underline{u}' = A\,\underline{u}(t) \\ \underline{u}(0) = \sum \lambda_i \underline{e}_i \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\sum \lambda_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \equiv \underline{c}$$

SI È VISTO CHE

$$\underline{u}(t) = \sum \lambda_i \underline{u}_i(t) = S(t)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = S(t)\,\underline{c}$$

CALCOLIAMO

$$\underline{w}'(t) = \left(S(t)\,\phi(t)\right)' = \left(S'(t)\,\underline{\phi}(t) + S(t)\,\underline{\phi}'(t)\right)$$

$$= A(t)\,S(t)\,\underline{\phi}(t) + S(t)\,\underline{\phi}'(t)$$

IMPONGO CHE SIA SOLUZIONE,
$$\underline{w}'(t) \equiv A(t)\,S(t)\,\underline{\phi}(t) + \underline{b}(t)$$
DA CUI
$$S(t)\,\phi'(t) = \underline{b}(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{\phi}'(t) = S^{-1}(t)\,\underline{b}(t)$$

S È INVERTIBILE PERCHÈ LE SUE COLONNE SONO VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI, PERCIÒ È NON SINGOLARE.

ESERCIZIO

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{u}(2) = \begin{pmatrix} u_1(2) \\ u_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

RISOLVO IL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO:

$$\begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = \frac{1}{t^2} w_1 - \frac{1}{t} w_2 \end{cases}$$

SI VERIFICHI CHE

$$\underline{w}(t) = (t, 1)$$

$$\underline{z}(t) = \left(\frac{1}{t}, -\frac{1}{t^2}\right)$$

SONO SOLUZIONI.

$$\underline{w}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{w}'(t)} \quad \checkmark$$

$$\underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ \frac{2}{t^3} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

ALLORA POSSO CERCARE SOLUZIONI DEL SISTEMA ASSOCIATO NELLA FORMA

$$\underline{\varphi}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}}_{\underline{\phi}} = \begin{pmatrix} t\phi_1 + \frac{1}{t}\phi_2 \\ \phi_1 - \frac{1}{t^2}\phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(S) = -\frac{2}{t} \neq 0$$

$$S^{-1} = -\frac{t}{2} \begin{pmatrix} -1/t^2 & -1/t \\ -1 & t \end{pmatrix} \longrightarrow$$ NO, ANDAVA ANCHE TRASPOSTA

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix}}_{\underline{\phi}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2t} & \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 6t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

ALLORA

$$\underline{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}(t) = S(t)\,\underline{\phi} = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

LE SOLUZIONI SONO DELLA FORMA

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}(2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

IMPONGO

$$\underline{u}(2) \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 = -12 \\ c_1 - \frac{1}{4} c_2 = -2 \end{cases}$$

- <u>SISTEMI DI EDO LINEARI OMOGENEI A COEFFICIENTI COSTANTI</u>

$$(*) \quad \underline{u}'(t) = A\,\underline{u}(t) \qquad A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R}) \qquad \begin{cases} u_1' = a_{11} u_1(t) + \dots + a_{1m} u_m(t) \\ \vdots \\ u_m' = a_{m1} u_1(t) + \dots + a_{mm} u_m(t) \end{cases}$$

- <u>ESEMPIO</u>

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY.

OVVERO

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_1 \end{cases} \Rightarrow u_1'' = u_2' \Rightarrow \begin{cases} u_1'' - u_1 = 0 \\ u_1(0) = 1 \\ u_1'(0) = 0 \end{cases}$$

SCRIVO IL POLINOMIO CARATTERISTICO,

$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$

$u_0(t) = Ae^t + Be^{-t} \qquad A, B \in \mathbb{R}$

IMPONENDO LE C.I.,

$u_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \cosh(t)$

· OSSERVAZIONE

SE λ È UN AUTOVALORE, $\underline{c}$ UN AUTOVETTORE DELLA MATRICE A, ALLORA $\underline{c}e^{\lambda t}$ RISOLVE (*).

$\underline{u}(t) = \underline{c}\,e^{\lambda t} \qquad \underline{c} \in \mathbb{R}^m$ AUTOFUNZIONE CON AV=0 DI $L = \left(\frac{d}{dt}I - A\right): C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^m) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$

$\Downarrow$

$\underline{u}'(t) \overset{*}{=} \underline{c}\,\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda \underline{c}\, e^{\lambda t} = A\underline{c}\,e^{\lambda t} = A\,\underline{u}(t)$

$L\underline{w}_i = 0 \ \forall i$

* $\underline{c}$ NON SI DERIVA, COEFFICIENTI COSTANTI

IN EFFETTI, NEL NOSTRO ESEMPIO

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$

CHE È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI PRIMA.

$\lambda_{1,2} = \pm 1$

CERCO GLI AUTOVETTORI:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b \Rightarrow \lambda = 1, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{c}_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -b \Rightarrow \lambda = -1, \ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{c}_2$

ALLORA

$\underline{w}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \underline{w}_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

LA SOLUZIONE È UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE,

$$\underline{u} = A\,\underline{w}_1 + B\,\underline{w}_2 \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-t} + Be^{t} \\ Ae^{-t} - Be^{t} \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}(0) = \underset{\text{C.I.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} A+B \\ A-B \end{pmatrix}$$

· <u>OSSERVAZIONE</u>

$\underline{u}(t) = M\,\underline{v}(t)$ $\qquad$ $M \in M_m(\mathbb{R})$ INVERTIBILE (CAMBIAMENTO DI BASE; ANDRÒ A STUDIARE IL PROBLEMA NELLA $\mathcal{B}$ DI AUTOVETTORI)

$$\underline{u}'(t) = \left(M\,\underline{v}(t)\right)' = M\,\underline{v}'(t)$$

INFATTI M HA COEFFICIENTI COSTANTI, M' È LA MATRICE NULLA.

$$\underline{u}(t) = I\,\underline{u}(t) = M\underbrace{M^{-1}\underline{u}(t)} = M\,\underline{v}(t)$$

DATO ALLORA IL PROBLEMA (*),

$$\underline{u}'(t) = A\,\underline{u}(t)$$

SOSTITUENDO LE ESPRESSIONI TROVATE PER $\underline{u}(t)$, $\underline{u}'(t)$ SI HA

$$M\,\underline{v}'(t) = AM\,\underline{v}(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{v}'(t) = \left[M^{-1}AM\right]\underline{v}(t) \qquad \text{CON } B = M^{-1}AM$$

SE B È DIAGONALE, $B = \Lambda = \text{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, SCRIVO

$$\underline{v}'(t) = \Lambda\,\underline{v}(t)$$

OVVERO

AUTOVETTORI SCRITTI NELLA $\mathcal{B}$ DI AUTOVETTORI

$$\left|\begin{array}{l} v_1'(t) = \lambda_1 v_1(t) \\ \vdots \\ v_m'(t) = \lambda_m v_m(t) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \underline{v}_i(t) = \underline{e}_i\, e^{\lambda_i t}$$ RISOLVE (*) CON DATO $\underline{v}(0) = \underline{e}_i$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} = \Lambda \qquad \Lambda\,\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i\,\underline{e}_i$$

SONO TUTTE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI, INFATTI

$$\sum_i \mu_i\,\underline{v}_i(t) = 0 \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \mu_i = 0$$

PERCHÈ CALCOLANDOLI IN $t=0$ RITROVO GLI $\underline{e}_i$.

POICHÈ HO m VETTORI INDIPENDENTI, FORMANO UNA BASE.

ALLORA SE RIESCO A DIAGONALIZZARE B TROVO TUTTE LE SOLUZIONI.

- PROPOSIZIONE

A DIAGONALIZZABILE,

$$A = M^{-1} \Lambda M$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

NOTA CHE $M\underline{e}_i$ HA COME OUTPUT L'i-ESIMO AUTOVETTORE

ALLORA

$$\left\{ \underline{u}_i(t) = M \underline{v}_i(t) = M \underline{e}_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, m \right\}$$

È UNA BASE DELLE SOLUZIONI DI (*).

- ESEMPIO

$m = 2$

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

$$\begin{cases} u' = w \\ w' = -\omega^2 u \end{cases}$$ SISTEMA LINEARE ASSOCIATO

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

CERCO

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \omega > 0$$

TROVO GLI AUTOVETTORI,

$$\begin{pmatrix} \pm i\omega & 1 \\ -\omega^2 & \pm i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \pm i\omega a$$

PERCIÒ

$$\lambda_1 = +i\omega \qquad \underline{w}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\lambda_2 = -i\omega \qquad \underline{w}_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}}_{\underline{e}_2} e^{-i\omega t}$$

LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È DATO DA

$$KER(L) = \{ A\underline{w}_1(t) + B\underline{w}_2(t), \quad A,B \in \mathbb{C} \}$$

RISOLVIAMO

$$0 = A\begin{pmatrix}1\\ i\omega\end{pmatrix}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B\begin{pmatrix}1\\ -i\omega\end{pmatrix}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$= \cos\omega t\begin{pmatrix}A+B\\ (A-B)i\omega\end{pmatrix} + i\sin\omega t\begin{pmatrix}A-B\\ (A+B)i\omega\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(A+B)[\cos(\omega t - \omega\sin(\omega t)]\\ (A-B)[i\omega\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]\end{pmatrix}$$

· NOTAZIONE ESPONENZIALE ED EQUILIBRIO

TORNIAMO INVECE A (*) E SUPPONIAMO CHE A SIA DIAGONALE,

$m = 2$

$$A = \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\underline{u}'(t) = \Lambda\,\underline{u}(t)$$

$$\begin{cases} u_1'(t) = \lambda_1 u_1(t)\\ u_2'(t) = \lambda_2 u_2(t)\end{cases}$$

VETTORI CHE FORMANO LA BASE DELLE SOLUZIONI

$$\begin{vmatrix}\underline{u}_1(t) = Ae^{\lambda_1 t}\underline{e}_1\\ \underline{u}_2(t) = Be^{\lambda_2 t}\underline{e}_2\end{vmatrix} \qquad \underline{u}'(t) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\underline{u}(t)$$

$$\underline{u}(t) = S(t)\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$$

$$S'(t) = \begin{pmatrix}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} = \Lambda S(t)$$

PARE CHE SI POSSA SCRIVERE QUALCOSA COME

$$S(t) = e^{\Lambda t}$$

L'ESPONENZIALE DI UNA MATRICE È

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} = I + \Lambda t + \frac{1}{2}(\Lambda t)^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 t^3 + \dots$$

CHE DI FATTO SO CALCOLARE SOLO QUANDO Λ È UNA MATRICE DIAGONALE.

AD ESEMPIO,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \qquad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

SE SI HA

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda \in \mathbb{C} \\ \lambda = \alpha + i\beta \end{matrix} \qquad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} e^{\alpha t}$$

SE HO

$$\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv C$$

NOTO CHE

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E TUTTE LE POTENZE DI QUESTA MATRICE SONO NULLE,

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^m = O_2 \quad \forall m > 1$$

ALLORA L'ESPONENZIALE

$$e^{Ct} = e^{\left[\lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]t} = e^{\lambda I_2 t}\, e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t}$$

POSSO FARLO PERCHÈ COMMUTANO $\lambda I_2 \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda I_2$
(L'IDENTITÀ LO FA SEMPRE)

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$ (TAYLOR, POTENZE NULLE PER $m > 1$)

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & bt\,e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

SI HANNO QUINDI TRE SITUAZIONI:

① $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_0 \end{pmatrix} \to e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

③ $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(CASO NON DIAGONALIZZABILE)

IN DIMENSIONE 2, POSSO SEMPRE DECOMPORRE UNA MATRICE IN BLOCCHI DIAGONALI O FATTI COSÌ (TEOREMA DI JORDAN). IN DIMENSIONE PIÙ ALTA HO PIÙ BLOCCHI.

NOTA CHE UNA MATRICE 2×2 CON I DUE AUTOVALORI UGUALI È DIAGONALIZZABILE SOLO SE È GIÀ DIAGONALE.

PRENDO

$\underline{u}'(t) = A\,\underline{u}(t)$

HO TROVATO UN EQUILIBRIO

$\underline{u}_{eq} = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A\underline{0} = \underline{0}$

HO IL DATO INIZIALE

$\underline{u}(0) = \underline{u}_0 \quad \longrightarrow \quad \underline{u}(t) = S(t)\,\underline{u}_0$

VOGLIO STIMARE

$|\underline{u}(t) - \underline{0}| = |\underline{u}(t)| = |S(t)\,\underline{u}_0|$

NEL CASO ③,

$S(t)\,\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} a e^{\lambda t} + bt e^{\lambda t} \\ b e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}$ CON $\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

SE $\lambda \geq 0$,

$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{|S(t)\,\underline{u}_0|} = e^{\lambda t}\left[(a+bt)^2 + b^2\right]^{1/2}$ L'ORIGINE È INSTABILE.

SE $\lambda < 0$

$|S(t)\,\underline{u}_0| \longrightarrow 0$ L'ORIGINE È ASINTOTICAMENTE STABILE.

NEL CASO ①,

$|S(t)\,\underline{u}_0| = \left[\left(e^{\lambda_1 t} a\right)^2 + \left(e^{\lambda_2 t} b\right)^2\right]^{1/2}$

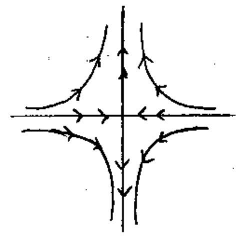
SE $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (ANCHE UNO SOLO),

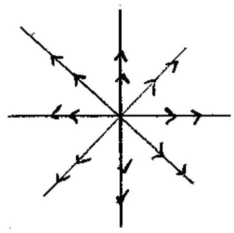
$\underline{0}$ INSTABILE

SE λ_1 E $\lambda_2 < 0$

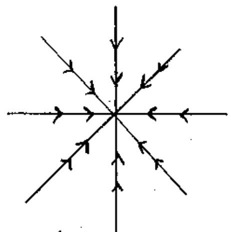
$\underline{0}$ ASINTOTICAMENTE STABILE

$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 < 0$



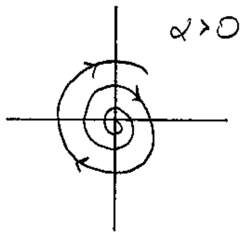


$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

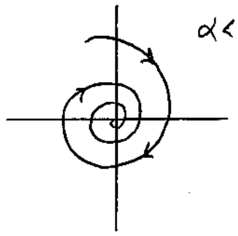


$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

NEL CASO ②,



$\alpha > 0$



$\alpha < 0$

SISTEMA DI ODE (2×2) NON LINEARE

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t), v(t)) \\ v'(t) = g(u(t), v(t)) \end{cases}$$

N.B.: IL SISTEMA È AUTONOMO

SIA

(u_0, v_0) UN EQUILIBRIO.

$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0$

RISCRIVO ALLORA (EQUIVALENTEMENTE)

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t), v(t)) - f(u_0, v_0) \\ v'(t) = g(u(t), v(t)) - g(u_0, v_0) \end{cases}$$

DEFINISCO

$p(t) = u(t) - u_0 \qquad p'(t) = u'(t)$

$q(t) = v(t) - v_0 \qquad q'(t) = v'(t)$

VALGONO ALLORA

$$p'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0, v_0)(u(t)-u_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0, v_0)(v(t)-v_0) + o\left(|u(t)-u_0|^2+|v(t)-v_0|^2\right)$$

$$q'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(u_0, v_0)(u(t)-u_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(u_0, v_0)(v(t)-v_0) + o(-)$$

TRASCURANDO L'O PICCOLO,

$$\begin{cases} p' = f_x(u_0, v_0)\,p + f_y(u_0, v_0)\,q \\ q' = g_x(u_0, v_0)\,p + g_y(u_0, v_0)\,q \end{cases}$$

OVVERO

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}' = \left(\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|_{(u_0,v_0)} \right) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

<u>TEOREMA</u> (RIEPILOGO, PRINCIPIO DELLA STABILITÀ LINEARIZZATA)

DATO IL SISTEMA AUTONOMO $\underline{y}' = f(\underline{y})$,

$\underline{y}_0$ PUNTO DI EQUILIBRIO, COSÌ CHE $f(\underline{y}_0) = 0$.

ALLORA ATTORNO A $\underline{y}_0$

$$f(\underline{y}) = f(\underline{y}_0) + J_f(\underline{y}_0)(\underline{y}-\underline{y}_0) + o(\|\underline{y}-\underline{y}_0\|) = J_f(\underline{y}_0)(\underline{y}-\underline{y}_0) + o(\|\underline{y}-\underline{y}_0\|)$$

SIA $A := J_f(\underline{y}_0)$. ALLORA

a) SE TUTTI GLI AUTOVALORI DI A HANNO PARTE REALE STRETTAMENTE NEGATIVA, ALLORA $\underline{y}_0$ È PUNTO DI EQUILIBRIO UNIFORMEMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE.

b) SE ESISTE UN AUTOVALORE DI A CON PARTE REALE STRETTAMENTE POSITIVA, ALLORA IL PUNTO $\underline{y}_0$ È INSTABILE.

CASO AD AUTOVALORI COMPLESSI

CONSIDERIAMO UNA MATRICE I CUI AUTOVALORI SONO COMPLESSI CONIUGATI

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2 + B$$

IN UNA OPPORTUNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ (QUELLA DI $\underline{u}, \underline{v}$ DOVE $\underline{u} \pm i \underline{v}$ È AUTOVETTORE COMPLESSO).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad I_2 B = B I_2$$

ALLORA

$$e^{At} = e^{\alpha I_2 t} \cdot e^{Bt}$$

$$(\alpha I_2)^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$$

$$e^{\alpha I_2 t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} I_2$$

$$e^{Bt} = (Bt)^0 + (Bt)^1 + \frac{(Bt)^2}{2!} + \dots$$

$$B^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I_2$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = -\beta^2 I_2 B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta^3 \\ \beta^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^2 B^2 = -\beta^2 I_2 \cdot (-\beta^2) I_2 = \beta^4 I_2$$

PER RICORRENZA,

$$B^0 = I_2 \qquad B^2 = -\beta^2 I_2 \qquad B^4 = \beta^4 I_2 \qquad \Rightarrow \qquad B^{2k} = (-1)^k \beta^{2k} I_2$$

ALLORA, PRENDENDO I TERMINI PARI,

$$e^{\beta t} = I_2 - \frac{1}{2}\beta^2 t^2 I_2 + \frac{1}{24}\beta^4 t^4 I_2 + - + (\text{TERMINI DISPARI})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) \end{pmatrix} + (\text{TERMINI DISPARI})$$

ORA CONSIDERO

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = -\beta^2 I_2 B = -\beta^2 B$$

$$B^5 = \beta^4 I_2 B = \beta^4 B$$

ALLORA

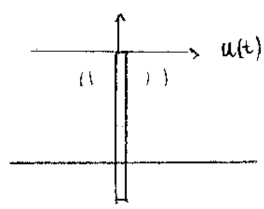
$$e^{Bt} = \beta t - \frac{1}{3!}\beta^3 t^3 + \frac{1}{5!}\beta^5 t^5 + - + (\text{TERMINI PARI})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & 0 \end{pmatrix} + (\text{TERMINI PARI})$$

INFINE,

$$e^{At} = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\substack{\text{MODULO} \\ \text{(PARTE REALE)}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}}_{\substack{\text{MATRICE DI ROTAZIONE} \\ \text{(PARTE IMMAGINARIA)}}}$$

EQUAZIONE DI DUFFING



$$u''(t) + \lambda u'(t) - u(t)(1 - u^2(t)) = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} u' = p \\ u'' = p' = -\lambda p + u(1-u^2) \end{cases}$$

CERCO GLI EQUILIBRI:

$p = 0$

$u = 0, \pm 1$

LE ULTIME DUE DERIVANO DAL FATTO CHE L'EQUAZIONE È APPROSSIMATA; NON HANNO SIGNIFICATO FISICO.

STUDIAMO QUINDI

$$\rho = 0 \ , \ u = 0$$

APPROSSIMIAMO LINEARMENTE:

$$F(u,\rho) = \begin{pmatrix} \rho \\ -\lambda\rho + u(1-u^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3u^2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} Tr(J_F) &= -\lambda \\ \det(J_F) &= -1 \end{aligned}$$

MA ALLORA HO DUE AUTOVALORI

$$\left\{ \mu_1 , -\frac{1}{\mu_1} \right\}$$

LE LORO PARTI REALI SONO UNA POSITIVA E UNA NEGATIVA: L'EQUILIBRIO È INSTABILE.

NOTA: IL POLINOMIO CARATTERISTICO È SEMPRE

$$p(\mu) = \mu^2 - Tr(M)\mu + \det(M)$$

QUI

$$p(\mu) = \mu^2 + \lambda\mu - 1 \qquad \Delta = \lambda^2 + 4 > 0$$

IN GENERALE, QUANDO HO RADICI COMPLESSE (NECESSARIAMENTE CONIUGATE),

$$\mu_1, \mu_2 = \alpha \pm i\beta$$

$$Tr(M) = \mu_1 + \mu_2 = 2\alpha$$

$$\det(M) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

- EQUAZIONE DI VAN DER POL

$$u''(t) + \mu\left(1 - u^2(t)\right) u'(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

$$\mu, \omega > 0$$

PERTURBAZIONE ALL'OSCILLATORE ARMONICO (CHE OTTENGO PER $\mu = 0$).
PER μ GIUSTO, IL SISTEMA SOSTIENE LE PICCOLE OSCILLAZIONI E SMORZA QUELLE AMPIE (PACE-MAKER).

$$\begin{cases} u' = z \\ z' = \mu(u^2 - 1)z - \omega^2 u \end{cases}$$

L'UNICO EQUILIBRIO È L'ORIGINE $O(0,0)$, $z = 0$.

$$F(u, z) = \begin{pmatrix} z \\ \mu(u^2 - 1)z - \omega^2 u \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\mu u z - \omega^2 & \mu(u^2 - 1) \end{pmatrix} \qquad J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\mu \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &Tr(J) = -\mu \\ &\det(J) = \omega^2 > 0 \end{aligned}$$

PERCIÒ SE $\mu > 0$, $Tr(J) < 0$ E

$$Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0 \qquad \Delta = \mu^2 - 4\omega^2 \quad \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \ \alpha > 0 \end{cases}$$

NE DEDUCO CHE: *

1. $\mu, \omega > 0$
   (0,0) È ASINTOTICAMENTE STABILE.
   $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ SSE $\mu^2 < 4\omega^2$
2. $\mu < 0 < \omega$ (0,0) INSTABILE

*NOTA:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \qquad e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

PERTURBAZIONE

LA STABILITÀ DIPENDE UNICAMENTE DA α

· TEOREMA DI POINCARÈ - BENDIXON

$$\begin{cases} u' = f(u,w) \\ w' = g(u,w) \end{cases} \qquad f, g \in C^1$$

(u,w) SOLUZIONE LIMITATA.

ALLORA VALE UNA DELLE SEGUENTI:

① $(u,w) \to (u_\infty, w_\infty)$ PUNTO DI EQUILIBRIO

② $(u,w) = (u_\infty, w_\infty)$ (DATO INIZIALE SU eq)

③ (u,w) SONO UN'ORBITA PERIODICA (DATO INIZIALE SULL' ORBITA)

④ $(u,w) \longrightarrow$ (ORBITA PERIODICA)

FALSO IN PIÙ DI DUE VARIABILI.

· ESEMPIO

RISCRIVO COME SISTEMA L'EQUAZIONE DI VAN DER POL

$$\begin{cases} u' = z \\ z' = -\omega^2 u + \mu(u^2-1)z \end{cases}$$

CON UN OPPORTUNO CAMBIO DI VARIABILI (NON LINEARE; SI PUÒ DIMOSTRARE - MA È DIFFICILE - CHE ESISTE),

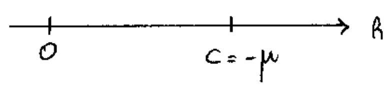
$$\begin{cases} a' = \omega^2 b + \mu(a^2+b^2)a \\ b' = -\omega^2 a + \mu(a^2+b^2)b \end{cases}$$

MACHEGGIANDO,

$$a'a + b'b = \omega^2 ab + \mu(a^2+b^2)a^2 - \omega^2 ab + \mu(a^2+b^2)b^2 \qquad \text{(CIRCA)}$$
$$= (a^2+b^2)\left[c - (a^2+b^2)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right] \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}R\right] = R(c-R)$$

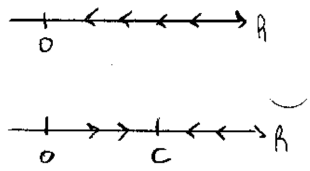
$$R' = R(c-R) = -R(\mu+R)$$



(COL CAMBIO GIUSTO)

SE $\mu > 0$, L'ORIGINE È STABILE.

SE $\mu < 0$, HO UN SECONDO EQUILIBRIO IN C.



TORNANDO INDIETRO (VISTO IL CAMBIO NON LINEARE) NON RIOTTENGO UNA CIRCONFERENZA, MA COMUNQUE UNA SUA DEFORMAZIONE (ORBITA CHIUSA).

· <u>EQUAZIONE DI LOTKA - VOLTERRA</u> (PREDA - PREDATORE)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \left(A - B\,w(t)\right) u(t) \\[2ex] \dfrac{dw}{dt} = \left(C u(t) - D\right) w(t) \end{cases}$$

u PREDE

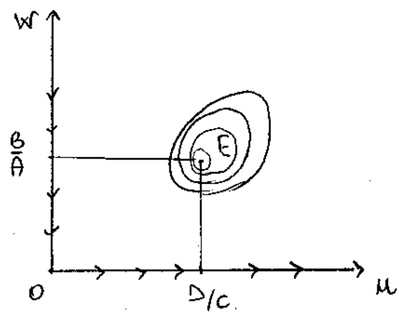
w PREDATORI

$A, B, C, D \in \mathbb{R}^+$, $u, w > 0$

CERCHIAMO GLI EQUILIBRI:

$$\begin{cases} (A - Bw)u = 0 \\ (Cu - D)w = 0 \end{cases}$$

$$O \left| \begin{array}{l} u = 0 \\ w = 0 \end{array} \right. \qquad E \left| \begin{array}{l} u = \frac{D}{C} \\ w = \frac{A}{B} \end{array} \right.$$



$$F(u, w) = \begin{pmatrix} Au - Buw \\ Cuw - Dw \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} A - Bw & -Bu \\ Cw & Cu - D \end{pmatrix}$$

$$J_F(O) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \qquad J_F(E) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{BD}{C} \\ \frac{CA}{B} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} Tr(J_E) = 0 \\ \det(J_E) = AD > 0 \end{array}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ESISTE UN INTEGRALE PRIMO DEL MOTO:

$$E_0 = D \ln(w(t)) - Cu(t) - B\,w(t) + A \ln(u(t))$$

· EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI VETTORIALI: COMPENDIO

$\underline{Y}' = A(t)\underline{Y} + \underline{b}(t)$ (·) $\underline{Y}' = A(t)\underline{Y}$ (*)

★ SE $A(t)$, $\underline{b}(t)$ SONO CONTINUI IN $t \in [a,b]$,
$\exists!$ SOLUZIONE DI (·) DEFINITA SU TUTTO $[a,b]$

★ PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
$\underline{u}$ SOL. DI $\underline{Y}' = A(t)\underline{Y} + \underline{b}_1$
$\underline{v}$ SOL. DI $\underline{Y}' = A(t)\underline{Y} + \underline{b}_1$
ALLORA
$(\underline{u} - \underline{v})$ RISOLVE $\underline{Y}' = A(t)\underline{Y}$

★ L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI (*) È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE m ($\underline{Y} \in \mathbb{R}^m$).
LA SOLUZIONE GENERALE È UNA COMBINAZIONE LINEARE DI
$\underline{Y} = \sum_i c_i \underline{u}_i$
CON LE $\underline{u}_i$ LINEARMENTE INDIPENDENTI.
LE SOLUZIONI DI (·) SI SCRIVONO COME
$\underline{Y} = \underline{Y}_P + \sum_i c_i \underline{u}_i$
CON $\underline{Y}_P$ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE.

★ È DETTA MATRICE WRONSKIANA
$W(t) = (\underline{w}_1(t), \dots, \underline{w}_m(t))$ $\underline{w}_i$ SOLUZIONI INDIPENDENTI
SE SCELGO
$\underline{u}_i$ t.c. $\underline{u}_i(0) = \underline{e}_i$
OTTENGO
$\Phi(t) = (\underline{u}_1(t), \dots, \underline{u}_m(t))$ MATRICE RISOLVENTE, DI TRANSIZIONE
$\Phi(0) = I_m$
DATA LA CONDIZIONE INIZIALE $\underline{Y}_0 = \underline{Y}(t_0)$, OPPURE $\tilde{\underline{Y}}_0 = \underline{Y}(0)$,
$\underline{Y}(t) = W(t)\,W^{-1}(t_0)\,\underline{Y}_0$ OPPURE
$\underline{Y}(t) = \Phi(t)\,\tilde{\underline{Y}}_0$ $(\Phi^{-1}(0) = (I_m)^{-1} = I_m)$
È LA SOLUZIONE (UNICA) DI (*).
LA MATRICE WRONSKIANA SODDISFA
$W' = A(t)W$

★ $\Phi(t)$ È UN FLUSSO DI TRASFORMAZIONI DELLO SPAZIO $\mathbb{R}^m$ IN SÈ, CON PROPRIETÀ
$\Phi(0) = I_m \Leftrightarrow \Phi(0)\underline{x} = \underline{x}$
$\Phi(t)[\Phi(s)\,\underline{x}] = \Phi(t)\Phi(s)\,\underline{x} = \Phi(t+s)\,\underline{x}$
$\rightarrow \Phi(t)\Phi(-t) = I_m$

· LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI (OMOGENEO)

★ SE A È DIAGONALIZZABILE, $\underline{u}_i$ AUTOVETTORE DI AUTOVALORE λ_i,
$\underline{w}_i(t) = e^{\lambda_i t}\underline{u}_i$ È SOLUZIONE E CHIARAMENTE FORMANO UNA BASE.
SE Λ È GIÀ DIAGONALE, $D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t})$ È LA MATRICE RISOLVENTE.
IN GENERALE, $M = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m)$, $\underline{u}_i$ AUTOVETTORI, È t.c.
$M^{-1}AM$ È DIAGONALE.
$W(t) = (\underline{w}_1(t), \dots, \underline{w}_m(t)) = (\underline{u}_i e^{\lambda_i t} v_i)$ WRONSKIANA, $W(0) = M$
$\Phi(t) = W(t)M^{-1} = MDM^{-1}$ RISOLVENTE

★ RISOLVO IL PROBLEMA IN GENERALE
$$\begin{cases} \Phi'(t) = A\Phi(t) \\ \Phi(0) = I_m \end{cases} \Rightarrow \Phi(t) = e^{At}$$ RISOLVENTE, MATRICE ESPONENZIALE

· A DIAGONALIZZABILE, $\Rightarrow \Phi(t) = Me^{\Lambda t}M^{-1} = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} \underset{u_1}{()} \underset{u_2}{()} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} () () \end{pmatrix}^{-1}$
$= \begin{pmatrix} \underline{u}_1 e^{\lambda_1 t} & () \end{pmatrix}\begin{pmatrix} () () \end{pmatrix}^{-1}$

VETTORI DELLA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOL.

· $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

· $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$

NELLA BASE DI $(\underline{u}, \underline{v})$ SE $\underline{u} \pm i\underline{v}$ AUTOVETTORI
$\alpha \pm i\beta$ AUTOVALORI

★ UNA VOLTA CHE HO TROVATO UNA RISOLVENTE $\Phi(t)$
· IN UNA CERTA BASE, LA SPOSTO: $\tilde{\Phi}(t) = M\Phi(t)M^{-1}$
· PER UN DATO INIZIALE $\underline{Y}(0)$, SE VOGLIO QUELLA PER $\underline{Y}(t_0) = \underline{Y}_0$
$\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ (Φ È INVERTIBILE), COSÌ CHE
$\underline{Y}(t_0) = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\underline{Y}_0 = \underline{Y}_0$

· NON OMOGENEO
$$\begin{cases} \underline{Y}' = A(t)\underline{Y} + \underline{b}(t) \\ \underline{Y}(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \underline{Y}(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\,\underline{b}(s)\,ds & (\mathrm{I}) \\ \underline{Y}(t) = W(t)\left[W^{-1}(t_0)\underline{Y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\underline{b}(s)\,ds\right] & (\mathrm{II}) \end{array}$$
PIÙ IN GENERALE, CERCO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $\underline{w}(t)$ NELLA FORMA
$\underline{w}(t) = W(t)\underline{\varphi}(t)$ CON $\underline{\varphi}'(t) = W^{-1}(t)\underline{b}(t)$
E USO LA SOVRAPPOSIZIONE, $\underline{Y}(t) = \underset{\text{GENERALE}}{\underline{u}(t)} + \underline{w}(t)$

· NOTA CHE LA SCRITTURA (I) VALE ANCHE SE CAMBIO LA BASE, NEL CASO SOPRA,
$\Phi(t) = \underbrace{MD}_{W(t)}M^{-1}$ $MD = W(t)$ È UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.
$$\underline{Y}(t) = W(t)M^{-1}\int_{t_0}^{t} \underbrace{(W(s)M^{-1})^{-1}}_{= M W(s)^{-1}}\underline{b}(s)\,ds = W(t)M^{-1}M\int_{t_0}^{t} W(s)^{-1}\underline{b}(s)\,ds$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN PRATICA (ORDINARIE)

- LINEARE I ORDINE

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \qquad \text{CON } u(t_0) = u_0$$

$$u(t) = e^{A(t)}\left[\bar{u}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\,ds\right] \qquad \text{CON } A'(t) = a(t), \quad \bar{u}_0 = e^{-A(t_0)} u_0$$

$$\simeq e^{A(t)}\left[K + \int e^{-A(t)} b(t)\,dt\right]$$

- VARIABILI SEPARABILI

$$u'(t) = a(t)F(u(t))$$

CERCO GLI EQUILIBRI, POI SEPARO E INTEGRO

$$\int \frac{u'(t)}{F(u(t))}\,dt = \int a(t)\,dt$$

- BERNOULLI

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u^{\rho}(t)$$

NOTO CHE $u \equiv 0$ È SOLUZIONE. SOSTITUISCO

$$u = z^{\frac{1}{1-\rho}} \qquad u' = \frac{1}{1-\rho} z^{\frac{\rho}{1-\rho}} z'$$

- RICCATI

$$u'(t) = a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t)$$

CERCO UNA SOLUZIONE $u_0 \equiv$ COST. ; DATA COMUNQUE u_0, NE CERCO ALTRE USANDO

$$u = u_0 + \frac{1}{z}$$

- OMOGENEE

$$u'(t) = f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$$

SOSTITUISCO $z = \dfrac{u(t)}{t}$

- AUTONOMA II ORDINE

$$y'' = f(y, y')$$

$$z = \frac{dy}{dt} \qquad y'' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y''(y,z)}{z}$$

RISOLVO PER z E POI RISALGO A y.

· SISTEMI LINEARI

$$\underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t) + \underline{b}(t) \qquad \text{CON} \qquad \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0$$

SE A È A COEFFICIENTI COSTANTI, LA DIAGONALIZZO E NE CERCO GLI AUTOVETTORI $\underline{w}_i$ (DI NUMERI). UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI PER L'OMOGENEA È DATO DA

$$W(t) = \left(\underline{w}_1 e^{\lambda_1 t}, \ \underline{w}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \underline{w}_m e^{\lambda_m t} \right) \qquad \lambda \text{ AUTOVALORI}$$

LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA È

$$\underline{u}(t) = W(t)\, M^{-1} \underline{u}_0 \qquad M \text{ MATRICE DEGLI AUTOVETTORI } (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)$$

$$\simeq W(t)\, \underline{c} \qquad \underline{c} \text{ VETTORE DI COSTANTI}$$

LA SOLUZIONE DELLA NON OMOGENEA (ANCHE A COEFFICIENTI NON COSTANTI, UNA VOLTA NOTA UNA WRONSKIANA $W(t)$) È

$$\underline{u}(t) = W(t) \left[W^{-1}(t_0)\, \underline{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\, \underline{b}(s)\, ds \right]$$

$$\simeq W(t) \left[\underline{c} + \int W^{-1}(t)\, \underline{b}(t)\, dt \right]$$

ALLORA

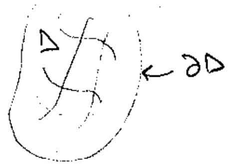
$$0 = \frac{D}{w} w' - C u' - B w' + \frac{A}{u} u'$$

$$= \frac{D}{w}(Cu - D)w - C(A - Bw)u - B(Cu - D)w + \frac{A}{u}(A - Bw)u$$

$$= DCu - D^2 - ACu + BCwu - BCwu + \dots$$

· VIBRAZIONI DI UNA MEMBRANA

MEMBRANA ELASTICA FISSATA AL BORDO.



$D \subseteq \mathbb{R}^2$

VOGLIO STUDIARNE LE VIBRAZIONI,

$u(x,y,t)$ SPOSTAMENTO DELLA MEMBRANA DALL'EQ.

SI PUO' MOSTRARE CHE E' VERIFICATA

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{LAPLACIANO}}}{\Delta u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

CERCO SOLUZIONI NELLA FORMA

$$u(x,y,t) = \phi(x,y)\,\psi(t)$$

ALLORA

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi) = \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

SOSTITUENDO NELL' EQUAZIONE,

$$\phi\psi'' - \psi(\Delta\phi) = 0$$

$$\phi\psi'' = \psi(\Delta\phi)$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{DIPENDE} \\ \text{SOLO DA } t}}{\frac{\psi''}{\psi}} = \underset{\substack{\searrow \\ \text{DIPENDE SOLO} \\ \text{DALLO SPAZIO}}}{\frac{\Delta\phi}{\phi}}$$

SE $\frac{\psi''}{\psi}$ DIPENDESSE DAVVERO DAL TEMPO, ALLORA $\frac{\Delta\phi}{\phi}$ SAREBBE FUNZIONE DI t: MA QUESTO È IMPOSSIBILE, PERCHÈ ϕ NON È FUNZIONE DI t.

MA ALLORA QUESTI RAPPORTI NON DIPENDONO NÈ DAL TEMPO, NÈ DALLO SPAZIO:

$$\frac{\psi''}{\psi} = \frac{\Delta\phi}{\phi} = -\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\psi'' + \lambda\psi = 0$ CHE SO RISOLVERE.

$\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ ALLE DERIVATE PARZIALI.

SU UN RETTANGOLO, IMPONGO UNA SOLUZIONE FERMA AL BORDO:

$$R = \left[0, \frac{1}{a}\right] \times \left[0, \frac{1}{b}\right] \qquad a, b > 0$$

$$\phi(x,y) = \sin(ka\pi x)\sin(j\pi b y)$$

$$\phi_{xx} = -k^2a^2\pi^2 \sin(ka\pi x)\sin(j\pi b y)$$

$$\phi_{yy} = -j^2b^2\pi^2\phi(x,y)$$

$$\Delta\phi = -\underbrace{(k^2a^2 + j^2b^2)}_{\lambda}\pi^2\phi(x,y)$$

$$\lambda_{kj} = (k^2a^2 + j^2b^2)\pi^2 \qquad k, j \in \mathbb{N}$$

SU UN CERCHIO, OSSERVO CHE IN COORDINATE POLARI IL LAPLACIANO SI SCRIVE

$$\phi(x,y) = \phi(r,\theta) = R(r)W(\theta)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

(COPIA LAPLACIANO IN POLARI)

L'EQUAZIONE DIVENTA

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) R = 0$$

EQUAZIONI DI BESSEL
(AL VARIARE DI λ)

SI DIMOSTRA CHE NON ESISTE UNA SUA ESPRESSIONE ESPLICITA; SE NE PUÒ SOLO TROVARE UN'ESPANSIONE,

$$R(r) = r^k \sum_{j=0}^{+\infty} a_j r^j$$

$\lambda = m \in \mathbb{N}$

INTEGRALI CURVILINEI

$\underline{\phi}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$

$t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$x, y, z \in C^1[a,b]$

È UNA CURVA, E $\underline{\phi}(t)$ È LA SUA PARAMETRIZZAZIONE.

UNA CURVA È REGOLARE SE

$|\underline{\phi}'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$

IN PRATICA VOGLIO EVITARE CHE IL PUNTO SI FERMI E TORNI INDIETRO.

SI DICE SOSTEGNO DELLA CURVA

$Im(\underline{\phi}) \subseteq \mathbb{R}^3$

DEF

$\underline{\phi}(t)$, $\underline{\Psi}(s)$ CURVE REGOLARI.

SE $\exists\, h$ t.c.

$\underline{\phi}(t) = \underline{\Psi}(h(t)) \qquad \forall t \in [a,b]$

$h'(t) \neq 0$

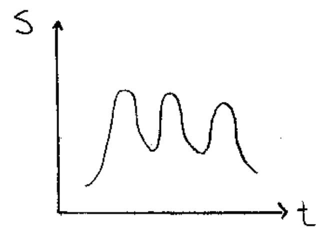
ALLORA $\underline{\phi}, \underline{\Psi}$ SONO CURVE EQUIVALENTI.

OVVERO

$Im(\phi) = Im(\Psi) \quad \forall t \in [a,b], s \in [c,d]$

$s = h(t), \quad h'(t) \neq 0$

IL CAMBIO DI VARIABILI h È GLOBALMENTE INVERTIBILE.



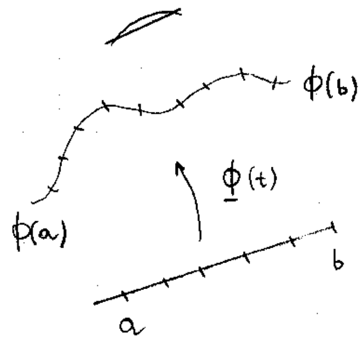
IN UN CASO COME QUESTO, LA LUNGHEZZA PERCORSA È DIVERSA (VADO AVANTI E INDIETRO)

DEF

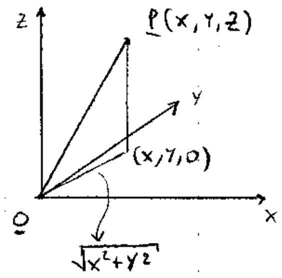
$\underline{\phi}$ CURVA REGOLARE.

$$L(\underline{\phi}) = \sup_{S \in \Sigma} L(S)$$

$\uparrow$ SPEZZATE SU $Im(\underline{\phi})$



CONSIDERIAMO



$$\underline{\phi}(t) = (xt, yt, zt) \qquad t \in [0,1]$$

$$\underline{\phi}'(t) = (x, y, z)$$

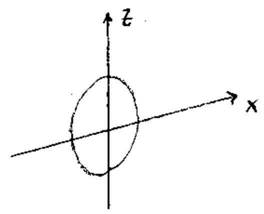
$$d(\underline{O}, \underline{P}) = \left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,2} + z^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\underline{\phi}'(t)|$$

ALLORA LA LUNGHEZZA È DATA DA

$$L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|\, dt$$

- ESEMPIO



$$\underline{\phi}(t) = (R\sin t, 0, R\cos t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\underline{\phi}) = \int_0^{2\pi} |\underline{\phi}'(t)|\, dt$$

$$\underline{\phi}'(t) = (R\cos t, 0, R\sin t)$$

$$L(\underline{\phi}) = \int_a^b \sqrt{R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t}\, dt = \int_a^b R\, dt = 2\pi R$$

- ESEMPIO

$$\underline{\phi}(t) = (t^3, t^2, 0) \qquad t \in [0, a]$$

$$\underline{\phi}'(t) = (3t^2, 2t, 0) \qquad \text{MAI NULLO ALL' INTERNO DI } [0, a]$$

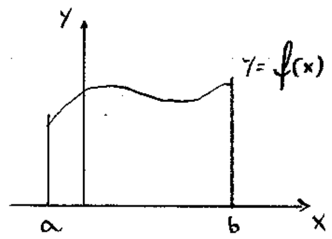
$$L(\underline{\phi}) = \int_0^a \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_0^a t\sqrt{9t^2+4}\, dt = \int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{9u+4}\, du$$

$t^2 = u, \; 2t\,dt = du$

$$= \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (9u+4)^{3/2}\right]_0^{a^2}$$

$$= \frac{1}{27}\left[(9a^2+4)^{3/2} - 8\right]$$

· CURVA PIANA

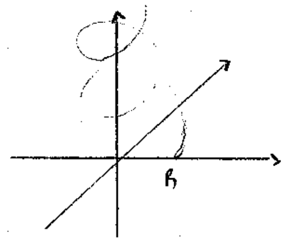


$$\underline{\phi}(t) = (t, f(t), 0)$$
$$\underline{\phi}'(t) = (1, f'(t), 0)$$

$$|\underline{\phi}'(t)| = \left[1 + |f'(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$L(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

· ESEMPIO



$$\underline{\phi}(t) = (R\cos t, R\sin t, Ht) \qquad R, H > 0$$

ELICA. $\qquad t \in [0, 2\pi]$

$$\underline{\phi}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, H)$$
$$|\underline{\phi}'(t)| = \left[R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + H^2\right]^{1/2} = \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$L(\underline{\phi}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + H^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2 + H^2}$$

· PROPOSIZIONE

$\underline{\phi}(t), \quad t \in [a, b]$

$\underline{\Psi}(s), \quad s \in [c, d] \qquad$ CURVE REGOLARI EQUIVALENTI,

$s = h(t), \quad h'(t) \neq 0$

$\mathrm{Im}(h) = [c, d]$

ALLORA

$$L(\underline{\phi}) = L(\underline{\Psi})$$

INFATTI

$$L(\underline{\Psi}) = \int_c^d |\underline{\Psi}'(s)|\, ds \underset{\substack{s = h(t) \\ ds = h'(t)\,dt}}{=} \int_{h^{-1}(c)}^{h^{-1}(d)} |\underline{\Psi}'(h(t))|\, h'(t)\, dt$$

MA

$$\underline{\Psi}(h(t)) = \underline{\phi}(t)$$

DA CUI, DERIVANDO I DUE MEMBRI,

$$\underline{\Psi}'(h(t))\,h'(t) = \underline{\phi}'(t)$$

$$|\underline{\Psi}'(h(t))|\,|h'(t)| = |\underline{\phi}'(t)|$$

POICHÈ $h' \neq 0$, DISTINGUIAMO I DUE CASI

$h' > 0 \Rightarrow h$ CRESCENTE $\Rightarrow h^{-1}(c) = a,\ h^{-1}(d) = b$

$h' < 0 \Rightarrow h$ DECRESCENTE $\Rightarrow h^{-1}(c) = b,\ h^{-1}(d) = a$

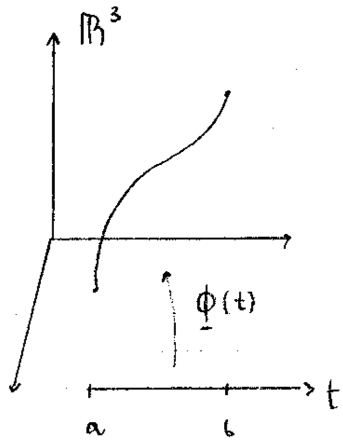
AD ESEMPIO, NEL SECONDO CASO

$$L(\underline{\Psi}) = \int_{h^{-1}(c)}^{h^{-1}(d)} |\underline{\Psi}'(h(t))|\,h'(t)\,dt = -\int_b^a |\underline{\Psi}'(h(t))|\,|h'(t)|\,dt = L(\underline{\phi})$$

· ESEMPIO

FILO CON DENSITÀ UNIFORME,

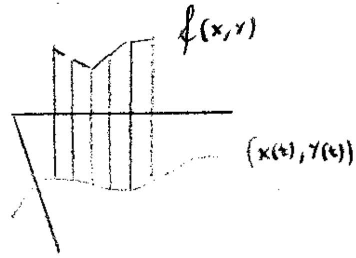
$$m = \delta L(\underline{\phi}) = \int_a^b \delta\,|\underline{\phi}'(t)|\,dt$$



MA SE LA DENSITÀ NON È UNIFORME,

$\delta = \delta(x,y,z)$

$$m = \int_a^b \delta(\underbrace{x(t),y(t),z(t)}_{\underline{\phi}(t)})\,|\underline{\phi}(t)|\,dt$$



CENTRO DI MASSA

$$\int \frac{\underline{r}\,dm}{M} = \frac{\int_a^b (x,y,z)\,\delta\,|\underline{\phi}'(t)|\,dt}{\int_a^b \delta\,|\underline{\phi}'(t)|\,dt}$$

$$= \frac{\left(\int_a^b \delta x(t)|\underline{\phi}'(t)|\,dt,\ \int_a^b \delta y(t)|\underline{\phi}'(t)|\,dt,\ \int_a^b \delta z(t)|\underline{\phi}'(t)|\,dt\right)}{\int_a^b \delta\,|\underline{\phi}'(t)|\,dt}$$

- ESEMPIO

$$\underline{\phi}(t) = (R\cos t, R\sin t, Ht) \qquad R, H > 0 \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

$$M = \int_0^{2\pi} \delta |\underline{\phi}'(t)| \, dt = 2\pi \delta \sqrt{R^2+H^2}$$

$$M X_G = \int_a^b \delta R \cos t \, (R^2+H^2)^{1/2} \, dt = 0$$

$$M Y_G = \int_a^b \delta R \sin t \, (R^2+H^2)^{1/2} \, dt = 0$$

$$M Z_G = \int_a^b \delta H t \, (R^2+H^2)^{1/2} \, dt = \delta H (R^2+H^2)^{1/2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} = 2\delta H \sqrt{R^2+H^2} \, \pi^2$$

PERCIO'

$$Z_G = H\pi^2$$

- DEF

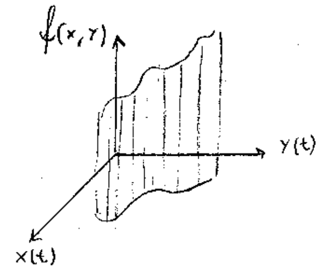
$F : A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO

$\underline{\phi} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ CURVA REGOLARE

$\mathrm{Im}(\underline{\phi}) \subseteq A \ , \ \mathrm{Im}(\underline{\phi}) = \gamma$

ALLORA SI DICE INTEGRALE DI PRIMA SPECIE

$$\int_\gamma F \, ds = \int_a^b F(\underline{\phi}(t)) \, |\underline{\phi}'(t)| \, dt$$



$S(t) = \int_a^t |\underline{\phi}'(t)| \, dt$

E' L'ASCISSA CURVILINEA.

SI DICE INTEGRALE DI SECONDA SPECIE

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{ds} = \int_a^b \underline{F}(\underline{\phi}(t)) \cdot \underline{\phi}'(t) \, dt$$

$$\int_\gamma (\underline{F} \cdot \mathrm{I}) \, ds \qquad \text{CON} \quad ds = |\underline{\phi}'| \, dt$$

DATA LA FORMA DIFFERENZIALE

$$dw = a(x)\,dx_1 + b(x)\,dx_2 + c(x)\,dx_3 = \underbrace{(a(x), b(x), c(x))}_{\underline{F}} \cdot (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$\underline{\phi}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \ , \qquad dx_1 = x_1'(t)\,dt$$

$$\underline{\phi}'(t)\,dt = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

E POSSO CALCOLARE $\int_\gamma dw$.

· ESEMPIO

$$\underline{f}(x,y,z) = (e^x,\ x+y,\ y+z)$$

$$\underline{\phi}(t) = (t, t^2, t^3) \qquad t \in [0,1]$$

$$\underline{\phi}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \qquad \neq 0$$

CALCOLO

$$\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{s} = \int_0^1 (e^t, t+t^2, t^2+t^3)\cdot(1, 2t, 3t^2)\, dt$$

$$= \int_0^1 (e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5)\, dt$$

$$= \left[e^t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^6\right]_0^1 = e + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= e + \frac{19}{15}$$

· DEF

$\underline{F} : A \to \mathbb{R}^3$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO

SI DICE CONSERVATIVO SE

$\exists\, V : A \to \mathbb{R}$ (POTENZIALE DI F) t.c.

$\underline{\nabla} V = \underline{F}$

SE $\underline{F}$ È UN CAMPO CONSERVATIVO,

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{F}(\underline{\phi}(t)) \cdot \underline{\phi}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \underline{\nabla} V(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\, x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\, y'(t) + \frac{\partial V}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\, z'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t),y(t),z(t))\, dt = V(x(b),y(b),z(b)) - V(x(a),y(a),z(a))$$

· PROPOSIZIONE

$\underline{F} : A \to \mathbb{R}^3$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO, $\underline{F} \in C^1$

SONO EQUIVALENTI

(1) $\underline{F}$ È CONSERVATIVO

(2) $\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s}$ DIPENDE SOLO DA "GLI ESTREMI DI γ"

(3) $\oint_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{s} = 0 \quad \forall \gamma$ CHIUSA

· DEF

$\underline{F} : A \to \mathbb{R}^3$ APERTO DI $\mathbb{R}^3$

$\underline{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$

SI DEFINISCE ROTORE DI $\underline{F}$

$$\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

SE $\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{0}$, ALLORA $\underline{F}$ SI DICE IRROTAZIONALE.

· PROPOSIZIONE

SE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO, ALLORA $\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{0}$.

INFATTI, $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3) = \underline{\nabla} V = (V_x, V_y, V_z)$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \equiv 0 \qquad = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \equiv 0$$

$\underline{F} \in C^1 \Rightarrow F_1, F_2, F_3 \in C^1$

$V \in C^2 \Rightarrow V_x, V_y, V_z \in C^1$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 0$$

PERCIÒ VALE IL TEOREMA DI SCHWARTZ E L'UGUAGLIANZA SOPRA È VERIFICATA.

· OSSERVAZIONE

NEL LINGUAGGIO DELLE FORME DIFFERENZIALI,

$$d\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

SI DICE FORMA DIFFERENZIALE CHIUSA SE IL ROTORE DI $\underline{F}$ È NULLO.

· ESERCIZIO

$\underline{\phi}(t) = (R\cos(t), R\sin(t), Ht)$ $R, H > 0$, $\delta > 0$, $t \in [0, 2\pi]$

DENSITÀ LINEARE DI MASSA

CALCOLIAMONE IL MOMENTO DI INERZIA:

$$I_z = \int_{\gamma = Im(\underline{\phi})} (x^2+y^2)\delta \, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta (R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t) |\underline{\phi}'(t)| \, dt$$

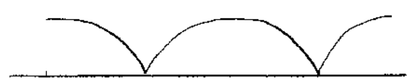
$$= \int_0^{2\pi} \delta R^2 (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + H^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta R^2 \sqrt{R^2+H^2} \, dt = 2\pi \delta R^2 \sqrt{R^2+H^2}$$

· ESERCIZIO

$\underline{\phi}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t), 0)$ CICLOIDE

$a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$



$\underline{\phi}'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t, 0)$

POSSO DECOMPORRE L'INTERVALLO IN SOTTOINTERVALLI ENTRO CUI, A TRATTI, LA CURVA È REGOLARE. QUI, AD OGNI MODO, $\underline{\phi}(t)$ È REGOLARE IN $[0, 2\pi]$:

$$L = \int_0^{2\pi} |\underline{\phi}'(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} [a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [2a^2 - 2a^2 \cos t]^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} \, dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt$$

INFATTI

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

QUINDI

$$L = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$$

$$= \left[2a\left(-\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)\cdot 2\right]_0^{2\pi} = 4a(1+1) = 8a$$

· <u>RICAPITOLANDO: CAMPI VETTORIALI</u>

$\underline{F} : A \to \mathbb{R}^3$ CAMPO VETTORIALE.

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO

ABBIAMO VISTO CHE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO SE

$\exists\, V : A \to \mathbb{R}$ t.c. $\underline{\nabla} V = \underline{F}$

INOLTRE $\underline{F}$ È IRROTAZIONALE SE

$\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{0}$

DOVE IL ROTORE È UN OPERATORE DIFFERENZIALE DEFINITO COME

$\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{\nabla} \wedge \underline{F}$

SI È VISTO CHE SE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO E C^1, $\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{0}$:

$\mathrm{ROT}(\underline{\nabla} V) = \underline{0}$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{\nabla} V = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x V & \partial_y V & \partial_z V \end{pmatrix}$$

$$= \left(\partial_{zy} V - \partial_{yz} V,\ \partial_{xz} V - \partial_{zx} V,\ \partial_{yx} V - \partial_{xy} V\right) = \underline{0}$$

· <u>TEOREMA DI POINCARÈ</u>

$\underline{F} : D \to \mathbb{R}^m$ CAMPO VETTORIALE, $\underline{F} \in C^1$

$D \subseteq \mathbb{R}^m$

SE D È SEMPLICEMENTE CONNESSO (VEDI DOPO) E $\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \underline{0}$,

ALLORA IL CAMPO $\underline{F}$ È CONSERVATIVO.

· ESEMPIO

$\underline{F}(xy, y, 0)$

$\underline{\phi}(t) = (R\cos t, R\sin t + \rho, 0) \qquad R > 0, \rho \in \mathbb{R}, t \in [0, 2\pi]$

CIRCONFERENZA CENTRATA IN $(0, \rho, 0)$.

CALCOLIAMO IL LAVORO DI $\underline{F}$ LUNGO $\underline{\Phi}$:

$$\int_{Im(\underline{\Phi})} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds = \int_0^{2\pi} (R\cos t(R\sin t + \rho), R\sin t + \rho, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 \left[-\sin t\cos t\,(R\sin t + \rho) + \sin t\cos t + \frac{\rho}{R}\cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-R^3 \sin^2 t\cos t - \rho R^2 \sin t\cos t + R^2 \sin t\cos t + R\rho\cos t \right] dt$$

$$= \left[-\frac{R^3}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left[R^2 \left(\frac{1-\rho}{2}\right)\sin 2t + R\rho\cos t \right] dt = 0$$

HO VERIFICATO CHE IL CAMPO $\underline{F}$ HA LAVORO NULLO SU UNA FAMIGLIA (INFINITA) DI CURVE CHIUSE. È CONSERVATIVO?

$$\text{rot}(\underline{F}) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & y & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, x) \neq \underline{0}$$

IL ROTORE È NON NULLO, QUINDI $\underline{F}$ NON È CONSERVATIVO.

· ESEMPIO: CAMPO GRAVITAZIONALE O COULOMBIANO

$$\underline{G}(x, y, z) = K \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) = K \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

$K_G = -GM$

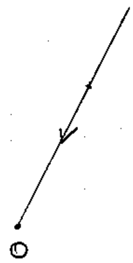
$K_Q = C_0 q$

$\underline{G}: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$

IL POTENZIALE GRAVITAZIONALE HA L'ESPRESSIONE

$$V_G(x, y, z) = \frac{K}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \qquad \text{PERCIÒ } \underline{G} \text{ È CONSERVATIVO.}$$

DOVE È DEFINITO, $\underline{G} \in C^\infty$. VERIFICHIAMO CHE



$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

VALE IL TEOREMA DI SCHWARTZ: $\underline{G}$ È IRROTAZIONALE.

· <u>ESEMPIO</u>: CAMPO MAGNETICO

CAMPO GENERATO DA UN FILO PERCORSO DA CORRENTE.

$$\underline{H}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

$$\text{ROT}(\underline{H}) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \underline{0}$$

IL CAMPO È IRROTAZIONALE. È ANCHE CONSERVATIVO?

CONSIDERO LA CURVA CHIUSA

$$\underline{\phi}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

CALCOLO

$$\int_\gamma \underline{H} \cdot \underline{ds} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t}, \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}, 0\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

QUESTO MI BASTA PER AFFERMARE CHE IL CAMPO NON È CONSERVATIVO.

$\mathbb{R}^3$ SENZA UNA RETTA NON È <u>SEMPLICEMENTE CONNESSO</u>

(POSSO PRENDERE UN LACCIO PASSANTE PER UN QUALSIASI PUNTO P E STRINGERLO SENZA INCONTRARE SINGOLARITÀ).

$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ LO È (BASTA SOLLEVARE IL LACCIO ED EVITO L'ORIGINE).

· DEF: $A \subseteq \mathbb{R}^m$ È S.C. SE SCELTI COMUNQUE UN PUNTO E UNA CURVA PASSANTE PER ESSO, LA CURVA PUÒ ESSERE CONTRATTA SUL PUNTO SENZA USCIRE DALLO SPAZIO.
SI NOTI CHE L'UNIONE DI DUE PALLE DISGIUNTE È UN INSIEME NON CONNESSO MA È SEMPLICEMENTE CONNESSO.

· ESERCIZIO

$$\underline{F}_1(x,y,z) = (x^2, y, z^3)$$
$$\underline{F}_2(x,y,z) = (x(1-e^z), -y, e^z)$$

CONSERVATIVI?

IN UN DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO, IRROTAZIONALE <=> CONSERVATIVO.

$$ROT(\underline{F}_1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & y & z^3 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

IL CAMPO È CONSERVATIVO; CERCO UN POTENZIALE.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 \quad \Rightarrow \quad V(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + h_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = y \quad \Rightarrow \quad V(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + h_2(x,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = z^3 \quad \Rightarrow \quad V(x,y,z) = \frac{1}{4}z^2 + h_3(x,y)$$

MA LE TRE ESPRESSIONI PER V DEVONO ESSERE UGUALI, PERCIÒ

$$V(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

CONSIDERO IL SECONDO CAMPO,

$$ROT(\underline{F}_2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = (0, xe^{-z}, \_)$$

IL ROTORE NON È NULLO, QUINDI $\underline{F}_2$ NON È CONSERVATIVO.

- ESEMPIO IMPORTANTE

$$\underline{F} = \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}\left(2y^2-x^2, -4xy\right)$$

DEFINITO IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. IL SUO ROTORE VALE

$$ROT(\underline{F}) = \left(0, 0, -\frac{8y^3-12x^2y}{(x^2+2y^2)^3} - \frac{12x^2y-8y^3}{(x+2y^2)^3}\right) = (0,0,0)$$

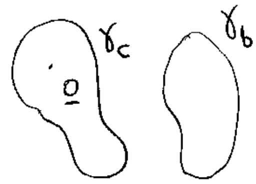
CIONONOSTANTE, L'INSIEME DI DEFINIZIONE NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO, PERCIÒ NON SO A PRIORI SE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO.

VALE PERÒ IL TEOREMA:

DATO $\underline{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$,

$\underline{F}$ È CONSERVATIVO $\iff$ $\forall \gamma$ CHIUSA SEMPLICE, $\int_\gamma (\underline{F}\cdot\underline{T})\,ds = 0$

DISTINGUIAMO QUINDI IN $\mathbb{R}^2$ DUE TIPI DI CAMMINI: QUELLI CHE CONTENGONO L'ORIGINE (CATTIVI, γ_c) E QUELLI CHE NON LA CONTENGONO (BUONI, γ_b).



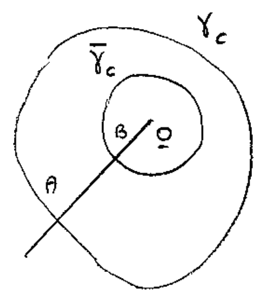
OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE

$$\int_{\gamma_b} (\underline{F}\cdot\underline{T})\,ds = 0$$

VALE INOLTRE IL SEGUENTE

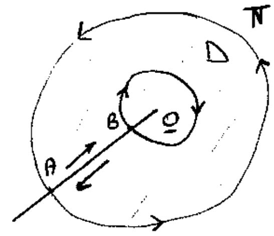
- TEOREMA DI JORDAN

OGNI CURVA CHIUSA E SEMPLICE DIVIDE IL PIANO IN DUE SOTTOINSIEMI DI CUI UNO È LIMITATO.



COSTRUIAMO QUINDI, COME A FIANCO, UN NUOVO CAMMINO π OTTENUTO IMMAGINANDO UNA NUOVA CURVA $\bar{\gamma}_c$ CONTENUTA NELL'INSIEME LIMITATO DEFINITO DA γ_c E UNA SEMIRETTA AVENTE ORIGINE IN $\underline{O}$ E CHE ATTRAVERSA ENTRAMBE γ_c E $\bar{\gamma}_c$.

PERCORRIAMO IL CAMMINO COME MOSTRATO A FIANCO, COSÌ DA TENERE L'INSIEME D SULLA SINISTRA.



SI OSSERVA CHE π È C^1 A TRATTI ED È DEFINITO SUL PIANO PRIVATO DI UNA SEMIRETTA, CHE È UN DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO. SI HA

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\int_{\pi} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds} = \int_{\gamma_c^+} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\bar{\gamma}_c^-} + \int_{\overline{BA}} = \int_{\gamma_c^+} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds - \int_{\bar{\gamma}_c^+} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds$$

OSSERVIAMO QUINDI CHE

$$\int_{\gamma_c^\pm} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds = \int_{\bar{\gamma}_c^\pm} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds$$

(A QUESTO RISULTATO SI POTRÀ ARRIVARE APPLICANDO DIRETTAMENTE IL TEOREMA DI STOKES)

OVVERO CHE L'INTEGRALE CURVILINEO ASSUME LO STESSO VALORE SU TUTTE LE CURVE CONTENENTI L'ORIGINE.

LO CALCOLIAMO QUINDI SU UNA IN PARTICOLARE, COME L'ELLISSE

$$x^2 + 2y^2 = 2 \qquad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

$$\underline{\phi}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{\phi}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \cos t)$$

$$\int_{\mathcal{E}} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sin^2 t - 2\cos^2 t}{4}, -\frac{4\sqrt{2}\sin t \cos t}{4} \right) \cdot (-\sqrt{2}\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin^3 t - \sin t \cos^2 t) - \sqrt{2} \sin t \cos^2 t \right] dt = 0$$

SI È COSÌ DIMOSTRATO CHE IL CAMPO $\underline{F}$ È CONSERVATIVO.

· ESERCIZIO

DETERMINARE f IN MODO CHE $\underline{F}$ SIA CONSERVATIVO.

① $\underline{F} = \left(-\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} f(r) \, , \, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \, , \, 0 \right) \qquad r = \sqrt{X^2+Y^2}$

② $\underline{F} = \left(f(x,y,z) \, , \, y \, , \, z \right)$

③ $\underline{F} = \left(x f(x,y,z) \, , \, y f(x,y,z) \, , \, z f(x,y,z) \right)$

PARTIAMO DA ②.

$$\text{ROT}(\underline{F}) = \left(0, \frac{\partial f}{\partial z}, -\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \underline{0} \quad \iff \quad \begin{cases} f_z = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y,z) = f(x)$$

SI NOTI CHE QUESTA CONDIZIONE NON BASTA. AD ESEMPIO,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

È DEFINITA IN DUE SEMISPAZI NON CONNESSI, MA SEMPLICEMENTE CONNESSI SE PRESI SINGOLARMENTE. QUESTO SIGNIFICA CHE NEI DUE SEMISPAZI SONO DEFINITI DUE POTENZIALI V_1 E V_2 CHE DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE (SI PENSI AL CAMPO GENERATO DALLE FACCE DI UN CONDENSATORE).

STUDIAMO ①. SI NOTI CHE SIAMO IN $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{RETTA PER L'ORIGINE}\}$.

$$\text{ROT}(F) = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{f(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}\right)\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{f(r)}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left[f'(r) \frac{\partial r}{\partial y} r - f(r) \frac{\partial r}{\partial y}\right] \cdot x = \frac{xy}{r^3}\left[r f'(r) - f(r)\right]$$

DEVE ESSERE

$$r f'(r) - f(r) = 1 \quad \begin{cases} f'(r) - \frac{1}{r} f(r) = \frac{1}{r} \\ \frac{d}{dr}(r f(r)) = 1 \end{cases}$$

NON È VERO! C'È IL - .

RISOLVO

$$f'(r) - \frac{1}{r} f(r) = \frac{1}{r}$$

OMOGENEA,

$$f_0' - \frac{1}{r} f_0 = 0 \ ; \quad \frac{f_0'}{f_0} = \frac{1}{r} \ ; \quad \ln|f_0| = \underset{\ln(r)+c}{\overset{\shortparallel}{\ln(kr)}} \quad \Rightarrow \quad f_0(r) = kr, \quad k \in \mathbb{R}$$

PARTICOLARE,

$$\bar{f}(r) = K(r)\, r$$

$$\bar{f}'(r) = K'(r) r + K(r)$$

$$K'(r) r + K(r) - \frac{1}{r} K(r) r = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad K'(r) = \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad K(r) = -\frac{1}{r}$$

PERCIÒ TUTTE LE f PER CUI IL CAMPO È IRROTAZIONALE SI SCRIVONO

$$f(r) = -1 + kr$$

IL DOMINIO NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO, PERCIÒ NON SO ANCORA SE $\underline{F}$ SIA CONSERVATIVO. CERCO ALLORA UN POTENZIALE:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{r}(kr - 1) = (1 - kr)\frac{x}{r} = (1 - kr)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{r} = \frac{\partial r}{\partial y}$$

MA

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 1 - kr$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 1$$

SI SODDISFANO ENTRAMBE SE SI IMPONE $k = 0$, QUINDI

$$V(r) = r + c$$

AVENDO TROVATO UN POTENZIALE, POSSO AFFERMARE CHE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO.

STUDIAMO LA ③.

$$\mathrm{ROT}(\underline{F}) = \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z},\ x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},\ y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} \right) \overset{?}{=} (0,0,0)$$

$$z\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$x\frac{\partial f}{\partial z} = z\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}$$

SE IL CAMPO È CENTRALE,

$$f(x,y,z) = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

SOSTITUENDO SI HA AD ESEMPIO

$$\frac{y}{r}\cdot r\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}r\frac{\partial f}{\partial y} \ ; \qquad \frac{y}{r}\cdot r\,\phi'(r)\cdot\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{=\frac{x}{r}} = \frac{x}{r}r\,\phi'(r)\underbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}_{=\frac{y}{r}}$$

IN EFFETTI, SE f È CENTRALE,

$$F = (x,y,z)\,f(x,y,z)$$
$$= \underline{r}\,\phi(r) \qquad = \nabla V(r)$$

$$\nabla V(r) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

SUPPONGO CHE NON DIPENDA DA θ

$$= \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$r\,\phi(r)$$

BASTA CHE f SIA CONTINUA E, SE È CENTRALE, IL CAMPO È SICURAMENTE CONSERVATIVO.

OVVERO, DATO

$$\underline{F} = (x,y,z)\,\phi(r) = \underline{r}\,\phi(r) \qquad r = |\underline{r}|$$

SCEGLIENDO V TALE CHE

$$\nabla V(r) = r\,\phi(r)$$

(LO POSSO FARE SE $\phi(r)$ È CONTINUA, QUINDI RIEMANN-INTEGRABILE)

HO DIMOSTRATO CHE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO.

· ESERCIZIO

$$\underline{F} = (-y f(s), x f(s), 0) \qquad s = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ROT}(\underline{F}) = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}(x f(s)) + \frac{\partial}{\partial y}(y f(s))\right) = \underline{0}$$

$$f(s) + x f'(s)\frac{\partial s}{\partial x} + f(s) + y f'(s)\frac{\partial s}{\partial y} = 0$$

$$2 f(s) + \left(\frac{x^2+y^2}{s}\right) f'(s) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f'(s) + \frac{2}{s} f(s) = 0$$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = -\frac{2}{s} \; ; \quad \ln|f(s)| = -2\ln(s) + c \; ; \quad |f(s)| = \frac{k}{s^2}$$

$$f(s) = \frac{k}{s^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$ (NOTA CHE NON È DEFINITO SULLA RETTA $x, y = 0$)

$$\underline{F} = k\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

CONSIDERIAMO IL DOMINIO $A = \{x > 0\}$ (SEMISPAZIO) CHE È SEMPLICEMENTE CONNESSO (E CONNESSO). ALLORA PER IL TEOREMA DI POINCARÈ $\underline{F}$ È CONSERVATIVO. SCELTO $k = 1$, CERCHIAMO UN POTENZIALE:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{y}\frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1} = -\frac{1}{y}\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

RICORDO CHE

$$\begin{cases} \vartheta = \text{ARCTG}\left(\frac{y}{x}\right) \\ s = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

ALLORA

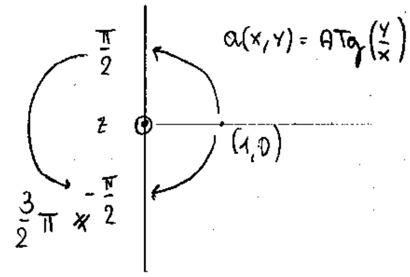
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Y}{X^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1/x}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

$\underline{F}$ IN A È CONSERVATIVO E

$$\underline{F} = \nabla(\vartheta + c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$



NOTA CHE IN TUTTO $\mathbb{R}^3$ $\underline{F}$ NON È CONSERVATIVO: CI SONO PUNTI IN CUI IL POTENZIALE NON È UNIVOCAMENTE DEFINITO.

· MISURA DI PEANO - JORDAN

INTEGRANDO SECONDO RIEMANN f IN $[a,b]$, DOVEVA ESSERE

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$$
$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin (a,b)$$

$$\mathcal{P} = (\{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b\}) \quad P \in \mathcal{P}, \qquad \text{(PARTIZIONI)}$$

$$\bar{S}_{f,P} = \sum_{k=1}^{N} \sup_{(x_{k-1},x_k)}(f) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\underline{S}_{f,P} = \sum_{k=1}^{N} \inf_{(x_{k-1},x_k)}(f) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

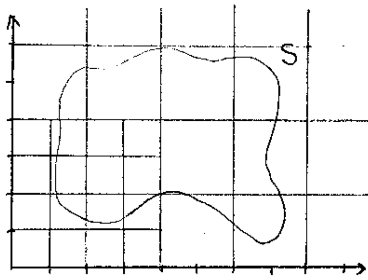
(SOMME INTEGRALI SUPERIORE E INFERIORE)

f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SSE

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \bar{S}(f,P) = \sup_{P' \in \mathcal{P}} \underline{S}(f,P') = \int_a^b f(x)\,dx$$

SPOSTIAMOCI DA $\mathbb{R}$ A UNO SPAZIO CON PIÙ DIMENSIONI.

COSTRUISCO UN RETICOLO IN $\mathbb{R}^2$ E CONSIDERO AL SUO INTERNO UN INSIEME $S \subseteq \mathbb{R}^2$.



CHIAMERÒ AREE PER ECCESSO O PER DIFETTO

$A_0^+(S) = \{$SOMMA DELLE AREE DEI QUADRATI CHE INTERSECANO $S\}$

$A_0^-(S) = \{$SOMMA DELLE AREE DEI QUADRATI CONTENUTI IN $S\}$

OPERO UN RAFFINAMENTO INFITTENDO IL RETICOLO. SE IL QUADRATO DI BASE AVEVA LATO

$l = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, A (QUADRATO) $= 1$

ORA DIMEZZO IL QUADRATO DI BASE E

$l = \left(\frac{1}{2}\right)^1$, A (QUADRATO) $= \frac{1}{4}$

COSTRUISCO COME PRIMA

$A_1^+(S)$, $A_1^-(S)$

SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE LE SUCCESSIONI "AREA ESTERNA / INTERNA"

$A_m^+(S)$ DECRESCENTE

$A_m^-(S)$ CRESCENTE $\quad \Rightarrow \quad A_m^+ \to l^+ , \; l^- \leftarrow A_m^-$

$A_m^+ \geq A_m^-$

ALLORA DATO S LIMITATO DIREMO CHE È MISURABILE SECONDO PEANO - JORDAN SE

$0 \leq A_m^+(S) - A_m^-(S) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ (CLASSI CONTIGUE)

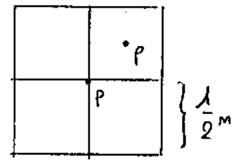
$\lim_{m \to +\infty} A_m^+(S) = \lim_{m \to +\infty} A_m^-(S) = A(S)$ AREA DI $S \subseteq \mathbb{R}^2$

$= m_2(S)$ DOVE 2 È LA DIMENSIONE

DATO L'INSIEME $S \subseteq \mathbb{R}^m$ LIMITATO, SI APPLICA LO STESSO RAGIONAMENTO DIVIDENDO LO SPAZIO IN IPERCUBI. SE IPERVOLUME INTERNO E ESTERNO COINCIDONO, HO TROVATO LA MISURA $m_m(S)$ DELL'INSIEME.

· ESEMPIO

$p \in \mathbb{R}^2$, AL LIMITE PRESO IN UN VERTICE DEL RETICOLO.



$A_m^-(\{p\}) = 0$

$A_m^+(\{p\}) \leq 4\left(\frac{1}{2^m}\right)\left(\frac{1}{2^m}\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$

· PROPOSIZIONE

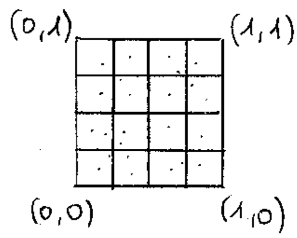
SIA $S = \{ g(x,y) \underset{(\leq)}{<} 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$

SE S È LIMITATO E g È CONTINUA, ALLORA S È P-J MISURABILE.

· PROPOSIZIONE

L'INTERSEZIONE ED UNIONE FINITA DI INSIEMI P-J MISURABILI È P-J MISURABILE.

· ESEMPIO



$D = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\} \cap [0,1]^2$

È CHIARO CHE TRA I PUNTI RAZIONALI CI SONO SEMPRE DEI PUNTI CHE NON LO SONO, QUINDI

$A_1^-(D) = 0$

$A_1^+(D) = 1$

SEZIONANDO ANCORA,

$A_m^-(D) = 0 \quad \forall m$

$A_m^+(D) = 1 \quad \forall m$

PERCIÒ L'INSIEME NON È MISURABILE SECONDO P-J.

· TEOREMA

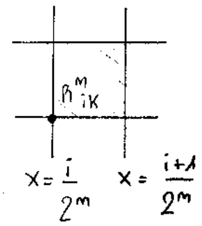
$0 \leq A^+(S) - A^-(S) = A^+(\partial S)$

PERCIÒ UN INSIEME È P-J MISURABILE SE E SOLO SE LA SUA FRONTIERA HA AREA NULLA.

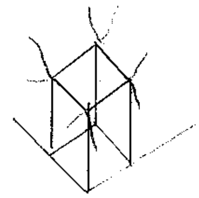
INTEGRAZIONE SU INSIEMI MISURABILI

$S \subseteq \mathbb{R}^2$ P-J MISURABILE

$f : S \to \mathbb{R}$ LIMITATA , $f(x,y) = 0$ SE $(x,y) \notin S$



$$R^m_{ik} = \left\{ \frac{i}{2^m} \le x \le \frac{i+1}{2^m} , \frac{k}{2^m} \le y \le \frac{k+1}{2^m} \right\}$$ (QUADRATINO)



$$M^m_{ik} = \sup_{(x,y) \in R^m_{ik}} \left(f(x,y) \right)$$

$$m^m_{ik} = \inf_{(x,y) \in R^m_{ik}} \left(f(x,y) \right)$$

$$F_m^-(f,S) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} m^m_{ik} \, m_2(R^m_{ik}) = \sum_{i,k} m^m_{ik} \cdot \frac{1}{2^{2m}}$$

$$F_m^+(f,S) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} M^m_{ik} \cdot 2^{-2m}$$

NOTA CHE AL CRESCERE DI m CRESCE IL NUMERO DEGLI R_{ik} SU CUI SOMMARE. NON E' INFINITESIMA.

DEF.

S P-J MISURABILE, f LIMITATA E NULLA FUORI DI S, DIREMO CHE f E' INTEGRABILE SU S SE

$$0 \le F_m^+(f,S) - F_m^-(f,S) \to 0$$

$$\int_S f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{m \to +\infty} F_m^+ = \lim_{m \to +\infty} F_m^-$$

OSSERVAZIONE

COSTRUISCO

$$F_m(f,S) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \frac{f(P_{ik})}{2^{2m}}$$ $P_{ik} \in R^m_{ik}$ (UN PUNTO QUALSIASI, NON IL SUP)

ALLORA

$$F_m^-(f,S) \le \underset{\downarrow \atop \int_S f(x,y)\,dx\,dy}{F_m(f,S)} \le F_m^+(f,S)$$

· PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE

f, g INTEGRABILI, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$S_{1,2,3}$ P-J MISURABILI

① LINEARE

$$\int_{S_1} (\lambda f + \mu g)\, dx dy = \lambda \int_{S_1} f\, dx dy + \mu \int_{S_1} g\, dx dy$$

② MONOTONO

$f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y) \in S_1$,

$$\int_{S_1} f\, dx dy \le \int_{S_1} g\, dx dy$$

③ ADDITIVO

$S_1 = S_2 \cup S_3$

$$\int_{S_1} f\, dx dy = \int_{S_2} f\, dx dy + \int_{S_3} f\, dx dy$$

④ fg È INTEGRABILE

⑤ $$\left| \int_{S_1} f\, dx dy - \int_{S_1} g\, dx dy \right| \le \int_{S_1} |f - g|\, dx dy$$

· TEOREMA

$f : S \to \mathbb{R}$ $\quad S \subseteq \mathbb{R}^2$ P-J MISURABILE, f CONTINUA.

$\Rightarrow$ f È INTEGRABILE.

IDEA DI DIMOSTRAZIONE:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \le L\, d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = L \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

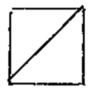
(SI È SUPPOSTA f LIPSCHITZIANA IN DUE DIMENSIONI)

$$0 \le F_m^+(f, S) - F_m^-(f, S) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}}' \frac{M_{ik}^m - m_{ik}^m}{2^{2m}}$$

MA SE f È CONTINUA,

$M_{ik}^m = f(p_{ik}^m)$ $\quad$ p_{ik}^m PUNTO DI MASSIMO

$m_{ik}^m = f(q_{ik}^m)$ $\quad$ q_{ik}^m PUNTO DI MINIMO

 $L = \frac{1}{2^m}$

USANDO LA LIPSCHITZIANITÀ,

$$|f(p_{ik}^m) - f(q_{ik}^m)| \le L|p_{ik}^m - q_{ik}^m| \le \frac{\sqrt{2}\,L}{2^m}$$ (MAX DISTANZA NEL QUADRATINO)

ALLORA

$$0 \le F_m^+(f,S) - F_m^-(f,S) \le \sum_{``i,k \in \mathbb{Z}"}{}' \frac{\sqrt{2}\,L}{2^m \cdot 2^{2m}} = \frac{\sqrt{2}\,L}{2^m} \sum_{``i,k \in \mathbb{Z}"}{}' \frac{1}{2^{2m}} = \frac{\sqrt{2}\,L}{2^m} A_m^+(S) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

NON TUTTI, SOLO QUELLI CHE HANNO INTERSEZIONE NON NULLA CON S

$A(S) = m_2(S)$

· <u>CALCOLO DEGLI INTEGRALI</u>

$R = [a,b] \times [c,d]$

$f : R \to \mathbb{R}$

$$\int_R f \, dx\,dy$$

$(x_i, y_j) \in R_{ij}^m$

$$\sum_{j,i}{}' f(x_i,y_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = \sum_j{}' \left[\sum_i{}' f(x_i,y_j)(x_{i+1}-x_i) \right](y_{j+1}-y_j)$$

$$\simeq \sum_j{}' \left[\int_a^b f(x,y_j)\,dx \right](y_{j+1}-y_j)$$ (VERA AL LIMITE PER $m \to \infty$)

$$\simeq \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

ALLORA

$$\int_R f\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

(<u>FORMULE DI RIDUZIONE</u>).

- ESEMPIO

$$\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad R=[0,b]\times[0,d]$$

$$= \int_0^d \left(\int_0^b (x^2+y^2)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^d \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2 x \right]_0^b dy \qquad = \int_0^d \left(\frac{1}{3}b^3 + b y^2 \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3} b^3 y + \frac{1}{3} b y^3 \right]_0^d \qquad = \frac{1}{3} b d \left(b^2 + d^2 \right)$$

- ESEMPIO

$$\int_R x e^{xy}\,dx\,dy \qquad R=[1,2]^2$$

$$= \int_1^2 \left(\int_1^2 x e^{xy}\,dy \right) dx \qquad = \int_1^2 \left[e^{xy} \Big|_1^2 \right] dx$$

$$= \int_1^2 \left(e^{2x} - e^x \right) dx \qquad = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x \right]_1^2 \qquad = \frac{1}{2}e^4 - \frac{3}{2}e^2 + e$$

OPPURE

$$= \int_1^2 \left(\int_1^2 x e^{xy}\,dx \right) dy \qquad = \int_1^2 \left[\frac{x}{y} e^{xy} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{xy}}{y}\,dx \right] dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{2}{y} e^{2y} - \frac{1}{y} e^y - \frac{e^{xy}}{y^2} \Big|_1^2 \right] dy$$

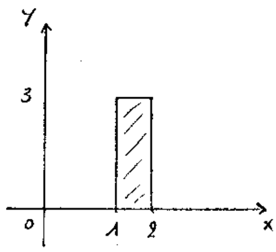
$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{y} e^{2y} - \frac{1}{y} e^y - \frac{e^{2y}}{y^2} + \frac{e^y}{y^2} \right) dy$$

CHE È MOLTO PIÙ DIFFICILE DI PRIMA DA RISOLVERE.

- ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{y}{x}}$$

$$(x,y) \in R = [1,2]\times[0,3]$$



$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy$$

CALCOLO (L'ALTRO E' MOLTO PEGGIO)

$$\int_1^2 \left(\int_0^3 \frac{1}{x^3} e^{\frac{y}{x}} \, dy \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3} \left(\int_0^3 e^{\frac{y}{x}} \, dy \right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^3} \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_0^3 dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \left(e^{\frac{3}{x}} - 1 \right) dx$$

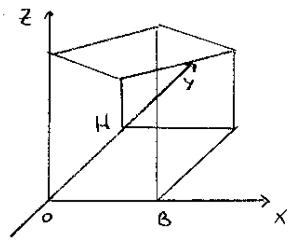
$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{3}{x}} \, dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{3} \left[+ e^{\frac{3}{x}} \right]_1^2 + \left[\frac{1}{x} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} \left(-e^{\frac{3}{2}} + e^3 \right) - \frac{1}{2}$$

· **ESEMPIO**

$f(x,y) = ax + by + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

$(x,y) \in R = [0, B] \times [0, H]$



PIANO IN $\mathbb{R}^3$

$$\int_R f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^B \int_0^H (ax + by + c) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^B \left[axy + \frac{1}{2} b y^2 + cy \right]_0^H dx = \int_0^B \left[aHx + \frac{1}{2} bH^2 + cH \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} aHx^2 + \frac{1}{2} bH^2 + cHx \right]_0^B = \frac{1}{2} aHB^2 + \frac{1}{2} bH^2 B + cHB$$

$$= \int_R c \, dx dy + \int_R ax \, dx dy + \int_R by \, dx dy$$

· **OSSERVAZIONE**

$R = [a, b] \times [c, d]$

$f(x,y) = g(x) \, h(y)$

APPLICANDO LE FORMULE DI RIDUZIONE,

$$\int_a^b \int_c^d g(x) h(y) \, dy \, dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

- ESEMPIO

$f(x,y) = x \sin y$

$R = [0, 2\pi]^2$

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \sin y\,dy \cdot \int_0^{2\pi} x\,dx = 0$$

IN EFFETTI,

$$-f(x,y) = f(x, \pi - y)$$

- ESEMPIO

$f(x,y) = xy$

$R = [0,1]^2$

$$V = \int_R f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 y\,dy\right)\left(\int_0^1 x\,dx\right) = \frac{1}{4}$$

- ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$$

$R = [3,4] \times [1,2]$

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{(x+y)^2} \Big|_3^4 \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right) dy$$

$$= \ln\left(\frac{y+3}{y+4}\right) \Big|_1^2 = \ln\left(\frac{5}{6}\right) - \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{25}{24}\right)$$

(NOTA CHE HO TOLTO I MODULI AI LOGARITMI PERCHÈ y È POSITIVA NEL DOMINIO CONSIDERATO).

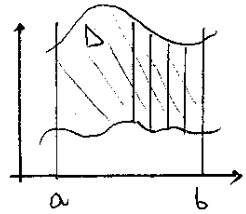
· DEF:

D È UN DOMINIO NORMALE (O SEMPLICE) SE

$$D = \{ a \le x \le b , \quad g(x) \le y \le h(x) \} \subseteq \mathbb{R}^2$$, OPPURE

$$D = \{ c \le y \le d , \quad f(y) \le x \le p(y) \}$$

(O ANCHE SEMPLICE RISPETTO ALLA VARIABILE Y o X).



SI PUÒ DIMOSTRARE CHE IN QUESTI CASI VALE SOLO UNA DELLE DUE FORMULE DI RIDUZIONE. AD ESEMPIO,

INTEGRO SU TUTTE LE LINEE VERTICALI.

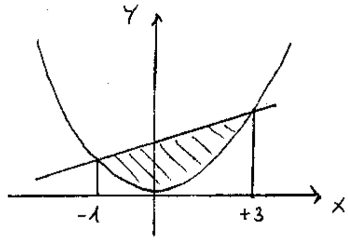
$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$D = \{ a \le x \le b , \; g(x) \le y \le h(x) \}$$

· ESEMPIO

DOMINIO INDIVIDUATO DA

$$y = x^2 , \qquad y = 2x + 3$$



CERCO LE INTERSEZIONI,

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1+3} = \begin{cases} -1 \\ +3 \end{cases}$$

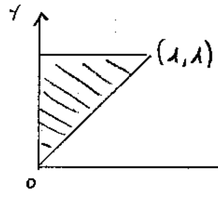
CALCOLO

$$\int_D (x + y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} (x+y^2)\,dy \right) dx = \int_{-1}^{3} \left[xy + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{2x+3} dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[2x^2 + 3x + \frac{8}{3} x^3 + 18x + 12x^2 + 9 - x^3 - \frac{1}{3} x^6 \right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{21} x^7 + \frac{5}{12} x^4 + \frac{14}{3} x^3 + \frac{21}{2} x^2 + 9x \right]_{-1}^{3}$$

· ESERCIZIO



$$\int_D e^{y^2}\,dx\,dy$$

IL DOMINIO SI PUÒ ESPRIMERE COME

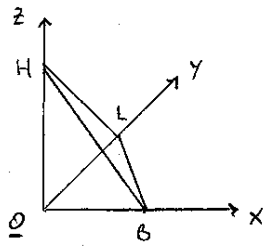
$$D = \{0 \le y \le 1,\quad 0 \le x \le y\}$$

$$D = \{0 \le x \le 1,\quad x \le y \le 1\}$$

NON SO INTEGRARE SUBITO RISPETTO A Y, QUINDI SCELGO LA PRIMA ESPRESSIONE.

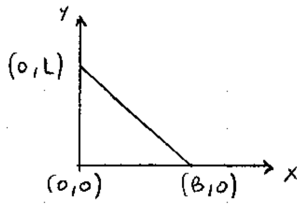
$$\int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 2y e^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}(e-1)$$

· ESERCIZIO



CALCOLIAMO IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE A BASE TRIANGOLARE.

SCRIVO LA RETTA SUL PIANO XY COME



$$y = -\frac{L}{B}(x-B) = \frac{L}{B}(B-x)$$

LA FUNZIONE $f(x,y)$ È UN PIANO,

$$f(x,y) = ax + by + c$$

PASSANTE PER $\underline{B}$, $\underline{H}$, $\underline{L}$:

$$\begin{cases} c = H \\ 0 = c + aB \\ 0 = c + bL \end{cases} \Rightarrow \quad z = f(x,y) = H - \frac{H}{B}x - \frac{H}{L}y = H\left(1 - \frac{x}{B} - \frac{y}{L}\right)$$

SCRIVO IL DOMINIO,

$$D = \left\{0 \le x \le B,\quad 0 \le y \le \frac{L}{B}(B-x)\right\}$$

INFINE INTEGRO:

$$V = \int_D f(x,y)\,dxdy = H\int_0^B \left(\int_0^{\frac{L}{B}(B-x)} \left(1 - \frac{x}{B} - \frac{y}{L}\right) dy \right) dx$$

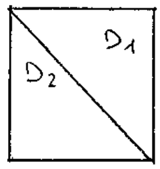
$$= H\int_0^B \left[y - \frac{1}{B}xy - \frac{1}{2L}y^2 \right]_0^{\frac{L}{B}(B-x)} dx$$

$$= H\int_0^B \left[\frac{L}{B}(B-x) - \frac{1}{B}\frac{L}{B}x(B-x) - \frac{1}{2L}\frac{L^2}{B^2}(B-x)^2 \right] dx$$

$$= H \cdot \left[\frac{1}{2}Lx - \frac{1}{2}\frac{L}{B}x^2 + \frac{1}{6}\frac{L}{B^2}x^2 \right]_0^B = \frac{1}{3} H \frac{1}{2} BL$$

· <u>ESERCIZIO</u>

$$D = [0,1]^2$$



$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & x+y \geq 1 \\ 2x - y^2 & x+y < 1 \end{cases}$$

f È LIMITATA (CONTINUA SU UN COMPATTO), SICURAMENTE INTEGRABILE SUI DUE SEMI-DOMINI E QUINDI SUL DOMINIO INTERO PER ADDITIVITÀ.

$$\int_D f(x,y) = \int_{D_1} (x+y)\,dxdy + \int_{D_2} (2x-y^2)\,dxdy$$

$$D_1 = \{ 0 \leq x \leq 1 ,\ 1-x \leq y \leq 1 \}$$

$$D_2 = \{ 0 \leq y \leq 1 ,\ 0 \leq x \leq 1-y \}$$

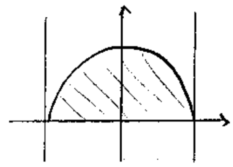
$$\int_D f(x,y) = \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x+y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-y} (2x - y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{1-x}^1 dx + \int_0^1 \left[x^2 - y^2 x \right]_0^{1-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-1+x) + \frac{1}{2}\left(1 - (1-x)^2\right) \right] dx + \int_0^1 \left[(1-y)^2 - y^2(1-y) \right] dy$$

· ESERCIZIO

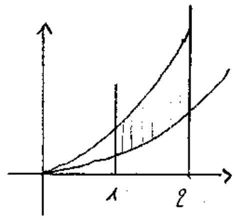
$$E = \{ -1 \le x \le 1 \, , \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \} \subseteq \mathbb{R}^2$$



$$\int_E x^2 y \, dx dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \left[y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 (1-x^2) \, dx$$

· ESERCIZIO



$$D = \{ 1 \le x \le 2 \, , \quad \frac{1}{2} x^2 \le y \le x^2 \}$$

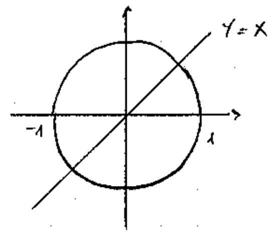
$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2} \, dx dy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2} \, dy \, dx$$

$$= \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \, dy \, dx = \int_1^2 \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left[\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x\right) \right] dx$$

· ESERCIZIO

$$B = \{ x^2 + y^2 \le 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$



$$\int_B (x-y) \cos(x^2+y^2) \, dx dy = \int_B f(x,y) \, dx dy$$

NOTO CHE

$$f(y,x) = (y-x) \cos(y^2+x^2)$$

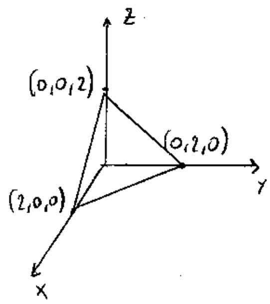
$$= -(x-y) \cos(x^2+y^2) = -f(x,y)$$

L'INTEGRALE HA TANTI CONTRIBUTI POSITIVI QUANTI NEGATIVI: SO GIÀ A PRIORI CHE

$$\int_B f(x,y) \, dx dy = 0$$

· ESEMPIO

$$E = \{ x, y, z > 0, \quad x + y + z < 2 \}$$



$$\int_E (x + y - z)\, dx\,dy\,dz$$

DEVO SCRIVERE E COME DOMINIO NORMALE,

$$E = \{ 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2 - x, \quad 0 \le z \le 2 - x - y \}$$

CALCOLO

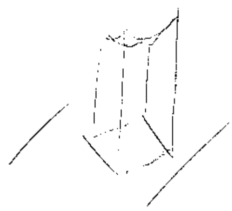
$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} (x + y - z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} \left[xz + yz - \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{2-x-y} dy\, dx \quad = \int_0^2 \left[-2 + 4x + 4y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}xy \right] dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[-2y - 4xy + 2y^2 - \frac{3}{2}x^2 y - \frac{1}{2}y^3 - \frac{5}{4}xy^2 \right]_0^{2-x} dx \quad = \ldots$$

· ESERCIZIO

$$E = \{ (x,y) \in Q = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad x + y \le z \le x^2 + y^2 + 1 \}$$



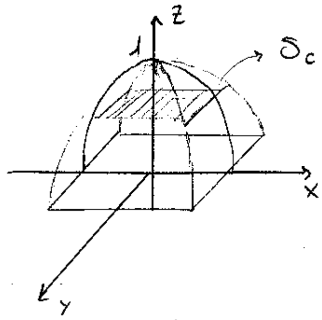
CERCO $VOL(E) = m_3(E)$. INTEGRO PER FILI:

$$\int_E 1\, dx\,dy\,dz = \int_Q \left(\int_{x+y}^{x^2+y^2+1} dz \right) dx\,dy = \int_Q (x^2 + y^2 + 1 - x - y)\, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f\, dx\,dy = \frac{2}{3}$$

· ESERCIZIO

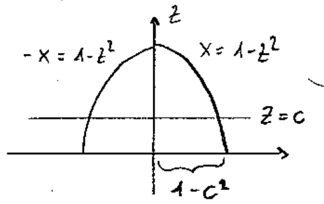
$$E = \{ |x|, |y| \le 1 - z^2, \quad z \ge 0 \}$$



LA SEZIONE QUADRATA GENERICA E'

$$S_c = \{ |x|, |y| \le 1 - c^2 \} = \{ -(1 - c^2) \le x, y \le (1 - c^2) \}$$

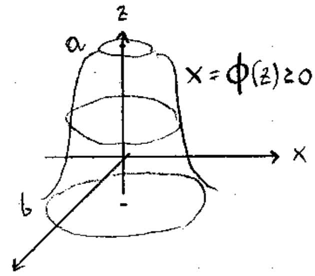
$$m_2(S_c) = [2(1 - c^2)]^2 = 4(1 - c^2)^2$$



INTEGRO PER SEZIONI:

$$m_3(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{S_z} dx\,dy \right) dz = \int_0^1 4(1 - z^2)^2\, dz = \frac{8}{5}$$

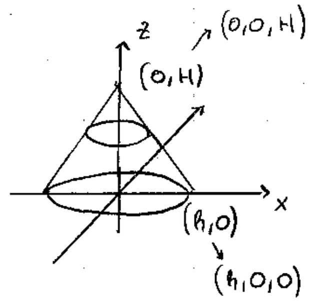
· SOLIDI DI ROTAZIONE



$$V = \int_S 1\, dx\,dy\,dz = \int_b^a \left(\int_{S_z} 1\, dx\,dy \right) dz = \int_b^a m_2(S_z)\, dz$$

$$= \int_b^a \pi \left[\phi(z) \right]^2 dz$$

· ESEMPIO



CONO RETTO.

$$x = R - \frac{R}{H} z = R\left(1 - \frac{z}{H}\right) = \phi(z)$$

$$V_{CONO} = \int_0^H \pi R^2 \left(1 - \frac{1}{H} z\right)^2 dz = \pi R^2 \int_0^H \left(1 - \frac{2z}{H} + \frac{1}{H} z^2\right) dz$$

$$= \pi R^2 \left[z - \frac{1}{H} z^2 + \frac{1}{3H^2} z^3 \right]_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

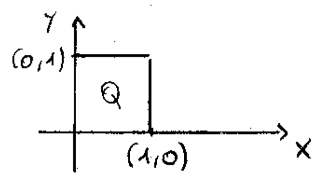
· INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

IN UNA VARIABILE, VALEVA

$$\sum_i f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_i f(\phi(t))(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

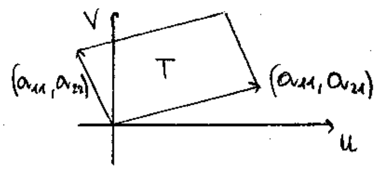
$x = \phi(t)$ $\qquad$ $\phi'(\xi_i)$

IMMAGINIAMO ORA UN CAMBIO DI VARIABILI AFFINE



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

SE APPLICO LA MATRICE SUI VETTORI DELLA BASE, IN GENERALE I NUOVI VETTORI NON SONO ORTOGONALI.



$$m_2(Q) = 1 \qquad T = F(Q)$$

$$m_2(T) = (a_{11}^2 + a_{21}^2)^{1/2} \cdot (a_{12}^2 + a_{22}^2)^{1/2} \left[1 - \cos^2\alpha \right]^{1/2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\left[F(\underline{e}_1) \cdot F(\underline{e}_2) \right]^2}{|F(\underline{e}_1)|^2 |F(\underline{e}_2)|^2} \qquad \text{MA } |F(\underline{e}_1)| = (a_{11}^2 + a_{21}^2)^{1/2} \text{, QUINDI}$$

$$m_2(T) = \left[(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 \right]^{1/2} = \dots$$

$$= |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$$

$$m_2(T) = m_2(F(Q)) = |\det(F)|$$

IN TERMINI DI INTEGRALI,

NOTA: $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ È L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA INDIVIDUATO DAI DUE VETTORI $(a\ b)$ E $(c\ d)$.

$$m_2(Q) = \int_Q dx\,dy$$

$$m_2(T) = \int_T dv\,du = |\det(F)|\, m_2(Q)$$

$$m_2(Q) = \int_Q dx\,dy = \int_T \frac{1}{|\det F|}\, du\,dv = 1$$

· <u>TEOREMA</u>

$F: A \to \mathbb{R}^2, \quad F \in C^1$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO

$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \qquad \underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}$$

SUPPONIAMO CHE:

1. F È BIUNIVOCA DA $D \subseteq A$ P-J MISURABILE A $T = F(D)$
2. $\det(J_F) \neq 0$ (E LIMITATO) IN D

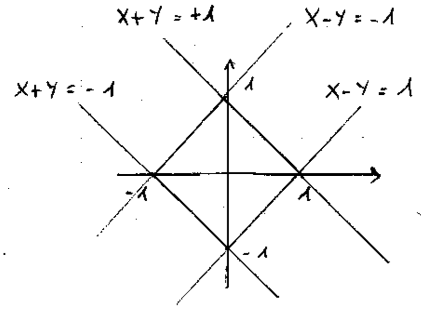
ALLORA, $\forall f$ INTEGRABILE,

$$\int_{\substack{T \\ =F(D)}} f(x,y)\, dx\,dy = \int_D f(x(u,v), y(u,v))\, |\det(J_F(u,v))|\, du\,dv$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

· <u>ESEMPIO</u>

$$\int_Q (x^2 - y^2)\, dx\,dy$$



CONSIDERIAMO LA TRASFORMAZIONE INVERTIBILE

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = x+y \in [-1,1] \\ v = x-y \in [-1,1] \end{cases}$$

ALLORA $\qquad M$, CON $\det(M) = -\frac{1}{2} \neq 0$

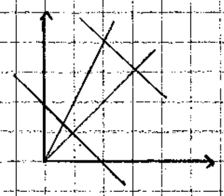
$$\int_Q (x^2 - y^2)\, dx\,dy = \int \left[\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(u-v)\right)^2\right] \cdot \frac{1}{2}\, du\,dv$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2uv + 2uv)\, du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} uv\, du\,dv = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} u\,du\right)\left(\int_{-1}^{1} v\,dv\right) = \frac{1}{2}$$

· ESEMPIO

$$\int_E \frac{dx\,dy}{2x+y} \quad \text{SU} \quad E = \{ x < y < 2x \,,\ 1 < x+y < 3 \} = \{ 1 < \frac{y}{x} < 2 \,,\ 1 < x+y < 3 \}$$

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x+y \end{cases}$$



E' INVERTIBILE ?

$$\begin{cases} u = \frac{v-x}{x} = \frac{v}{x} - 1 & \Rightarrow \quad x = v\left(\frac{1}{u+1}\right) \\ y = v - x & \Rightarrow \quad y = v\left(1 - \frac{1}{u+1}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{v}{u+1} \\ y = \frac{uv}{u+1} \end{cases}$$

IL FATTO DI AVERLO POTUTO SCRIVERE SENZA PROBLEMI MI GARANTISCE CHE IL CAMBIO E' BIUNIVOCO.

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{-v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v(u+1)-uv}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{pmatrix} \qquad \det(J_F) = \frac{v(u+1)}{(u+1)^3}$$

ALLORA

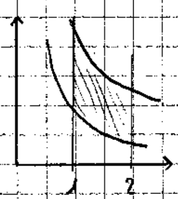
$$\int_E \frac{dx\,dy}{2x+y} = \int_1^2 du \int_1^3 dv \; \frac{1}{2v\left(\frac{1}{u+1}\right) + v\left(\frac{u}{u+1}\right)} \cdot \frac{v}{(u+1)^2}$$

$$= \int_1^2 \left(\int_1^3 \frac{dv}{(2+u)(u+1)} \right) du$$

$$= 2\left[\int_1^2 \frac{1}{(2+u)(u+1)}\, du \right] = 2 \int_1^2 \left(\frac{-1}{2+u} + \frac{1}{1+u} \right) du$$

· ESEMPIO

$$R = \{ 1 \leq x \leq 2 \,,\ 2 \leq xy \leq 3 \}$$



$$\int_R \frac{1}{xy}\, dx\,dy$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \quad \det(J) = \frac{1}{u} \neq 0$$

$$\int_R \frac{1}{xy}\, dx\,dx = \int_{F(R)} \frac{1}{v}\,\frac{1}{u}\, du\,dv = \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{uv}\, du \right) dv$$

$$= \left(\int_1^2 \frac{1}{u}\, du \right)\left(\int_2^3 \frac{1}{v}\, dv \right) = \ln(2)\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

- <u>COORDINATE POLARI</u>

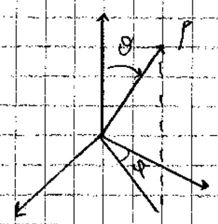
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

IL CAMBIO È BIUNIVOCO OGNI VOLTA CHE $\rho > 0$

- <u>COORDINATE SFERICHE</u>

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array}$$



$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(J) &= \cos\theta\left[\rho^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right] \\ &\quad + \rho\sin\theta\left[\rho\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho\sin^2\theta\sin^2\varphi\right] \\ &= \rho^2\sin\theta\cos^2\theta + \rho^2\sin^3\theta \\ &= \rho^2\sin\theta \end{aligned}$$

L'INTERO ASSE z È SINGOLARE $(\sin\theta = 0)$; MA IN $\mathbb{R}^3$ GLI INTEGRALI NON RISENTONO DI CIÒ.

- <u>ESEMPIO</u>

$$B = \{x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

$$\begin{aligned} \int_B dx\,dy\,dz &= \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho^2\sin\theta\, d\varphi \\ &= 2\pi\left[\int_0^R \rho^2\, d\rho\right]\left[\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right] = 2\pi\cdot\frac{1}{3}R^3\cdot 2 \end{aligned}$$

- <u>ESEMPIO</u>

$$E = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & & 0 \\ & b^{-1} & \\ 0 & & c^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \det(F) = [abc]^{-1} \quad \begin{cases} u = a^{-1}x \\ v = b^{-1}y \\ w = c^{-1}z \end{cases}$$

$$\mathrm{VOL}(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_{B(0,1)} \left[[abc]^{-1}\right]^{-1} du\,dv\,dw = abc\int_{B(0,1)} du\,dv\,dw \underset{\text{SFERICHE}}{=} \frac{4}{3}\pi\, abc$$

· ESERCIZIO

$B = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_B dx\,dy = m_2(B) = \pi$$

$$T: \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y\ 2uv \end{cases} \qquad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

$$1 \geq x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 + v^4 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 = (u^2+v^2)^2$$

$$T^{-1}(B) = \{ u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

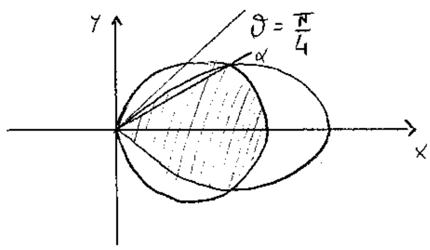
$$J_{u,v} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \qquad |\det(J)| = 4(u^2+v^2)$$

L'INTEGRALE DIVENTA

$$\int_{\underset{=\{u^2+v^2 \leq 1\}}{T^{-1}(B)}} 4(u^2+v^2)\,du\,dv \underset{\text{c.p.}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 4\rho^3 \, d\theta \right) d\rho = 2\pi \left[\rho^4 \right]_0^1 = 2\pi$$

COM'È POSSIBILE? NON HO MAI VERIFICATO CHE L'APPLICAZIONE T FOSSE BIUNIVOCA!

· ESERCIZIO



CALCOLIAMO L'AREA TRA

$$x^2 + y^2 - x = 0 \quad , \quad \rho^2 = 2\cos(2\theta)$$

SCRIVIAMO LA CIRCONFERENZA IN COORDINATE POLARI,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \det(J) = \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \cos\theta$$

CERCO L'INTERSEZIONE,

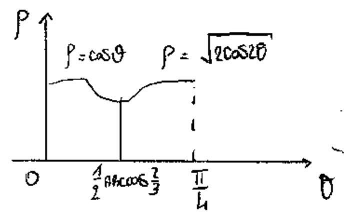
$$\cos\theta = \sqrt{2\cos(2\theta)}$$

$$\cos^2\theta = 2\cos(2\theta) \ ; \quad \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) = 2\cos 2\theta \ ; \quad 3\cos 2\theta = 2$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

PERCIO'

$$m_2(D) = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{3}\right)}\int_0^{\cos\vartheta}\rho\, d\rho\, d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2\cos 2\vartheta}}\rho\, d\rho\, d\vartheta\right]$$



$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\cos^2\vartheta\, d\vartheta + 2\int_{\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \vartheta\right]_0^{\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}} + \left[\sin 2\vartheta\right]_{\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

<u>ESERCIZIO</u>

$$\begin{cases} x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ \vartheta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi] \end{array} \qquad \det(J) = \rho^2\sin\vartheta$$

CALCOLIAMO IL VOLUME DELLA SFERA $m_3\left(B(\underline{0},R) \subseteq \mathbb{R}^3\right)$

$$\int_B dx\,dy\,dz \underset{C.S.}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R \rho^2\sin\vartheta\, d\rho\right)d\vartheta\right)d\varphi$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_0^R \rho^2\, d\rho\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CALCOLIAMO IL VOLUME $m_3(E)$ DELL'ELLISSOIDE

$$E = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

CONSIDERIAMO IL CAMBIO LINEARE $(a,b,c>0)$

$$\begin{cases} x = au \\ y = bs \\ z = ct \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ s \\ t \end{pmatrix} \qquad \det(J) = abc$$

SIANO $u,s,t \in [-1,1]$, $x \in [-a,a]$: È UN'OMOTETIA.

$$\int_E dx\,dy\,dz = \int_{B(0,1)} abc\, du\,ds\,dt = abc\cdot\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

PER LA TERRA,

$a = b = 6378$ Km $\qquad c = 6356$ Km $\qquad \mathrm{VOL}(T) \cong 1.08\cdot 10^{21}\ m^3$

· ESERCIZIO

$$\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{C.P.}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho e^{-\rho^2}\,d\rho\right)d\theta = \pi\left[1-e^{-R^2}\right] \xrightarrow[R\to+\infty]{} \pi$$

$B(0,R) \cap \mathbb{R}^2$; $\quad \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\,d\rho = \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^R$

CHIAMO ALLORA

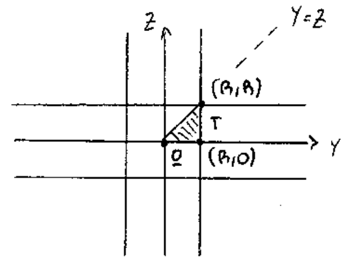
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi$$

$$\parallel$$

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

· ESERCIZIO



$$E = \left\{x^2+y^2 \le R^2,\ x^2+z^2 \le R^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

CHE È L'INTERSEZIONE TRA DUE CILINDRI INFINITI.

$X_1 = \sqrt{R^2-Z^2}$

$X_2 = \sqrt{R^2-Y^2}$

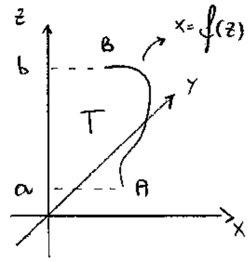
CON $X_2 \le X_1$ PER $Y<Z$

$$m_3(E) = 16\int_T \sqrt{R^2-y^2}\,dy\,dz$$

$$= 16\int_0^R\left(\int_0^y \sqrt{R^2-y^2}\,dz\right)dy = 16\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{16}{3}R^3$$

· ESEMPIO



$E \subseteq \mathbb{R}^3$ SOLIDO DI ROTAZIONE

$$m_3(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{S_z} dx\,dy\right)dz = \int_a^b \pi\left[f(z)\right]^2 dz$$

↑ PER SEZIONI

CERCO IL BARICENTRO DEL SOLIDO,

$$x_G(T) = \frac{\int_T x\,dx\,dz}{\int_T dx\,dz} = \frac{1}{m_2(T)}\int_a^b\left(\int_0^{f(z)} x\,dx\right)dz = \frac{1}{m_2(T)}\int_a^b\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{f(z)}dz$$

$$X_G(T) = \frac{1}{2m_2(T)} \int_a^b f^2(z)\,dz = \frac{1}{2\pi m_2(T)} \quad m_3(E)$$

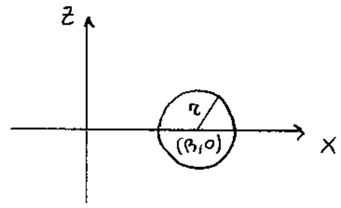
SI È COSÌ DIMOSTRATO CHE VOL(E) = (AREA SEZIONE) · (CFR DESCRITTA DAL BARICENTRO):

$$m_3(E) = 2\pi X_G(T)\, m_2(T)$$ **TEOREMA DI GULDINO**

$$\left(= 2\pi \int_T x\,dx\,dz \right)$$

· **ESEMPIO**

CALCOLIAMO IL VOLUME DEL TORO:



$$Vol(\mathbb{T}_2) = A(C) \cdot 2\pi X_G$$
$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$$

· **SUPERFICI PARAMETRICHE** (VEDI P. 256, 278, 287)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ CHIUSO E CONNESSO

$\underline{\phi} : D \to \mathbb{R}^3$ PARAMETRIZZAZIONE

$\underline{\phi} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$

$\underline{\phi}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \qquad (u,v) \in D$

$\Sigma = \underline{\phi}(D)$ IMMAGINE DI $\underline{\phi}$

ALLORA LA COPPIA

$(\Sigma, \underline{\phi})$

È UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$.

SIA

$\underline{P} = \underline{\phi}(u_0, v_0) \qquad (u_0, v_0) \in INT(D) \qquad$ (INTERNO DI D)

DIREMO CHE $\underline{P}$ È REGOLARE SSE

$$\begin{pmatrix} X_u(u_0,v_0) & Y_u(u_0,v_0) & Z_u(u_0,v_0) \\ X_v(u_0,v_0) & Y_v(u_0,v_0) & Z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

HA RANGO 2, OVVERO $\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v \neq \underline{0}$

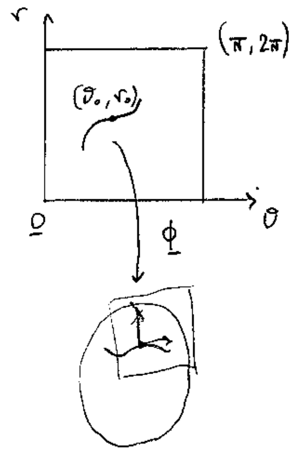
UNA SUPERFICIE È REGOLARE SE TUTTI I SUOI PUNTI IMMAGINE DI PUNTI INTERNI A D SONO REGOLARI.

· <u>ESEMPIO</u>

SUPERFICIE DELLA SFERA. SE SPECIFICO 2 PARAMETRI HO GIÀ INDIVIDUATO UNIVOCAMENTE UN PUNTO SU DI ESSA.

$$\underline{\phi}(\theta, r) = (\sin\theta\cos r, \sin\theta\sin r, \cos\theta)$$
$$(\theta, r) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\underline{\phi}_\theta(\theta, r) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos r \\ \cos\theta\sin r \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \underline{\phi}_r(\theta, r) = (-\sin\theta\sin r, +\sin\theta\cos r, 0)$$



$\underline{\phi}_r$ E $\underline{\phi}_\theta$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SIA ORA

$(\theta(t), r(t))$ CURVA REGOLARE t.c.

$\theta(0) = \theta_0 \qquad r(0) = r_0 \qquad t \in [-\delta, \delta]$

TRAMITE L'APPLICAZIONE $\underline{\phi}$, LA MANDO IN UNA CURVA NELLO SPAZIO. È ANCORA REGOLARE?

$$\frac{d}{dt}\underline{\phi}(\theta(t), r(t)) = \frac{d}{dt}\left(x(\theta(t), r(t)), y(\theta(t), r(t)), z(\theta(t), r(t))\right)$$

$$= (x_\theta\theta' + x_r r', y_\theta\theta' + y_r r', z_\theta\theta' + z_r r')$$

$$= \underline{\phi}_\theta(\theta(t), r(t)) \cdot \theta'(t) + \underline{\phi}_r(\theta(t), r(t)) \cdot r'(t) = \underline{J_\phi \cdot \underline{c}'(t)} = \begin{pmatrix} x_\theta & x_r \\ y_\theta & y_r \\ z_\theta & z_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta'(t) \\ r'(t) \end{pmatrix}$$

SE SONO LIN. INDIPENDENTI, NON ESISTE COMBINAZIONE LINEARE NULLA A MENO CHE AD ESSERE NULLI SIANO I COEFFICIENTI.

CONSIDERIAMO IL VETTORE VELOCITÀ (BIDIMENSIONALE)

$$(\theta'(0), r'(0)) = \theta'(0)\,\underline{e}_1 + r'(0)\,\underline{e}_2$$

ORA SI HA

$$\frac{d}{dt}\underline{\phi}(\theta(0), r(0)) = \underline{\phi}_\theta(\theta_0, r_0)\,\theta'(0) + \underline{\phi}_r(\theta_0, r_0)\,r'(0)$$

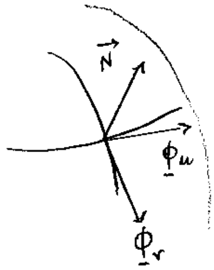
E POICHÈ $\underline{\phi}_\theta$, $\underline{\phi}_r$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, ESISTE UN PIANO TANGENTE.

NOTA:
DATA $\phi(u, r)$, SE FISSO u_0 OTTENGO LA CURVA $\phi(u_0, r)$ E SIMILMENTE SE FISSO r_0. ALLORA
$\phi_r(r_0) = x_u(u_0, r_0)\hat{i} + y_u(u_0, r_0)\hat{j} + z_u(u_0, r_0)\hat{k}$
È IL VETTORE TANGENTE ALLA CURVA IN (x_0, y_0). L'ALTRO VETTORE TANGENTE È $\phi_u(u_0)$.
LA SUPERFICIE È REGOLARE SE AMMETTE PIANO T_g (DIFFERENZIABILITÀ). SE TALE PIANO ESISTE, CONTIENE ϕ_u E ϕ_r; MA PER GENERARE UN PIANO, ESSI DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI.

VERIFICHIAMO NEL NOSTRO ESEMPIO CHE $\underline{\phi}_r \wedge \underline{\phi}_u \neq 0$:

$$\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_r = \det\begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \cos\theta\cos r & \cos\theta\sin r & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin r & \sin\theta\cos r & 0 \end{pmatrix} = (\sin^2\theta\cos r, \sin^2\theta\sin r, \sin\theta\cos\theta)$$

CHE NON È MAI IL VETTORE NULLO.



SE SOLLEVO FUNZIONI COSTANTI OTTENGO MERIDIANI E PARALLELI. IL PRODOTTO VETTORIALE TRA I VETTORI TANGENTI IN UN PUNTO DEFINISCONO UN VETTORE NORMALE CHE, SE NORMALIZZATO, RAPPRESENTA IL VERSORE NORMALE ALLA SUPERFICIE.

$$|\underline{\phi}_\theta \wedge \underline{\phi}_r| = \left[\sin^4\theta\cos^2 r + \sin^4\theta\sin^2 r + \sin^2\theta\cos^2 r\right]^{\frac{1}{2}} = \sin\theta$$

$$\underline{N} = (\sin\theta\cos r, \sin\theta\sin r, \cos\theta)$$

SI NOTI CHE SULLA SFERA IL VERSORE NORMALE È UGUALE ALLA PARAMETRIZZAZIONE.

· GRAFICI DI FUNZIONI

$f : D \to \mathbb{R}$ $\qquad f \in C^1(D)$

$(x, y, f(x,y)) = \phi(x,y)$ $\qquad (x,y) \in D$

QUAND'È CHE QUESTO OGGETTO È REGOLARE?

$$\underline{\phi}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\underline{\phi}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

SONO SEMPRE LINEARMENTE INDIPENDENTI; MI BASTA RICHIEDERE $f \in C^1$.

CERCHIAMO IL VERSORE NORMALE:

$$(\underline{\phi}_x \wedge \underline{\phi}_y) = \det\begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & f_x(x,y) \\ 0 & 1 & f_y(x,y) \end{pmatrix} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$$

IL VETTORE NORMALE NON È MAI NULLO.

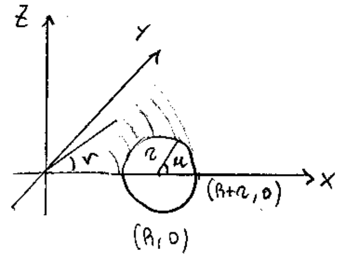
IL VERSORE NORMALE È

$$\underline{n} = \frac{(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}{\left[1 + |\nabla f(x,y)|^2\right]^{1/2}}$$

IL PIANO TANGENTE HA EQUAZIONE

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{N} = 0$$

CON $z_0 = f(x_0, y_0)$



· ESEMPIO

CONSIDERIAMO LA SUPERFICIE DEL TORO (GLASSA SULLA CIAMBELLA).

$$T_2: \quad \underline{\phi}(u,v) = \left((R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u\right)$$
$$(u,v) \in D = [0, 2\pi]^2$$

È UNA PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE?

$$\underline{\phi}_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$$
$$\underline{\phi}_v = (-(R+r\cos u)\sin v, (R+r\cos u)\cos v, 0)$$

$$\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v = \left(r(R+r\cos u)\cos u\cos v, -r(R+r\cos u)\cos u\sin v, (R+r\cos u)\sin u\right)$$

CHE È SEMPRE NON NULLO.

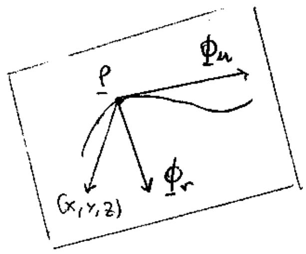
· PIANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE

$(\Sigma, \underline{\phi})$ SUPERFICIE REGOLARE $\quad (\underline{\phi} \in C^1(D) \to \mathbb{R}^3)$

$(u_0, v_0) \in \text{INT}(D)$

LO SPAZIO TANGENTE È GENERATO DA

$$\underline{\phi}_u = (X_u(u_0,v_0) \quad Y_u(u_0,v_0) \quad Z_u(u_0,v_0))$$
$$\underline{\phi}_v = (X_v(u_0,v_0) \quad Y_v(u_0,v_0) \quad Z_v(u_0,v_0))$$



$(x,y,z) \in T_P(\Sigma)$

$\underline{P} = \underline{\phi}(u_0, v_0)$

L'EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO Tg A Σ NEL PUNTO $\underline{P}$ È DATA DA $\det(\underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v, \underline{r} - \underline{P}) = 0$, O

$$\det\begin{pmatrix} X - x(u_0,v_0) & Y - y(u_0,v_0) & Z - z(u_0,v_0) \\ X_u(u_0,v_0) & Y_u(u_0,v_0) & Z_u(u_0,v_0) \\ X_v(u_0,v_0) & Y_v(u_0,v_0) & Z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$(\underline{r} - \underline{P}) \cdot \underline{N} = 0$$

INFATTI $\det A = \det({}^tA)$ E $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c} = \det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$

· PRIMA FORMA FONDAMENTALE DI UNA SUPERFICIE

$(u(t), v(t))$ CURVA REGOLARE IN D $\quad t \in [a,b]$

$\underline{\phi}(u(t), v(t))$ CURVA REGOLARE SU $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$

$\gamma = \operatorname{Im}(\underline{\phi}(u(t), v(t)))$

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} \phi(u(t), v(t)) \right| dt$$

$$\frac{d}{dt}\underline{\phi} = \begin{pmatrix} x_u u' + x_v v' \\ y_u u' + y_v v' \\ z_u u' + z_v v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = J_{\underline{\phi}} \cdot (u(t), v(t))'$$

$$\left| \frac{d}{dt} \underline{\phi}(u(t), v(t)) \right| = \left[(x_u u' + x_v v')^2 + (y_u u' + y_v v')^2 + (z_u u' + z_v v')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)|u'|^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) u' v' + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)|v'|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[|\underline{\phi}_u|^2 |u'(t)|^2 + 2 (\underline{\phi}_u \cdot \underline{\phi}_v) u'(t) v'(t) + |\underline{\phi}_v|^2 |v'(t)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ (u'(t) \quad v'(t)) \begin{pmatrix} |\phi_u|^2 & (\phi_u \cdot \phi_v) \\ (\phi_u \cdot \phi_v) & |\phi_v|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

CON

$$\begin{pmatrix} \phi_u \cdot \phi_u & \phi_u \cdot \phi_v \\ \phi_v \cdot \phi_u & \phi_v \cdot \phi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

PRIMA FORMA FONDAMENTALE DELLA SUPERFICIE.

ALLORA

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left[(u' \quad v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

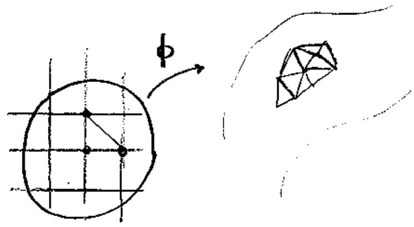
SI NOTI CHE SE $\phi(u,v) = (u, v, 0)$, LA FORMA SI RIDUCE ALLA IDENTITÀ.

· DEF: MISURA DI UNA SUPERFICIE

$$A(\Sigma_1') = \int_{\Sigma_1'} d\sigma = \int_D |\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| \, du\, dv = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, du\, dv$$

SI NOTI CHE SOTTO RADICE HO IL DETERMINANTE DELLA PRIMA FORMA FONDAMENTALE.

(NON LA DIMOSTRIAMO)



· ESEMPIO

AREA DELLA SFERA

$$S^2 = \underline{\phi}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

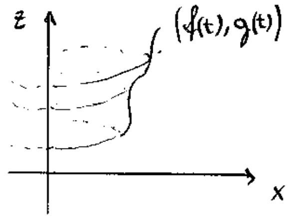
$$\underline{\phi}_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$

$$\underline{\phi}_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

$$E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = \sin^2 u$$

$$A(S^2) = \int_{S^2} d\sigma = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{\sin^2 u} \, du\, dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin u \, du \right) dv = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

· ESEMPIO



$$\underline{\phi}(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$$

$$t \in [a,b] \qquad \theta \in [0,\pi]$$

$$\underline{\phi}_t = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t))$$

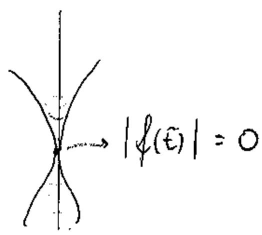
$$\underline{\phi}_\theta = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0)$$

$$E = |\underline{\phi}_t|^2 = |f'(t)|^2 + |g'(t)|^2$$

$$F = \underline{\phi}_t \cdot \underline{\phi}_\theta = 0$$

$$G = |\underline{\phi}_\theta|^2 = |f(t)|^2$$

$$\sqrt{EG - F^2} = |f(t)| \sqrt{|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2}$$



ALLORA

$$\int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_a^b \int_0^{\pi} |f(t)| \left[|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta\, dt = \pi \int_a^b |f(t)| \left[|f'(t)|^2 + |g'(t)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

· TEOREMA DI GULDINO ($\overline{\underline{\text{II}}}$)

(Σ_1', ϕ) SUPERFICIE DI ROTAZIONE

$$A(\Sigma_1') = 2\pi x_G \cdot \ell(\gamma)$$

· ESEMPIO

AREA DELLA SUPERFICIE TOROIDALE.

$$\underline{\phi}(u, v) = \left((R + r\cos u)\cos v,\ (R + r\cos u)\sin v,\ r \sin v \right)$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi]^2 = D$$

$$\underline{\phi}_u = (-r\sin u \cos v,\ -r \sin u \sin v,\ r\cos u)$$

$$\underline{\phi}_v = (-(R + r\cos u)\sin v,\ (R + r\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$E = r^2 \qquad F = 0 \qquad G = (R + r\cos u)^2$$

$$A(\Sigma_1') = \int_{\Sigma_1'} d\sigma = \int_D r(R + r\cos u)\, du\, dv = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r\cos u)\, du = 4\pi^2 R r$$

USANDO IL TEOREMA DI GULDINO,

$$A(\Sigma_1') = 2\pi \underset{\substack{\uparrow \\ x_G}}{R} \cdot 2\pi r = 4\pi^2 R r$$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

$$\int_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \int_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

ESEMPIO

MOMENTO DI INERZIA DI UN TORO CAVO

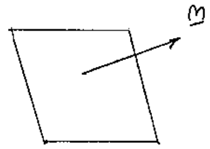
$$I_z(T_2) = \int_{T_2} (x^2+y^2)\,\delta\, d\sigma = \delta \int_D (R+r\cos u)^2\, r\,(R+r\cos u)\, du\, dv$$

$$= 2\pi\delta r \int_0^{2\pi} (R+r\cos u)^3\, du$$

$$= 2\pi\delta r \int_0^{2\pi} \left(R^3 + 3R^2 r\cos u + 3R r^2\cos^2 u + r^3\cos^3 u\right) du$$

$$= 2\pi\delta r \left[R^3 u\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2} R r^2 2\pi \right]$$

FLUSSO DI F ATTRAVERSO Σ



FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE.

$$\int_{\Sigma} (\underline{F}\cdot\underline{n})\, d\sigma = \int_D \underline{F}\cdot \frac{\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v}{|\underline{\phi}_u\wedge\underline{\phi}_v|} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

$$= \int_D \underline{F}\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\cdot(\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v)\, du\, dv$$

ESEMPIO

$$\Sigma = \{ z = x^2+y^2,\ 0 \le z \le 1 \}$$

$$\underline{\phi}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$$

$$(u,v) \in B = \overline{B(\underline{0},1)} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\underline{F} = (y, -x, 1)$$

$$\underline{\phi}_u = (1, 0, 2u)$$

$$\underline{\phi}_v = (0, 1, 2v)$$

ALLORA

$$\int_{\Sigma_1} (\underline{E} \cdot \underline{n})\, d\sigma = \int_B (r, -w, 1) \cdot (-2w, -2r, 1)\, dw\, dr = \pi$$

· ESEMPIO

FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA.

$$\Sigma_1 = S^2_R = \partial B(\underline{0}, R)$$

$$\underline{E} = \varepsilon q \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_{S^2} (\underline{E} \cdot \underline{n})\, d\sigma = \frac{\varepsilon q}{R^3} \int_{\Sigma_1} \overbrace{(x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{R}}^{R^2}\, d\sigma = \frac{\varepsilon q}{R^2} \int_{\Sigma_1} d\sigma$$

$$= \frac{\varepsilon q}{R^2} A(S^2_R) = 4\pi \varepsilon q$$

· TEOREMA DELLA DIVERGENZA (O DI GAUSS-GREEN)

RICORDIAMO LA FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI PER INTEGRALI A UNA SOLA VARIABILE:

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

INFATTI

$$\int_a^b (f'g + fg')\, dx = \int_a^b (fg)'\, dx = fg\Big|_a^b$$

· TEOREMA (DIVERGENZA)

$\underline{F} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^2)$, $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2$

ALLORA

$$\int_D \operatorname{div}(\underline{F})\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} (\underline{F} \cdot \underline{n})\, ds$$

SI È PIÙ VOLTE USATO L'OPERATORE DIFFERENZIALE NABLA,

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\underline{\nabla} f = GRAD(f)$$

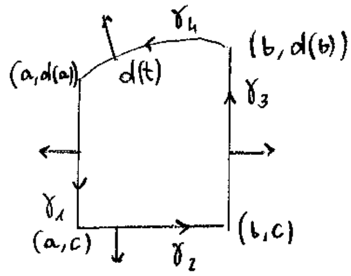
$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = ROT(\underline{F})$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = DIV(F) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

PERCIÒ IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN SI RISCRIVE COME

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial D^+} (\underline{F} \cdot \underline{m})\, ds$$

VALIDO SU APERTI LA CUI FRONTIERA È DI CLASSE C^1 A TRATTI.



CONSIDERIAMO L'ELEMENTO A FIANCO; IL TRATTO DI FRONTIERA IN ALTO È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $d(t)$.

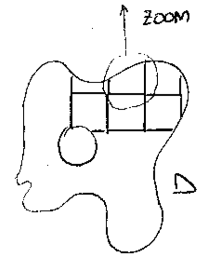
$\gamma_1 : (a, -t) \quad t \in [-d(a), -c] \quad \underline{T} = (0,-1) \quad \underline{m} = (-1, 0)$

$\gamma_2 : (t, c) \quad t \in [a, b] \quad \underline{T} = (1, 0) \quad \underline{m} = (0, -1)$

$\gamma_3 : (b, t) \quad t \in [c, d(b)] \quad \underline{T} = (0, 1) \quad \underline{m} = (1, 0)$

$\gamma_4 : (-t, d(-t)) \quad t \in [-b, -a]$

$$\underline{T} = \frac{(-1, -d'(-t))}{[1 + |d'(-t)|^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad \underline{m} = \frac{(-d'(-t), 1)}{[1 + |d'(-t)|^2]^{\frac{1}{2}}}$$



POSSO DECOMPORRE D IN PEZZI COME QUELLO RAFFIGURATO SOPRA.

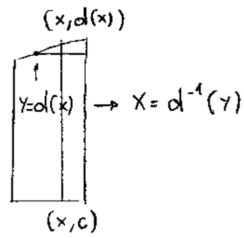
$d(t)$ È MONOTONA (SE NON LA È, BASTA DIVIDERE ULTERIORMENTE)

CALCOLIAMO, LUNGO LE γ,

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^{d(x)} \frac{\partial F_2}{\partial y} dy \right) dx + \int_c^{d(a)} \left(\int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \right) dy + \int_{d(a)}^{d(b)} \left(\int_{d^{-1}(y)}^{b} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \right) dy$$

$$= \int_a^b [F_2(x, d(x)) - F_2(x, c)]\, dx + \int_c^{d(a)} [F_1(b, y) - F_1(a, y)]\, dy + \int_{d(a)}^{d(b)} [F_1(b, y) - F_1(d^{-1}(y), y)]\, dy$$



$$= \int_a^b -F_2(x,c)\,dx + \int_c^{d(b)} F_1(b,y)\,dy + \int_c^{d(a)} -F_1(a,y)\,dy + \int_a^b F_2(x,d(x))\,dx + \int_{d(a)}^{d(b)} -F_1(d^{-1}(y),y)\,dy$$

$$\int_{\gamma_2} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds + \int_{\gamma_3} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds + \int_{\gamma_1} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds$$

$$d^{-1}(y) = u \qquad y = d(u) \qquad dy = d'(u)\,du$$

$$\int_a^b -F_1(u,d(u))\,d'(u)\,du$$

$$= \int_{\gamma_1} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds + \int_{\gamma_2} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds + \int_{\gamma_3} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds + \int_a^b \left[F_2(t,d(t)) - F_1(t,d(t))\,d'(t)\right] dt$$

NOTO CHE

$$\int_{\gamma_4} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds = \int_{-b}^{-a} \left(F_1(-t,d(-t)),\, F_2(-t,d(-t))\right) \cdot \underbrace{\frac{(-d'(-t),1)}{\left[1+|d'(-t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}}}_{\underline{m}} \underbrace{\sqrt{1+|d'(t)|^2}}_{|\underline{\phi}'(t)|}\,dt$$

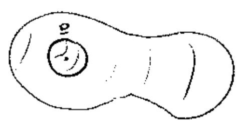
PERCIÒ

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D^+} (\underline{F}\cdot\underline{m})\,ds$$

· IN $\mathbb{R}^3$, IL TEOREMA DIVENTA

$$\int_D \operatorname{div}(\underline{F})\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int_{\underset{\text{SUPERFICIE}}{\partial D}} (\underline{F}\cdot\underset{\text{NORMALE USCENTE}}{\underline{m}})\,d\sigma$$

· ESEMPIO (TEOREMA DI GAUSS)



$D^\circ = D \setminus B(\underline{0},\varepsilon)$

$$\underline{E} = K\,\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$ CAMPO ELETTRICO. SI NOTA CHE NON È C^1 IN $\underline{0}$.

$$\operatorname{div}(\underline{E}) = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right) = \frac{K}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left[(y^2+z^2-2x^2)+(x^2+z^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2)\right] = 0$$

$$\int_{D^\circ} \operatorname{div}(\underline{E})\,dx\,dy\,dz = 0 = \int_{\partial D^\circ} (\underline{E}\cdot\underline{m})\,d\sigma = \int_{\partial D} (\underline{E}\cdot\underline{m})\,d\sigma - \int_{\partial B} (\underline{E}\cdot\underline{m})\,d\sigma$$

QUINDI IL FLUSSO DI $\underline{E}$ NON DIPENDE DALLA SUPERFICIE SCELTA: MI BASTA CALCOLARLO SU $B(\underline{0},\varepsilon)$.

DAL TEOREMA DELLA DIVERGENZA A STOKES (NEL PIANO)

$\underline{E}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$

$\underline{E} \in C^1$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad \partial D$ SIA C^1 A TRATTI

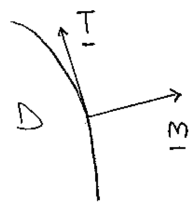
ALLORA (TEOREMA DELLA DIVERGENZA)

$$\int_D \operatorname{div}(\underline{E})\,dx\,dy = \int_{\partial D} (\underline{E} \cdot \underline{m})\,ds$$

CON $\underline{m}$ IL VERSORE NORMALE USCENTE.

OVVERO

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial D} (f \cdot m_1 + g \cdot m_2)\,ds$$



$\underline{m} = (m_1, m_2)$

SI OSSERVA CHE I VERSORI $\underline{T}$, $\underline{m}$ SONO ORIENTATI COME $\hat{i}, \hat{j}$ (IL SISTEMA È CONCORDE, ORIENTATO COME GLI ASSI CARTESIANI). INOLTRE

$$\begin{cases} \underline{m} \cdot \underline{T} = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad m_1(\pm m_2) = -m_2(\mp m_1)$$

CHE OTTENGO PONENDO $\underline{T} = (\pm m_2, \mp m_1)$.

PER MANTENERE L'ORIENTAMENTO, SCELGO $\underline{T} = (-m_2, m_1)$.

L'INTEGRALE SOPRA SI SCRIVE COME

$$\int_{\partial D} (f \cdot m_1 + g \cdot m_2)\,ds = \int_{\partial D^+} (f \cdot t_2 + g(-t_1))\,ds = \int_{\partial D^+} (-g, f) \cdot (t_1, t_2)\,ds$$

$$= \int_{\partial D^+} (-g, f) \cdot \underline{T}\,ds = \int_{\partial D^+} (\underline{G} \cdot \underline{T})\,ds$$

DOVE HO DEFINITO $\underline{G} = (G_1, G_2) = (-g, f)$. ALLORA SCRIVO IL PRIMO INTEGRALE COME

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial D^+} (\underline{G} \cdot \underline{T})\,ds \qquad \text{(STOKES)}$$

RICONOSCO

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_1 & G_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

PENSANDO A $D \subseteq \mathbb{R}^2$ COME SE FOSSE UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$ CHE SI PARAMETRIZZA COME

$$\underline{H}(u, v) = (u, v, 0) \qquad \underline{n} = (0, 0, 1)$$

SCRIVO

$$\int_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_D \left(\mathrm{ROT}(\underline{G}) \cdot \underline{n} \right) d\sigma$$

- TEOREMA DEL ROTORE (STOKES)

(Σ, ϕ) SUPERFICIE REGOLARE SEMPLICE

$\underline{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, $\Sigma \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO

ALLORA

$$\int_{\Sigma} \left(\mathrm{ROT}(\underline{F}) \cdot \underline{n} \right) d\sigma = \int_{\partial \Sigma^+} \left(\underline{F} \cdot \underline{T} \right) ds$$

MA CHE COSA SI INTENDE PER BORDO DI UNA SUPERFICIE?

INTUITIVAMENTE, STO SUL BORDO SE POSSO CADERE FUORI DALLA SUPERFICIE NEL MOMENTO IN CUI MI MUOVO IN UNA CERTA DIREZIONE.

IL BORDO DI $\underline{H}(u, v)$ SUPERFICIE È L'IMMAGINE DEL BORDO DEL DOMINIO DI (u, v) A MENO DI PARTI CHE SI "CHIUDONO"

(AD ESEMPIO UNA SFERA HA FRONTIERA NULLA).

- **DIMOSTRAZIONE** (NELLO SPAZIO)

$$\int_{\Sigma'} (\mathrm{ROT}(\underline{F}) \cdot \underline{n})\, d\sigma$$

$$= \int_D (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_x F_3 - \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1) \cdot \underbrace{\frac{\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v}{|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|}}_{\underline{n}} \underbrace{|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|\, du\, dv}_{d\sigma}$$

$$= \int_D (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_x F_3 - \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1) \cdot (Y_u Z_v - Y_v Z_u, X_v Z_u - X_u Z_v, X_u Y_v - X_v Y_u)\, du\, dv$$

$$\int_{\partial\Sigma'^+} (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds \qquad (\underline{\phi}(u(t), v(t)))' = \begin{pmatrix} X_u u' + X_v v' \\ Y_u u' + Y_v v' \\ Z_u u' + Z_v v' \end{pmatrix}$$

$$\partial\Sigma'^+ = \{\underline{\phi}(u(t), v(t))\},\ t \in I$$

$$\underline{\phi}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

$$= \int_I (F_1, F_2, F_3) \cdot (X_u u' + X_v v', Y_u u' + Y_v v', Z_u u' + Z_v v')\, dt$$

$$= \int_I \left[(F_1 X_u + F_2 Y_u + F_3 Z_u) u' + (F_1 X_v + F_2 Y_v + F_3 Z_v) v' \right] dt$$

CONSIDERIAMO IN GENERALE

$$\int_{\partial D^+} (\underline{G} \cdot \underline{T})\, ds = \int_I (G_1, G_2) \cdot (u', v')\, dt = \int_I (G_1 u' + G_2 v')\, dt$$

AVENDO PARAMETRIZZATO IL BORDO CON LA CURVA $(u(t), v(t))$.

SIMILMENTE, VOGLIO VEDERE LA FRONTIERA DI Σ' COME FRONTIERA DI D:

$$\int_{\partial\Sigma'^+} (\underline{F} \cdot \underbrace{\underline{T}}_{(T_x, T_y, T_z)})\, ds = \int_{\partial D^+} \Big[\underbrace{\big((\underline{F} \cdot \underline{\phi}_u), (\underline{F} \cdot \underline{\phi}_v) \big)}_{*} \cdot \underbrace{\underline{T}}_{(T_u, T_v)} \Big]\, ds := \int_{\partial D^+} [\underbrace{\underline{E}}_{\text{2 DIMENSIONI}} \cdot \underline{T}]\, ds \qquad **$$

OSSERVO CHE, VEDENDO $\underline{E}$ COME VETTORE NELLO SPAZIO $(E_1, E_2, 0)$,

$$\mathrm{ROT}(\underline{E}) = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial u}(\underline{F} \cdot \underline{\phi}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\underline{F} \cdot \underline{\phi}_u)\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial u}(F_1 X_v + F_2 Y_v + F_3 Z_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\ \dots\ )\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{\partial F_1}{\partial u} X_v + F_1 X_{vu} + \frac{\partial F_2}{\partial u} Y_v + F_2 Y_{vu} + \frac{\partial F_3}{\partial u} Z_v + F_3 Z_{vu} - \frac{\partial}{\partial v}(\dots)\right)$$

E ANCORA

$$ROT(\underline{F}) = \left(0, 0, \frac{\partial F_1}{\partial u} X_r + \frac{\partial F_2}{\partial u} Y_r + \frac{\partial F_3}{\partial u} Z_r - \frac{\partial F_1}{\partial r} X_u - \frac{\partial F_2}{\partial r} Y_u - \frac{\partial F_3}{\partial r} Z_u\right)$$

IN QUANTO

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(F_1 X_u + F_2 Y_u + F_3 Z_u\right) = \frac{\partial F_1}{\partial r} X_u + F_1 X_{ur} + \frac{\partial F_2}{\partial r} Y_u + F_2 Y_{ur} + \frac{\partial F_3}{\partial r} Z_u + F_3 Z_{ur}$$

ALLORA

$$\int_D \big(ROT(\underline{F}) \cdot \underset{\underset{(0,0,1)}{\uparrow}}{\underline{m}}\big)\, du\, dr = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} X_r + \frac{\partial F_2}{\partial u} Y_r + \frac{\partial F_3}{\partial u} Z_r - \frac{\partial F_1}{\partial r} X_u - \frac{\partial F_2}{\partial r} Y_u - \frac{\partial F_3}{\partial r} Z_u\right) du\, dr \quad (*)$$

$$\frac{\partial F_K}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(F_K\big(X(u,r), Y(u,r), Z(u,r)\big)\Big) \qquad K = 1,2,3$$

$$= \frac{\partial F_K}{\partial x} X_u + \frac{\partial F_K}{\partial y} Y_u + \frac{\partial F_K}{\partial z} Z_u$$

$$\frac{\partial F_K}{\partial r} = \frac{\partial F_K}{\partial x} X_r + \frac{\partial F_K}{\partial y} Y_r + \frac{\partial F_K}{\partial z} Z_r$$

$$(*) = \int_D \Big[\left(F_{1x} X_u + F_{1y} Y_u + F_{1z} Z_u\right) X_r + \left(F_{2x} X_u + F_{2y} Y_u + F_{2z} Z_u\right) Y_r + \left(F_{3x} X_u + F_{3y} Y_u + F_{3z} Z_u\right) Z_r$$

$$- \left(F_{1x} X_r + F_{1y} Y_r + F_{1z} Z_r\right) X_u - \left(F_{2x} X_r + F_{2y} Y_r + F_{2z} Z_r\right) Y_u - \left(F_{3x} X_r + F_{3y} Y_r + F_{3z} Z_r\right) Z_u\Big] du\, dr$$

$$= \int_D \Big[\left(F_{3y} - F_{2z}, F_{3x} - F_{1z}, F_{2x} - F_{1y}\right) \cdot \left(Y_u Z_r - Y_r Z_u, X_r Z_u - X_u Z_r, X_u Y_r - X_r Y_u\right) du\, dr$$

$$= \int_{\Sigma} \big(ROT(\underline{F}) \cdot \underline{m}\big)\, d\sigma$$

· NOTA * :

$$\int_{\partial \Sigma^+} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds \qquad \underline{T} \cdot ds = \underline{\phi}'(t)\, dt = J_\phi \cdot \begin{pmatrix} u'(t) \\ r'(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} X_u & X_r \\ Y_u & Y_r \\ Z_u & Z_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ r' \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \phi(u(t), r(t)) = \phi\big(X(u,r), Y(u,r), Z(u,r)\big)$$

PERCIO'

$$= \int_{\partial D^+} \underline{F} \cdot J_\phi \begin{pmatrix} u' \\ r' \end{pmatrix} dt = \int_{\partial D^+} \left[\underline{F} \cdot (\underline{\phi}_u, \underline{\phi}_r)\right] \cdot \underline{T}\, ds = \int_{\partial D^+} \left(\underline{F} \cdot \underline{\phi}_u, \underline{F} \cdot \underline{\phi}_r\right) \cdot \underline{T}\, ds$$

· NOTA ** :

SI E' GIA' DIMOSTRATA NEL PIANO L'UGUAGLIANZA $\displaystyle\int_{\partial D^+} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_D \big(ROT(\underline{F}) \cdot \underset{\underset{(0,0,1)}{\uparrow}}{\underline{m}}\big)\, du\, dr$

- AREE / VOLUMI

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$m_2(D) = \int_D dx\,dy$$

$$\operatorname{div}(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(0) = 1$$

$$\operatorname{div}(0,y) = 1 \qquad \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}(x,y)\right) = 1$$

ALLORA

$$m_2(D) = \begin{cases} \int_{\partial D}\left((x,0)\cdot \underline{n}\right) ds = \int_{\partial D^+}\left((0,x)\cdot \underline{T}\right) ds \\ \int_{\partial D}\left((0,y)\cdot \underline{n}\right) ds = -\int_{\partial D^+}\left((y,0)\cdot \underline{T}\right) ds \\ \int_{\partial D}\left(\frac{1}{2}(x,y)\cdot \underline{n}\right) ds = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+}\left((-y,x)\cdot \underline{T}\right) ds = \int_{\partial D} \operatorname{ROT}\left(\frac{1}{2}(-y,x,0)\right)\cdot \underline{T}\, ds \end{cases}$$

$$\underline{n} = (n_1, n_2) \qquad \underline{T} = (-n_2, n_1) \equiv (t_1, t_2)$$

$$\underline{n} = (t_2, -t_1)$$

- ESEMPIO

$$E = \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1 \right\}$$

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E^+} (-y,x)\cdot \underline{T}\, ds \qquad \begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = b\sin\theta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin\theta, a\cos\theta)\cdot(-a\sin\theta, b\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\, d\theta = ab\pi$$

- ESEMPIO

VOLUMI. CERCO UN CAMPO IN $\mathbb{R}^3$ CHE ABBIA DIVERGENZA UNITARIA:

$$\underline{F} = \frac{1}{3}(x,y,z)$$

$$\operatorname{div}(\underline{F}) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 1$$

CALCOLO IL VOLUME DELLA SFERA:

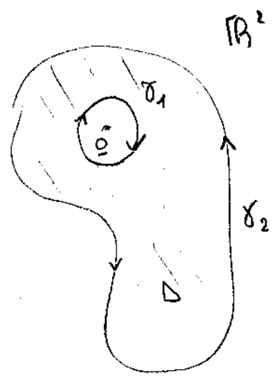
$$m_3(B(0,R)) = \int_{\partial B} \frac{1}{3}(x,y,z) \cdot \frac{(x,y,z)}{R}\, d\sigma = \frac{1}{3} R \int_{\partial B(0,R)} d\sigma$$

$$m_3(B(0,R)) = \frac{1}{3} R \cdot m_2(\partial B(0,R))$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3} R \cdot 4\pi R^2$$

· ESEMPIO

$$\underline{H} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) \qquad ROT(\underline{H}) = \underline{0}$$



DEVO AVERE IL DOMINIO SULLA SINISTRA.

PER IL TEOREMA DI STOKES,

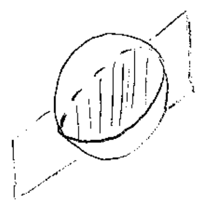
$$\int_D (\underbrace{ROT(\underline{H}) \cdot \underline{e}_3}_{=0})\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} (\underline{H} \cdot \underline{T})\, ds$$

ALLORA

$$0 = \int_{\gamma_2^+} (\underline{H} \cdot \underline{T})\, ds + \int_{\gamma_1^-} (\underline{H} \cdot \underline{T})\, ds$$

$$\int_{\gamma_2^+} (\underline{H} \cdot \underline{T})\, ds = \int_{\gamma_1^+} (\underline{H} \cdot \underline{T})\, ds$$

· ESERCIZIO



$$\underline{F}(x,y,z) = \left((y+z), (z+x), (x+y) \right)$$

$$\gamma = \{ x^2+y^2+z^2 = R^2 , \ x+y+z = 0 \}$$

$$\int_\gamma (\underline{F} \cdot \underline{T})\, ds \underset{\substack{\uparrow \\ \text{STOKES}}}{=} \int_{\Sigma} (ROT(\underline{F}) \cdot \underline{n})\, d\sigma$$

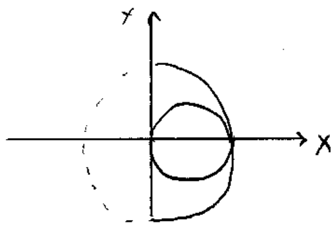
$$ROT(\underline{F}) = (1-1, +1-1, 0-0) = \underline{0}$$

PERCIÒ L'INTEGRALE DI LINEA È NULLO.

· ESERCIZIO

TROVA L'AREA DELLA SUPERFICIE CILINDRICA

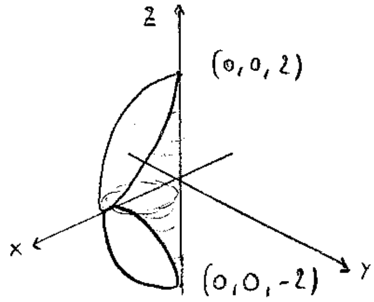
$\{x^2+y^2=2x\}$



CONTENUTA IN $\{x^2+y^2+z^2<4\}$

PARAMETRIZZO CON

$\underline{\phi}(u,v) = (1+\cos(u),\ \sin(u),\ v)$



CON DOMINIO D DATO DA

$u \in [0,2\pi]$

$v \in \left[-\sqrt{2(1-\cos u)}\ ,\ \sqrt{2(1-\cos u)}\ \right]$

CERCO e_1 e_3 e_3

$\underline{\phi}_u = (-\sin u,\ \cos u,\ 0)$

$\underline{\phi}_v = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$

$\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v = (\cos u,\ \sin u,\ 0)$

$|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| = 1$

ALLORA

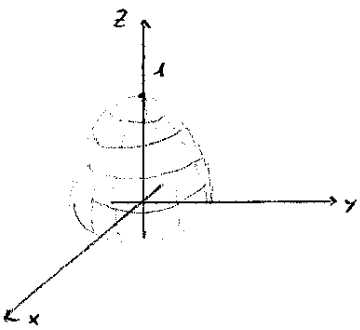
$$A(S) = \int_D du\,dv = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{2(1-\cos u)}}^{\sqrt{2(1-\cos u)}} dv\right) du$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2(1-\cos u)}\ du = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2\left[1-\left(1-2\sin^2\frac{u}{2}\right)\right]}\ du$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right| du = 8\left[-\cos\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] = 16$$

· ESERCIZIO

$$\Sigma = \begin{cases} z = 1-(x^2+y^2) \\ (x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\} \end{cases}$$



LA PARAMETRIZZO CON

$\underline{\phi}(u,v) = (u, v, 1-(u^2+v^2))$

(GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI, È SEMPRE INIETTIVA; OVVERO $\underline{\phi}$ È SEMPLICE).

VERIFICHIAMO SE È REGOLARE:

$$\underline{\phi}_u = (1, 0, -2u)$$
$$\underline{\phi}_v = (0, 1, -2v) \qquad \underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v = (2u, 2v, 1)$$

$$|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| = (1+4u^2+4v^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{MAI NULLO.}$$

$$\underline{n} = \frac{(2u, 2v, 1)}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}}$$

PIANO TANGENTE IN (α, β):

$$0 = \begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-f(\alpha,\beta) \\ 1 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 1 & -2\beta \end{vmatrix} = \dots$$

$$z = 2\alpha x + 2\beta y - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 1 - \alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha x + 2\beta y + 1 - 3(\alpha^2+\beta^2)$$

AREA DELLA SUPERFICIE:

$$A(\Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_D (1+4u^2+4v^2)^{1/2}\, du\, dv$$
$$= \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{1} \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\vartheta$$
$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{8} \sqrt{1+4\rho^2}\, 8\rho\, d\rho = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} (1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12} (10\sqrt{10} - 1)$$

· ESERCIZIO

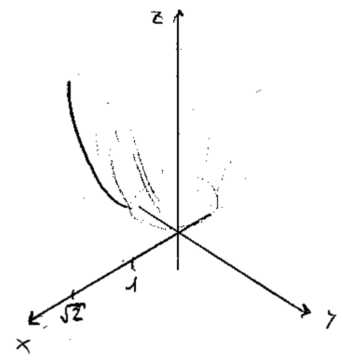
$$\underline{\phi}(u,v) = (K\cos v, K\sin v, u+v) \qquad \text{(RINGHIERA DI UNA SCALA A CHIOCCIOLA)}$$
$$(u,v) \in D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2 \qquad K>0$$

È INIETTIVA? (OCCHIO: UNA CURVA NON SEMPLICE PUÒ AVERE $\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v \neq \underline{0}$ SEMPRE)

LO È PERCHÉ $\cos v$, $\sin v$ SONO INIETTIVE NEL DOMINIO.

$$\underline{\phi}_u = (0, 0, 1)$$
$$\underline{\phi}_v = (-K\sin v, K\cos v, 1) \qquad |\phi_u \wedge \phi_v| = [EG-F^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\phi_u|^2|\phi_v|^2 - (\phi_u \cdot \phi_v)^2}$$
$$= \sqrt{1+K^2-1} = K \neq 0$$

· ESERCIZIO



$\underline{\phi}(u,v) = (u^2 \cos v,\ u^2 \sin v,\ u^4)$

$(u,v) \in D = [1,2] \times [0,\pi]$

VERIFICHIAMO L'INIETTIVITÀ, OVVERO

$$(u^2 \cos v,\ u^2 \sin v,\ u^4)$$
$$\shortparallel$$
$$(\bar{u}^2 \cos \bar{v},\ \bar{u}^2 \sin \bar{v},\ \bar{u}^4)$$

NEL DOMINIO D, QUESTO IMPLICA $u = \bar{u}$ E $v = \bar{v}$.

$\underline{\phi}_u = (2u\cos v,\ 2u \sin v,\ 4u^3)$

$\underline{\phi}_v = (-u^2 \sin v,\ u^2 \cos v,\ 0)$

$\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v = (-4u^5 \cos v,\ -4u^5 \sin v,\ 2u^3)$

POICHÈ LA u NON SI ANNULLA MAI IN D, ALLORA $\underline{n} \neq \underline{0}$.

$|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|^2 = 16u^{10} + 4u^6$

CALCOLO L'AREA,

$$A(\Sigma_1) = \int_\Sigma d\sigma = \int_D |\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|\, du\, dv$$

$$= \int_D 2u^3 \sqrt{4u^4+1}\, du\, dv = \pi \int_1^2 2u^3 \sqrt{4u^4+1}\, du$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} (4u^4+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{12} (65\sqrt{65} - 5\sqrt{5})$$

$x(u) = u^2 \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{x}$ (SEGUENDOLA A v FISSATO)

$z(u) = u^4 \qquad z = x^2$

· ESERCIZIO

$\underline{\phi}(u,v) = (u^{\frac{3}{2}},\ v,\ u)$

$(u,v) \in [0,1]^2 = Q$

LA PARAMETRIZZAZIONE È INIETTIVA.

$$\underline{\phi}_u = \left(\frac{3}{2}u^{1/2}, 0, 1\right)$$
$$\underline{\phi}_v = (0, 1, 0) \qquad \underline{\phi}_u \cdot \underline{\phi}_v = 0$$

PERCIÒ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

$$\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v = \left(-1, 0, \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| = \sqrt{1+\frac{9}{4}u} \qquad \underline{n} = \frac{\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v}{|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|}$$

TROVO L'AREA,

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \int_Q |\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|\, du\, dv = \int_Q \sqrt{1+\frac{9}{4}u}\, du\, dv$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}u\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left[\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right]$$

· ESERCIZIO

$$\Sigma = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

TROVARE DUE PARAMETRIZZAZIONI. CALCOLARE POI $L(\phi(\gamma(t)))$ DOVE

$$\gamma(t) = \{(0,t),\ t \in [0,1]\} \subseteq \{z=0\}$$

PARAMETRIZZO Σ CON

$$\underline{\phi}(\theta, s) = (\sin(s)\cos(\theta),\ \sin(s)\sin(\theta),\ \cos(s))$$
$$(\theta, s) \in [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\underline{\tilde{\phi}}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$
$$(u,v) \in B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 = \{z=0\}$$

QUEST'ULTIMA C^1 CON L'UNICA ESCLUSIONE DEL BORDO.

$$\underline{\tilde{\phi}}_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$
$$\underline{\tilde{\phi}}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$
$$\underline{\tilde{\phi}}_u \wedge \underline{\tilde{\phi}}_v = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)$$
$$|\underline{\tilde{\phi}}_u \wedge \underline{\tilde{\phi}}_v|^2 = \frac{1}{1-u^2-v^2} \qquad \Rightarrow \quad \underline{n} = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

OSSERVO CHE

$$2\pi = \int_{\Sigma'} d\sigma = \int_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} |\Phi_w \wedge \Phi_r| \, dw\,dr$$

$$2\pi = \int_B \frac{1}{\sqrt{1-w^2-r^2}} \, dw\,dr$$

CONSIDERO ORA LA CURVA $\gamma(t)$, INNALZATA TRAMITE

$\tilde{\Gamma}(t) = (0, t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [0,1] \qquad \tilde{\Gamma}'(t) = (0, 1, t(1-t^2)^{-1/2})$

$\Gamma(s) = (0, \sin(s), \cos(s)) \quad s \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \Gamma'(s) = (0, \cos(s), -\sin(s))$

CALCOLO

$$L(\tilde{\Gamma}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE

$\underline{F} = (-y, x, z)$

E VERIFICHIAMO CHE (TEOREMA DI STOKES)

$$\int_{\Sigma'} \text{ROT}(\underline{F}) \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma'^+} (\underline{F} \cdot \underline{T}) \, ds$$

$\text{ROT}(\underline{F}) = (0, 0, 2)$

$$\int_{\Sigma'} (\text{ROT}(\underline{F}) \cdot \underline{n}) \, d\sigma = \int_B \text{ROT}(\underline{F}) \cdot \frac{\Phi_w \wedge \Phi_r}{|\Phi_w \wedge \Phi_r|} |\Phi_w \wedge \Phi_r| \, dw\,dr$$

$$= \int_B 2 \, dw\,dr = 2\, m_2(B) = 2\pi$$

$\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \pm \sin t, 0) \qquad \bar{\gamma}'(t) = (-\sin t, \pm \cos t, 0)$

$$\int_{\partial\Sigma'^+} (\underline{F} \cdot \underline{T}) \, ds = \int_0^{2\pi} (\mp \sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \pm \cos t, 0) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \pm 1 \, dt = \pm 2\pi$$

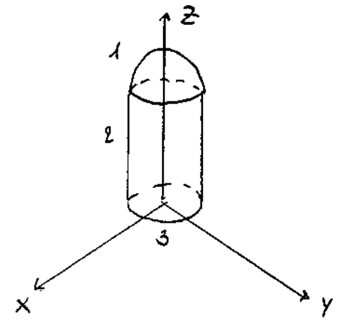
IL CHE DÀ RAGIONE DEL FATTO CHE BISOGNAVA SCEGLIERE IL VERSO ANTIORARIO DI PERCORRENZA DI $\bar{\gamma}(t)$ (QUELLO CON IL $+$).

· ESERCIZIO

$T \subseteq \mathbb{R}^3$

$\{ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1 , \ z \geq 1 \}$

$\{ x^2+y^2 \leq 1 , \ 0 \leq z \leq 1 \}$



VOGLIO L'INTEGRALE DI FLUSSO DI

$\underline{F} = (xy, xy, (1-x-y)z) \qquad div(\underline{F}) = 1$

$$\int_{\partial T} (\underline{F} \cdot \underline{n}) \, d\sigma = \int_T div(\underline{F}) \, dx dy dz$$

$$= \int_T dx dy dz = m_3(T) = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

SE NON AVESSI USATO IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA,

$\phi_1(u,v) = (u, v, 1+\sqrt{1-u^2-v^2}) \qquad \phi_u = (1, 0, -u(1-u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}})$

$(u,v) \in B(0,1) \qquad \phi_v = (0, 1, -v(1-u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}})$

$\phi_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

$(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0,1]$

$\phi_3(u,v) = (u, v, 0)$

$(u,v) \in B(0,1)$

POI SOMMO

$$\int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} + \int_{\Sigma_3} \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

(INTEGRAZIONE IMPROPRIA, CI ABBIAMO MESSO MEZZ'ORA).

· CALCOLO VETTORIALE

· LUNGHEZZA DI UNA CURVA PARAMETRICA (P. 239)

$\underline{\phi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\underline{\phi} \in C^1(I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}^2)$, $\gamma = Im(\underline{\phi})$

$|\underline{\phi}'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I$ (CURVA REGOLARE: AMMETTE TANGENTE NON NULLA)

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_a^b |\underline{t}|\, dt = \int_a^b |\underline{\phi}'(t)|\, dt$$

$\underline{t}$ ↳ VETTORE TANGENTE

DEFINENDO L'ASCISSA CURVILINEA

$$S(t) = \int_a^t |\underline{\phi}'(\tau)|\, d\tau \qquad dS = |\underline{\phi}'(t)|\, dt \qquad L(\gamma) = \int_\gamma dS$$

· INTEGRALI CURVILINEI (P. 515)

$$\int_\gamma F\, dS = \int_a^b F(\underline{\phi}(t))\, |\underline{\phi}'(t)|\, dt \qquad (1^a \text{ SPECIE})$$

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, dS = \int_a^b \underline{F} \frac{\underline{\phi}'(t)}{|\underline{\phi}'(t)|} |\underline{\phi}'(t)|\, dt = \int_a^b \underline{F}(\underline{\phi}(t)) \cdot \underline{\phi}'(t)\, dt \qquad (2^a \text{ SPECIE})$$

DOVE $\underline{T} = \dfrac{\underline{\phi}'(t)}{|\underline{\phi}'(t)|}$ E' IL VERSORE TANGENTE ALLA CURVA.

· CAMPI CONSERVATIVI (P. 522)

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{F} \in C^1(A)$ (IMPORTANTE!)

· $\underline{F}$ CONSERVATIVO $\iff \exists\, V : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $V \in C^2$: $\underline{F} = \underline{\nabla} V$

· SE $\underline{F}$ E' CONSERVATIVO ($\in C^1$),

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, dS = V(b) - V(a) \qquad \text{E} \qquad \oint_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, dS = 0$$

· SE $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = ROT(\underline{F}) = \underline{0}$, $\underline{F}$ SI DICE IRROTAZIONALE.

· $\underline{F}$ CONSERVATIVO $\Rightarrow$ $\underline{F}$ IRROTAZIONALE

· $\left.\begin{array}{l} \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0} \quad (\underline{F} \in C^1) \\ A \text{ SEMPLICEMENTE CONNESSO} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{F}$ CONSERVATIVO

- AREA DI UNA SUPERFICIE PARAMETRICA

$\underline{\phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Sigma = \underline{\phi}(D)$

$\underline{\phi}_u, \underline{\phi}_v$ LINEARMENTE INDIPENDENTI (SUPERFICIE REGOLARE) $\forall (u_0,v_0) \in \mathrm{INT}(D)$

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \int_D |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VETTORE NORMALE}}}{\underline{m}}| \, du\,dv = \int_D |\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| \, du\,dv$$

$$= \int_D \sqrt{EG - F^2} \, du\,dv \qquad \text{CON} \quad E = \underline{\phi}_u \cdot \underline{\phi}_u \quad G = \underline{\phi}_v \cdot \underline{\phi}_v \quad F = \underline{\phi}_u \cdot \underline{\phi}_v = \underline{\phi}_v \cdot \underline{\phi}_u$$

- INTEGRALI DI SUPERFICIE

$$\int_{\Sigma} f(x,y,z) \, d\sigma = \int_D f(\underline{\phi}(u,v)) \, |\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| \, du\,dv$$

$$\int_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{N} \, d\sigma = \int_D \underline{F}(\underline{\phi}(u,v)) \cdot (\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v) \, du\,dv \qquad \text{FLUSSO}$$

DOVE $\underline{N} = \dfrac{\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v}{|\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v|}$ È IL VERSORE NORMALE ALLA SUPERFICIE.

CHI È $d\sigma$? DIPENDE DA COME STO DESCRIVENDO LA SUPERFICIE. AD ESEMPIO, SE LA SUPERFICIE È PIANA SI PARAMETRIZZA IN MODO NATURALE CON

$$\underline{\phi}(u,v) = (u, v, 0) \qquad \begin{array}{l} \underline{\phi}_u = (1,0,0) \\ \underline{\phi}_v = (0,1,0) \end{array} \qquad |\underline{\phi}_u \wedge \underline{\phi}_v| = |\hat{k}| = 1$$

$\Rightarrow d\sigma = du\,dv$

- TEOREMI DI STOKES E GAUSS

$$\int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_{\Sigma} \mathrm{ROT}(\underline{F}) \cdot \underline{N} \, d\sigma \qquad \equiv \qquad \int_{\partial^+E} \underline{G} \cdot \underline{N} \, d\sigma = \int_E \mathrm{div}(\underline{G}) \, dx\,dy\,dz$$

$$\int_{\partial^+D} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy \quad ; \quad \int_{\partial^+D} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds = \int_D \mathrm{div}(\underline{F}) \, dx\,dy$$

STOKES GAUSS

SOMMARIO DEL CORSO

• GEOMETRIA IN $\mathbb{R}^m$

• DEFINIZIONI

- $\mathbb{R}^m$ SPAZIO VETTORIALE ($\underline{x}+\underline{y}$, $\lambda \underline{x}$, $\underline{x}\cdot\underline{y}$)
- PROPRIETÀ $\langle\,|\,\rangle$ (BILINEARE, SIMMETRICO, DEFINITO POSITIVO)
- $\mathbb{R}^m$ COME SPAZIO EUCLIDEO
- PROPRIETÀ DELLA DISTANZA (DEF. POSITIVA, SIMMETRICA, DIS. TRIANGOLARE)
- PUNTO INTERNO, PUNTO DI FRONTIERA
- INSIEME APERTO, CHIUSO, LIMITATO, COMPATTO, CONNESSO, CONVESSO

• DIFFERENZIAZIONE IN PIÙ VARIABILI

• DEFINIZIONI

- FUNZIONE, GRAFICO
- PUNTO DI ACCUMULAZIONE (2 DEF.)
- LIMITE, CONTINUITÀ
- DERIVATA DIREZIONALE, PARZIALE
- VETTORE GRADIENTE
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DERIVABILE (3 DEF.)
- DIFFERENZIABILITÀ
- EQUAZIONE IPERPIANO TANGENTE AL GRAFICO.

• TEOREMI E DIMOSTRAZIONI

- WEIERSTRASS, V. INTERMEDI, PERMANENZA
- $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \nabla f \cdot \underline{v}$
- $\nabla f \perp$ CURVE DI LIVELLO
- ∇f È NELLA DIREZIONE DI MAX PENDENZA
- L DELLA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIABILITÀ SI IDENTIFICA CON ∇f
- f DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ CONTINUA
- TH. DIFFERENZIALE TOTALE
- TH. SCHWARTZ
- DERIVATA DI F COMPOSTA $F(t) = f(\underline{\phi}(t))$
- DERIVATA DIREZIONALE COME $F'(t)$ LUNGO UN SEGMENTO
- COSTRUZIONE MATRICE HESSIANA E FORMULA DI TAYLOR II ORDINE.

OTTIMIZZAZIONE

TECNICHE

- STUDIO DI FUNZIONE (MAX/MIN)
- STUDIO DEGLI AUTOVALORI
- REGOLA DI CARTESIO
- STUDIO DI f LUNGO ∂D TRAMITE PARAMETRIZZAZIONE

TEOREMI E DIMOSTRAZIONI

- TEOREMA DI DINI (UNA E PIÙ VARIABILI)
- TH. MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE
- AUTOVALORI TRA LE DUE BASI DI H_f
- CURVE DI PUNTI CRITICI

SUCCESSIONI DI FUNZIONI, SERIE

DEFINIZIONI

- SUCCESSIONE DI FUNZIONI
- CONVERGENZA PUNTUALE
- $\|\cdot\|_\infty$ IN $C[a,b]$
- CONVERGENZA UNIFORME

TEOREMI E DIMOSTRAZIONI

- $C[a,b]$ HA DIMENSIONE INFINITA
- $\|\cdot\|_\infty$ È UNA DISTANZA
- C. UNIF. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- $f_n \to f$, $f_n' \to g$ (UNIF.) $\Rightarrow f' = g$, $f \in C^1$
- $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ SPAZIO METRICO COMPLETO

- SERIE DI FUNZIONI
- CONVERGENZA PUNTUALE
- CONV. UNIFORME
- CONV. TOTALE

- C. TOTALE $\Rightarrow$ C. UNIFORME
- CRITERIO DI LEIBNIZ
- $f_n \in C[a,b]$, $\sum_1^\infty f_n$ CONVERGE UNIF. ALLORA $S(x) \in C^0$, $\int_a^b \sum_1^\infty = \sum_1^\infty \int_a^b$, $\frac{d}{dx}\left(\sum_1^\infty\right) = \sum_1^\infty \left(\frac{d}{dx}\right)$ $(f \in C^1)$

- SERIE DI POTENZE
- SERIE DI TAYLOR
- FUNZIONI ANALITICHE

- SERIE DI POTENZE È C^∞ (LA SERIE DELLE DERIVATE HA LO STESSO RAGGIO DI CONV.)
- RAGGIO DI CONVERGENZA

ESEMPI

- $f_n(x) = x^n$, RESTRIZIONE X C. UNIF.
- $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|\,dx$ CHE CADE PER x^n
- $\sum_1^k x^n = \frac{x - x^{k+1}}{1-x} \to \frac{x}{1-x}$ PUNT $[0,1]$, UNIF $[0,r]$

  $\sum_{k+1}^\infty x^n = \frac{x^{k+1}}{1-x}$

- $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \overset{\text{UNIF}}{(-1,1)} \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$ È C^∞ MA NON ANALITICA
- $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow u(x) = e^x$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

· DEFINIZIONI

- CONTRAZIONE SU (X, d) COMPLETO
- PROBLEMA BEN POSTO (HADAMARD), BUONA POSITURA PROBLEMA DI CAUCHY
- INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA

· TECNICHE

- ODE I ORDINE: OMOGENEA (ESISTENZA E UNICITÀ), S.P. PER VARIAZIONE COSTANTI.
- EQ. VARIABILI SEPARABILI (INVERTIBILITÀ)
- EQ. BERNOULLI (RICAVARE ρ)
- EQ. OMOGENEE, RICCATI
- PROLUNGAMENTO DELLA SOLUZIONE

· TEOREMI

- TH. BANACH - CACIOPPOLI
- TH. PICARD - LINDELÖF
- $f \in C^1$ È LIPSCHITZIANA SU COMPATTI
- PROBLEMA AUTONOMO HA SOL. MONOTONE
- TEOREMA DI PEANO
- LEMMA DI GRONWALL
- CONDIZIONI DI ESISTENZA GLOBALE

· SISTEMI DI ODE

- SIST. OMOGENEO RISPETTA HP CAUCHY
- LE SOL. FORMANO UNO SPAZIO VETTORIALE
- LE $\underline{u}_i(t)$ FORMANO UNA BASE
- SE $\underline{v}, \underline{w}$ RISOLVONO IL NON OMOGENEO, $(\underline{v}-\underline{w})$ RISOLVE L'OMOGENEO
- VARIAZIONE COSTANTI, $\underline{w}(t) = W(t)\,\underline{\phi}(t)$
  $\Rightarrow \underline{w}(t) = W(t)\left[\int W^{-1}(t)\, b(t)\, dt\right]$
- $\Phi(t)$ COME FLUSSO DI TRASFORMAZIONI
- SE A È A COEFFICIENTI COSTANTI, $\underline{u}(t) = \underline{w} e^{\lambda t}$ RISOLVE L'OMOGENEA (BASE)
- STUDIO PER Λ DIAGONALE
- PROBLEMA $\begin{cases} \Phi' = A\Phi \\ \Phi(0) = I_m \end{cases} \Rightarrow \Phi(t) = e^{At}$
- ESPONENZIALE DI MATRICE, CASI Λ, $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$

- PRINCIPIO DI STABILITÀ LINEARIZZATA
  $\begin{cases} u' = g(u,v) \\ v' = h(u,v) \end{cases}$ $\quad \underline{Y}' = \underline{f}(\underline{Y}) \simeq \underline{f}(\underline{Y}_0) + J_f(\underline{Y}_0)(\underline{Y}-\underline{Y}_0)$
- TH. POINCARÉ - BENDIXON
- LIPSCHITZ. GLOBALE $\Rightarrow$ CRESCITA AL PIÙ LINEARE

CURVE

DEFINIZIONI

- CURVA PARAMETRICA
- SOSTEGNO, C. REGOLARE
- VERSORI TANGENTE E NORMALE

- CURVE EQUIVALENTI
- LUNGHEZZA COME SUP {SPEZZATE}
- BARICENTRO, MOMENTO DI INERZIA
- INTEGRALI DI 1^ E 2^ SPECIE

- CAMPO CONSERVATIVO
- ROTORE DI UN CAMPO
- INSIEME SEMPLICEMENTE CONNESSO

TEOREMI

- DERIVARE LA RETTA TANGENTE
- $\underline{N} \cdot \underline{T}' = 0$
- ASCISSA CURVILINEA

- LUNGHEZZA DI UNA CURVA
- CURVE EQUIVALENTI HANNO UGUAL LUNGHEZZA

- $\int_a^b \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = U(b) - U(a)$
- F CONS $\Rightarrow \oint_\gamma = 0$, $\int_a^b \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = f(a,b)$
- F CONS $\Rightarrow$ IRROTAZIONALE
- TH. POINCARÉ

ESEMPI

CAMPO MAGNETICO NON DEFINITO IN $\underline{O}$, SOLUZIONE CON TH. JORDAN.

INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

DEFINIZIONI

- INTEGRAZIONE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a+\varepsilon, b]$ E IN (a, M)

- ALGORITMO DI PEANO - JORDAN
- SOMME INTEGRALI DI f SU S
- SOMME INTEGRALI GENERALIZZATE
- PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

TEOREMI

- CONFRONTO ($f \leq g$), C. ASINTOTICO ($\lim \frac{f}{g}$), COND. NECESSARIA ($f \to 0$)

- F LIPSCHITZ. SU S P-J MISURABILE È INTEGRABILE
- FORMULE DI RIDUZIONE
- CAMBIAMENTO DI VARIABILI
- $\det(A)$ COME FATTORE PER MISURE
- S MISURABILE $\Leftrightarrow m_n(\partial S) = 0$

ESEMPI

- CAMPIONE $\frac{1}{x^\alpha}$ INT A $\begin{cases} 0 & \text{PER } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{PER } \alpha > 1 \end{cases}$
- $[0,1]^2 \times \mathbb{Q}^2$ NON È P-J MISURABILE

- SUPERFICI

- DEFINIZIONI
  - SUPERFICIE PARAMETRICA (Σ, Φ)
  - $P \in INT(D)$ REGOLARE
  - ESISTENZA PIANO TANGENTE
  - AREA DI UNA SUPERFICIE
  - INTEGRALE DI SUPERFICIE
  - INTEGRALE DI FLUSSO

- DIMOSTRAZIONI E TEOREMI
  - CURVE PLANARI REGOLARI VANNO IN CURVE REGOLARI SU SUPERFICI
  - EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE
  - PRIMA FORMA FONDAMENTALE
  - TEOREMI DI GULDINO
  - REGOLARITÀ DEI GRAFICI DI FUNZIONI

- $\partial^+ D$ ORIENTATA POSITIVAMENTE
- SUPERFICIE REGOLARE FINO AL BORDO
- SUPERFICIE ORIENTABILE
- FRONTIERA DI UNA SUPERFICIE

- TH. DIVERGENZA NEL PIANO
- TH. DIVERGENZA NELLO SPAZIO
- TH. ROTORE NEL PIANO
- TH. ROTORE NELLO SPAZIO

- ESEMPI

CILINDRO, CUNEO, NASTRO DI MOEBIUS