

APPUNTI DEL CORSO DI

INTRODUZIONE ALLA FISICA DELL'ATMOSFERA

DAVIDE VENTURELLI
2016/2017

PER INFO O SEGNALAZIONI:
venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

L'incessante lavoro di paleontologia richiesto per riportare in auge il senso logico di queste lezioni, sapientemente sepolto tra sottintesi ed errori di calcolo, non mi è mai parso in effetti commisurato a quanto ho appreso da questo corso e quanto di esso mi rimarrà, ora che ho superato l'esame. Che queste note possano evitarvi l'ira degli Dei che la mia legittima blasfemia ha scatenato lungo questo semestre; che voi possiate presto cogliere il Senso e, come spesso accade quando ci si riesce, amarlo.

Davide Venturelli

05/08/2017

FISICA DELL'ATMOSFERA

GEO SCIENZE

- TERRA SOLIDA (GEOLOGIA, SISMOLOGIA, VULCANOLOGIA)
- OCEANOGRAFIA
- GLACIOLOGIA
- SCIENZE NATURALI
- SCIENZE ATMOSFERICHE
 - < CHIMICA (COMPOSIZIONE, INQUINAMENTO)
 - FISICA (METEOROLOGIA, CLIMATOLOGIA, IONOSFERA, FULMINI)

✓ METEO: IN UN DATO LUOGO E TEMPO (MODELLO DETERMINISTICO, PREVISIONI < 10gg)

CLIMA : IN MEDIA (TEMPORALE, IN GENERE SU 30 ANNI - DIFFIDARE DEI TREND A BREVE TERMINE!)

NON FACCIO PREVISIONI, MA PROIEZIONI SULLA BASE DI POSSIBILI CONDIZIONI AL CONTO RNO (ENERGIA, USO DEL SUOLO...) A 10-20 ANNI. LE UNICHE PREVISIONI CHE POSSO FARE A ~1 ANNO SONO DOVUTE A FENOMENI BEN NOTI (VEDI EL NIÑO, TEMPERATURA SUPERFICIE DEL MARI). SI PARLA DI PREVISIONI STAGIONALI.

A PARTIRE DAGLI ANNI '50 SONO INTRODOTTI I COMPUTER (NWP, NUMERICAL WEATHER PREDICTIONS : RISOLUZIONE DI PROBLEMI AI VALORI INIZIALI). DA ALLORA LE PREVISIONI SI FANNO TRAMITE SIMULAZIONI NUMERICHE BASATE SU 7 EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

- CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO (3 EQ.)
- CONSERVAZIONE DELLA MASSA DELL'ARIA SECCA
- CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TERMODINAMICA
- CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI ACQUA
- EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

SONO EQUAZIONI NELLE 7 INCOGNITE

T, P, $\frac{V}{P}$, P, U
 ↑
 VETTORE VENTO
 UMIDITÀ

IL SISTEMA E' CHIUSO, MA FINORA NON NE ESISTE UNA SOLUZIONE ANALITICA.

RICHARDSON : PRIME SIMULAZIONI NUMERICHE (A 6 ORE, A MANO CON UN PEGGIOLO CALCOLATORE... IN 6 MESI. IN PIU' ERANO PREVISIONI SBAGLIATE PERCHE' CON QUEL PASSO IL SISTEMA ESPLODE).

PRIMI CALCOLATORI NEL SOLOGUERRA. FILTRANDO LE ONDE CHE DESTABILIZZANO IL SISTEMA (ELIMINANDO TERMINI PICCOLI) SI OTTIENE L'APPROSSIMAZIONE QUASI-GEOSTROFICA. SI OTTENGONO COSÌ BUONE PREVISIONI A 3-4 GIORNI.

TUTTORA NON SI FANNO PREVISIONI A PIÙ DI 10 GIORNI (TEORIA DEL CAOS, DOVUTA ALLA NON LINEARITÀ DELLE EQUAZIONI CHE SONO QUINDI SUSCETTIBILI A PERTURBAZIONI). PER AGGIARE IL PROBLEMA FACCO PREVISIONI DI ENSEMBLE: VARIO DI POCO LE C.I. E SCARTO LE SOLUZIONI CHE DIVERGONO.

(GRAFICI SULL'EVOLUZIONE DELLA PRECISIONE NELLE PREVISIONI CON IL CRESCERE DELLA POTENZA DI CALCOLO - DA 1K A 1T OPERAZIONI AL SECONDO)

MODELLO PER LE PREVISIONI

- DECIDO LA GRIGLIA GEOGRAFICA E IL PASSO TEMPORALE

$$\Delta t = \Delta l / v_{\max} \sim \Delta l / (1000 \text{ km/h})$$

↑
VELOCITÀ CON CUI SI PROPAGANO I FENOMENI ATMOSFERICI, CHE PRENDIAMO COME v_{SOUND} .

AD ESEMPIO $\Delta l = 100 \text{ km} \rightarrow \Delta t \sim 6 \text{ min}$

→ PIÙ ALLARGO LA SCALA SPAZIALE, PIÙ POSSO AUMENTARE IL PASSO TEMPORALE E PREVEDO PIÙ LONTANO NEL TEMPO CON MENO PASSI.

UN ALTRO METODO È FILTRARE LE ONDE PIÙ VELOCI (ABBASSO $v_{\max}$).

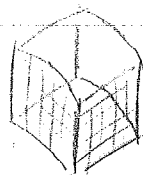
- OSSERVAZIONI PER AVERE I VALORI INIZIALI DEL MODELLO.

IN PRATICA ATTACCO UNA RADIOSONDA A UN PALLONE E LO LANCO (UN PAIO DI VOLTE AL GIORNO IN MOLTE PARTI DEL MONDO - OVVIAMENTE LE MISURE SONO PIÙ FITTE SULLA TERRAFERMA).

ALTRE MISURE POSSIBILI SONO QUELLE DEI SATELLITI, CHE MISURANO LA RADIAZIONE EMESSA DALL'ATMOSFERA (COBERTURA PIÙ OMOGENEA).

① GEOSTAZIONARI: VOLANO CON LA ω DI ROTAZIONE DELLA TERRA.

$$m\omega^2 r_g = \frac{mM_T G}{r_g^2} \rightarrow r_g = \left[\frac{M_T G}{\omega^2} \right]^{1/3} \sim 42100 \text{ km} \rightarrow Z = 36000 \text{ km} \quad (R_T \sim 6000 \text{ km})$$



SI NOTI CHE DEVONO VOLARE ALTISSIMI (LA COPERTURA NON E' FITTA, VOLANO LENTI).

② A ORBITA POLARE: SEGUONO I MERIDIANI. GIRANO PIU' VELOCI E OGNI VOLTA SU AREE DIVERSE ($T = 10-12$ GIORNI). VOLANDO PIU' VICINI LA RISOLUZIONE E' MIGLIORE, MA NON REGISTRANO FENOMENI CHE SI SVOLGONO IN TEMPI BREVI (TIPO CICLONI).

$$z \sim 600-800 \text{ km}$$

ANCORA, POSSO FARE OSSERVAZIONI DA TERRA (IL VANTAGGIO E' CHE HO ACCESSO FISICO ALLO STRUMENTO). USO QUESTO METODO PER LA VALIDAZIONE DEI DATI PROVENIENTI DA SATELLITE (REPORT SENSING ATTIVO CON RADAR, SODAR, LIDAR - RADIO, SOUND, LIGHT DETECTION AND RANGING), IL CHE AVVIENE QUANDO IL SATELLITE PASSA IN CORRISPONDENZA DELLO STRUMENTO A TERRA.

GLI STRUMENTI DA SATELLITE IN REALTA' SONO MENO POTENTI (PER MOTIVI DI PESO E COSE COSI'): SI STA LAVORANDO PER SPEDIRE IN ORBITA STRUMENTI MIGLIORI.

PROBLEMI DEL MODELLO

① MI SERVONO CIRCA 5 MW DI DATI PER DARE LE C.I., E NON LI HO.

② I DATI NON PER FORZA SONO PRESI NEI PUNTI DI GRIGLIA: VI SI DEVONO RIPORTARE (SI USANO COMPLESSI SISTEMI DI PREDAZIONE E CORREZIONE).

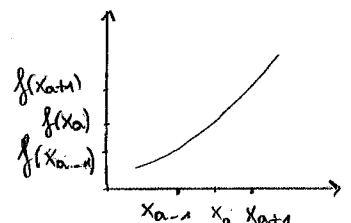
③ BISOGNA INTEGRARE NUMERICAMENTE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (DERIVATA PRIMA E SECONDA).

ESPANDO, AD ESEMPIO,

$$f(x) \approx f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2}(x-b)^2$$

$$b = x_a$$

$$x = \begin{cases} x_{a-1} & x-b = -\Delta x \\ x_{a+1} & x+b = \Delta x \end{cases}$$



$$f(x_{a-1}) = f(x_a) - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_a} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_a} \cdot \Delta x^2$$

$$f(x_{a+1}) = f(x_a) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_a} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_a} \cdot \Delta x^2$$

$$f(x_{a+1}) - f(x_{a-1}) = 2 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_a} \Delta x$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_a} \approx \frac{f(x_{a+1}) - f(x_{a-1}))}{2\Delta x}$$

(SOMMANDOLE HO LA DERIVATA SECONDA).

CENNO AI MODELLI DI PREVISIONE CLIMATICA

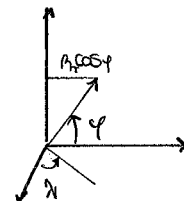
DEVO TENERE CONTO DELL'INTERAZIONE CON GLI OCEANI, DELL'ATTIVITA' UMANA, VULCANICA, LA RADIAZIONE SOLARE ...

PERLORIN NON SONO PREVEDIBILI. COSTRUISCO ALLORA DEGLI SCENARI (E.G.: CI METTO UN'ERUZIONE VULCANICA) E FACCIO CORRERE DEI MODELLI; OTTENDO DEI RANGE INDICATIVI (AD ESEMPIO A 100 ANNI) DENTRO CUI CADONO I DIVERSI SCENARI (ANCHE IL SINGOLO SCENARIO HA UN SUO RANGE DOVUTO ALL'USO DI MODELLI DIVERSI).

COORDINATE SFERICHE

→ GEOCENTRICHE

→ NON INERZIALE (GRA CON LA SUPERFICIE TERRESTRE)



(λ, φ, r)
 λ LONGITUDINE
 φ LATITUDINE
 r DISTANZA DAL CENTRO

$\lambda = \text{cost.} \rightarrow$ MERIDIANI
 $\varphi = \text{cost.} \rightarrow$ PARALLELI
 $R_m = R_T$
 $R_p = R_T \cos \varphi$

$\varphi = 0^\circ$ EQUATORE
 $\varphi = \pm 90^\circ$ POLI
 $\lambda = 0^\circ$ GREENWICH

$-90^\circ < \varphi < 90^\circ$
 $-180^\circ < \lambda < 180^\circ$
 OPPURE $0 < \lambda < 360^\circ$

IN METEOROLOGIA SI USANO SPESSE COORDINATE CARTESIANE CON ORIGINE IN UN PUNTO QUALUNQUE DELLA SUPERFICIE TERRESTRE:

$$dx = R_T \cos \varphi d\lambda$$

$$dy = R_T d\varphi$$

$$dz = dr$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = R_T \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}$$

VELOCITA' ZONALE

$$u_y = \frac{dy}{dt} = R_T \frac{d\varphi}{dt}$$

VELOCITA' MERIDIANALE

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

VELOCITA' VERTICALE

IN QUESTE COORDINATE DEFINISCO IL VENTO

$$\vec{V} = (u, v, w)$$

EST $\rightarrow$ OVEST: EASTERLY

N $\rightarrow$ S: NORTHERLY

OVEST $\rightarrow$ EST: WESTERLY

S $\rightarrow$ N: SOUTHERLY

(DA DOVE PROVIENE).

DETTA $z = r - R_T$, CONSIDERIAMO UNA

$$f(\lambda, \varphi, z, t)$$

CHIAMO MEDIA ZONALE, MERIDIONALE E VERTICALE (COLONNALE SE $\Delta z \rightarrow \infty$)

$$\bar{f}_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int f d\lambda, \quad \bar{f}_\varphi = \frac{1}{\pi} \int f d\varphi, \quad \bar{f}_z = \frac{1}{\Delta z} \int_{\Delta z} f dz, \quad \bar{f}_t = \frac{1}{\Delta t} \int f dt$$

OVVIAMENTE, AD ESEMPIO,

$$\bar{f}_N = \bar{f}_N(\varphi, z, t)$$

PER USARE CARTINE 2D USO PROIEZIONI CONFORMI:

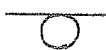
- MERCATORE



- LAMBERTIANA CONICA



- POLARE STEREOGRAFICA



• ORBITA DELLA TERRA

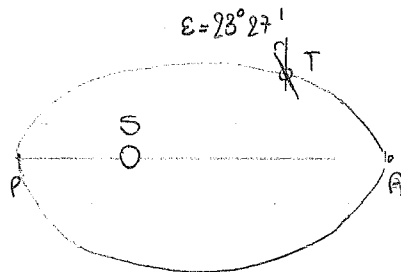
$$S_A = 153 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$S_P = 147 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\bar{R}_{TS} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} \equiv 1 \text{ u.a.}$$

$$e = \frac{\sqrt{S_A^2 - S_P^2}}{S_A} = 0.0167$$

ECCENTRICITA'



ROTAZIONE:

$$\Omega = \frac{2\pi}{1 \text{ day}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

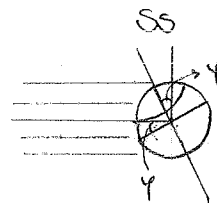
L'ASSE TERRESTRE OSCILLA TRA $22.5^\circ - 24.5^\circ$ IN 40.000 ANNI.

ϕ_{AE} (AUTUMNAL EQUINOX)

$\odot$
SOLSTIZIO
INVERNO (WS)

$\odot$
SOLSTIZIO
ESTATE (SS)

ϕ_{VE} (VERNAL EQUINOX)



SS: TROPICO CANCRO

WS: TROPICO CAPRICORNO

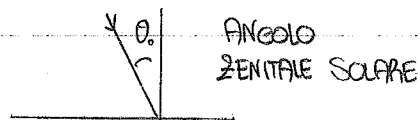
SE φ_i E' LA LATITUDINE IN CUI LA RADIAZIONE SOLARE INCIDE I , DURANTE L'ANNO

$$-\epsilon < \varphi_i < \epsilon$$

SI HA $\varphi_i = 0^\circ$ (EQUATORE) AGLI EQUINOZI.

INOLTRE, DETTO θ_0 L'ANGOLO ZENITALE SOLARE,

$$\cos \theta_0 = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos h$$



CHIAMO DECLINAZIONE

$$-\varepsilon < \delta < \varepsilon$$

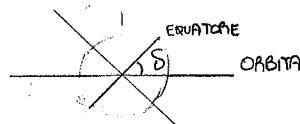
E ANGOLO ORARIO ($t \in [0, 43200]s$, così che $h \in [0, \pi]$)
 $[0, 12]h$

$$h = 2\pi \frac{t}{T}$$

SI HA $\cos h = 1$ ALLE 00:00 E 12:00. METTIAMOCI AL TROPICO DEL CANCRO,

$$\varphi = \varepsilon, LT = 12 \quad \cos h = 1$$

$$\text{AL SS, } \delta = \varepsilon \quad \text{E} \quad \cos \theta_0 = \sin \varepsilon \sin \delta + \cos \varepsilon \cos \delta = \cos(\varepsilon - \delta) = \cos(0) = 1$$



• BILANCIO ENERGETICO TERRA-SOLE

PIÙ ALTA È L'INCLINAZIONE DEI RAGGI SOLARI, MINORE È L'ENERGIA TRASMESSA.



SI DICE INSOLAZIONE LA POTENZA AL METRO QUADRO

$$Q(\lambda, \varphi, t) \quad [W/m^2]$$

MISURATA AL TOA (TOP OF ATMOSPHERE).

SI CHIAMA INVECE COSTANTE SOLARE LA POTENZA AL m^2 MISURATA A UNA DISTANZA DI 1 u.a. (NON È UNA COSTANTE, MA NON DIPENDE DALLA GEOMETRIA DELL'ORBITA):

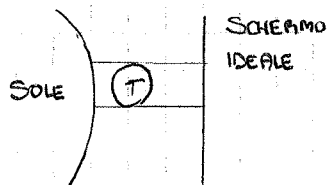
$$S = (1360 \pm 0.6) W/m^2$$

PRENDENDO LA MEDIA ZONALE E POI MERIDIONALE DELL'INSOLAZIONE OTTENGO

$$\frac{S}{4} \approx 380 \frac{W}{m^2}$$

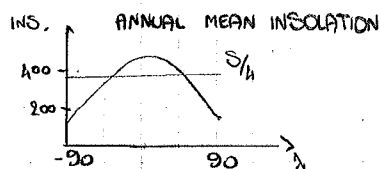
POSSO CALCOLARLO COSÌ:

$$\frac{S \pi R_T^2}{4\pi R_T^2}$$



(SI È GIÀ TENUTO COSÌ CONTO CHE METÀ DELLA SUPERFICIE È IN OMBRA).

IL MASSIMO E MINIMO DELL'INSOLAZIONE SI TROVANO NEI PRESSI DELL'EQUATORE E DEI POLI, MA DOVE DI PRECISO DIPENDE DAL PERIODO DELL'ANNO. TUTTO TORNA SE FACCIO UNA MEDIA TEMPORALE. (V. HART, 2.7)



SI NOTI CHE IN REALTÀ IL MASSIMO NON È A $\lambda = 0$ MA UN PO' PIÙ A SUD (DURANTE L'ESTATE AUSTRALE LA TERRA È PIÙ VICINA AL SOLE). LA MEDIA È A $\lambda \approx 40^\circ$ (DOVE STIAMO NOI).

* QUANDO LA RADIAZIONE INCIDE SULL'ATMOSFERA, QUESTA VIENE

① RIFLESSA (AD OPERA PRINCIPALMENTE DEL GHIACCIO E DELLE NUBI).

È CIRCA IL 30%. (SI DICE ALBEDO PLANETARIO, $A = 0.3$)

② ASSORBITA

$$\frac{S_0}{4}(1-A)$$

↑
FROM LATIN, "WHITENESS"

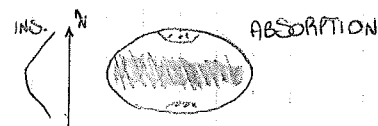
LA TERRA A SUA VOLTA EMETTE RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA, MA PRINCIPALMENTE NELL'INFRAROSSO (MAX A $10\mu\text{m}$, $\propto T^4$).

MA COSA SUCCEDDE IN SUPERFICIE?

(HART, 2.2 ALBEDO IN SUPERFICIE). L'ALBEDO È MOLTO ALTO AI POLI (C'È IL GHIACCIO) E MOLTO BASSO SUGLI OCEANI, A PARTE NELLE ZONE DOVE SOPRA GLI OCEANI SI FORMANO NUBI. È ALTO ANCHE SULLE ZONE DESERTICHE.

(W.H. 1.3 ASSORBIMENTO IN SUPERFICIE). COME CI SI ASPETTA, ALTO ALL'EQUATORE E CALA FINO AI POLI (SOMMA DEI DUE EFFETTI ↓ INSOLAZIONE + ALBEDO).

(GRAFICO, EMISSIONE "OUTGOING LONGWAVE RAD").



SIMILE, SE NON PER FASCE NEI PRESSI DELL'EQUATORE

CORRISPONDENTI A NUBI (SONO PIÙ IN ALTO, QUINDI PIÙ FREDDA). QUI SI VEDE CHE I DESERTI (CHE ASSORBINANO POCO) EMETTONO MOLTO.

COSA SUCCEDDE SE FACCIO EMISSIONE + ASSORBIMENTO ("IN" - "OUT")? GLOBALMENTE FA ZERO, MA LOCALMENTE NO.

I POLI EMETTONO PIÙ DI QUANTO ASSORBONO (A STA).

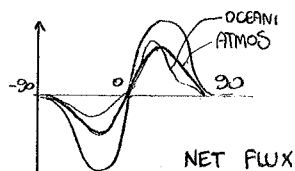


NON COSÌ PER I DESERTI (CIRCA UGUALI, I MOTIVI SONO DA RICERCARSI NEL CLIMA).

• TRASPORTO INTERNO DI ENERGIA

E' DONATO AGLI OCEANI E/O ALL'ATMOSFERA.

$$F_N = \frac{\Delta F}{\Delta y} \quad (\text{NORTH - SOUTH}).$$



IL FLUSSO NETTO E' MASSIMO ALLE MEDIE LATITUDINI $\left(\frac{\partial F_N}{\partial y} = 0\right)$.

L'ANDAMENTO DEL FLUSSO ATMOSFERICO E' SIMMETRICO, MENTRE QUELLO OCEANICO E' PIU' EFFICIENTE NELL' EMISFERO NORD (CI SONO PIU' TERRE EMERSE A OSTACOLARE I FLUSSI FREDDI DAL POLO NORD).

• OVERVIEW: L'ATMOSFERA

$$M_{(\text{ATMOSFERA})} = 5.3 \cdot 10^{18} \text{ Kg}$$

$$\Delta Z \approx 100 \text{ Km}$$

$$M_{(\text{TERRA})} = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

$$R_T = 6370 \text{ Km}$$

COMPOSIZIONE ATMOSFERA:

(QUELLI INDICATI SONO GAS SERA).

	N ₂	78.8 %	(IN VOLUME)	% ~ 10 ⁻²
	O ₂	20.95 %		ppm ~ 10 ⁻⁶
	Ar	0.93 %		ppb ~ 10 ⁻⁹
*	CO ₂	380 ppm		
	Ne	18 ppm		
	He	5 ppm		
*	CH ₄	1.75 ppm		
	Kr	1 ppm		
	H ₂	0.5 ppm		
*	O ₃	0 - 0.1 ppm		
*	H ₂ O	0 - 5 %	(MEDIA 0.25 % IN MASSA)	
*	N ₂ O	0.3 ppm	(PROTOSILLO DI AZOTO)	

CHE NE E' STATO DELL'ATMOSFERA PRIMORDIALE? CI SONO SOLO IPOTESI:

- URTI CHE FANNO ALLONTANARE LE PARTICELLE.
- LA TERRA NON AVEVA UN CAMPO MAGNETICO (CHE OGGI LA PROTEGGE DAL VENTO SOLARE).

→ CO₂, H₂O, N₂, H₂

(ATMOSFERA PRIMORDIALE)

GIA' H₂O POTEVA ESISTERE NELLE 3 FASI: C'ERANO OCEANI.

3.8 MILIARDI DI ANNI FA I PRIMI ORGANISMI; MA NON SI ACCUMULAVA O₂ IN

ARIA (~16 YEARS; LA FOTOSINTESI E' MINORITARIA, MENTRE IL GROSSO E' DONATO A REDOX DI ROCCE NELLA CROSTA E ALL'ESPUSSIONE DI H₂ CHE AUMENTA LO STATO DI OSSIDAZIONE TERRESTRE.)

PIANO PIANO H_2 SFUGGE VIA (E' LEGGERO).

2.4-2.2 6 YEARS AGO L' O_2 RAGGIUNGE I LIVELLI ATTUALI. SI FORMA O_3 E IN SEGUITO GLI ORGANISMI TERRESTRI (SCHEMATI DAGLI UN).

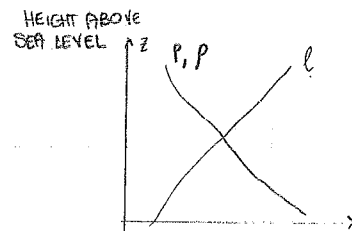
STRUTTURA VERTICALE

$$p(z) = p_0 e^{-z/H} \quad H \approx 7-8 \text{ km (e-FOLDING DEPTH)}$$

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}$$

$$l(z) = l_0 e^{-z/H} \quad (\text{LIBERO CAMMINO MEDIO})$$

$$\rightarrow z = -H \ln \frac{p}{p_0}$$

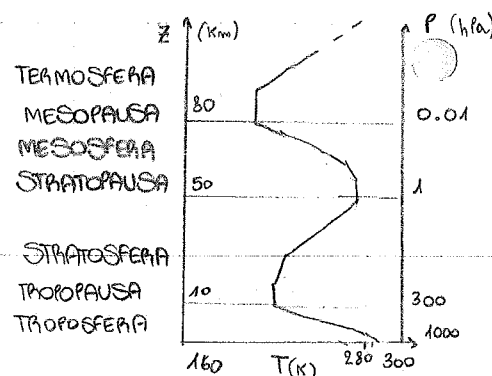


STD ATMOSPHERE
(AVERAGED OVER t, N, Y)
IL GRAFICO E' IN SEMILOG.

GLI STRATI ATMOSFERICI SI CLASSIFICANO IN

BASE ALL' ANDAMENTO DI T:

- THORO: DECRESCe, 80% MASSA ATM., NUVOLE.
- STRATO: CRESCE (VERTICAL MIXING INHIBITED AT T INVERSIONS), OZONO.
- MESO: DECRESCe.
- TERMO: CRESCE (FOTODISSOCIAZIONE E FOTODIONIZZAZIONE).



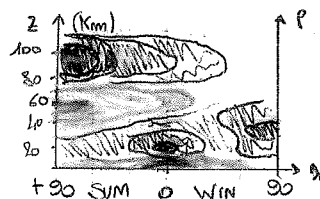
$$\bar{T}_{n,t}(y, z)$$

EQUATORE: CALDO, POI SI RAFFREDDA DOPO LA THOROPAUSA.

SI SCALDA ANCORA, SCENDE, RISCALDA.

POLI: L'ANDAMENTO E' DIVERSO. IN QUOTA IL POLO ESTIVO E' PIU' CALDO DELL' EQUATORE (MOTI ATMOSFERICI); IL POLO

INVERNALE E' SOVRASTATO DA ARIA FREDDA E BASTA (MINIMO DOPO LA THOROPAUSA).

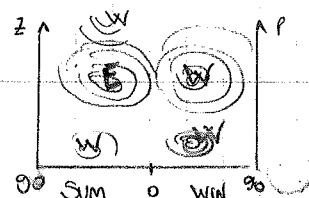


SI NOTI UN GRADINO DI TEMPERATURA A $N \approx 30^\circ$ (THOROPAUSA $\rightarrow$ JET STREAMS).

GRAFICO VENTO ZONALE, $W \rightarrow E$, MEDIA ZONALE; MEDIA STAGIONALE (SU 3 MESI). LE LINEE SONO ISO-U.

(WH 1.11)

AUSEI



JET STREAM $\rightarrow$ COINCIDONO CON IL GRADINO DELLA THOROPAUSA

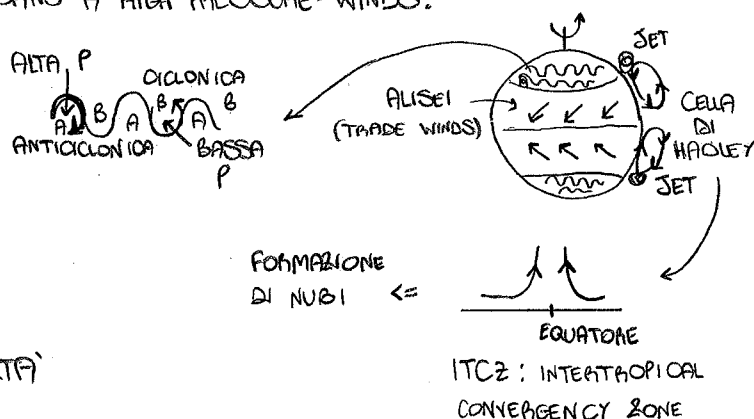
SI NOTI CHE A TRASPORTARE ENERGIA E' PERLOPIU' LA TURBOLENZA A GRANDE SCALA (I CICLONI). QUESTI PRENDONO ENERGIA DAI JET STREAMS.

NOMENCLATURA:

- CIRCOLAZIONE CICLONICA: ANTIORARIA NELL'EMISFERO NORD, ORARIA NEL SUD (COME LA TERRA VISTA DAL LATO GIUSTO). → ATTORNO A LOW PRESSURE - WINDS.
- ANTICICLONICA: VICEVERSA. → ATTORNO A HIGH PRESSURE - WINDS.



NEL GRAFICO L' "ACQUA PLANET" (MODELLO SEMPLIFICATO SENZA TERRE EMERSE).



LA PRESENZA DI CONTINENTI IN REALTA'

"Frena" l'aria e la devia

- FORMAZIONI CICLONICHE SUI POLI, ANTICICLONICHE SULL'EQUATORE
- CICLONI E ANTICICLONI SUGLI OCEANI

MONSONI: SONO DOVUTI ALLA DIVERSA CAPACITA' TERMICA DI CONTINENTI E OCEANI; AVVENGONO A LUGLIO E A GENNAIO, IN VERSO OPPOSTO.

ANCHE L'INCLINAZIONE DELL'ASSE TERRESTRE MODIFICA L'ANDAMENTO DEI VENTI.

AL SOLITO NELL'EMISFERO SUD I VENTI SONO PIU' REGOLARI (MENO TERRE EMERSE) E SI SENTE MENO LA DIFFERENZA TRA STAGIONI.

SI FORMANO IN CORRISPONDENZA DEGLI OCEANI CENTRI DI ALTA E BASSA PRESSIONE.

PRECIPITAZIONI: MASSIMI SULL'EQUATORE (E A GIUGNO



SULLE ZONE MONSONICHE). DOVE I VENTI CONVERGONO NEGLI STRATI BASSI DELL'ATMOSFERA, SI HANNO ZONE DI ASCENSIONE; L'ARIA SALE, SI RAFFREDDA E IL VAPORE ACQUO CONDENSA.

OCEANI

70% DELLA SUPERFICIE TERRESTRE (SI CONTANO ANCHE I MARI INTERNI, BASTA CHE SIA ACQUA SALATA)

$$\bar{h} = 3700 \text{ m}$$

$$h_{\max} = 11000 \text{ m (FOSSA DELLE MARIANNE)}$$

$$V = 1.35 \cdot 10^9 \text{ km}^3$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad M_{\text{TOT}} = 1.35 \cdot 10^{21} \text{ kg}$$

$$T \approx 3.6^\circ \text{C}$$

$$\text{CIACA 250 VOLTE } M_{\text{ATM}} = 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

$$\text{CONFRONTO CON } M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{SALINITA'} \approx 34.7 \text{ g/kg} = 3.47\%$$

PERIODO NEGLI OCEANI (POI GHIACCIAI, FALDE, UMIDITA' DEL SUOLO, LAGHI E FIUMI, ATMOSFERA).

COMPOSIZIONE CHIMICA SOLUTI: NaCl $\sim$ 80%, S, Mg, Ca, K ...

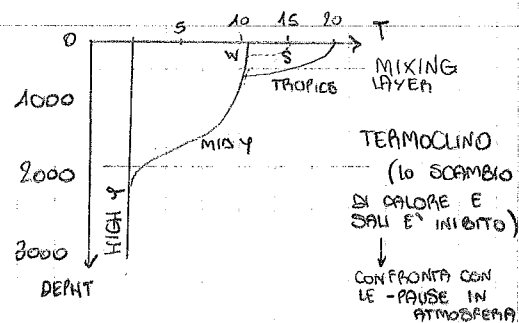
* DISTRIBUZIONE VERTICALE DELLE TEMPERATURE.

(GRADIENTE DI $p \rightarrow$ TERMOCLINE, COME IN ATMOSFERA GRADIENTE DI $T \rightarrow$ PAUSE).

L'ACQUA E' UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE,

QUINDI p DIPENDE SOLO DA COSA C'E'

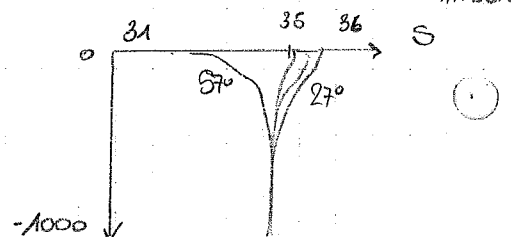
SOPRA.



* ANDAMENTO DELLA SALINITA'

DOVE HO LA MASSIMA EVAPORAZIONE

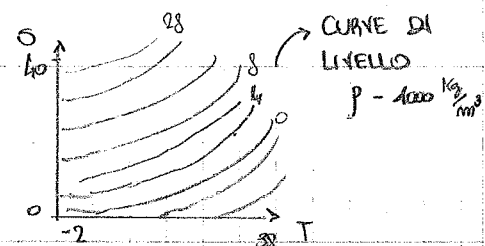
HO MASSIMA SALINITA' (TROPICI, MA NON



ALL'EQUATORE PERCHE' QUI HO ANCHE LE MASSIME PRECIPITAZIONI CHE COMPENSANO).

* SALINITA' VS T. SICCOME p VS T NON E' LINEARE,

SU OGNI CURVA HO UNA "ANOMALIA" CHE SI



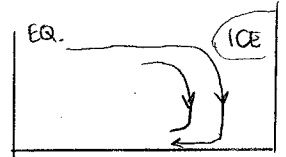
SPOSTA IN BASE ALLA SALINITA' (CHE CAMBIA IL PUNTO CRISCOPICO).

IN ACQUA DOLOE SI FORMA IL GHIACCIO SOLO IN SUPERFICIE (GALEGGIA);

IN ACQUA SALATA (NON PURA) p DECRESCe CON T ANCHE TRA 0°C E 4°C .

CIRCOLAZIONE OCEANICA

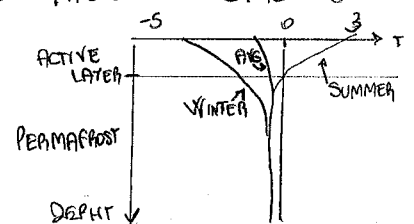
- CIRCOLAZIONE SUPERFICIALE: E' DOVUTA ALL'ATTRAITO CON I VENTI, QUINDI RISPESCHIA IL LORO ANDAMENTO. LE TEMPERATURE DELLE CORRENTI (EQUATORE → POLI) POSSONO ESSERE MOLTO DIVERSE.
- CIRCOLAZIONE TERMALINA (ACQUE PROFONDE): E' DOVUTA ALL'AUMENTO DI DENSITA' DOVUTA ALL'ABBASSAMENTO DI TEMPERATURA. (IL NUTRIMENTO DEI PESCI SI FORMA SUI FONDALI: QUESTO RIMESCOLAMENTO E' ESSENZIALE).



CAIOSFERA

	MASSA
GHIAIA : ANTARTIDE	53
GROENLANDIA	5
ALPINI (MONTAGNE)	0.2
MARINO ARTICO	0.04
MARINO ANTARTICO	0.04
NEVE	0.01
PERMAFROST	2

IL GHIACCIO MARINO SI MUOVE (ICEBERG) ATTRAVERSO CANALI NELL'ARTICO. IN ANTARTIDE E' LA CALOTTA POLARE A MUOVERSI SCIVOLANDO SULLA TERRA (SU TEMPI LUNGI, IL GHIACCIO SI MUOVE COME UN FLUIDO. E' SPESSE 3000 m!).



CICLO IDROLOGICO

	MASSA	RESIDENTIAL τ
ATMOS	0.01	DAYS
LAGHI, FIUMI	0.6	D TO Y
FALDE	15	~ 100 S Y
GHIAICIAI	0.2	~ 100 S Y
GROENLANDIA	5	10000 Y
ANTARTIDE	5.3	100 000 Y
OCEANI	2700	
CRUSTA, MANTELLA	20 000	10^4 Y (COMPARARE $4.5 \cdot 10^9$ Y ETA' TERRA)

$$\tau = \frac{M}{RATE} = \frac{[M_0]}{[kg/s]}$$

WATER BALANCE

- EVAPORAZIONE, PRECIPITAZIONE (118/107 cm/Y SU OCEANI, 48/55 SU TERRA)

LA QUANTITA' DI ACQUA IN ATMOSFERA RESTA INVARIATA, QUINDI DEVE ESISTERE UN TRASPORTO D'ACQUA.

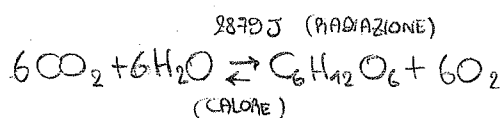
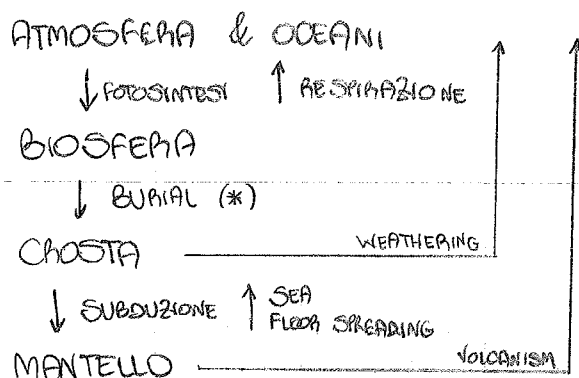
$$E_{\text{evapor.}} - P_{\text{precip.}} = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{CON } F: \text{ IL FLUSSO DI ACQUA,}$$

NON C'E' ACCUMULO O PERDITA DI ACQUA GLOBALMENTE IN ATMOSFERA (IN 2D $\frac{\partial}{\partial x}$ E' UNA DIVERGENZA, $\nabla \cdot F = E - P$).

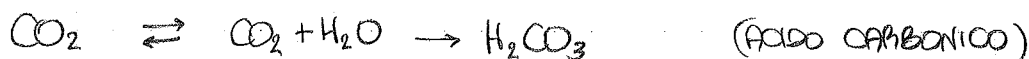
CICLO DEL CARBONIO

IN ATMOSFERA, CO_2 E CH_4 ; NELLE ROCCE SEDIMENTARIE (PERLOPIU');
NELLE PIANTE (TRONCHI, RADICI); NEL SUOLO, SEDIMENTI; NEI FOSSILI;
NEGLI OCEANI.

LA BIOSFERA E' RESPONSABILE DELLA FOTOSINTESI.

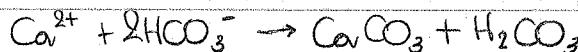


IL CARBONIO NELL'ATMOSFERA SI SCIOLGE NELL'ACQUA:



* SCALETRO,

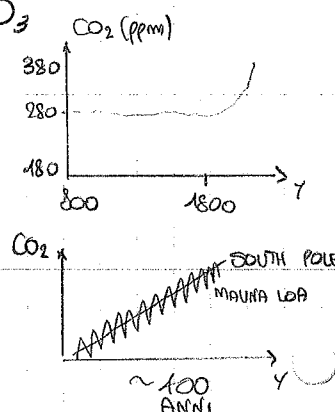
CONCHIGLIE DI ORGANISMI MARINI



* ANDAMENTO NEGLI ANNI DELLA CO_2 IN ATMOSFERA.

"RESPIRAZIONE": OSCILLAZIONE, RISpetto AL TREND,

NELLE ZONE POPOLATE DA ALBERI (LA LINEA CONTINUA INVECE E' UN POLO).



TERMODINAMICA ATMOSFERICA

T, p, ρ, γ

IL SISTEMA ATMOSFERICO E' COME UN SISTEMA TERMODINAMICO IDEALE:
E' UNIFORME E STAZIONARIO.

PARLEREMO DI

AIR PARCEL ("PACCHETTO D'ARIA", MASSA D'ARIA - SOSTANTIVO)

$\hookrightarrow \sim 10^{23}$ MOLECOLE PER m^3

LE GRANDEZZE DI CUI SOPRA SONO QUELLE MEDIE SUL PACCHETTO.
E CAMBIANO LENTAMENTE NEL TEMPO: POSSIAMO IPOTIZZARE CHE LE
TRASFORMAZIONI SIANO QUASI STATICHE.

PERCHE' CIO' SIA VALIDO, IL LIBERO CAMMINO MEDIO DEVE ESSERE
(A CONDIZIONI STD, $T = 273.16$ K E $p = 1000$ hPa) ATTORNO A

$\lambda \sim 5 \cdot 10^{-8}$ m

CHE E' MOLTO PIU' PICCOLO DEL PACCHETTO D'ARIA (MA GRANDE
RISPETTO ALLE MOLECOLE).

UNITA' DEL SI.: m, kg, s, K

$\rho: \frac{kg}{m^3}$

$p: \text{hPa}$ ($1 \text{ mBar} = 1 \text{ hPa}$, $1 \text{ atm} = 1013 \text{ hPa}$, $760 \text{ Torr} = 1 \text{ atm}$)

AMBIENTE (ENVIRONMENT): CIO' CHE E' ESTERNO AL SISTEMA.

SERBATOIO (RESERVOIR): SERBATOIO.

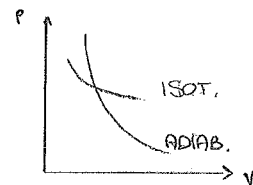
VARIABILI INTENSIVE ($T, U, \dots$) E ESTENSIVE ($m, V, N, \dots$).

VINCOLO: LE CONDIZIONI DEL SISTEMA. SE IL VINCOLO VARIA LENTAMENTE
IL SISTEMA VI SI ADATTA IN MODO REVERSIBILE.

PIANO PV $\rightarrow$ CURVA ISOTERMA

PER OGNI SERBATOIO A TEMPERATURA T CON CUI METTO IL SISTEMA A CONTATTO HO UNA DIVERSA CURVA.

SI CHIAMANO ISOTERME LE TRASFORMAZIONI CHE AVVENGONO LUNGO LA CURVA.



SISTEMA ISOLATO (NON SCAMBIA CALORE): $\rightarrow$ ADIABATICA

LE DIFFERENZE DI PRESSIONE SI PROPAGANO CON LA VELOCITA' DEL SUONO, QUINDI UN PACCHETTO D'ARIA VA RAPIDAMENTE IN EQUILIBRIO DI PRESSIONE PER QUANTO SIA GRANDE.

* L'ARIA SECCA SI PUO' CONSIDERARE UN GAS PERFETTO.

CONDIZIONI STANDARD: $T = 273.16 \text{ K}$, $p = 1013 \text{ hPa}$

$$n(\text{STP}) = 2.67 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

SI DICE NUMERO DI LOSCHMIDT E SIGNIFICA CHE UNA PARTICELLA OCCUPA

$$V(\text{STP}) = 3.7 \cdot 10^{-26} \text{ m}^3$$

$$l = 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 330 \text{ \AA}$$

IN QUESTE CONDIZIONI VALE PER L'ARIA LA LEGGE DEI GAS IDEALI

$$p = n k_B T$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

* A LIVELLO DEL MARE, LA PRESSIONE ATMOSFERICA VALE ($p_E = 6.87 \cdot 10^6 \text{ Pa}$)

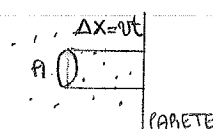
$$p(0) = 1000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{M_{\text{atm}} \cdot g}{A} \approx \frac{5 \cdot 10^{10} \text{ N}}{5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2} = 10^5 \text{ Pa}$$

LA PRESSIONE E' UNA FORZA DI SUPERFICIE, QUINDI NON SI APPLICA AL CENTRO DI MASSA (SE NO LA SENTIREMMO SOLO IN TESTA).

CONSIDERIAMO DELLE MOLECOLE, $\frac{1}{6}$ DELLE QUALI

SI MUOVONO VERSO LA PARETE. USIAMO (QUI E NEL SEGUITO) LE LEGGI DEI GAS IDEALI.



ALLORA, CON RIFERIMENTO AL DISEGNO,

$$V = S \cdot A = v t A$$

$$N_i = V \cdot \frac{1}{6} n = \frac{1}{6} n v t A$$

N_i È IL NUMERO DI PARTICELLE INCIDENTI.

$$\Delta q = 2 m v N_i = \frac{1}{3} n m v^2 t A$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{3} n m v^2 = \frac{1}{3} n \cdot 2 \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{2}{3} n \left(\frac{3}{2} k_B T \right) = n k_B T$$

DOVE

$$n = \frac{N}{V} \quad M = N m \quad P = \frac{M}{V}$$

$$P V = N k_B T = \frac{M}{m} k_B T = M R T$$

NOTA:

N È IL NUMERO DI PARTICELLE, n LE MOL

M È LA MASSA TOTALE, m QUELLA DI UNA PARTICELLA

LA COSTANTE CHE USIAMO IN TERMODINAMICA

QUI SI CHIAMA R^* ED È LA R DI 1 mol DI GAS,

MENTRE k_B È LA R DI UNA SOLA MOLECOLA.

(R COSTANTE DEL GAS, CHE CAMBIA DA GAS A GAS), O ANCHE

$$P = \rho R T$$

O ANCORA, DETTO $\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{M}$ IL VOLUME SPECIFICO ("PER UNITÀ DI MASSA")

$$P \alpha = R T$$

MOLE

QUANTITÀ DI SOSTANZA IL CUI PESO IN g È FARI AL PESO MOLECOLARE.

1 mol DI SOSTANZA CONTIENE N_A MOLECOLE, DOVE

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

ALLORA, DETTO N IL NUMERO DI MOL,

$$N = N_A \cdot n$$

$$P V = N k_B T = N_A n k_B T$$

$$P V = N R^* T = M R T$$

NOTA: PER QUANTO DETTO SOPRA E POICHÉ 1 mol HA MASSA M ,

$$P V = \underline{N M R T} = N R^* T$$

DOVE R^* È LA COSTANTE UNIVERSALE DEI GAS,

$$R^* = N_A k_B$$

INOLTRE, SE M È IL PESO MOLECOLARE DEL GAS IN QUESTIONE,

$$n = \frac{m}{M}$$

$$R = \frac{R^*}{M}$$

LEGGE DI DALTON (PRESSIONI PARZIALI)

$$P_{\text{TOT}} = \sum_i P_i$$

$$P_i = p_i R_i T$$

$$\Rightarrow P_{\text{TOT}} = \left(\sum_i p_i R_i \right) T = \left(\sum_i \frac{p_i}{p} R_i \right) p T = \left(\sum_i \frac{m_i}{m} R_i \right) p T$$

POSSIAMO DEFINIRE

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i R_i$$

DA CUI

$$P = p \cdot R_{\text{eff}} \cdot T$$

SIMILMENTE LA MASSA MOLECOLARE EFFICACE SARA'

$$M_{\text{eff}} = \frac{R^*}{R_{\text{eff}}}$$

MASSA MOLECOLARE EFFICACE DELL'ARIA SECCA

$$\left. \begin{array}{ll} \text{N}_2 & 0.78 \\ \text{O}_2 & 0.21 \\ \text{Ar} & 0.01 \end{array} \right\} \text{IN MASSA, OVERO} \frac{m}{m}$$

$$M R_i = X K_B \rightarrow R_i = \frac{K_B}{m_i X} = \frac{K_B}{m}$$

$$R_{\text{N}_2} = \frac{K_B}{m_{\text{N}_2}} = \frac{K_B}{M \cdot u} = \frac{K_B}{28 u}$$

$$u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$

↑
u.m.a. (VEDI NOTA SOTTO)

$$R_{\text{O}_2} = \frac{K_B}{32 u} \quad R_{\text{Ar}} = \frac{K_B}{40 u}$$

$$R_d = \sum_i \frac{m_i}{m} \cdot R_i = \left[\frac{0.78}{28} + \frac{0.21}{32} + \frac{0.01}{40} \right] \frac{K_B}{u} = 287 \text{ JK}^{-1} \text{ Kg}^{-1}$$

$$M_d = \frac{R^*}{R_d} = 28.97 \text{ g/mol}$$

NOTA: MASSA MOLECOLARE VS MASSA MOLARE. NUMERICAMENTE SONO

UGUALI SE SI MISURA LA PRIMA IN u.m.a. E LA SECONDA IN g/mol. INFATTI
1 mol → NUMERO DI MOLECOLE CHE PESANO MEDIANTE "X" u.m.a. CONTENUTE IN "X" GRAMMI DI QUELLA SOSTANZA.

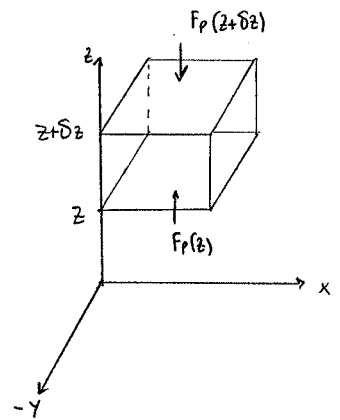
EQUILIBRIO IDROSTATICO

$$F_p(z+\delta z) = - \left[F_p(z) + \underbrace{\frac{\partial F_p}{\partial z} \delta z}_{<0} \right] \quad (\text{SPINTA DI ARCHIMEDE})$$

$$p = \frac{F_p}{\delta x \delta y} = \frac{F_p}{A}$$

$$\underbrace{F_p(z+\delta z)}_{<0} + \underbrace{F_p(z)}_{>0} = - \underbrace{\frac{\partial F_p}{\partial z} \delta z}_{<0} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z} A \delta z}_{>0} = - \frac{\partial p}{\partial z} dV \equiv dF_p^{(R.B.)}$$

$$dF_g = -dm \cdot g = -\rho dV \cdot g$$



SI HA EQUILIBRIO IDROSTATICO QUANDO

$$F_g + F_p^{(R.B.)} = 0$$

$$-\rho V g - \frac{\partial p}{\partial z} V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

DETTA EQUAZIONE DELL'IDROSTATICA.

LA INTEGRO CONSIDERANDO $p(z)$, $g(z)$. PER L'ARIA SECCA (DRY, MA LASCIAMO CADERE IL SUFFISSO d),

$$p = \frac{\rho}{RT}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho}{RT} g \quad \Rightarrow \quad p(z_2) = p(z_1) \exp \left\{ -\frac{1}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{g}{T} dz \right\}$$

FACCIAMO L'IPOTESI CHE TRA z_1 E z_2 T E g SIANO COSTANTI; ALLORA

$$p(z_2) = p(z_1) e^{-\frac{g}{RT}(z_2-z_1)} = p(z_1) e^{-\frac{(z_2-z_1)}{H}}$$

DOVE SI DICE ALTEZZA DI SCALA LA QUANTITA'

$$H = \frac{RT}{g}$$

NOTA: SCELTA $\bar{T} = 285$ K PER TROPO E STRATOSFERA, SI HA $H = 7.6$ km (7.89 SOLO TROPO).

SE T NON FOSSE COSTANTE, USO AL SUO POSTO

$$\bar{T} = \frac{\int_{p_1}^{p_2} T d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p}$$

OVVERO LA TEMPERATURA MEDIA.

PARTENDENDO DALL'EQUAZIONE DELL'IDROSTATICA,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz ; \quad T d \ln p = -\frac{g}{R} dz$$

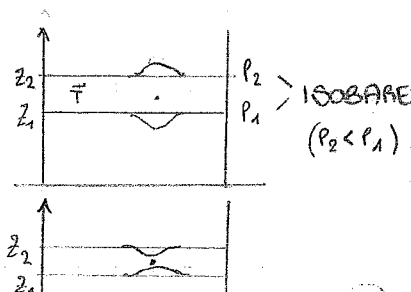
$$\int_{p_1}^{p_2} T d \ln p = \bar{T} \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} (z_2 - z_1)$$

$$\left(\bar{T} \ln \frac{p_2}{p_1} = \bar{T} \int_{p_1}^{p_2} d(\ln p) \right)$$

$$z_2 - z_1 = -\frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

UNA CONSEGUENZA È CHE $\Delta z \propto \bar{T}$:

$$\Delta z = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad \text{EQUAZIONE IPSOMETRICA}$$



SE $\bar{T}$ AUMENTA IN UN PUNTO, LO STRATO DI ATMOSFERA COMPRESO TRA p_1 E p_2 SI ISPESSESCA IN CORRISPONDENZA DI QUEL PUNTO E OSSERMO TRA L'ALTRO UN ABBASSAMENTO DI PRESSIONE ALL'ALTEZZA z_1 .

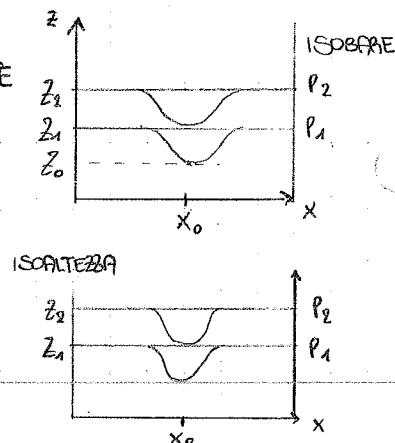
AL CONTRARIO SE $\bar{T}$ DIMINUISCE VEDO AUMENTARE LA PRESSIONE IN z_1 , (COME SE VEDESSI SALIRE LE ISOBARE A PRESSIONE SUPERIORE).

POICHÉ p DECRESCA IN MODO MONOTONO CON z (LE SUPERFICI NON SI INTERSECANO), AFFERMO EQUIVALENTEMENTE

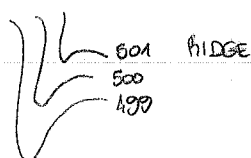
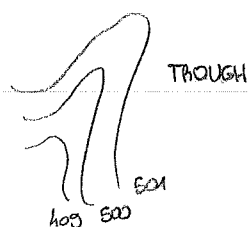
$$p(z_1, x_0) = p_2 < p_1$$

$$z(p_1, x_0) = z_0 < z_1$$

A BASSA/ALTA PRESSIONE A QUOTA COSTANTE CORRISPONDONO BASSA/ALTA QUOTA A PRESSIONE COSTANTE.



NELLE MAPPE A PRESSIONE COSTANTE È MOSTRATA LA QUOTA DELLE PRESSIONI. IN GENERE PER LA PRESSIONE IN SUPERFICIE USO INVECE DELLE NORMALI ISOBARE.



GEPOTENZIALE

$$d\phi = g dz$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz$$

IMPONENDO $\phi(z=0) = 0$,

$$\phi(z) = \int_0^z g(z') dz'$$

SI DICE ALTEZZA GEPOTENZIALE

$$Z = \frac{\phi(z)}{g_0} = \frac{1}{g_0} \int_0^z g(z') dz'$$

CHE COINCIDE CON L'ALTEZZA SOLO SE PONGO $g \approx g_0$.

Z	z	Z-z	%
10	9.99	10 m	1'..
100	98.47	1.53 Km	1.5%.

PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

$$dU = \delta Q - \delta W$$

↑
ENERGIA
INTERNA

↑
CALORE
ASSorbito
DAL SISTEMA

↑
LAVORO FATTO
DAL SISTEMA

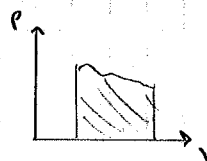
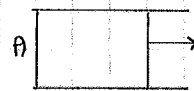
L'UNICO LAVORO IN ATMOSFERA E' QUELLO DI COMPRESSIONE/ESPANSIONE

$$\delta W = p A (\delta l)$$

SE P E' DEFINITA LUNGO TUTTA LA TRASFORMAZIONE,

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$dU = \delta Q - p dV$$



PER UN GAS PERFETTO, L'ENERGIA INTERNA E'

$$U = \frac{f}{2} N k_B T$$

CON f I GRADI DI LIBERTA':

$$\begin{aligned} f &= 3 \\ f &= 5 \\ f &= 6 \end{aligned}$$

GAS MONOATOMICO
BIATOMICO SEMPLICE
MOLECOLE PIU' COMPLESSE

POICHE'

$$N = \frac{m}{m}$$

=>

$$U = \frac{f}{2} \frac{m}{m} k_B T = \frac{f}{2} m R T$$

CALORI SPECIFICI

IL CALORE SPECIFICO (PER UNITA' DI MASSA, NON MOLARE) E'

$$c_v = \frac{f}{2} R$$

$$dU = m c_v dT = \delta Q - p dV$$

IN PRIMA APPROSSIMAZIONE LE TRASFORMAZIONI ATMOSFERICHE SONO ADIABATICHE, PERCIO' (PER PACCHETTI D'ARIA SECCA)

$$m c_v dT = -p dV$$

$$\delta Q = 0$$

* PER TRASFORMAZIONI CHE AVVENGONO A PRESSIONE COSTANTE,

$$m c_p dT = \delta Q_p$$

DA CUI

$$m c_v dT = m c_p dT - p dV$$

$$d(pV) = p dV + V dp \quad \underset{p=\text{costante}}{=} p dV$$

$$\begin{aligned} m c_v dT &= m c_p dT - d(pV) \\ &= m c_p dT - d(mRT) \end{aligned}$$

$$= m c_p dT - m R dT \quad \Rightarrow$$

NOTA: ANCHE SE L'ABBIAMO DERIVATA NEL CASO SPECIALE IN CUI $\delta Q = 0$, RESTA VERA $dU = m c_v dT$ PERCHE' U E' UNA FUNZIONE DI STATO DELLA TEMPERATURA PER UN GAS PERFETTO.

$$pV = mRT$$

$$\underline{c_v + R = c_p}$$

DETTA RELAZIONE DI MEYER.

$$c_p = 717 + 287 = 1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

(PIU' GRANDE, PERCHE' PARTE DELL'ENERGIA SERVE A ESPANDERE IL SISTEMA).

* PER UNA ADIABATICA SI E' VISTO

$$m c_v dT = -p dV$$

$$V = \frac{RT}{p} m$$

$$dV = \left(\frac{R}{p} dT - \frac{R}{p^2} T dp \right) m$$

$$M_{Cr} dT = \left(-RdT + \frac{R}{p} T dp \right) M$$

$$C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}$$

$$C_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}; \quad \frac{dT}{T} = \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} := \kappa \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = \kappa \ln \frac{p}{p_0} = \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa$$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa$$

NOTA: PER L'ARIA SECCA $\kappa = 0.286$.

DETTA EQUAZIONE DI POISSON (PER TRASFORMAZIONI ADIABATICHE).

TEMPERATURA POTENZIALE

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0 = 1000 \text{ hPa}}{p} \right)^\kappa \rightarrow T \left(\frac{1000}{p} \right)^\kappa$$

E' LA TEMPERATURA CHE AVREBBE UN PACCHETTO SE PORTATO ADIABATICAMENTE DA p, T A $p_0 = 1000 \text{ hPa}$.

DATO UN SISTEMA IN (p, T) , CON $\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa$, SE LO PORTO IN (p_1, T_1) ADIABATICAMENTE OTTENGO

$$T_1 = T \left(\frac{p_1}{p} \right)^\kappa$$

$$\theta_1 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^\kappa = T \left(\frac{p_1}{p} \right)^\kappa \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^\kappa = \theta$$

DA CUI SI VEDE CHE θ E' UNA PROPRIETA' INTRINSECA DELLA MASSA D'ARIA (ANCHE' QUESTA SI MUOVE ADIABATICAMENTE, OVERO SU SUPERFICI A TEMPERATURA POTENZIALE COSTANTE).

LAPSE RATE ADIABATICO DELL'ARIA SECCA

COME CAMBIA T DI UN PACCHETTO DI ARIA SECCA SE LO MUOVO IN VERTICALE E ADIABATICAMENTE? USANDO L'EQUAZIONE DI POISSON,

$$T = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma$$

$$\gamma = \frac{R}{c_p}, \quad p = \frac{p}{AT}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -p\gamma$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma \right] = \gamma \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{1}{p_0} \right) \frac{\partial p}{\partial z}$$

NOTA CHE STO USANDO L'EQUILIBRIO IDROSTATICO MA CI STA: IL PACCHETTO LO SOLLEVO MECCANICAMENTE. (VEBI 2020)

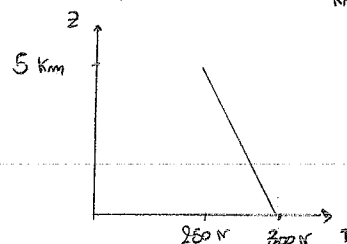
$$= - \frac{\theta}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma p\gamma = - \gamma \frac{T}{p} p\gamma = - \gamma \frac{T}{p} \left(\frac{p}{AT} \right) \gamma = - \frac{\gamma}{c_p}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} = - \frac{\gamma}{c_p} \approx -10^{-2} \frac{K}{m} = -10 \frac{K}{km}$$

NOTA: T SCENDE ALL'AUMENTARE DELLA QUOTA. LO FA ANCHE TROPOSPERA, MA DI MENO ($6-7 \frac{K}{km}$).

CHIAMIAMO LAPSE RATE ADIABATICO

$$\Gamma_d = - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} = \frac{\gamma}{c_p}$$



NELLA PRATICA UN PACCHETTO SALE IN VERTICALE SE NON C'E' EQUILIBRIO IDROSTATICO. QUAND'E' CHE QUESTO SUCCEDDE?

STABILITA' DELL'ATMOSFERA

A CAUSARE LO SBILANCIAMENTO DELLE FORZE VERTICALI SONO PRINCIPALMENTE:

- ARIA CHE SBATTE CONTRO UNA MONTAGNA
- FRONTI SU CUI SI INCONTRANO MASSE D'ARIA A TEMPERATURE DIVERSE

(FREDDO $\rightarrow$ CALDO: FRONTE FREDDO. CALDO $\rightarrow$ FREDDO: FRONTE CALDO. IN

ENTRAMBI I CASI L'ARIA CALDA SALE, OVEVERO QUELLA FREDDA VI SPINGE SOTTO).

$$\rho_a a = -\rho_a g - \frac{\partial p}{\partial z}_{<0}$$

$\uparrow$
DENSITA'
VOLUMICA PACCHETTO D'ARIA

$$- \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_e g$$

$\uparrow$
DENSITA'
VOLUMICA AMBIENTE

(INFATTI L'AMBIENTE SI PUO' SUPPORRE IN EQUILIBRIO IDROSTATICO).

ALLORA

$$\rho_a \cdot a = -\rho_a \cdot g + \rho_e g$$

$$\rho_a \frac{d^2 z}{dt^2} = (\rho_e - \rho_a) g$$

E POICHE' $\rho = \rho_d$ IN ENTRAMBI I CASI E LA PRESSIONE SI METTE IN EQUILIBRIO IMMEDIATAMENTE (A DIFFERENZA DI T),

$$\rho_e = \frac{p}{RT_e}, \quad \rho_a = \frac{p}{RT_a}$$

$$\frac{1}{T_a} \frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\frac{T_a - T_e}{T_e T_a} \right) g$$

$$T_a = \underbrace{T_0}_{\substack{\uparrow \\ \text{TEMPERATURA AL} \\ \text{LIVELLO DA CUI E' PARTITA LA MASSA D'ARIA}}} + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_a \Delta z = T_0 - \Gamma_{a,d} \cdot \Delta z$$

TEMPERATURA AL LIVELLO DA CUI E' PARTITA LA MASSA D'ARIA

$$T_e = T_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_e \Delta z = T_0 - \Gamma_e \cdot \Delta z$$

ALLORA

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\Gamma_e - \Gamma_a}{T_0} g \Delta z$$

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} = (\Gamma_e - \Gamma_a) \frac{g}{T_0} \Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta z = \Delta z_0 e^{-i\omega t}$$

DA CUI

$$\omega_{br} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\Gamma_{a,d} - \Gamma_e) \frac{g}{T_0}}$$

$$\Gamma_{a,d} = \frac{g}{c_p}$$

EQUAZIONE DEL CALORE:

$$Q = -K_M \frac{\partial T}{\partial x}$$

$\uparrow$
COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE TERMICA, PICCOLISSIMO PER LA DIFFUSIONE MOLECOLARE.

$$\Delta z = z - z_0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta z) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\omega = \left[(\Gamma_{a,d} - \Gamma_e) \frac{g}{T_0} \right]^{1/2}$$

DETTA FREQUENZA DI BRUNT-VÄISÄLÄ. SE ω_{br} E' REALE HO

OSCILLAZIONI ATTORNO A z_0 , MENTRE SE E' IMMAGINARIA HO UN ESPONENZIALE REALE E IL PACCHETTO CONTINUA A MUOVERSI NELLA DIREZIONE IN CUI AVEVA INIZIATO A MUOVERSI.

DIPENDE TUTTO DA Γ_e :

$\Gamma_a > \Gamma_e$: ATMOSFERA STABILE

$\Gamma_a < \Gamma_e$: ATMOSFERA INSTABILE

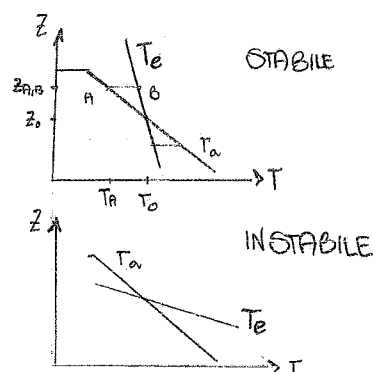
$\Gamma_a = \Gamma_e$: NEUTRA.

NOTA: LA CONDIZIONE DI STABILITA' IMPLICA $\frac{\partial T_a}{\partial z} < \frac{\partial T_e}{\partial z}$ (NOTA CHE SONO ENTRAMBE NEGATIVE E NON E' UNA RELAZIONE TRA VALORI ASSOLUTI).

DOVE

$$\Gamma_a = \frac{g}{c_p} = - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{a,d}$$

$$\Gamma_e = - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_e$$



NEL PRIMO GRAFICO, QUANDO IL SISTEMA VA FUORI

EQUILIBRIO SI VEDE CHE TENDE A TORNARE ALLA z DI PARTENZA NEL SUO PORTARSI IN EQUILIBRIO CON T_e ; NEL SECONDO GRAFICO SUCCEDDE L'INVERSO.

NELLA TROPOSFERA LA TEMPERATURA DIMINUISCE DI 6.5 K/Km : LA ATMOSFERA E' STABILE. COSI' NELLA STRATOSFERA, A MAGGIOR RAGIONE PERCHE' T AUMENTA CON LA QUOTA: I FENOMENI DELLA STRATOSFERA SI SVILUPPANO ORIZZONTALMENTE (E' MOLTO STABILE).

GUARDANDO ANCORA AL PRIMO GRAFICO, SE IL PACCHETTO D'ARIA INIZIALMENTE IN (T_0, z_0) E' SOLLEVATO IN $z_{A,B}$, LA SUA TEMPERATURA SCENDE A $T_a < T_b$ (DOVE T_b E' LA TEMPERATURA AMBIENTE A QUELL'ALTEZZA).

POICHE'

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

E LE PRESSIONI SI EQUILIBRANO SUBITO (ALTRIMENTI SI GENERANO ONDE SONORE), SI AVRA' $\rho_a > \rho_e$ E IL PACCHETTO D'ARIA PIU' PESANTE

TORNA DOV'E'RA. NEL SECONDO GRAFICO SUCCEDDE IL CONTRARIO.

INFINE NOTIAMO CHE PIU' E' ALTA LA FREQUENZA f_{br} , PIU' L'ATMOSFERA E' STABILE.

NOTA: DAL GRAFICO VEDO CHE L'ATMOSFERA E' STABILE SE T_e E' PIU' INCLINATA DI T_a

(O AL LIMITE CON PENDENZA POSITIVA), OVVERO DECRESCHE MENO RAPIDAMENTE (AL LIMITE CRESCE)

AL CRESCERE DELLA QUOTA z .

STABILITA' E TEMPERATURA POTENZIALE

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\gamma T}{p} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\gamma}{p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\gamma}{p} \frac{p}{\rho} \frac{1}{RT} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\gamma}{c_p} \frac{1}{T} \frac{1}{\rho}$$

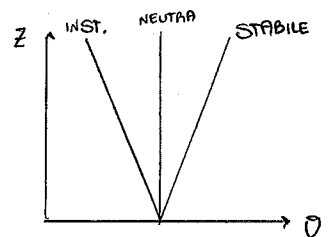
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad p = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} = -\Gamma_e + \Gamma_d$$

$$\gamma = \frac{R}{c_p}$$

ORA POICHE $\frac{T}{\theta} > 0$, LE CONDIZIONI SUI LAPSE RATE DIVENTANO

$\Gamma_d > \Gamma_e$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$	ATMOSFERA STABILE
$\Gamma_d < \Gamma_e$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$	ATMOSFERA INSTABILE
$\Gamma_d = \Gamma_e$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$	ATMOSFERA NEUTRA



QUESTO MI DICE ANCHE CHE θ (DELL'AMBIENTE) CRESCE CON LA QUOTA NELLA TROPOSFERA (E ANCHE NELLA STRATOSFERA, DONDE ADDIRITTURA CRESCE T).

Aria UMIDA

SISTEMA ETEROGENEO: E' FORMATO DA PIU' SISTEMI OMOGENEI, MA A SEPARABILI C'E' UNA BRUSCA VARIAZIONE DELLE VARIABILI.

L'ACQUA RENDE L'ATMOSFERA ETEROGENEA PERCHE' E' PRESENTE IN PIU' FASI.

FASI (φ): CHIMICAMENTE o FISICAMENTE DISTINGUIBILI (+) MECCANICAMENTE SEPARABILI.

COMPONENTI (x): NUMERO MINIMO DI SPECIE CHIMICHE CHE PERMETTE DI SPECIFICARE COMPLETAMENTE LA COMPOSIZIONE CHIMICA.

GRADI DI LIBERTA' (f): NUMERO DI VARIABILI INTENSIVE CHE POSSO CAMBIARE INDIPENDENTEMENTE SENZA CHE CAMBI φ (ALMENO SENZA CHE CAMBI SUBITO).

REGOLA DI GIBBS: $f = x - \varphi + 2$

	x	φ
2 GAS	2	1
ACQUA-GHIACCIO	1	2
OLIO E ACETO	2	2
ACQUA E ALCOL	2	1
ACQUA E NaCl	2	1
IN PROPORZIONE FISSA	f	
ACQUA PURA	1	
ACQUA E VAPORE	1	
ACQUA, ICE, VAPORE	0	

PRESSIONE DI SATURAZIONE

COMPRIAMO DEL GAS IN UN PISTONE. AL CALARE DI T IL GAS NON SI COMPORTA PIU' COME PERFETTO; RAGGIUNTA T_c (ISOTERMA CRITICA) INIZIA A CONDENSARE.

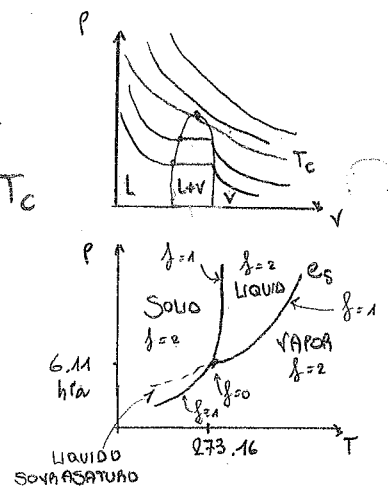
LA PRESSIONE DI SATURAZIONE DELL'ACQUA SI INDICA CON $e_s(T)$. COME LA DETERMINO?

SE HO ACQUA E VAPORE IN EQUILIBRIO A T , e_s E'

COSTANTE; SE UNA MOLECOLA PASSA DA VAPORE A LIQUIDO PERDE ENERGIA CINETICA SOTTO FORMA DI CALORE E VICEVERSA BISOGNA FORNIRE CALORE (CALORE LATENTE DI EVAPORAZIONE, LO STESSO) PER FARLA EVAPORARE.

EQUAZIONE DI CLAUSIUS-CLAPEYRON:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L}{R_w T^2} e_s$$



CALORE LATENTE

$$L = 2.5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

COSTANTE DEL VAPORE

$$R_w = 461 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

CHE INTEGRATA TRA T_0 E T ($\frac{L}{R_w}$ COSTANTE) DA'

$$e_s(T) = e_s(T_0) \exp \left[-\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

SCEGLIAMO IN GENERE COME RIFERIMENTO IL PUNTO TRIPLO, COSI' CHE

$$e_s = 2.407 \cdot 10^9 e^{-5417/T} \quad (\text{hPa})$$

$$\ln \frac{e_s}{6.11} = 19.83 - \frac{5417}{T}$$

ENTALPIA

$$H = U + pV$$

E' IL CALORE FORNITO A PRESSIONE COSTANTE

$$dH = dU + p dV + V dp = \delta Q + V dp$$

DA CONFRONTARSI CON U , CHE E' IL CALORE FORNITO A VOLUME COSTANTE:

$$dU = \delta Q - p dV \Rightarrow U = m c_v dT$$

$$dH = \delta Q + V dp \Rightarrow H = m c_p dT$$

EQUAZIONE DELLA TERMODINAMICA

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dQ}{dt} + V \frac{dP}{dt}$$

$$m c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dQ}{dt} + V \frac{dP}{dt}$$

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{R T}{P} \frac{dP}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R \theta}{c_p P} \frac{dP}{dt}$$

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{R T}{P} \frac{dP}{dt} \quad (2)$$

E INSERENDO LA (1) NELLA (2) SI OTTIENE

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

DETTA EQUAZIONE DELLA TERMODINAMICA.

PARAMETRI DI UMIDITA'

COME MISURO L'UMIDITA' DI UN PACCHETTO D'ARIA?

1. RAPPORTO DI MESCOLAMENTO (MIXING RATIO)

$$W = \frac{m_v (\text{VAPORE})}{m_d (\text{ARIA SECCA})} \quad \left[\frac{g}{kg} \right]$$

ESSENDO

$$m_v = \frac{e V}{R_v T}$$

$$m_d = \frac{P V}{R_d T}$$

OTTENGO

$$W = \frac{e V}{R_v T} \cdot \frac{R_d T}{P V} = \frac{R_d}{R_v} \cdot \frac{e}{P} = \epsilon \frac{e}{P}$$

→ RAPPORTO TRA PRESSIONI PARZIALI

$$\epsilon = \frac{R_d}{R_v} \approx 0.622$$

ESSENDO UN RAPPORTO TRA MASSE, W NON CAMBIA CON T E P.

2. UMIDITA' SPECIFICA

$$q := \frac{m_v}{m_{\text{Tot}}} = \varepsilon \frac{e}{p+e} \quad (\approx W, e \text{ È PICCOLA})$$

3. RAPPORTO DI MISCOLAMENTO DI SATURAZIONE

$$W_s := \frac{m_s}{m_d} \approx \varepsilon \frac{e_s(T)}{p} \quad (W \leq W_s)$$

DOVE m_s È LA MASSA D'ACQUA CHE SERVIREBBE A SATURARE IL PACCHETTO D'ARIA. È UNA GRANDEZZA IPOTETICA CHE DIPENDE DA p E T . LA CONDIZIONE DI SATURAZIONE DI UN PACCHETTO È QUELLA PER CUI $W = W_s$ ALLA TEMPERATURA E PRESSIONE DEL PACCHETTO. SI NOTI CHE $W > W_s$ SOLO SE IL LIQUIDO È SOVRASATURO.

• TEMPERATURA VIRTUALE

DEFINIAMO LA COSTANTE R_u EFFICACE

$$\begin{aligned} R_u &= \frac{m_d}{m} R_d + \frac{m_v}{m} R_w = \frac{m_d}{m} R_d \left[1 + \frac{m_v}{m_d} \frac{R_w}{R_d} \right] \\ &= \frac{m_d R_d}{m_d + m_v} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} W \right] = \frac{1}{1+W} \left[1 + \frac{W}{\varepsilon} \right] R_d \end{aligned}$$

SVILUPPANDO

$$\frac{1}{1+W} = 1 - W + W^2 - \dots$$

OTTENGO $\left(\frac{1}{\varepsilon} = 1.607 \right)$

$$R_u \approx (1 - W + W^2)(1 + 1.607W) R_d \approx (1 + 0.607W) R_d$$

$$p = p R_u T = p (1 + 0.607W) R_d T$$

$$p = \frac{m_{\text{Tot}}}{V} R T$$

DEFINENDO LA TEMPERATURA VIRTUALE

$$T_u = (1 + 0.607W) T > T$$

ONERO LA TEMPERATURA CHE DOVREBBE AVERE L'ARIA SECCA PER AVERE LA STESSA p DELL'ARIA UMIDA A QUELLA p , OTTENGO

$$p = p R_d T_u$$

DA CUI

$$\rho = \frac{p}{R_d T_w}$$

$$\rho_d = \frac{p}{R_d T}$$

NOTA:

$$M_d = 28.97$$

$$M_w = 18.016$$

QUESTO DERIVA DAL FATTO CHE LE MOLECOLE DI ACQUA PESANO DI MENO DI QUELLE DI "ARIA" (AZOTO, OSSIGENO MOLECOLARE): L'ARIA UMIDA E' MENO DENSA, PIU' LEGGERA. QUESTO PUO' INIZIARE LA STABILITA' DELL'ATMOSFERA.

4. UMIDITA' RELATIVA

$$RH = \frac{W}{W_s} \cdot 100$$

$$= \frac{e}{p} \cdot \frac{p \cdot 100}{e_s} = \frac{e}{e_s} \cdot 100$$

CHIARAMENTE DIPENDE DA p E T . SI NOTI CHE IN ATMOSFERA PUO' SUPERARE IL 100 %. : LA TENSIONE SUPERFICIALE DELLE GOCCE D'ACQUA IN ATMOSFERA PUO' RITARDARE LA CONDENSAZIONE IN ASSENZA DI NUCLEI DI CONDENSAZIONE (AEROSOL, ONERO POLVERI, FORMATI DA VARIE SPECIE CHIMICHE COME SABBIA E ACIDO SOLFORICO - QUELLO CHE DA' ORIGINE ALLE PIOGGE ACIDE).

VARIABILI UMIDITA' - RICAPITOLANDO

$$e_s(T) = 6.11 \exp \left\{ -\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{273.16} \right) \right\} = 2.497 \cdot 10^9 e^{-\frac{5417}{T}}$$

PRESSIONE DI SATURAZIONE [hPa]

$$W = \varepsilon \frac{e}{p}$$

MIXING RATIO
($\varepsilon = 0.622$)

$$W_s = \varepsilon \frac{e_s}{p}$$

MIXING RATIO DI SATURAZIONE

$$q = \varepsilon \frac{e}{p+e}$$

UMIDITA' SPECIFICA

$$T_v = (1 + 0.607 W) T$$

TEMPERATURA VIRTUALE

$$RH = \frac{W}{W_s} \cdot 100 = \frac{e}{e_s} \cdot 100$$

UMIDITA' RELATIVA

TEMPERATURA DI RUGIADA (DEW POINT)

IN GENERE

$$W \leq W_s(T, p) = \varepsilon \frac{e_s(T)}{p}$$

SI INDICA CON T_D LA TEMPERATURA PER CUI (A QUELLA p)

$$W_s(T_D, p) = W$$

PER CALCOLARE T_D ,

$$\varepsilon \frac{e_s(T_D)}{p} = W ; \quad \frac{e_s(T_D)}{6.11} = \frac{W p}{\varepsilon \cdot 6.11}$$

$$\ln \frac{e_s(T_D)}{6.11} = \ln \frac{W p}{\varepsilon \cdot 6.11} = -\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T_D} - \frac{1}{273.16} \right)$$

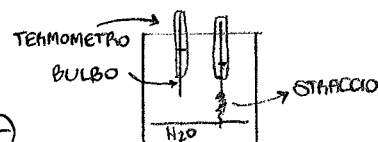
(CLAUSIUS-CLAPEYRON)

INVERTENDOLA,

$$T_D = \left[\frac{1}{273.16} - \frac{R_w}{L} \ln \frac{W p}{\varepsilon \cdot 6.11} \right]^{-1}$$

• TEMPERATURA DI BULBO BAGNATO

PER MISURARE L'UMIDITA' NELLE CENTRALINE A TERRA SI USANDO DUE TERMOMETRI DI CUI UNO HA



IL BULBO BAGNATO DA UNO STRACCIO IMBEVUTO. L'ARIA E' IN CIRCOLO E L'EVAPORAZIONE DI ACQUA DAL BULBO FA SCENDERE T_w MISURATA. BENCHE' ESISTE UNA FORMULA PER CORRELARE T_w ALL'UMIDITA', NELLA PRATICA SI CONSULTANO I DIAGRAMMI PSICOMETRICI.

• ACQUA PRECIPITABILE

STIMIAMO IL CONTENUTO TOTALE DI VAPORE NELL'ATMOSFERA SU UNA SUPERFICIE DI 1 m^2 . QUESTA GRANDEZZA SI MISURA IN

$$\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \quad \text{O IN} \quad \text{mm}$$

CON CONVERSIONE TRAMITE $\rho_L = 1000 \text{ Kg/m}^3$.

$$A = \frac{1.35 \cdot 10^{16} \text{ Kg}}{5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2} = 27 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} = 27 \text{ mm. (ACQUA)} \quad \left(l_h = \frac{27 \text{ Kg}}{1 \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ Kg/m}^3} \right)$$

E QUESTO DA' UNA STIMA DEL VAPORE. SE CONSIDERO SOLAMENTE LE NUBI OTTERREI IL VALORE MEDIO 0.5 mm .

• CONDENSAZIONE

AVVIENE A SEGUITO DI TRE POSSIBILI PROCESSI FISICI.

① RAFFREDDAMENTO DIABATICO

SUCCEDE SOPRATTUTTO LA NOTTE PER CONTATTO CON LA TERRA CHE SI RAFFREDDA O CON IL GHIACCIO: SI FORMANO BRINA O RUGIADA. UN SECONDO MODO E' L'IRRAZZIAMENTO NON COMPENSATO, DI NOTTE, DA QUELLO SOLARE.

② MESCOLAMENTO ISOBARICO ($p = \text{cost.}$)

CONSIDERIAMO DUE MASSE D'ARIA CHE SI MISCELANO.

ALLORA

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

$$w_f = \frac{m_1 w_1 + m_2 w_2}{m_1 + m_2}$$

AD ESEMPIO PRENDIAMO DUE MASSE D'ARIA NON SATURE,

$$P = 1000 \text{ hPa} \quad T_1 = 273 \text{ K} \quad RH = 90 \%$$

$$m_1 = m_2, V_1 = V_2 \quad T_2 = 293 \text{ K} \quad RH = 90 \%$$

POICHE' (SE P E' IN hPa)

$$w = \frac{RH}{100} \cdot w_s = \frac{RH}{100} \varepsilon \frac{e_s}{P} = \frac{RH}{100} \varepsilon \frac{2.497 \cdot 10^9 e^{-\frac{5417}{T}}}{P}$$

CALCOLIAMO

$$w_1 = 3.4 \text{ g/kg}$$

$$w_2 = 12.9 \text{ g/kg}$$

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = 283 \text{ K}$$

$$w_f = \frac{w_1 + w_2}{2} = 8.2 \text{ g/kg}$$

$$e_s(T_f) = 2.497 \cdot 10^9 e^{-\frac{5417}{T_f}}$$

$$w_s(T_f) = 7.6 \text{ g/kg} < w_f$$

$$(w_s(T_f) = \varepsilon \frac{e_s(T_f)}{P})$$

CHE E' ASSURDO: SIGNIFICA CHE SI E' FORMATA ACQUA.

E' QUELLO CHE IN GENERE PROVOCA LA FORMAZIONE DI NEBBIA.

③ ESPANSIONE ADIABATICA PER SOLLEVAMENTO

$$w = \text{cost.} = \varepsilon \frac{e}{P}$$

$$w_s = \varepsilon \frac{e_s(T)}{P}, \quad P(z) = P(z_0) e^{-\frac{1}{H}(z-z_0)}$$

$$e(z) = \frac{w}{\varepsilon} P \approx \frac{w}{\varepsilon} P(z_0) e^{-\frac{z-z_0}{H}} = e(z_0) e^{-\frac{z-z_0}{H}}$$

$$e_s(z) = 6.11 \exp \left\{ -\frac{1}{R_w} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{273.16} \right) \right\}$$

$$e_s(z_0) = 6.11 \exp \left\{ -\frac{1}{R_w} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{273.16} \right) \right\}$$

$$\frac{e_s(z)}{e_s(z_0)} = \exp \left\{ -\frac{1}{R_w} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right\}$$

NOTA: SI E' DERIVATA $P(z)$ PER T COSTANTE, QUINDI QUI USIAMO UNA $\bar{T}$. VOGLIAMO DERIVARE UN'ESPRESSIONE SIMILE PER $e_s(z)$ PER FCI CONFRONTARE.

POICHÉ IL PACCHETTO SI MUOVE ADIABATICAMENTE,

$$T = T_0 - \Gamma_d (z - z_0)$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} = \frac{T_0 - T_0 + \Gamma_d (z - z_0)}{T T_0} = \frac{\Gamma_d (z - z_0)}{T T_0}$$

QUINDI ($T T_0 \approx T_0^2$)

$$e_s(z) = e_s(z_0) \exp \left\{ - \frac{L}{R_w} \frac{\Gamma_d}{T_0^2} (z - z_0) \right\}$$

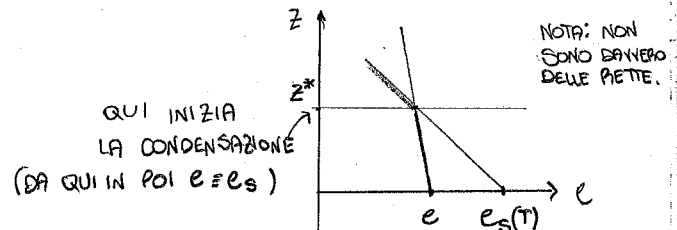
DA CUI L'ALTEZZA DI SCALA (AVENDO POSTO $T \approx T_0$)

$$H_w = \frac{R_w T_0^2}{L \Gamma_d} \approx 1.7 \text{ Km} \quad \text{PER } T_0 = 290 \text{ K}$$

(LA PRESSIONE PARZIALE DEL VAPOR D'ACQUA DIVENTA $\frac{1}{2}$ DEL TOTALE AD ALTEZZA H_w).

$$e_s \sim e^{-\frac{\Delta z}{1.7 \text{ Km}}}$$

$$e \sim e^{-\frac{\Delta z}{8 \text{ Km}}}$$



z^* SI DICE LIVELLO DI CONDENSAZIONE

PER SOLLEVAMENTO (LCL, LIFTING CONDENSATION LEVEL).

SI RICAVA IMPONENDO

$$e_s(z_{LCL}) = e(z_{LCL})$$

$$e_s(z_0) e^{-\frac{z_{LCL} - z_0}{H_w}} = e(z_0) e^{-\frac{z_{LCL} - z_0}{H}}$$

$$\frac{e(z_0)}{e_s(z_0)} = RH(z_0) / 100 = e^{(z_{LCL} - z_0) \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{H_w} \right)}$$

$$\ln \left[\frac{RH(z_0)}{100} \right] = - (z_{LCL} - z_0) \left(\frac{1}{H_w} - \frac{1}{H} \right)$$

$$z_{LCL} = z_0 + \frac{\ln \left[\frac{100}{RH(z_0)} \right]}{\left(\frac{1}{H_w} - \frac{1}{H} \right)} > z_0$$

SCELTA $RH(z_0) = 80 \%$,

$$z_{LCL} \approx z_0 + 500 \text{ m}$$

NOTA: POICHÉ $P(z)$ È DATA DALL' EQUAZIONE IPSOMETRICA, QUESTA CONDIZIONE EQUIVALE A DIRE $w_s(z_{LCL}) = w$ (QUEST' ULTIMO NON DIPENDE DA $P_0 T$).

LAPSE RATE DELL'ARIA UMIDA

OSSERVIAMO CHE Γ_d DELL'ARIA NON SATURA E' IN SOSTANZA QUELLO DELL'ARIA SECCA. SE, INVECE E' SATURA DEVO TENERE CONTO DI CONDENSAZIONE E EVAPORAZIONE: NEL SALIRE DI QUOTA IL VAPORE CONDENSA CEDENDO CALORE, AVREMO

$$dH = m c_p dT = dQ + V dp$$

$$dQ = - dm_v L = - M L dw_s$$

$$M c_p dT = - M L dw_s + V dp$$

$$c_p dT = - L dw_s - g \frac{dz}{dp} dp$$

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{L}{c_p} \frac{dw_s}{dz} - \frac{g}{c_p} = - \Gamma_m$$

$$- \frac{dm_v}{M} = - dw_s$$

L CALORE LATENTE

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{p} = - g \frac{dz}{dp}$$

CON Γ_m IL LAPSE RATE DELL'ARIA UMIDA (MOIST),

$$\Gamma_m = - \frac{dT}{dz} = \Gamma_d + \frac{L}{c_p} \frac{dw_s}{dz}$$

MA ERA

$$w_s = \varepsilon \frac{e_s(T)}{p}$$

$$\frac{dw_s}{dz} = \frac{\partial w_s}{\partial T} \frac{dT}{dz} + \frac{\partial w_s}{\partial p} \frac{dp}{dz}$$

$$= \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial e_s}{\partial T} (-\Gamma_m) + \varepsilon \frac{e_s(T)}{p^2} p g$$

CON $\frac{\partial e_s}{\partial T}$ DATA DA CLAUDEUS-CLAPYRON,

$$\frac{\partial e_s}{\partial T} = \frac{L}{R_w T^2} e_s$$

$$\frac{dw_s}{dz} = -\Gamma_m \frac{\varepsilon}{p} \frac{L e_s}{R_w T^2} + \frac{w_s}{p} p g$$

CONTINUANDO CON I CONTI, ALLA FINE OTTENGO

$$\Gamma_m = \frac{1 + \frac{L w_s}{R_w T}}{1 + \frac{L^2 w_s}{c_p R_w T^2}} \Gamma_d$$

CHIAMANDO

$$A = \frac{L w_s}{h_d T}$$

RISCRIVO

$$\frac{L^2 w_s}{c_p h_w T} = A \frac{L h_d}{h_w c_p T} \quad \begin{array}{l} T=300K \\ \downarrow \\ \approx A \cdot 5 \end{array}$$

DA CUI DEDUCO CHE

$$\Gamma_m < \Gamma_d$$

E POICHE' $A \approx 0.3$,

$$\Gamma_m \approx 5 \text{ K/Km}$$

(DA CONFRONTARSI CON $\Gamma_d \approx 10 \text{ K/Km}$).

• TEMPERATURA POTENZIALE EQUIVALENTE

SI E' VISTO (EQUAZIONE DELLA TERMODINAMICA)

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt} = -L \frac{dw_s}{dt}$$

NEL CASO DELLA CONDENSAZIONE,

$$dw_s = \frac{dM w_s}{M} < 0$$

$$w_s = \varepsilon \frac{e_s}{p}$$

$$dw_s = \varepsilon \frac{de_s}{p} = \frac{\varepsilon}{p} \frac{L e_s}{h_w T^2} dT$$

$$\frac{dw_s}{T} = \frac{\varepsilon L e_s}{p h_w T^3} dT = \frac{w_s}{T} \frac{L}{h_w T^2} dT$$

$$d\left(\frac{w_s}{T}\right) = \frac{1}{T} dw_s - \frac{w_s}{T^2} dT = \frac{w_s}{T} \frac{L}{h_w T^2} dT - \frac{w_s}{T^2} dT$$

$$= \frac{w_s}{T^2} \left[\frac{L}{h_w T} - 1 \right] dT \approx \frac{w_s}{T^2} \frac{L}{h_w T} dT = \frac{dw_s}{T}$$

P E' COSTANTE DURANTE LA CONDENSAZIONE.

$$c_p \frac{T}{\theta} d\theta = -L dw_s$$

$$\frac{c_p}{\theta} d\theta = -L \left(\frac{dw_s}{T} \right) \approx -L d\left(\frac{w_s}{T} \right)$$

$$c_p d \ln \theta = -L d\left(\frac{w_s}{T} \right)$$

$$\ln \theta = -\frac{L}{c_p} \frac{w_s}{T} + \text{cost.}$$

POSTO $w_s = 0$,

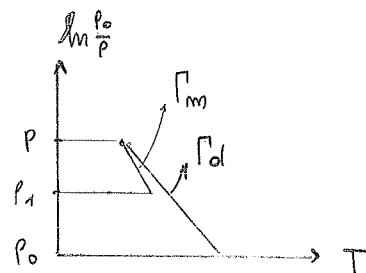
NOTA: STIAMO DEFINENDO
 $\theta_e = \theta(w_s = 0)$

$$\ln \theta(w_s = 0) = \text{cost} \equiv \ln \theta_e$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_e} = -\frac{L}{c_p} \frac{w_s}{T} \Rightarrow \theta_e = \theta \exp \left\{ \frac{L}{c_p} \frac{w_s}{T} \right\}$$

DOVE θ_e E' LA TEMPERATURA POTENZIALE EQUIVALENTE.

PRENDO UN PACCHETTO SATURO (p_1) E LO SOLLEVO;
 w_s CALA E L'ACQUA CONDENSA; (A p E' CONDENSATA
TUTTA, LA TOLGO E A QUESTO PUNTO $\theta = \theta_e$; SE
ORA PORTO L'ARIA (SECCA!) ADIABATICAMENTE A p_0 ,
QUESTA AVERA' $T = \theta_e$.



DATO UN PACCHETTO A $p_0, T_0, w_s(T_0, p_0)$,

$$\theta_e = \theta(T_0, p_0) e^{\frac{L}{c_p} \frac{w_s}{T_0}}$$

$$\theta(T_0, p_0) = T \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\theta_e = \theta(T_{ia}, p_{ia}) \exp \left\{ \frac{L}{c_p} \frac{w}{T_{ia}} \right\}$$

NOTA: SI RICORDI CHE
ALL' LCL $w = w_s$.

BISOGNA QUINDI INDIVIDUARE L' LCL PER CALCOLARSI θ_e .

θ_e E' UNA QUANTITA' CONSERVATA LUNGO UN' ADIABATICA UMIDA.

NOTA: DI QUANTO MI SOLLEVO PER FAR CONDENSARE TUTTA L'ACQUA? BASTA

ARRIVARE A $\sim 200 \text{ hPa}$, MA SE PROSEGUO POCO MALE VISTO CHE A QUELLE

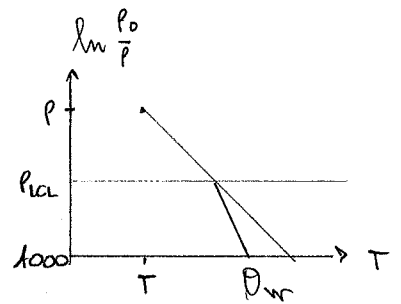
QUOTE IN PRATICA LE $ISO-\theta$ E $ISO-\theta_e$ CORRONO PARALLELE.

TEMPERATURA POTENZIALE DI BULBO BAGNATO

HO UNA MASSA D'ARIA SATURA (p, T). LA ABBASSO FINO ALL' LCL; QUI NON E' PIU' SATURA E DOVREBBE SCENDERE SECONDO L' ADIABATICA SECCA. INVECE IO LE FORNISCO

ACQUA PERCHE' RIMANGA SU T_m : ALLORA A 1000 hPa RAGGIUNGE θ_w .

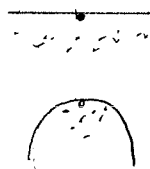
θ_w E' COSTANTE PER TRASFORMAZIONI ADIABATICHE SECCHE E UMIDE.



CONDENSAZIONE

NUCLEAZIONE

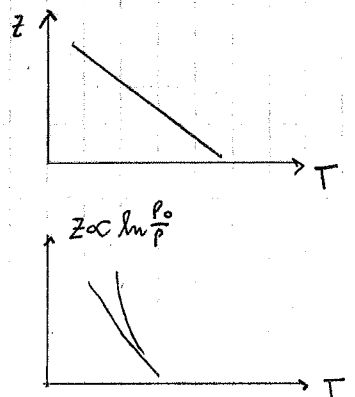
OMOGENEA: SOLO MOLECOLE DI H_2O NEL PACCHETTO. QUESTE CLUSTERIZZANO PER MOTIVI STATISTICI E ATTORNO AI CLUSTER PIU' GROSSI CRESCE LA GOCCIA D'ACQUA. PERCHE' AVVENGA SERVE ARIA SOVRASATURATA; L'ATTRAZIONE MOLECOLARE DECRESCe CON IL RAGGIO DI CURVATURA, QUINDI MI SERVE UNA PRESSIONE DI VAPORE ALTA PERCHE' I PICCOLI CLUSTER POSSANO TRATTENERE ACQUA. IN ATMOSFERA QUESTO NON SUCCEDe MAI.



ETEROGENEA: SI FORMANO NUCLEI DI CONDENSAZIONE MOLTO PIU' GRANDI INTORNO A POLVERI O ALTRI (SOLIDI E LIQUIDI).

DIAGRAMMI TERMODINAMICI

- SIMULARE PROCESSI ATMOSFERICI.
- RIPORTARE I PROFILI VERTICALI DI T E U MISURATE TRAMITE RADIOSONDE.
- STUDIARE LA STABILITA' DELL' ATMOSFERA.



VENGONO RIPORTATI 5 GRUPPI DI LINEE:

- $p = \text{cost.}$ (ISOBARE): LINEE ORIZZONTALI
- $T = \text{cost.}$ (ISOTERME): LINEE VERTICALI

$$\rightarrow T(w_s = \text{cost.})$$

$$w_s = \varepsilon \frac{e_s}{p} \Rightarrow T(p, w_s)$$

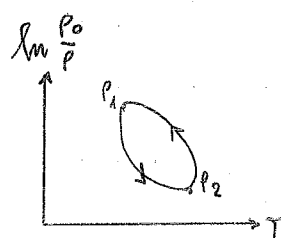
$$\rightarrow T(\theta = \text{cost.})$$

$$T = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa}$$

$$\rightarrow T(\theta_c = \text{cost.})$$

$$\theta_c = \theta \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} \frac{w_s(T, p)}{T} \right\}$$

(NON INVERTIBILE IN MODO ANALITICO).



LAVORO

$$\oint T d \ln p = \oint T \frac{dp}{p} = \oint \frac{1}{\beta p} dp = \frac{1}{\beta} \oint \alpha dp$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\beta} \oint d(\beta \alpha)}_{=0} - \frac{1}{\beta} \oint \beta d\alpha = - \frac{1}{\beta} \oint \beta d\alpha$$

NOTA: INTENDIAMO
 $T = T_v$ (VIRTUALE)
 $\beta = \beta_d$

$$\frac{1}{\beta} = \alpha = \frac{V}{m}$$

$$d(\beta \alpha) = \beta d\alpha + \alpha d\beta$$

CHE E' IL LAVORO FATTO SULLA MASSA D'ARIA (DI COMPRESSIONE).

SE L'EQUILIBRIO IDROSTATICO NON SI VERIFICA,

$$\frac{F}{m} = \frac{T_a - T_e}{T_e} g$$

NOTA: VEDI LA PARTE SULLA STABILITA'

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T_a - T_e}{T_e} g$$

E $\frac{F}{m}$ COMPIE UN LAVORO (PER UNITA' DI MASSA)

$$AL = \int_{z_0}^z \frac{F}{m} dz \equiv K(z) - K(z_0)$$

ENERGIA CINETICA
 PER UNITA' DI MASSA

$$\frac{1}{T} = \frac{\beta_d p}{p}, \quad p = - \frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

(L'AMBIENTE E' IN
 EQUILIBRIO)

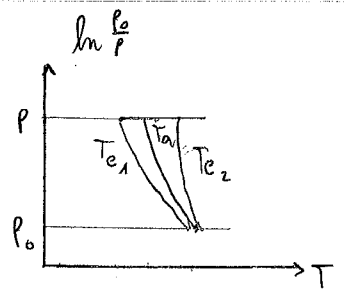
$$= \int_{z_0}^z \frac{T_a - T_e}{T_e} g dz = - \int_{z_0}^z (T_a - T_e) \frac{\beta_d}{p} \frac{1}{g} \frac{dp}{dz} dz$$

$$= - \frac{\beta_d}{g} \int_{p_0}^p (T_a - T_e) d \ln p$$

DATO IL CIRCUITO IN FIGURA,

$$\oint T d\ln p = \int_{p_0}^p T_a d\ln p + \int_p^p T d\ln p + \int_p^{p_0} T_e d\ln p$$

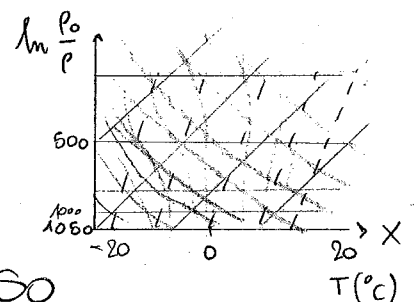
$$= \int_{p_0}^p (T_a - T_e) d\ln p = -\frac{g}{\rho_d} \Delta L \quad \begin{matrix} \text{(SU SISTEMA} \\ \text{DALL'ATMOSFERA)} \end{matrix} \Rightarrow \Delta L = \frac{\rho_d}{g} \int_{p_0}^p (T_a - T_e) d(\ln \frac{p_0}{p})$$



SE $T_e = T_{e1}$ (T_a PIU' PENDENTE DI T_e , OVNERO $\Gamma_e > \Gamma_a$, OVNERO ATMOSFERA INSTABILE) L'AIR PARCEL SI SOLEVA SPONTANEAMENTE; POI PER ATTRITO CEDE ΔK ALL'AMBIENTE SOTTO FORMA DI CALORE, T_e SI RADDIIZZA E L'ATMOSFERA TORNA STABILE. SE $T_e = T_{e2}$, DEVO DARE IO ΔK AL PACCHETTO PERCHE' SI MUOVA E INFATTI $\Delta L < 0$.

• DIAGRAMMA SKEW T - $\ln p$

$$X \propto (T + \beta Y) \quad Y = \ln \frac{p_0}{p} \quad \beta \sim 1 \quad (T_0 45^\circ)$$



ANCHE QUI L'INTEGRALE SU UN CIRCUITO CHIUSO EQUIVALE AL LAVORO.

ABBIAMO:

→ ISOBARE (LINEE ORIZZONTALI)

→ ISOTERME (LINEE A $\sim 45^\circ$)

→ ISO θ (HANNO COME T°) - : ADIABATICA SECCA.

→ ISO θ_e - : ADIABATICA SATURA.

→ ISO w_s ---

RICORDIAMO CHE ALLA TEMPERATURA DI RUGIADA T_0 VALE

$$w_s(T_0, p) = w$$

PASSO DA w A T_0 USANDO IL GRAFICO. INOLTRE

$$RH = \frac{w}{w_s} \cdot 100$$

CALCOLO DI e, e_s

$$w = \frac{e}{p}$$

$$\varepsilon = 0.622$$

$$e = \frac{w p}{\varepsilon} \rightarrow \frac{w (g/kg) p}{622}$$

IN CHE UNITA' ? SE VOGLIO e IN hPa, ESPRIMO p IN hPa. INOLTRE

$$e [p = 622 \text{ hPa}] = w [g/kg]$$

$$e_s [p = 622 \text{ hPa}] = w_s [g/kg]$$

(VEDI ESEMPI SUL GRAFICO A PARTE).

STABILITA' DEL PROFILO DI TEMPERATURA

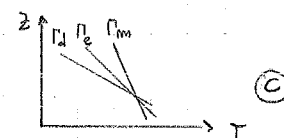
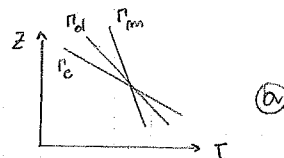
① AIR PARCEL METHOD (QUELLO CHE ABBIAMO VISTO)

$$\Gamma_m < \Gamma_d$$

a) $\Gamma_e > \Gamma_d > \Gamma_m$: ASSOLUTAMENTE INSTABILE.

b) $\Gamma_d > \Gamma_m > \Gamma_e$: ASSOLUTAMENTE STABILE.

c) $\Gamma_d > \Gamma_e > \Gamma_m$: CONDIZIONATAMENTE STABILE/INSTABILE.



② LAYER METHOD : CONSIDERO STRATI D'ARIA.

a) SOLLEVAMENTO DI UNO STRATO NON SATURO
CON PROFILO SUPERADIBATICO ($\Gamma_s > \Gamma_d$).

B (1000 hPa, 30°C) T (900 hPa, 12°C)

↑
BOTTOM

↑
TOP

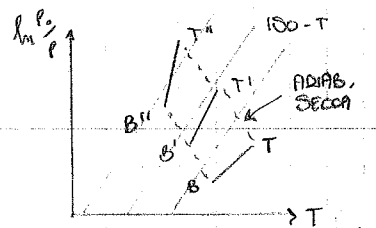
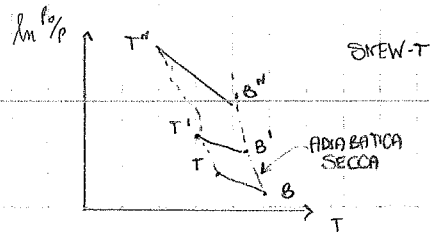
LO SOLLEVO DI ~300 hPa E LA PENDENZA AUMENTA;

GLI STRATI SONO SEMPRE PIU' STABILI.

b) SOLLEVAMENTO DI UNO STRATO DI INVERSIONE

$$\Gamma_s < 0 < \Gamma_m$$

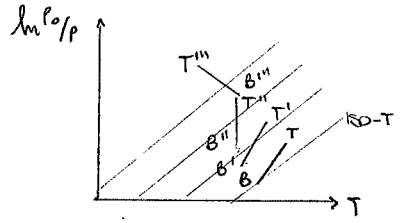
LO STRATO TENDE STAVOLTA A DESTABILIZZARSI
MENTRE LO SOLLEVO.



CONDENSAZIONE, ($\Gamma_s < \Gamma_m$)

B (1000 hPa, 20°C , LCL = 950 hPa)

$T(800 \text{ hPa}, 17^\circ \text{C}, \text{LCL} = 730 \text{ hPa})$



LA PENDENZA RUOTA PERCHÉ SE UNO DEI DUE PUNTI
DIVENTA SATURO, DA LÌ IN POI SEGUE UN' ADIABATICA UMIDA.

d) ASSOLUTAMENTE INSTABILE, MA CON IL TOP VICINO A CONDENSAZIONE.

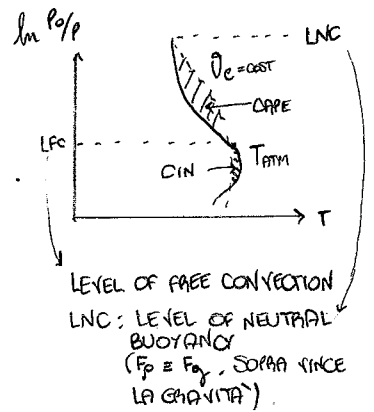
B (1000 hPa, 30°C, LCL = 850 hPa)

$$T(200 \text{ hPa}, 17^\circ \text{C}, \text{LC} = 820 \text{ hPa})$$

- SKEW-T E ENERGIA

CAPE : CONVECTIVE AVAILABLE POTENTIAL ENERGY.

CIN : ENERGIA DA FORNIRE PER SOLLENARE UN PARCEL.



ENERGIA TOTALE DELLE MASSE D'ARIA

INIZIALMENTE $T_1 > T_2$ ($p_1 < p_2$), 1 CDM ALLA

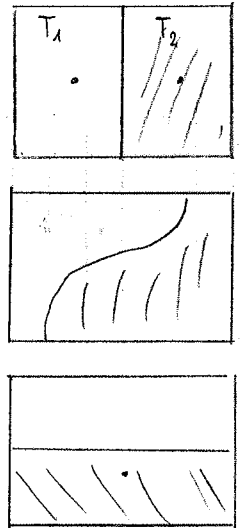
STESSA ALTEZZA. RIMUOVONO IL SETTO E

DOPO UN TRANSIENTE IL CDM SI E' ABBASSATO:

L'ENERGIA POTENZIALE SI TRASFORMA IN ENERGIA CINETICA (VENTO).

QUESTO ACCADE PER CIRCA IL 2% DELL' ENERGIA
POTENZIALE PERCHÉ IL CDM SI SPORSTA POCO;

L'ATMOSFERA E' UN MOTORE CHE FUNZIONA MOLTO MALE.



TERMODINAMICA ATMOSFERICA - RIASSUNTO DA COMBATTIMENTO

- AIR PARCEL $\rightarrow T, P, \rho$. ρ VARIA SUBITO, T NO.
- $P(0) = 1000 \text{ hPa}$ (LIVELLO MARE)
- ARIA SECCA $\rightarrow$ GAS PERFETTO

$$PV = N k_B T = \frac{m}{M} k_B T = \frac{m}{M} R T$$

$\uparrow$ # PART $\uparrow$ MASSA SINGOLA $\uparrow$ COSTANTE DEL GAS
 $\uparrow$ DENSITA' NUMERICA $\uparrow$ $\frac{m}{V}$ (TOT)

$$\Rightarrow N k_B = M R \quad R = \frac{k_B}{m}$$

• N NUMERO MOLE, M MASSA MOLECOLARE (SE LA MISURIO IN U.M.A. = $1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) OPPURE MASSA MOLARE (SE LA MISURIO IN g/mol). ALLORA

$$N = N_A \cdot n$$

$\uparrow 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$$PV = N_A \cdot N k_B T = N_A R T = n R T$$

DOVE R^* E' LA COSTANTE UNIVERSALE DEI GAS,

$$R^* = N_A \cdot k_B = M R \quad R^* = 8.3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

BUONA PER UNA MOLE DI QUALSIASI SOSTANZA

• LEGGE DI DALTON

$$P_{\text{TOT}} = \sum_i P_i \quad P_i = p_i R_i T$$

$$\Rightarrow P_{\text{TOT}} = \int \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i R_i \right) T := \int R_{\text{eff}} T$$

• MASSA MOLECOLARE EFFICACE

$$M_{\text{eff}} = \frac{R^*}{R_{\text{eff}}}$$

PER L'ARIA SECCA,

$$M_d = 28.97 \text{ g/mol}$$

$$R_d = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{R_d}{R_v} = \frac{M_v}{M_d} = 0.622$$

PER IL VAPORE ACQUEO,

$$M_w = 18.016 \text{ g/mol}$$

$$R_v = 461.51 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

• EQUAZIONE DELL'IDROSTATICA

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \text{DA } \rho = (p_c - p) g \quad \text{PRINCIPIO DI ARCHIMEDE} \quad \rightarrow \alpha = \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) g$$

• EQUAZIONE IPSOMETRICA

SE USO QUI SOLA $P = \rho R T$ E $\bar{T} = \frac{\int_{p_1}^{p_2} T d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p}$

$$\Delta z = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

• TRA DUE PUNTI A T, g COSTANTI,

$$P(z_2) = P(z_1) e^{-\frac{g}{R T} (z_2 - z_1)} := P(z_1) e^{-\frac{1}{H} (z_2 - z_1)}$$

DOVE $H = \frac{R T}{g} = 7.5 \text{ km}$ PER STRATO-TIPO ($T = 255 \text{ K}$)

SI DICE ALTEZZA DI SCALA. (NEI CALCOLI, NORTH USA $P_0 = 1013 \text{ hPa}$ POSSO USARE $H = 7.80 \text{ km}$ ANCHE PARTENDO DA P_0 DIVERSA!)

• CONSEGUENZE:

- ① P DECRESCA MONOTONA CON z , QUINDI ISOBARE $\Leftrightarrow$ ISALTEZZA
- ② $\Delta z \propto \bar{T}$, QUINDI SE $\bar{T}$ SI ALZA IN UN PUNTO SI ISPESISCE LO STRATO DI ATMOSFERA COMPRESA TRA p_1 E p_2 .



• GEOPOTENZIALE

$$d\phi = g dz$$

IMPONENDO $\phi(z=0) = 0$, $\phi(z) = \int_0^z g(z') dz'$

DA CUI L'ALTEZZA GEOPOTENZIALE

$$Z = \frac{\phi(z)}{g} = \frac{1}{g} \int_0^z g(z') dz'$$

• PRIMA LEGGE TERMODINAMICA

$$dU = \delta Q - \delta W$$

$$= \delta Q - P dV$$

A VOLUME COSTANTE,

$$\delta Q_v = dU = M c_v dT \quad \Rightarrow \quad c_v + R = c_p$$

A PRESSIONE COSTANTE,

$$717 + 287 = 1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\delta Q_p = M c_p dT$$

PER I GAS PERFETTI $U = \frac{1}{2} M R T$, $c_v = \frac{1}{2} R$ (G.D.L.).

• EQUAZIONE DI POISSON (ADIABATICA REVERSIBILE)

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{R}{c_p} = 0.286 \text{ (ARIA SECCA)}$$

• TEMPERATURA POTENZIALE

$$\theta = T \left(\frac{P_0 = 1000 \text{ hPa}}{P} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

E' LA TEMPERATURA CHE AVREBBE UN PACCHETTO SE PORTATO DA (P, T) A P_0 ADIABATICAMENTE.

θ SI CONSERVA LUNGO UN'ADIABATICA, QUINDI

ADIABATICA SECCA $\Rightarrow$ ISO- θ

• LAPSE RATE ADIABATICO (ARIA SECCA)

$$\Gamma_d = - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} = \frac{g}{c_p} = 10 \frac{\text{K}}{\text{km}}$$

• STABILITA' DELL'ATMOSFERA

$$\Gamma_c = - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_c$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\Gamma_c - \Gamma_d}{T_0} g \Delta z \quad \Rightarrow \quad \omega_{br} = \left[(\Gamma_d - \Gamma_c) \frac{g}{T_0} \right]^{1/2} = \left[\frac{g}{T_0} \frac{d\theta}{dz} \right]^{1/2}$$

L'ATMOSFERA E' STABILE SE

$$\Gamma_d > \Gamma_c$$

ALTRIMENTI HO UN ESPONENZIALE AL POSTO DI UN OSCILLATORE.

FINCHE' SONO POSITIVI Γ_c E Γ_d (OSSIA

T DECRESCA CON LA QUOTA), $\Gamma_d > \Gamma_c$

VUOL DIRE CHE T_d E' MENO INCLINATA DI T_c QUI (ANCHE IN SKEW-T).

OVVIAMENTE Γ_d E' UNA COSTANTE E A FARE LA DIFFERENZA

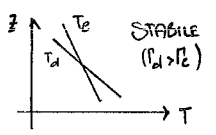
(PER L'ARIA SECCA) E' SOLO Γ_c .

SI PUO' RIPORTARE LA CONDIZIONE DI STABILITA' A

$$\frac{d\theta}{dz} > 0 \Leftrightarrow \text{ATMOSFERA STABILE}$$

DECRESCA DI MENO CON IL CRESCERE DELL'ALTEZZA.

SUL GRAFICO, STABILE $\rightarrow$ PIU' INCLINATO DI Γ_d . SE HO UN'INVERSIONE $\Gamma_c < 0$, QUINDI LA RETTA T_c HA PENDENZA POSITIVA (STABILE).



• ENTALPIA

$$H = U + PV$$

E' IL CALORE FORNITO A PRESSIONE COSTANTE.

$$dU = \delta Q - P dV \rightarrow U = M c_v dT$$

$$dH = \delta Q + V dP \rightarrow H = M c_p dT$$

• EQUAZIONE DELLA TERMODINAMICA

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

SISTEMA ETEROGENEO

- PAZI (Y): DISTINGUIBILI, SEPARABILI.
- COMPONENTI (X): DI FATTO 1 GDL PER SPECIFICARE LE POSI.
- GDL (g): NUMERO DI VARIABILI INTENSIVE CHE POSSO MODIFICARE (UN PO') SENZA CHE CAMBI Y (SUBITO).

REGOLA DI GIBBS:

$$g = X - P + 2$$

PRESSIONE DI SATURAZIONE (CLAUSIUS-CLAPEYRON)

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{1}{P_{WT}^2} e_s$$

$$L = 2.5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

CALORE LATENTE EVAPORAZ./CONDENS.

$$e_s(T) = e_s(T_0) e^{-\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

SE SCEGLIO IL PUNTO TRIPLO COME RIFERIMENTO E MISURO e_s IN hPa, COME RULE OF THUMB. VALGONO

$$e_s(T) = 6.11 e^{-\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{273.16} \right)}$$

$$= 2.407 \cdot 10^9 e^{-\frac{5417}{T}}$$

TRA L'ALTRO,

$$e, e_s |_{P=622 \text{ hPa}} = w, w_s \quad [hPa] \quad [g/kg]$$

$$\ln \frac{e_s}{6.11} = 19.83 - \frac{5417}{T}$$

MIXING RATIO

$$w = \frac{m_v}{m_d} = \varepsilon \frac{e}{P}$$

$$\varepsilon = 0.622$$

E' UNA COSTANTE PER IL PACCHETTO (APPROX TAA MASSE).

UMIDITA' SPECIFICA

$$q = \frac{m_v}{m_{tot}} = \varepsilon \frac{e}{P+e} \approx w \text{ PER } e \text{ PICCOLA.}$$

SATURATION MIXING RATIO

$$w_s = \frac{m_{vs}}{m_d} \approx \varepsilon \frac{e_s(T)}{P}$$

E' FUNZIONE DI T E P. SI HA $w_s w_s$ (A MENO DI SOSTANZA SOVRASATURA).

m_{vs} E' LA MASSA DI VAPORE CHE SERVE PER SATURARE IL PACCHETTO A QUELLE T, P.

UMIDITA' RELATIVA

$$RH = \frac{w}{w_s} \cdot 100 \approx \frac{e}{e_s} \cdot 100$$

DIPENDE DA P, T E IN ATMOSFERA PUO' SUPERARE IL 100%.

DEW POINT

E' LA TEMPERATURA PER CUI, A UNA DATA P, SI HA

$$w_s(T_D, P) = w$$

OVVERO LA TEMPERATURA A CUI DEVO RAFFREDDARE ISOBARICAMENTE IL PACCHETTO PERCHE' SATURI.

NOTA CHE

$$RH = 100 \cdot \frac{w_s(T_D, P)}{w_s(T, P)}$$

PER CALCOLARE T_D USO

$$T_D = \left[\frac{1}{273.16} - \frac{R_w}{L} \ln \frac{wP}{6.11 \cdot \varepsilon} \right]^{-1}$$

PER $RH > 50\%$ VALE APPROSSIMATIVAMENTE

$$T_D = T - 20(1 - RH)$$

TEMPERATURA DI BULBO BAGNATO

QUELLA MISURATA DA UN TERMOMETRO A BULBO BAGNATO (T_w). NELLA PRATICA L'ARIA ATTORNO AL BULBO E' MANTENUTA SATURA.

TEMPERATURA VIRTUALE

PER USARE LA LEGGE DEI GAS PERFETTI CON L'ARIA UMIDA DEVO CALCOLARMI

$$P_u \approx (1 + 0.607 w) P_d$$

CHE DIPENDE DA w. IN ALTERNATIVA TENGO P_d E SCRIVO

$$P = P_d T_v$$

DOVE

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{\varepsilon}{P} (1 - \varepsilon)} = (1 + 0.607 w) \cdot T$$

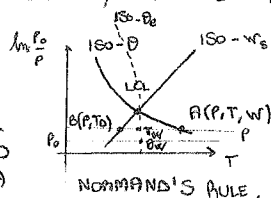
(O T_w) E' LA TEMPERATURA CHE DOVREBBE AVERE L'ARIA SECCA PER AVERE LA STESSA P DELL'ARIA UMIDA A QUELLA P. POICHE' L'ARIA UMIDA E' PIU' LEGGERA DI QUELLA SECCA, E' SEMPRE $T_v > T$.

LIFTING CONDENSATION LEVEL (LCL) $z_{LCL} = z_0 + \ln \left(\frac{100}{RH(z_0)} \right) / \left(\frac{1}{H_w} - \frac{1}{H} \right)$
ALTEZZA A CUI UN PACCHETTO UMIDO PUO' ESSERE SOLLEVATO ADIABATICAMENTE (w, θ COSTANTI) PRIMA DI DIVENTARE SATURO ($w_s(LCL) = w$).

DIAGRAMMA TERMODINAMICO

INDIVIDUO UN PACCHETTO DANDO P, T E UN PARAMETRO DI UMIDITA'.

- DATA w, LA SUA T_D SI TROVA SECONDO LA ISO-P CON LA ISO- $w_s = w$ (E' LA DEFINIZIONE DI T_D). PER ARIA INSATURA, T_D E' A SINISTRA DI T.
- VICEVERSA DATA T_D MI METTO IN (P, T_D) E CERCO LA ISO- w_s CHE PASSA PER QUEL PUNTO, CHE MI DA' w.
- UNA VOLTA NOTO w, A (P, T) CERCO L'ISO- w_s CHE PASSA PER QUEL PUNTO E CALCOLO $RH = 100 \cdot (w/w_s)$.
- NOTI (P, T, T_D) CERCO LCL SAPENDO CHE PARTENDO DA (P, T) MI DEVO MUOVERE ADIABATICAMENTE (LUNGO UN' ISO- θ) E CHE IN TUTTO CIO' w RESTA COSTANTE ED E' PARI AL w_s CHE PASSA PER (P, T_D).



LAPSE RATE ADIABATICO (ARIA UMIDA)

$$\Gamma_m = \left(1 + \frac{L w_s}{P_d T} \right) \left(1 + \frac{L w_s}{C_p P_d T^2} \right)^{-1} \Gamma_d < \Gamma_d$$

$$\Gamma_m \sim 5 \text{ K/kg}$$

HA SENSO USARLA SOLO PER ARIA SATURA

TEMPERATURA POTENZIALE EQUIVALENTE

$$\theta_e = \theta \exp \left\{ \frac{L w_s}{C_p T} \right\} = \theta(T_a, P_a) \exp \left\{ \frac{L w}{C_p T_a} \right\}$$

θ_e SI CONCERNA LUNGO LE ADIABATICHE (SATURATE E NON). L'IDEA E' CHE PRENDO UN PACCHETTO (T, P, w) E INIZIO A SOLLEVARLO ADIABATICAMENTE (ISO- θ) FINCHE' SATURA; CONTINUO PSEUDOADIABATICAMENTE LUNGO ISO- θ_e (OSSIA PORTO VIA L'ACQUA MAN MANO CHE CONDENSA) E QUANDO NON C'E' PIU' ACQUA ($w_s = 0$) COMINCIO A SCENDERE LUNGO UN' ISO- θ (SECCA). QUI E' GIA' $\theta = \theta_e$; SE ORA SCENDO FINO A $P_0 = 1000 \text{ hPa}$ HO $T_0 = \theta_e$. QUANTO DEVO SALIRE NELLA PRATICA? $\sim 200 \text{ hPa}$ VA BENE, MA CAMBIA POCO (INFATTI A QUELLA ALTEZZA LE ISO- θ E ISO- θ_e SONO QUASI PARALLELE).

TEMPERATURA POTENZIALE DI BULBO BAGNATO

SE CON θ_e TOGLIEVO L'ACQUA AL PACCHETTO ORA FACCILO IL CONTRARIO: PRENDO IL PACCHETTO SATURO E LO ABBASSO FINO A P_0 , QUINDI SCENDO ADIABATICAMENTE MA CONTINUO A FORNIRE ACQUA IN MODO DA STARE SU ISO- θ_e INVECE CHE SU ISO- θ . θ_w E' COSTANTE LUNGO ADIABATICHE (DA' E' MOIST).

NOTA: MENTRE RISALGO UN' ISO- θ_e NOTO CHE w_s DIMINUISCE. VISTO CHE IL PACCHETTO E' SEMPRE SATURO DEVE VALERE $w = w_s$, QUINDI DI FATTO STA CALANDO w PERCHE' L'ACQUA CONDENSA.

LAVORO

SI PUO' MOSTRARE CHE

$$AL_{(SUL \text{ SIST.})} = \frac{P_d}{g} \int_{P_0}^P (T_a - T_e) d \ln \frac{1}{P}$$

QUINDI L'AREA IN UNO SKEW-T/ $\ln P$ MI DA' IL LAVORO. NEL GRAFICO SI VEDE CHE $AL > 0$ PER ATMOSFERA INSTABILE.

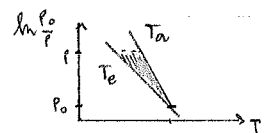


Figure A.1

The skew T -ln p diagram.

$p = 700 \text{ hPa}$
 $T = -10^\circ\text{C}$

- ★ ISOBARA: LUNGO $p = 700 \text{ hPa}$.
- ★ ISOTERMA: LUNGO $T = -10^\circ\text{C}$
- ★ ADIABATICA SECCA. CERCO L'ISO- θ PIU' VICINA E LA SEGUO
- ★ ADIABATICA SATURA. SEGUO $\theta_s = 0.5^\circ\text{C}$. (PARLO A $T < T_{\text{ESCA}}$ PER $p = 200 \text{ hPa}$)

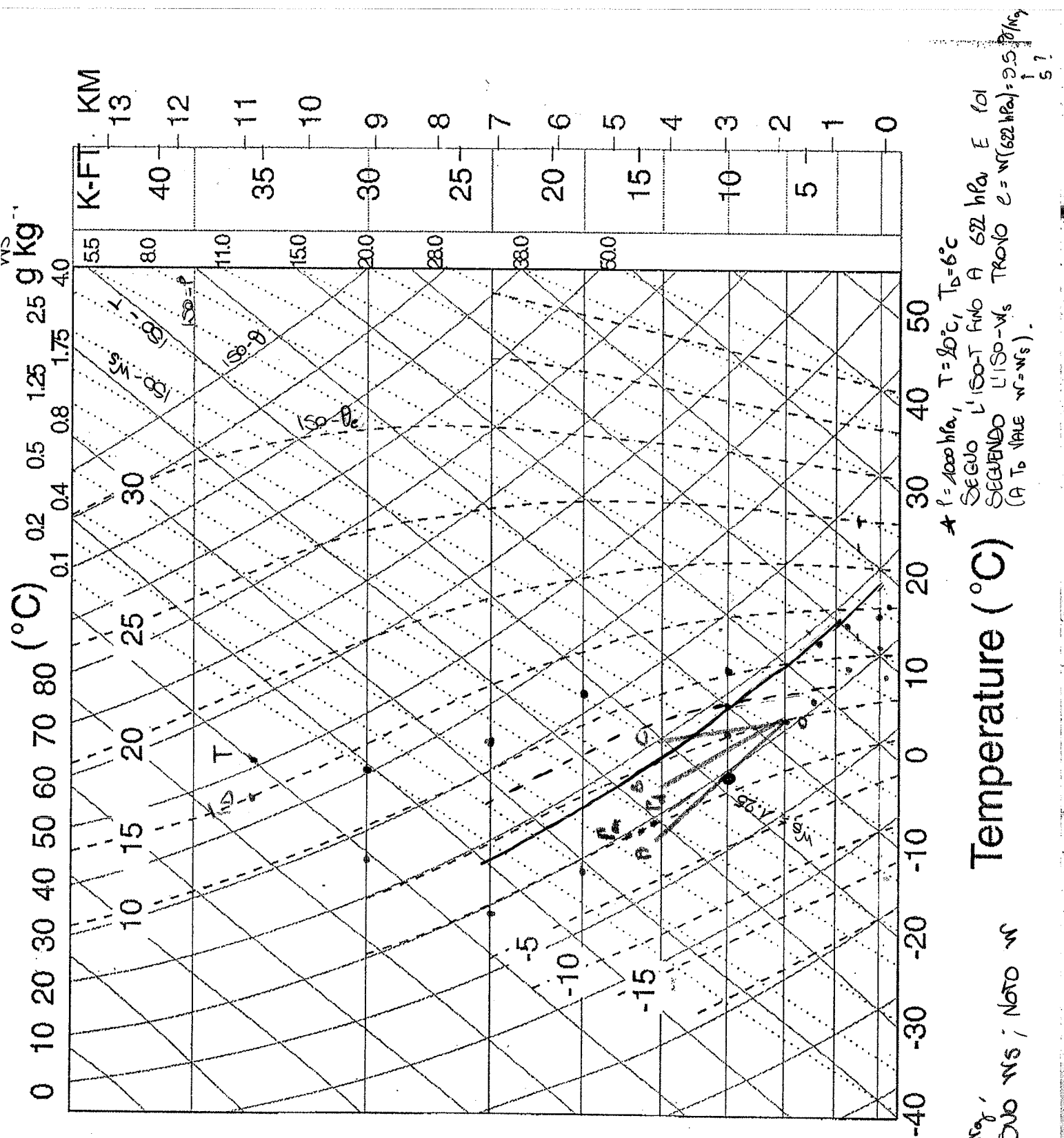
★ CIA CIA

$w = 1.25 \text{ g/kg}$
 PERCHE' CIA SATURA A $p = 700 \text{ hPa}$
 CI VUOLE CHE LA CIA T CIA QUELLA CHE PASSA PER $w_s = w$ (TEMPERATURA DI RUGADA).

★ DATA INVECE

$T_D = -15^\circ\text{C}$

POSSO MISURARE A $w = 1.5 \text{ g/kg}$, DATE (T, p) E DEFRANTO IL DUO w_s ; NATO w CALCOLO $PH = w/w_s = 100$



★ $p = 1000 \text{ hPa}$, $T = 20^\circ\text{C}$, $T_D = 6^\circ\text{C}$
 SEGUO L'ISO-T FINO A 622 hPa, E POI SEGUENDO L'ISO- w_s TRONCO $e = w(622 \text{ hPa}) = 2.5 \text{ g/kg}$ (A T_D VALE $w = w_s$).

Temperature ($^\circ\text{C}$)

★ CALCOLO DEL LCL

LA CONDIZIONE È IN $w_{la} = w_s$. PARTO DA
LA SOLLEVO ADIABATICAMENTE $\rightarrow$ ISO- θ
IL SUO w È RIMASTO COSTANTE

$$\begin{cases} P = 1000 \text{ hPa} \\ T = 20^\circ\text{C} \\ T_D = 6^\circ\text{C} \end{cases} \quad (\text{NON SATURA}) \quad \text{E}$$

LA ISO- w_s . INVECE T_D CAMBIA FINCHÉ $T = T_D$ ($w = w_s$); QUINDI RIALZO
 $P_{la} = 820 \text{ hPa}$, $T_{la} = 1^\circ\text{C}$, $w = w_s = 5.5 \text{ g/kg}$.

★ SOLLEVO ANCORA LA MASSA D'ARIA E IL VAPORE CONDENSA. ESSENDO SATURA, SEGUO
UN'ADIABATICA UMIDA ($\rightarrow$ ISO- θ_e). A UN CERTO PUNTO $w_s(430 \text{ hPa}) = 0.8 \text{ g/kg}$,
INDECE CHE È CONDENSATA LA QUANTITÀ DI VAPORE $w_c(430 \text{ hPa}) = 5.5 - 0.8 = 4.7 \text{ g/kg}$.
POSSO CALCOLARMI θ_e : LA PORTO AL PUNTO IN CUI TUTTA L'ACQUA CONDENSA ($\sim 200 \text{ hPa}$), GUARDA
"TOLGO" E SEGUO UN'ADIABATICA SECCA (ISO- θ) FINO A $P = 1000 \text{ hPa}$; QUINDI LEGGO $T = 40^\circ\text{C}$.

★ PARTO ANCORA DA $\begin{cases} T = 20^\circ \\ T_D = 6^\circ\text{C} \\ P = 1000 \text{ hPa} \end{cases}$. LA SOLLEVO ALL' LCL E POI SCENDO LUNGO
L'ADIABATICA UMIDA (VIRTUALMENTE STO AGGIUNGENDO ACQUA). QUANDO ARRIVO A 1000 hPa
LEGGO T ED HO $\theta_w = 12^\circ\text{C}$ (BULBO BAGNATO POTENZIALE).

★ NOTA: NON A CASO AD ALTE QUOTE ISO- θ E ISO- θ_e CORRONO PRATICAMENTE PARALLELE !!

DINAMICA ATMOSFERICA

W.H. cap 7

SCALE:	l (km)	t	
MICROSCALA	< 1	$< 1 h$	TURBOLENZA
MESOScala	$1 - 1000$	$1 h - 1 d$	TEMPORALI, VENTO MARINO
SINOTTICA	$1000 - 6000$	$1 d - 1 w$	FRONTI DI ALTA/BASSA PRESSIONE
PLANETARIA	> 6000	$> 1 w$	JET STREAMS, TRADE WINDS

CI OCCUPEREMO PERLOPIÙ DELLA SCALA SINOTTICA.

3 LEGGI DI CONSERVAZIONE + 1 LEGGE DI STATO :

① ENERGIA TERMODINAMICA : $c_p \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt}$

② MASSA $\frac{dm}{dt} = S - P$

③ QUANTITÀ DI MOTO $\frac{d(mv)}{dt} = \sum F$

④ GAS PERFETTI $pV = nRT$

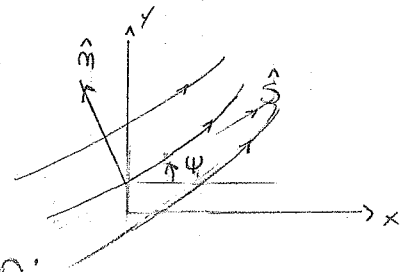
• FLUIDO vs SOLIDO : IL SECONDO REAGISCE ALLE FORZE CON DEFORMAZIONI PICCOLE, UN FLUIDO GRANDI.

TRA I FLUIDI, SONO GAS QUELLI CHE TENDONO A OCCUPARE TUTTO IL VOLUME A DISPOSIZIONE (MENTRE I LIQUIDI SONO QUASI INCOMPRESSIBILI).

- * LINEE DI FLUSSO (STREAMLINES) : PARALLELE IN OGNI PUNTO ALLA VELOCITÀ. NON SI INCONTRANO MAI (SE NO IN QUEL PUNTO AVERE DUE VELOCITÀ). SE SONO PIÙ FITTE HO VELOCITÀ PIÙ ALTE.
- * TRAJETTORIE : I PERCORSI DELLE SINGOLE MASSE D'ARIA. SE IL FLUSSO È STAZIONARIO COINCIDONO CON LE STREAMLINES.
- * STREAKLINES : POSIZIONI DI TUTTE LE PARTICELLE CHE SONO PASSATE PER UN CERTO PUNTO (ACQUA CHE ESCE DA UN BUCO).

COORDINATE NATURALI ($\hat{s}$, $\hat{m}$, $\hat{k}$)

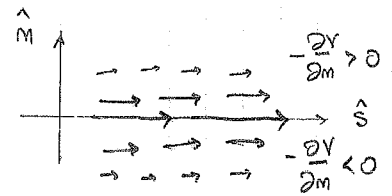
PARALLELO E ORTOGONALE AL MOTO DEL FLUSSO ($\hat{k}$ ESCE DAL FOGLIO E FORMANO UNA TERNA DESTROGESSA), TRAMITE ESSE DEFINIAMO:



① SHEAR

È IL TASSO DI VARIAZIONE DI $|V|$ IN DIREZIONE $-\hat{m}$:

$$-\frac{\partial V}{\partial m} \quad [T]^{-1} \quad s^{-1}$$

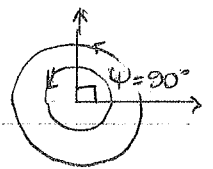


JET STREAMS

② CURVATURA

TASSO DI VARIAZIONE DI $\frac{V}{|V|}$ NELLA DIREZIONE DEL VENTO:

$$V \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad s^{-1}$$

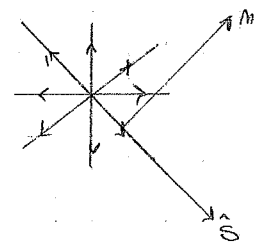


CURVATURA POSITIVA

③ DIFFLUENZA / CONFLUENZA

COME LA CURVATURA, MA LUNGO $\hat{m}$:

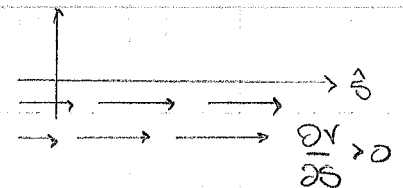
$$V \frac{\partial \psi}{\partial m} \quad s^{-1}$$



④ STRETCHING

VARIAZIONE DELLA VELOCITA' IN DIREZIONE DELLA VELOCITA':

$$\frac{\partial V}{\partial s} \quad s^{-1}$$



⑤ VORTICITA' : SHEAR + CURVATURA

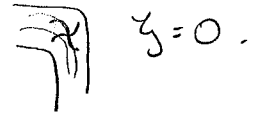
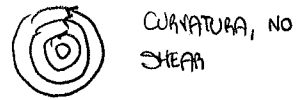
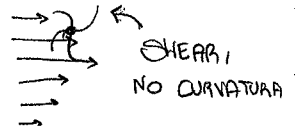
⑥ DIVERGENZA : DIFFLUENZA + STRETCHING

⑦ DEFORMAZIONE : $\begin{cases} \text{STRETCHING} \\ \text{SHEARING} \end{cases}$

• VORTICITÀ

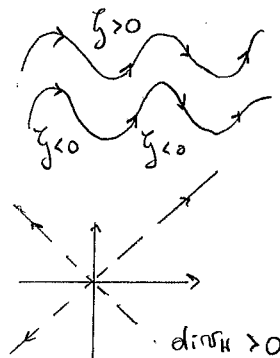
$$\zeta = \nabla \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial m}$$

SE METTO UN'ELICA NEL FLUIDO LA VEDO MUOVERSI.
CI PUO' ANCHE ESSERE COMPENSAZIONE TRA SHEAR
E CURVATURA TALE DA ANNULLARE LA VORTICITÀ.



• ESEMPIO

SUPPONIAMO IL FLUSSO ATMOSFERICO SINUSOIDALE VERSO EST A
|V| COSTANTE: ζ E' QUELLA MOSTRATA IN FIGURA.



• DIVERGENZA

$$\text{div}_H = \nabla \frac{\partial \psi}{\partial m} + \frac{\partial v}{\partial s}$$

* IN COORDINATE CARTESIANE,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{k} \cdot (\nabla \wedge \underline{v})$$

$$\underline{v} = (u, v, w)$$

$$\text{div}_H \underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla_H \cdot \underline{v}$$

$\text{div}_H > 0$
DIFFERENZA E
STRETCHING

• DEFORMAZIONE

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

(STRETCHING)

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

(SHEARING)

• FORZE

DI VOLUME $\rightarrow$ VETTORI (AGISCONO NEL CM)

DI SUPERFICIE $\rightarrow$ DIPENDE DA COME E' ORIENTATA LA SUPERFICIE
PER DESCRIVERE MI SERVE UN TENSORE (3x3).

TENSORI

$\tau_{ij} \rightarrow i$ DIREZ. NORMALE ALLA SUPERFICIE, j DIREZ. FORZA.

i INDICE DI RIGA, j DI COLONNA.

NOTAZIONE DI EINSTEIN

$$(\underline{x} \cdot \hat{c})_i = \sum_j x_j c_{ji} = x_j c_{ji}$$

SI DICONO TENSORI QUELLI CHE SI MODIFICANO IN SEGUITO A UNA ROTAZIONE DI ASSI COME

$$\tau'_{mm} = c_{im} c_{jm} \tau_{ij}$$

$$c_{ij} = \cos \alpha_{ij}$$

$$\underline{\tau}' = \hat{c}^T \underline{\tau} \hat{c}$$

ANGOLO TRA VECCHIO E NUOVO ASSE

DIV. DI UN VETTORE : $\text{div}(\underline{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ SCALARE

DIV. DI UN TENSORE : $(\text{div} \underline{\tau})_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ VETTORE

GRADIENTE

∇c E' UN VETTORE.

$\nabla \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ E' UN TENSORE.

TENSORI SIMMETRICI E ANTISIMMETRICI

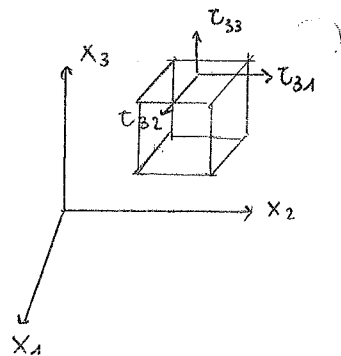
$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji}$$

PER UN TENSORE τ GENERICO, POSSO SEMPRE RISCRIVERE

$$\tau_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(\tau_{ij} + \tau_{ji})}_{\text{SIMM.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\tau_{ij} - \tau_{ji})}_{\text{ANTISIMM.}}$$

AUTOVALORI, AUTOVETTORI ...



TASSO DI DEFORMAZIONE

★ NORMALE O LINEARE (NORMAL STRAIN RATE).

$$\begin{array}{c} u_1(A) \quad u_1(B) \\ \text{A} \quad \delta x_1 \quad \text{B} \end{array}$$

$$u_1 = u_1(A)$$

$$u_1(B) \approx u_1(A) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1$$

$$\text{A} \quad \delta x_1 \quad \text{B} \quad \text{A}' \quad \delta x_1' \quad \text{B}'$$

Dopo un tempo δt ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \frac{d(\delta x_1)}{dx_1} &= \frac{1}{\delta t} \frac{A'B' - AB}{\delta x_1} = \frac{1}{\delta t} \frac{(AB' - AA') - AB}{\delta x_1} = \frac{(BB' + AB - AA') - AB}{\delta x_1} \frac{1}{\delta t} \\ &= \frac{1}{\delta t} \frac{BB' - AA'}{\delta x_1} \end{aligned}$$

MA

$$BB' = \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \right) \delta t$$

$$AA' = u_1 \delta t$$

NOTA: $d(\delta x_1) = \delta x_1' - \delta x_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t$

$$\frac{BB' - AA'}{\delta x_1 \delta t} = \frac{1}{\delta x_1 \delta t} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

LO STRAIN RATE E' (NON SI SOMMA SU α)

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \equiv \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

★ STRAIN RATE VOLUMICO

$$\frac{1}{\delta V} \frac{\partial(\delta V)}{\partial t} = \frac{1}{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3} \frac{\partial}{\partial t} (\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3)$$

$$= \frac{1}{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3} \left[\delta x_2 \delta x_3 \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial t} + \delta x_1 \delta x_3 \frac{\partial(\delta x_2)}{\partial t} + \delta x_1 \delta x_2 \frac{\partial(\delta x_3)}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{1}{\delta x_1} \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial t} + \frac{1}{\delta x_2} \frac{\partial(\delta x_2)}{\partial t} + \frac{1}{\delta x_3} \frac{\partial(\delta x_3)}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$= \text{div } \underline{u} = \nabla \cdot \underline{u}$$

OVVERO LA TRACCIA DEL TENSORE $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (GRADIENTE DELLA VELOCITA').

PERCIO'

$$\frac{1}{\delta y} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

* TASSO DI DEFORMAZIONE DI TAGLIO (SHEAR STRAIN RATE)

$$u_1 = u_1(x_2) \quad (\text{VARIABILE LUNGO } x_2)$$

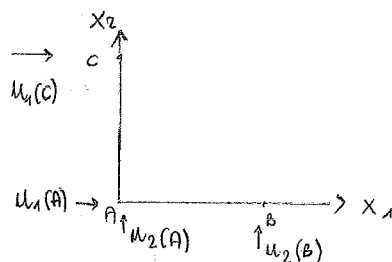
$$u_2 = u_2(x_1)$$

$$u_1(A) = u_1$$

$$u_2(A) = u_2$$

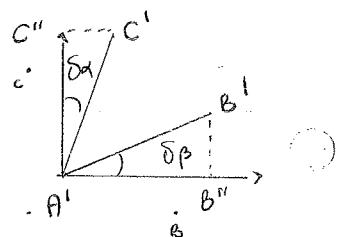
$$u_1(C) = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta x_2$$

$$u_2(B) = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta x_1$$



DOPO LA DEFORMAZIONE,

$$\frac{\delta \gamma_{12}}{\delta t} = \frac{\delta \alpha + \delta \beta}{\delta t}$$



$$\delta \alpha \approx \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{CC' - CC''}{\delta x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta t$$

$$\delta \alpha \approx \tan(\delta \alpha)$$

$$\delta \beta \approx \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{BB' - BB''}{\delta x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta t$$

INFATTI

$$CC'' = \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta x_2 \right) \delta t - u_1 \delta t$$

E HO OTTENUTO

$$\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

ESTRAENDO AGLI ALTRI ASSI,

$$\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

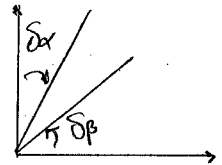
$$\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

COSTRUIAMO IL TENSORE TASSO DI DEFORMAZIONE

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ROTAZIONE DI UN FLUIDO

VELOCITA' ANGOLARE CON CUI RUOTANO DUE LINEE INIZIALMENTE ORTOGONALI.



$$\omega_\alpha = - \frac{d\alpha}{dt} = - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\omega_\beta = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2} (\omega_\alpha + \omega_\beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \zeta$$

NOTA: ERA $d\alpha = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dt$.

ESTRAPOLANDO IN 3D,

$$\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$$

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

SE VALE $\underline{\omega} = 0$ IL FLUIDO E' IRROTAZIONALE E POSSO SCRIVERE

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

COME SI E' VISTO

$$\zeta = (\underline{\omega})_z = \hat{k} \cdot \underline{\omega}$$

DEFINIAMO LA CIRCOLAZIONE

$$\Gamma = \oint \underline{u} \cdot d\underline{s}$$

$$\Gamma = \int_{\partial} (\nabla \wedge \underline{u}) \cdot d\underline{A} = \int_{\partial} \underline{\omega} \cdot d\underline{A}$$

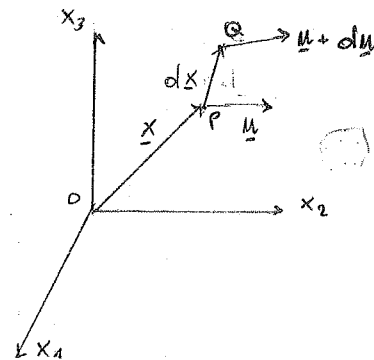
$$d\Gamma = \underline{\omega} \cdot d\underline{A}$$

TENSORE ROTAZIONE

$$\underline{x} = OP$$

$$d\underline{x} = PQ$$

$$OQ = \underline{x} + d\underline{x}$$



LA VARIAZIONE DELLA COMPONENTE i DELLA VELOCITÀ È

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

SCOMPONIAMO IL GRADIENTE DI VELOCITÀ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= e_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

RICONOSCIAMO IN e_{ij} IL TENSORE DI DEFORMAZIONE (SIMMETRICO),

MENTRE DEFINIAMO IL TENSORE ROTAZIONE (ANTISIMMETRICO)

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k$$

IN FUNZIONE DI CUI POSSIAMO ESPRIMERE

$$du_i = \left(e_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \right) dx_j = (\hat{e} \cdot d\underline{x})_i + \frac{1}{2} (\underline{\omega} \wedge d\underline{x})_i$$

NOTA: INFATTI

$$\underline{\omega} \wedge d\underline{x} = \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k \underline{e}_i = \varepsilon_{kji} \omega_k dx_j \underline{e}_i = -\varepsilon_{ijk} \omega_k dx_j \underline{e}_i$$

DERIVATE E AVVEZIONE

APPROCCIO LAGRANGIANO

POSIZIONE INIZIALE x_0 DI UN GRUPPO DI MOLECOLE (INDIPENDENTE DAL TEMPO). DATO IL PARAMETRO A DELLE MOLECOLE,

$$A_{x_0}, \quad \frac{dA}{dt}$$

DOVE SI INDICA CON $\frac{D}{Dt}$ LA DERIVATA SOSTANZIALE (SEGUENDO LE MOLECOLE).

APPROCCIO EULERIANO

COME CAMBIANO I PARAMETRI DEL FLUIDO ALL'INTERNO DI UN VOLUME: O PERCHÉ SPOSTO IL VOLUME, O PERCHÉ VARIANO NEL TEMPO I PARAMETRI.

$$x(t), \quad A[x(t), t]$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} dt = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x_i} v_i dt$$

DOVE

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

SONO LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ CON CUI MUOVO IL VOLUME NELLO SPAZIO. ALLORA

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{VARIAZIONE LOCALE}} + \frac{\partial A}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial A}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A$$

OVVERO LA DERIVATA TOTALE DI A .

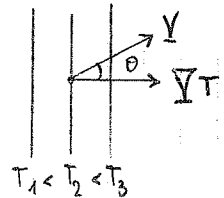
COSA SUCCEDEREBBE SE SPOSTO IL VOLUME CON LA STESSA VELOCITÀ DEL FLUIDO? RITORNO LA DERIVATA SOSTANZIALE.

SCRIVO

$$\frac{DA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla A$$

DOVE $\underline{V}$ È LA VELOCITÀ DEL FLUIDO (CHE COINCIDE CON $\underline{V}$ DEL VOLUME).

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{DA}{dt} - \underline{V} \cdot \nabla A \quad \text{ANNESSIONE}$$



★ SUPPONIAMO AD ESEMPIO DI VOLER MISURARE, IN

FIGURA, LA TEMPERATURA T , OSSERVANDO

$$\underline{V} \cdot \nabla T = |\underline{V}| \cdot |\nabla T| \cdot \cos \vartheta > 0$$

NOTO DALLA FORMULA CHE, SE LE MASSE D'ARIA NON VARIANO LA LORO T ($\frac{DA}{dt} = 0$), L'ANNESSIONE È NEGATIVA E QUINDI

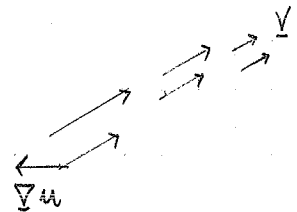
$$\frac{\partial A}{\partial t} < 0$$

INFATTI STO PORTANDO MASSE D'ARIA PIÙ FREDE NEL PUNTO IN CUI EFFETTUO LA MISURA.

★ ALTRO ESEMPIO:

$$\underline{V}_u < 0$$

$$-\underline{V} \cdot \nabla u > 0$$

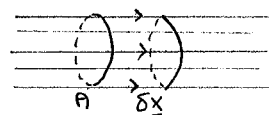


LE MASSE D'ARIA A SINISTRA VANNO PIÙ VELOCI DI QUELLE A DESTRA. IL VENTO IN QUESTO CASO TRASPORTA UNA VARIAZIONE DI UNA SUA STESSA CARATTERISTICA.

• CONSERVAZIONE DELLA MASSA (LEGGE DI CONTINUITA')

PARTIAMO DA UN APPROCCIO EULERIANO. LA VARIAZIONE DELLA MASSA IN UN VOLUME E' DATA DALLA DIFFERENZA DEI FLUSSI

$$F_{IN} - F_{OUT} = \frac{\partial M}{\partial t}$$



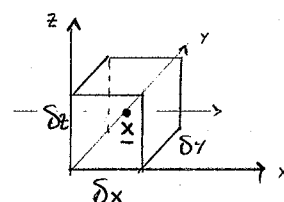
$$\delta M = \rho \delta V = \rho v \delta t \cdot A$$

$$\frac{\delta M}{\delta t} \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial t} = \rho v A$$

(FLUSSO ATTRAVERSO A)

IL FLUSSO PER UNITA' DI AREA E' ALLORA

$$j_m = \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial t} = \rho v$$



PRENDO IL VOLUMETTO A FIANCO, IN $\underline{x}$

$$\underline{x} = (x, y, z)$$

$$F_{IN} = \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z$$

$$\delta x \delta y \delta z = \delta V = \frac{\delta M}{\rho}$$

$$F_{OUT} = \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)_x = F_{IN} - F_{OUT} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

PERCIO'

$$\frac{1}{\delta V} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)_x = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

E SIMILMENTE PER LE ALTRE DIREZIONI

$$\frac{1}{\delta V} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)_i = - \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}$$

USANDO INFINE $\delta M = \rho \delta V$ OTTENDO

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho \underline{v})$$

$$= - \nabla \cdot (\rho \underline{v})$$

POICHE'

$$\nabla(p \underline{v}) = \underline{v} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \underline{v}$$

POSSO ANCHE SCRIVERE

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla p = -p \nabla \cdot \underline{v} \equiv \frac{Dp}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \underline{v} = 0}}$$

SE IL FLUSSO E' STAZIONARIO,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

CIO' COMPORTA CHE IL FLUSSO E' OMOGENEO, OSSIA

$$\nabla \cdot (p \underline{v}) = 0$$

SE IL FLUSSO E' INCOMPRESSIBILE,

$$\frac{Dp}{Dt} = 0$$

CIOE'

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

* VEDIAMO COME OTTENERE LA LEGGE DI CONTINUITA' TRAMITE

L'APPROCCIO LAGRANGIANO. POICHE' CONSIDERO LE STESSIE MOLECOLE,

$$\frac{1}{\delta M} \frac{D(\delta M)}{Dt} = 0$$

$$\delta M = p \delta V = p \delta x \delta y \delta z$$

$$\frac{1}{p \delta V} \frac{D(p \delta V)}{Dt} = \frac{1}{p \delta V} \left[p \frac{D(\delta V)}{Dt} + \delta V \frac{Dp}{Dt} \right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt}}_{\nabla \cdot \underline{v}} + \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt}$$

NOTA: VEDI STRAIN RATE VOLUMICO.

$$\frac{Dp}{Dt} = -p \nabla \cdot \underline{v}$$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

$$\sum_i \underline{F}_i = M \frac{d\underline{v}}{dt}$$

(VALIDA IN UN SISTEMA INERZIALE). DISTINGUIAMO FORZE DI VOLUME (IN SOSTANZA LA GRAVITA') E DI SUPERFICIE. PER LE PRIME,

$$\underline{F}_g = - \frac{GM_T M}{r^2} \hat{r}$$

$$\frac{\underline{F}_g}{M} = - \frac{GM_T}{r^2} \hat{r} \equiv -\underline{g}^*(r)$$

$$r = R_T + z$$

$$|\underline{g}^*| \equiv g^* = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \equiv g_o^* \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

CON

$$g_o^* = 9.8 \text{ ms}^{-2}$$

POICHE' $z \approx 50 \text{ km}$ SI HA $z \ll R_T$, QUINDI $g^* \approx g_o^*$:

$$\frac{\underline{F}_g}{M} = -g_o^* \hat{x}_3$$

STUDIAMO INVECE COME AGISCONO LE FORZE DI SUPERFICIE.

$$d\underline{F}_s = d\underline{A} \cdot \hat{\underline{\tau}}$$

$$\frac{d\underline{F}_s}{dA} = \hat{\underline{m}} \cdot \hat{\underline{\tau}}$$

DOVE $\hat{\underline{\tau}}$ E' IL TENSORE DEGLI STRESS (DIMOSTRAZIONE DEL TETRAEDRO DI CAUCHY), MENTRE $\hat{\underline{m}}$ E' IL VETTORE NORMALE ALLA SUPERFICIE.

PRESO UN VOLUMETTO CUBICO (VEDI NOTA),

$$f_{3A} = \tau_{33}(A)$$

$$f_{3B} = -\tau_{33}(B)$$

$$f_{3C} = \tau_{13}(C)$$

$$f_{3D} = -\tau_{13}(D)$$

$$f_{3E} = \tau_{23}(E)$$

$$f_{3F} = -\tau_{23}(F)$$

$$F_3(AB) = [\tau_{33}(A) - \tau_{33}(B)] \delta x_1 \delta x_2$$

MA

$$\tau_{33}(A) = \tau_{33}(\underline{x}) + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \frac{\delta x_3}{2}$$

$$\tau_{33}(B) = \tau_{33}(\underline{x}) - \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \frac{\delta x_3}{2}$$

$$F_3(AB) = \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \delta x_3 \cdot \delta x_1 \delta x_2$$

E SIMILMENTE PER LE ALTRE

$$F_3(CD) = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$$

$$F_3(EF) = \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} \delta x_2 \delta x_1 \delta x_3$$

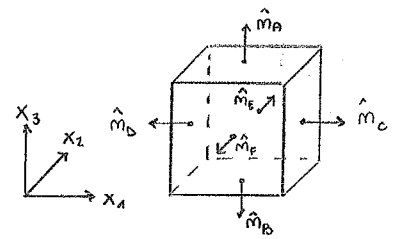
$$\frac{F_3}{M} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right)$$

E IN GENERALE

$$\frac{F_i}{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \hat{\tau})_i$$

POSSO SCRIVERE L'EQUAZIONE DI CAUCHY

$$\frac{D \underline{v}}{Dt} = -\nabla \phi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \hat{\tau}$$



$$\begin{aligned} \hat{m}_A &= \hat{x}_3 \\ \hat{m}_B &= -\hat{x}_3 \\ \hat{m}_C &= \hat{x}_1 \\ \hat{m}_D &= -\hat{x}_1 \\ \hat{m}_E &= \hat{x}_2 \\ \hat{m}_F &= -\hat{x}_2 \end{aligned}$$

NOTA: ASSUMENDO $\frac{dF_3}{dA} = \hat{m} \cdot \hat{\tau}$,

$$f_j = \frac{F_j}{A} = m_i \tau_{ij}$$

PRESA AD ESEMPIO LA FACCE A,

$$f_{jA} = (\hat{m}_A \cdot \hat{\tau})_j = \tau_{3j}(A)$$

NOTA: SU QUALE INDICE AGISCE ∇ APPLICATA A τ_{ij} ? VEDREMO CHE IL PROBLEMA NON SI PONE PERCHÉ τ_{ij} È SIMMETRICO.

* SE IL FLUSSO E' FERMO, IL TENSORE DI STRESS DEVE ESSERE ISOTROPO (SIMMETRIA SFERICA) E L'UNICO AD ESSERLO E'

$$\delta_{ij}$$

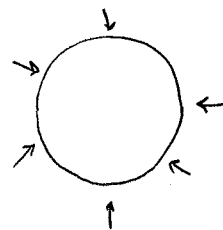
DOVRA' ESSERE

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ii} = -3p$$

DOVE SI E' COSI' DEFINITA LA PRESSIONE TERMODINAMICA

$$p = -\frac{\tau_{ii}}{3}$$

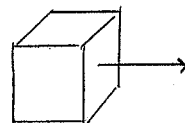


* PRENDIAMO INVECE UN VOLUMETTO IN MOVIMENTO.

NON MI ASPETTO ISOTROPIA NELLE FORZE E

QUINDI SCRIVO

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \underbrace{\sigma_{ij}}_{\text{TENSORE DEVIATORIO}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{pmatrix}$$



FACCIAMO L'IPOTESI CHE SIA

$$\sigma_{ij} = K_{ijmm} e_{mm}$$

OSSIA CHE OGNI ELEMENTO DI σ_{ij} DIPENDA LINEARMENTE DA TUTTI GLI ELEMENTI DEL TENSORE DI DEFORMAZIONE e_{ij} (IL TENSORE K HA 81 TERMINI).

SUPPONIAMO INOLTRE CHE IL FLUIDO SIA LOCALMENTE ISOTROPO; SI DIMOSTRA ALLORA CHE, PERCHE' K SIA ISOTROPICO,

$$K_{ijmm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mm} + \mu \delta_{im} \delta_{jm} + \gamma \delta_{im} \delta_{jm}$$

AFFINCHE' INOLTRE σ_{ij} SIA SIMMETRICO,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow K_{ijmm} = K_{jimmm} \Rightarrow \mu = \gamma$$

SCRIVO ALLORA

$$K_{ijmm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mm} + \mu (\delta_{im} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jm})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{mm} + \mu e_{ij} + \mu e_{ji}$$

NOTA: ERA INFATTI

$$\sigma_{ij} = K_{ijmm} e_{mm}$$

MA SAPPIAMO CHE

$$e_{mm} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \underline{u}$$

NOTA: STO CHIAMANDO $\underline{u}$ LA VELOCITÀ DEL FLUIDO (NON È DISTINTA DA $\underline{v}$).

$$e_{ij} = e_{ji}$$

QUINDI

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} + 2\mu e_{ij}$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u}$$

NOTA: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

$$= \begin{pmatrix} -p + \lambda \nabla \cdot \underline{u} + 2\mu e_{11} & 2\mu e_{12} & 2\mu e_{13} \\ 2\mu e_{21} & -p + \lambda \nabla \cdot \underline{u} + 2\mu e_{22} & 2\mu e_{23} \\ 2\mu e_{31} & 2\mu e_{32} & -p + \lambda \nabla \cdot \underline{u} + 2\mu e_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ii} = 3(-p + \lambda \nabla \cdot \underline{u}) + 2\mu e_{ii} = 3(-p + \lambda \nabla \cdot \underline{u}) + 2\mu \nabla \cdot \underline{u}$$

DA CUI

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{ii} + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \nabla \cdot \underline{u}$$

PRESSIONE TERMODINAMICA
NEL CASO STATICO

POSSIAMO DEFINIRE UNA PRESSIONE DINAMICA MEDIA

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{3} \tau_{ii}$$

$$p = \langle p \rangle + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \nabla \cdot \underline{u} := \langle p \rangle + k \cdot \nabla \cdot \underline{u}$$

p E $\langle p \rangle$ COINCIDONO SE $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ OPPURE SE $k = 0$ (FLUSSO DI STOKES).

RISCRIVO LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO COME

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g_0^* \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} \right]$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g_0^* \delta_{3i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} \right]$$

DETTA EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES.

A QUESTA POSSIAMO AGGIUNGERE L'ASSUNZIONE DI STOKES $\kappa=0$,

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

NOTA: L'ASSUNZIONE E' SOSTENUTA DA OSSERVAZIONI Sperimentali.

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \underline{u}\right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

SI PARLA ALLORA DI FLUIDI NEWTONIANI E μ SI DICE COEFFICIENTE DI VISCOSITA' DINAMICA.

• ESEMPIO

$$e_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = e_{23} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

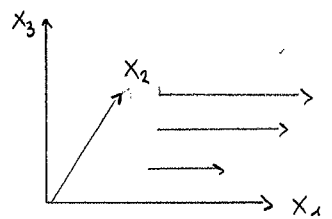
QUINDI

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$$

$$\tau_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

LO STRESS E' PROPORZIONALE ALLA VARIAZIONE DI $\underline{u}$ NELLA DIREZIONE AD ESSO ORTOGONALE.

LO STESSO ACCADE SE METTIAMO IN MOTO UNA PIASTRA APPOGGIATA SUL FLUIDO INIZIALMENTE FERMO.



$$\underline{u} = (u_1(x_3), 0, 0)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

PER UN FLUIDO NEWTONIANO SI PUO' RISOVRINERE

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g_o^* \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(2e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} \right) \right]$$

ASSUMENDO μ UNIFORME NELLO SPAZIO, L'ULTIMO TERMINE DIVENTA

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_j} (2e_{ij}) - \mu \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \underline{u})$$

E RICORDANDO LA DEFINIZIONE $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ SI HA

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (2e_{ij}) &= 2 \frac{\partial e_{i1}}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial e_{i2}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial e_{i3}}{\partial x_3} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i} \\ &= \nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) \end{aligned}$$

NOTA: IN NOTAZIONE INDICIALE HO SUBITO

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (2e_{ij}) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

REINSERENDOLA NELL'EQUAZIONE SOPRA SI OTTIENE

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g_o^* \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \underline{u} \right]$$

DEFINIAMO IL COEFFICIENTE DI VISCOSITA' CINEMATICA

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

E ABBIAMO

$$\frac{Du_i}{Dt} = -g_o^* \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \underline{u} \right]$$

SE $\nu = 0$ SI DICE CHE IL FLUIDO E' INVISCIDO E L'EQUAZIONE SOPRA SI SEMPLIFICA (EQUAZIONE DI EULERO).

SISTEMI NON INERZIALI E FORZE APPARENTI

METTIAMOCI IN UN SISTEMA NON INERZIALE MA SOLIDALE ALLA TERRA: DOBBIAMO INTRODURRE NELLA LEGGE DI NEWTON DELLE FORZE FITTIZIE PERCHÉ CONTINUI A ESSERE VALIDA.

PRESEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ROTANTE

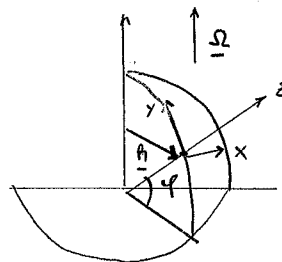
$\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ INERZIALE

IN CUI UN VETTORE $\underline{A}$ SI RAPPRESENTA COME

$$\begin{aligned}\underline{A} &= A_x' \hat{i}' + A_y' \hat{j}' + A_z' \hat{k}' \\ &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}\end{aligned}$$

SI DIMOSTRA CHE (FORMULA DI POISSON)

$$\frac{d_I \underline{A}}{dt} = \frac{d \underline{A}}{dt} + \underline{\Omega} \wedge \underline{A}$$



$d_I \underline{A}$ È LA VARIAZIONE CALCOLATA NEL SISTEMA INERZIALE.

SCELTO

$$\underline{A} = \underline{r}$$

$$\frac{d_I \underline{r}}{dt} = \underline{u}_a \quad \frac{d \underline{r}}{dt} = \underline{u} \quad \underline{u}_a = \underline{u} + \underline{\Omega} \wedge \underline{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{d_I \underline{u}_a}{dt} &= \frac{d \underline{u}_a}{dt} + \underline{\Omega} \wedge \underline{u}_a \\ &= \frac{d \underline{u}}{dt} + \underline{\Omega} \wedge \frac{d \underline{r}}{dt} + \underline{\Omega} \wedge \underline{u} + \underline{\Omega} \wedge \underline{\Omega} \wedge \underline{r} \\ &= \frac{d \underline{u}}{dt} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{u} - \Omega^2 \underline{r}\end{aligned}$$

NOTA: È VERO SE $\underline{\alpha} = \dot{\underline{\Omega}} = 0$.

$$= -g_0^* \hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{f}_r$$

$$\underline{f}_r = \nu \left[\nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) \right]$$

DOVE SI È USATA NAVIER-STOKES PER IL SISTEMA INERZIALE. ALLORA

$$\frac{D \underline{u}}{Dt} = \underbrace{-g_0^* \hat{k}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_{(2)} + \underbrace{\underline{f}_r}_{(3)} - \underbrace{2 \underline{\Omega} \wedge \underline{u}}_{(4)} + \underbrace{\Omega^2 \underline{r}}_{(5)}$$

(1)

(2)

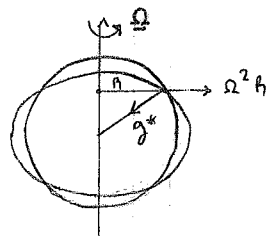
(3)

(4)

(5)

* PARTIAMO DALLA (5) (FORZA CENTRIFUGA).

$$-\underline{g}_0 = -\underline{g}_0^* + \Omega^2 \underline{R}$$



CHE NON E' PIU' DIRETTA VERSO IL CENTRO DI UNA SFERA, MA E' ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE DI UN GEOIDE.

METTIAMO QUINDI IL VETTORE $\hat{r}$ ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE TERRESTRE E RISCRIVIAMO

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{g}_0 \hat{r} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{f}_c - 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{u}$$

NOTA: UNA SUPERFICIE A GEOPOTENZIALE COSTANTE COINCIDE CON UNA DI LIVELLO PER UN OGGETTO A RIPOSO SULLA TERRA ROTANTE.

* ANALIZZIAMO ORA LA (4) (FORZA DI CORIOLIS). POICHE'

$$L = mR \underline{V}_t = m\Omega R^2$$

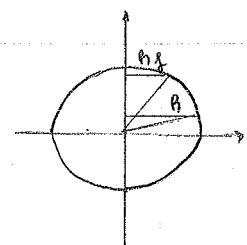
OSSIA IL MOMENTO ANGOLARE SI DEVE CONSERVARE,

ANDANDO DA R A R_f

$$L = mR_f^2 \Omega_f \Rightarrow \Omega_f = \Omega \frac{R^2}{R_f^2}$$

$$\Omega_f = \Omega + \Omega'$$

$$= \Omega + \frac{u}{R_f} \approx \Omega \frac{R^2}{R_f^2} \Rightarrow u = \frac{R^2 - R_f^2}{R_f} \Omega$$



NOTA: STAMO DICENDO CHE UN INCREMENTO Ω' DI Ω E' DOWTO A UNA VARIAZIONE u DELLA VELOCITA' ZONALE.

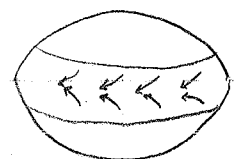
SE $R_f < R$ (MI MUOVO VERSO I POLI) SI HA $u > 0$: LE MASSE D'ARIA ACQUISISCONO UNA VELOCITA' ZONALE DA OVEST VERSO EST.

VICEVERSA MUOVENDOMI DAI POLI VERSO L'EQUATORE

DI ACQUISTA UNA COMPONENTE DI VELOCITA' ZONALE

DA EST VERSO OVEST: E' QUESTO IL CASO DEGLI

ALISEI (TRADE WINDS).



NOTA: LA FORZA DI CORIOLIS E' MASSIMA AI POLI E NULLA ALL'EQUATORE (SE $u=w=0$).

PIU' AVANTI SCRIVEREMO $\underline{F}_c = f \hat{r} \wedge \underline{v}$ CON $f = 2\Omega \sin \varphi$, DOVE φ E' APPUNTO LA LATITUDINE (MA QUESTA E' UNA APPROSSIMAZIONE).

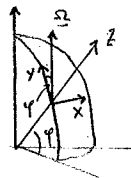
ESPRIMIAMO ORA IL TERMINE DI CORIOLIS

$$\underline{\Omega} \wedge \underline{V} = (\Omega_y w - \Omega_z v) \hat{i} + (\Omega_z u - \Omega_x w) \hat{j} + (\Omega_x v - \Omega_y u) \hat{k}$$

DAL MOMENTO CHE

$$\Omega_x = 0 \quad \Omega_y = \Omega \cos \varphi \quad \Omega_z = \Omega \sin \varphi$$

$$\underline{\Omega} \wedge \underline{V} = \Omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) \hat{i} + \Omega u \sin \varphi \hat{j} - \Omega u \cos \varphi \hat{k}$$



POSSO RISOGLIVERE PER COMPONENTI L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) + f_{r,x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + f_{r,y}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -g_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi + f_{r,z}$$

CHE DIVENTANO, UNA VOLTA MESSO IN EVIDENZA IL TERMINE DI ANVEZIONE,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) + f_{r,x}$$

NOTO CHE E' ALTAMENTE NON LINEARE. INTRODUCENDO INFINE I TERMINI CHE DERIVANO DAL PASSAGGIO IN COORDINATE SFERICHE, SI DIMOSTRA CHE L'EQUAZIONE FINALE DIVENTA (a E' IL RAGGIO DELLA TERRA)

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{uv \tan \varphi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + f_{r,x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + f_{r,y}$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{w^2 + v^2}{a} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi + f_{r,z}$$

DOVE COMPARIANO DEI NUOVI TERMINI DETTI DI SFERICITA'.

OVIAMENTE NON NE ESISTE ANCORA UNA SOLUZIONE ANALITICA; SI STUDIANO CON SIMULAZIONI NUMERICHE.

SI POTREBBERO STUDIARE COSI' I MOTI SU TUTTE LE SCALE;
NOI CI FOCALIZZIAMO SU QUELLA SINOTTICA (DAL GRECO,
"PRESENTARE LA VISTA DEL TUTTO").

SCALA	L (Km)	T	ESEMPLI
MICROSCALA	< 1	< 1 h	TURBOLENZA, PBL (PLANETARY BOUNDARY LAYER).
MESOSCALA	1 - 1000	1 h - 1 d	BREEZE, TEMPORALI.
SINOTTICA	1000 - 6000	1 d - 1 w	BASSE/ALTE P
PLANETARIA	> 6000	> 1 w	ALISEI

SCALA SINOTTICA E APPROSSIMAZIONE GEOSTROFICA

$u, v \sim 10 \text{ m/s}$	U	VELOCITA' ORIZZONTALE
$w \sim 10^{-2} \text{ m/s}$	W	VELOCITA' VERTICALE
$X, Y \sim 10^6 \text{ m}$	L	LUNGHEZZA
$Z \sim 10^4 \text{ m}$	H	(TUTTA LA TROPOSFERA, $\sim 10 \text{ Km}$) $\rightarrow$ PROFONDITA'
$\delta p / p \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	$\delta p / p$	($\delta p \sim 10 \text{ hPa}$) $\rightarrow$ FLUTTUAZIONI ORIZZONTALI DI P
$2\Omega \sin \varphi \cos \varphi \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	f	(MEDIE LATITUDINI, f PARAMETRO DI CORIOLIS)

DA QUESTE SI RICAVANO LE SCALE DI TEMPO

$$T_H = \frac{L}{U} \sim 10^5 \text{ s}$$

$$T_Z = \frac{H}{W} \sim 10^6 \text{ s}$$

NOTA: P E ρ DECAESCONO CON Z
ESPONENZIALMENTE, PERCIO' LA SCALA
 $\delta p / p$ E' TALE A TUTTE LE ALTITUDINI.

NOTA: STO STUDIANDO SOLO LE PRIME
DUE COMPONENTI DI N-S.

NELL' EQUAZIONE DI N-S COMPaiono (TUTTI IN s^{-1} E USO IL SI)

$\frac{\partial u}{\partial t}$	$u \frac{\partial u}{\partial x} / v \frac{\partial u}{\partial y}$	$w \frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{uvTg_y}{a}$	$\frac{u w}{a}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$2\Omega v \sin \varphi$	$2\Omega w \cos \varphi$	f_{2x}
$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x} / v \frac{\partial v}{\partial y}$	$w \frac{\partial v}{\partial z}$	$\frac{u^2 Tg_y}{a}$	$\frac{v w}{a}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$2\Omega u \sin \varphi$	/	$f_{2,y}$
$\frac{U}{T_H} \sim 10^{-4}$	$\frac{U^2}{L} \sim 10^{-4}$	$\frac{WU}{H} \sim 10^{-5}$	$\frac{U^2}{R_E} \sim 10^{-5}$	$\frac{UW}{R_E} \sim 10^{-8}$	$\frac{\delta p / p}{L} \sim 10^{-3}$	$f \sim 10^{-3}$	$fW \sim 10^{-6}$	$\frac{U}{H^2} \sim 10^{-12}$
$\frac{10}{10^5}$	$\frac{10^2}{10^2}$	$\frac{10^{-1}}{10^4}$	$\frac{10^2}{10^7}$	$\frac{10^{-1}}{10^7}$	$\frac{10^3}{10^6}$	$10^{-4} 10$	$10^{-4} 10^{-2}$	$\frac{10}{10^8}$

VEDIAMO SUBITO CHE SU SCALA SINOTTICA LA VISCOSITA' E' TRASCURABILE. SE TENIAMO SOLO I TERMINI DI ORDINE 10^{-3} , 10^{-4} ,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin \varphi \cdot v = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi \cdot u = 0$$

NOTA: NON COMPARE PIU' IL TEMPO, QUINDI NON SI POSSONO USARE PER PREDIRE L'EVOLUZIONE DEL CAMPO DI VELOCITA'.

QUESTA SI DICE APPROSSIMAZIONE GEOSTROFICA.

DEFINENDO $\underline{v}_g$ (VENTO GEOSTROFICO)

$$\underline{\nabla}_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \underline{v}_g = (u_g, v_g)$$

$$f = 2\Omega \sin \varphi$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f \cdot v_g = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f \cdot u_g = 0 \end{cases}$$

NOTA: POI STA A NOI CAPIRE QUANDO SIA LEGITO APPROSSIMARE $\underline{v} \approx \underline{v}_g$.

$$\hat{k} \wedge \underline{v}_g = -v_g \hat{i} + u_g \hat{j} = (-v_g, u_g)$$

NOTA: IL PRODOTTO VETTORIALE SI SVOLGE PENSANDO $\underline{v}_g$ COME VETTORE IN $\mathbb{R}^3$, OVVERO METTENDO UNO ZERO COME TERZA COMPONENTE.

E USANDO IL FATTO CHE

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} (\underline{\nabla}_H p)_x$$

$$f v_g = -f (\hat{k} \wedge \underline{v}_g)_x$$

POSSO RISOVRIVERE

$$-\frac{1}{\rho} (\underline{\nabla}_H p)_x - f (\hat{k} \wedge \underline{v}_g)_x = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} (\underline{\nabla}_H p)_y - f (\hat{k} \wedge \underline{v}_g)_y = 0$$

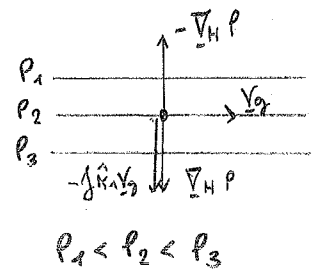
O IN GENERALE

$$-\frac{1}{\rho} \underline{\nabla}_H p = f \hat{k} \wedge \underline{v}_g$$

GRADIENTE DI
PRESSIONE

FORZA DI
CORIOLIS

LA SITUAZIONE E' ILLUSTRATA A LATO;
IL VETTORE VENTO GEOSTROFICO HA SEMPRE
LE BASSE PRESSIONI A SINISTRA.



NOTA: PIU' SONO VICINE LE ISOBARE E MAGGIORE E' ∇P , QUINDI LA FORZA DI CORIOLIS CHE SERVE PER BILANCIARLA: SEGUE CHE V_g E' PIU' INTENSO.

BILANCIO GEOSTROFICO

$$\underline{F}_p + \underline{F}_c = 0$$

$$\underline{F}_p = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

$$\underline{F}_c = (f v_g, -f u_g)$$

$$f = 2 \Omega \sin \varphi$$

$$\underline{V}_g = (u_g, v_g)$$

(SI E' TRASCURATO IN $\underline{F}_c$ IL TERMINE PROPORZIONALE A w , DI 2 ORDINI DI GRANDEZZA PIU' PICCOLO). IN ALTRI TERMINI

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v_g = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u_g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_g = -\frac{1}{f \rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g = \frac{1}{f \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

SI SONO TRASCURATE LE FORZE VISCOSI, I TERMINI DI SPERIMENTALITÀ, LA COMPONENTE IN w DI $\underline{F}_c$ E LE VARIAZIONI TEMPORALI $\left(\frac{D}{Dt}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$, CHE SONO DELLO STESSO ORDINE DELL'AVVEZIONE ORIZZONTALE MA NON DI QUELLA VERTICALE

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \sim 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$$

CONFRONTIAMO I DUE TERMINI

$$\frac{Du}{Dt} \sim \frac{U}{L/U}$$

$$f u \quad (f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1})$$

$$\frac{U^2}{L} \cdot \frac{1}{f U} = \frac{U}{L f} := R_o = 0.1$$

↑
SU SCALA SINOTTICA

NUMERO DI ROSSBY.

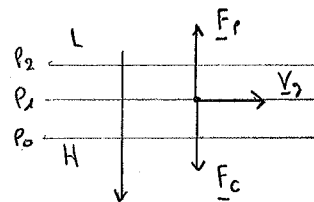
SE $R_o < 0.1$ POSSO USARE L'APPROSSIMAZIONE GEOSTROFICA PER

* DESCRIVERE IL FENOMENO (L'ERRORE COMMESSO È MINORE DEL 10%).

SI SONO VISTI INOLTRE

$$\underline{F}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p$$

$$\underline{F}_c = -f \hat{k} \wedge \underline{V}_g$$



QUINDI POSIZIONO $\underline{F}_p$ IN BASE ALLE PRESSIONI,

$\underline{F}_c$ IN DIREZIONE OPPOSTA (EQUAZIONE DEL BILANCIO) E $\underline{V}_g$ DI

CONSEGUENZA:

$$\underline{V}_g = \frac{1}{\rho f} \hat{k} \wedge \nabla_H p = \frac{1}{\rho f} \left(-\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

NOTA:

$$\underline{F}_p = -\underline{F}_c; \quad \hat{k} \wedge \underline{V}_g = -\frac{1}{\rho f} \nabla_H p$$

E ESPlicitO $\underline{V}_g$ RICORDANDO CHE
 $\hat{k} \wedge (\hat{k} \wedge \underline{V}_g) = -\underline{V}_g$

NOTIAMO CHE

$$\nabla \cdot \underline{V}_g = \frac{\partial}{\partial x} u_g + \frac{\partial}{\partial y} v_g = \frac{1}{\rho f} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

IL VENTO GEOSTROFICO HA DIVERGENZA NULLA.

INOLTRE, DALLA DEFINIZIONE DI VORTICITÀ,

$$\zeta_g = (\nabla \wedge \underline{V}_g)_z = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\rho f} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho f} \nabla_H^2 p \propto -p$$

SI NOTI CHE, NON COMPARENDO TERMINI TEMPORALI, AVRO' BISOGNO DI UN'APPROSSIMAZIONE MENO FORTE PER FARE PREVISIONI. POSSO AD ESEMPIO REINSERIRE (PASSANDO COSÌ ALL'ORDINE 10^{-4})

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u$$

DALLE QUALI RITROVO LE EQUAZIONI DEL VENTO GEOSTROFICO SOLO SE SI VERIFICANO

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} = 0$$

ONDE DI GRAVITA'

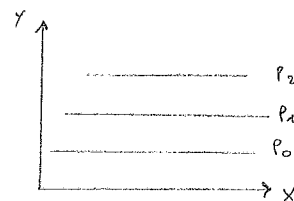
$$p = p(y) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -c$$

$$t = 0 \rightarrow u = v = 0$$

LE EQUAZIONI SI RIDUCONO A

$$\frac{Du}{Dt} = 0$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} > 0$$



$$p_0 > p_1 > p_2$$

(VEDI FOCUS PAGINA SUCCESSIVA:
BANDO AI RAGIONAMENTI
QUALITATIVI)

VEDREMO PIU' IN LA' PERCHE'
SUPPORTARE UN TALE CAMPO DI P
SIA VEROSIMILE.

SOTTO LA SPINTA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE (NORD $\rightarrow$ EST) IL FLUIDO SI METTE IN MOTO VERSO NORD. PER $t > 0$,

$$\frac{Du}{Dt} = f v > 0$$

UNA VOLTA IN MOTO L'ARIA SUBISCE UN'ACCELERAZIONE DOVUTA SOLO A f_c .

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u > 0 \quad \text{SE} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} > f u \Rightarrow u_g > u$$

LA COMPONENTE VERSO NORD CRESCE FINCHE' LA COMPONENTE VERSO EST u RAGGIUNGE QUELLA DEL VENTO GEOSTRAFICO u_g .

$$t_1 \rightarrow u(t_1) = u_g$$

$$\frac{Dv}{Dt} = f u_g - f u = 0$$

$$\frac{Du}{Dt} = f v > 0$$

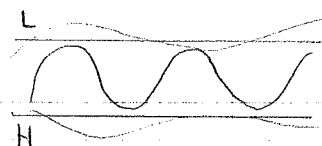
PER $t > t_1$,

$$u > u_g$$

$$\frac{Dv}{Dt} < 0$$

E DECRESCHE FINCHE' NON TORNA $u = u_g$.

ONDE DI GRAVITA' O
DI INERZIA



IN REALTA' SPOSTANDOSI VERSO
NORD L'ARIA FA AUMENTARE LA
PRESSIONE E VICEVERSA; QUESTO
SMORZA LE OSCILLAZIONI FINCHE'
L'ONDA DIVENTA PARALLELO ALLE ISOBAE
E A v_g .

* ROTTURA DEL VORTICE POLARE. DI INVERNO I POLI SONO AL BUIO E PERDONO CALORE; SI FORMA INOLTRE UN VORTICE ATTORNO AL POLO CHE IMPEDISCE L'INGRESSO DI ARIA CALDA DALLE MEDIE LATITUDINI. TUTTAVIA IN ARTIDE LA DISOMOGENEITA' DELL'EMISFERA NORD GENERA ONDE DI GRAVITA' CHE ROMPONO IL VORTICE; E' QUESTO IL MOTIVO PER CUI IL BUCO NELL'OZONO SI OSSERVA PERLOPIU' IN ANTARTIDE.

0. VENTO AGEOSTROFICO

NOTA: SOMMA E SOTTRAI v_g NELLA PRIMA E u_g NELLA SECONDA.

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv = -fv_g + fv = f(v - v_g) = f v_a$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu = fu_g - fu = -f(u - u_g) = -f u_a$$

DOVE SI DEFINISCE VENTO AGEOSTROFICO

$$\underline{V}_a = \underline{V} - \underline{V}_g = (u - u_g, v - v_g)$$

E' SOLTANTO QUESTO AD ACCELERARE: IL VENTO GEOSTROFICO NON ACCELERA E IL VENTO VERO SI SCOMPONE IN $\underline{V} = \underline{V}_a + \underline{V}_g$.

$$\frac{D\underline{V}}{Dt} = -f \hat{k} \wedge \underline{V}_a$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}_a$$

• FOCUS: ONDE DI GRAVITA'

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = fv \\ \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{cases} \quad \begin{cases} v = \frac{1}{f} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{D^2 u}{Dt^2} + f^2 u = \frac{c}{\rho} \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ u^* = u - \frac{c}{f} \end{matrix} \quad \frac{D^2 u^*}{Dt^2} + f^2 u^* = 0$$

$$\begin{cases} u = A \sin(ft + \phi) + \frac{c}{f} \\ v = A \cos(ft + \phi) \end{cases}$$

DOVE SI E' SUPPOSTO UN ANZAMENTO $p = p(y) = p_0 - cy$, IN ACCORDO CON L'EQUAZIONE IPSOMETRICA (VEDI DORO, ATMOSFERA BAROCLINA).

BILANCIO IDROSTATICO

$\frac{\partial w}{\partial t}$	$\frac{u^2 + v^2}{\omega}$	$u \frac{\partial w}{\partial x}, v \frac{\partial w}{\partial y}$	$w \frac{\partial w}{\partial z}$	g	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$2\Omega w \sin \phi$	$(f_r)_z$
$\frac{W}{T_H}$	$\frac{U^2}{R_E}$	$\frac{UW}{L}$	$\frac{W^2}{H}$	g_0	$\frac{\rho_0}{\int_0^H}$	$\int_0^U$	$\nabla \frac{W}{H^2}$
$\frac{10^{-2}}{10^5}$	$\frac{10^2}{10^7}$	$\frac{10^{-1}}{10^7}$	$\frac{10^{-4}}{10^4}$	10	$\frac{10^5}{1 \cdot 10^4}$	$\frac{10^{-4}}{10}$	$\frac{10^{-3}}{10^8}$
10^{-7}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-8}	10	10	10^{-3}	10^{-10}

(COMPONENTE VERTICALE DELLA CONSERVAZIONE DI $\underline{p}$). TENENDO I TERMINI A 10° ,

$$-2 - \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

SU SCALA SINOTTICA L'ATMOSFERA IN VERTICALE È IN PERFETTO EQUILIBRIO IDROSTATICO (10^{-4}).

SI PARLA DI BILANCIO IDROSTATICO.

• TEORIA QUASI - GEOSTROFICA

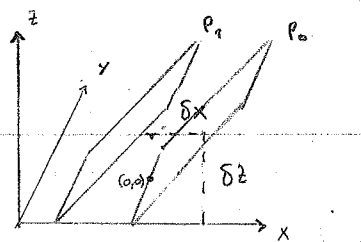
INTRODUCO ALCUNI TERMINI RELATIVI AL VENTO TOTALE (NON SOLO GEOSTROFICO) PER POTER FARE PREVISIONI, CHE PRIMA AVVENIVANO SOSTANZIALMENTE SU BASE EMPIRICA.

COORDINATE ISOBARIC

NOTA: VAI DENTRO AL FOCUS

PER CALCOLARE γ_g MI SERVE DI CONOSCERE LA PRESSIONE E DENSITA',
A VOLTE DIFFICILI DA MISURARE.

SUPPONIAMO COME IN FIGURA CHE I PIANI A P
COSTANTE ABBIANO UNA CERTA INCLINAZIONE RISPETTO
A x MA SIANO PARALLELI A y .



$$P(\delta x, \delta z) = P(0,0) + \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial z} \delta z$$

POICHE' MI STO MUOVENDO SU UNA SUPERFICIE A P COSTANTE,

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z \delta x + \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_x \delta z = 0$$

POICHE' SI ERA DEFINITO IL GEOPOTENZIALE COME ($g = |g|$)

$$d\phi = +g dz$$

SI HA, USANDO $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$,

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z \delta x - \rho g \cdot \delta z = 0$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z = \rho \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_p$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_z = \rho \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_p$$

DOVE LA SECONDA SI OTTIENE CONSIDERANDO PIANI // A X. ALLORA

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = \nabla_p \phi$$

NOTA: DELLA SERIE "NON USIAMO TROPPIA MATEMATICA CHE SE NO SI SPANENTANO"... VEDI DIMOSTRAZIONE NEL FOCUS SOTTO.
 $\nabla_z p = \nabla_H p$ E' LA COMPONENTE ORIZZONTALE DEL GRADIENTE DI PRESSIONE.

CHE POSSO RISCRIVERE COME

$$-\nabla_p \phi - f \hat{k} \wedge \underline{V}_g = 0$$

DOVE NON COMPARE PIU' ρ , SI OTTIENE

$$\underline{V}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \wedge \nabla_p \phi = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_p z$$

QUEST'ULTIMA SCRITTA IN TERMINI DI ALTEZZA GEOPOTENZIALE

$$d\phi = g_0 dz$$

TRA L'ALTRO NOTIAMO CHE

$$\nabla_p z \parallel \nabla_z p$$

A UN MINIMO DI ALTEZZA A PRESSIONE COSTANTE CORRISPONDE UN MINIMO DI PRESSIONE A ALTEZZA COSTANTE.

FOCUS: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, $d\phi = g dz$ E $dp = \nabla p \cdot d\underline{r} \equiv 0$ (DEFINIZIONE DELLA SUPERFICIE ISOBARA).

$$0 = dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z} \delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x,z} \delta y - \rho d\phi$$

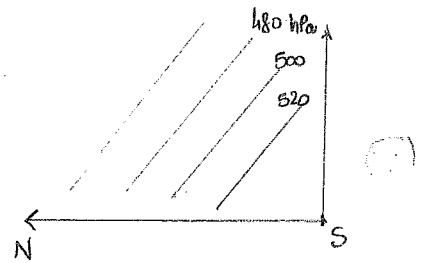
$$\nabla_H p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, 0 \right)$$

$$d\phi|_{p=\text{cost}} = \nabla_p \phi \cdot d\underline{z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z} \delta x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x,z} \delta y = \frac{1}{\rho} \nabla_H p \cdot d\underline{z}$$

$$\Rightarrow \nabla_p \phi = \frac{1}{\rho} \nabla_H p$$

* ESEMPIO

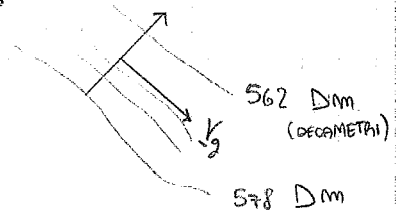
P DIMINUISCE CON LA QUOTA. SE MI MUOVO VERSO NORD LUNGO UN' ISOBARA, DIMINUISCE LA QUOTA.



* ESEMPIO: VENTO GEOSTROFICO SULLA SARDEGNA

$$|V_g| = \left| -\frac{1}{f} \nabla_P \phi \right| = \frac{g}{f} |\nabla_P z| \approx + \frac{g_0}{f} \frac{\Delta z}{\Delta y} \sim \frac{10}{10^{-4}} \frac{40 \text{ m}}{100 \text{ km}} \sim 40 \text{ m/s}$$

PIU' LE ISOBARE SONO STRETTE E PIU' V_g E' VELOCE: INFATTI LE ISOBARE SONO LE LINEE DI FLUSSO DI V_g .



RICORDIAMO CHE IL VENTO VERO DIFFERISCE AL PIU' DEL 10% DA V_g .

* CON IL SOFTWARE HYSPLIT (ANCHE ONLINE) SI RICOSTRUISCONO O PREVEDONO LE TRAIETTORIE DEI PACCHETTI D'ARIA, SI VERIFICA COSI' LA BONTA' DELL' APPROSSIMAZIONE GEOSTROFICA.

* VELOCITA' VERTICALE ISOBARICA

ABBIAMO RICAVATO

$$\frac{1}{f} \nabla_z P = \nabla_P \phi = g \nabla_P z$$

NOTA: IN COORDINATE ISOBARICHE P E' LA COORDINATA VERTICALE.

COME POSSIAMO ESPRIMERE LA VELOCITA' w IN COORDINATE ISOBARICHE?

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial z} = -f g$$

$$\omega = \frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla P = \frac{\partial P}{\partial t} + \underline{V}_H \cdot \nabla_H P + w \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial t} + \underline{V}_H \cdot \nabla_H P - f g w$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim \frac{10 \text{ hPa}}{\text{day}} \sim \frac{10^3 \text{ Pa}}{10^6 \text{ s}} \sim 10^{-3} \text{ Pa s}^{-1}$$

$$\underline{V}_H \cdot \underline{\nabla}_H p \sim \underline{V}_g \cdot \underline{\nabla}_H p = 0$$

NOTA: $\underline{V}_g$ E $\underline{\nabla}_H p$ SONO ORTOGONALI.

$$\rho g w \sim 1 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ Pa s}^{-1} \sim 10^{-1} \text{ Pa s}^{-1}$$

PERCIO' LA VELOCITA' VERTICALE ISOBARICA E' IN PRIMA APPROSSIMAZIONE

$$w = \frac{Dp}{Dt} \approx -\rho g w \sim 10^{-1} \text{ Pa s}^{-1}$$

CONSERVAZIONE DELL'IMPULSO IN COORDINATE ISOBARICHE

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial p}$$

NOTA: $w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{w}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{w}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + f v$$

ERANO

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \\ \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - f u$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$

E RICORDIAMO CHE $\frac{1}{\rho} \underline{\nabla}_z p = \underline{\nabla}_p \phi$

USANDO $d\phi = g dz$ HO L'EQUAZIONE DELL'IDROSTATICA

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

CONSERVAZIONE DELLA MASSA IN COORDINATE ISOBARICHE

$$\frac{1}{\delta M} \frac{D(\delta M)}{Dt} = \frac{1}{\rho \delta x \delta y \delta z} \frac{D(\rho \delta x \delta y \delta z)}{Dt} = 0$$

USANDO

$$\rho \delta z = -\frac{1}{g} \delta p$$

OTTENGO L'ESPRESSIONE (DOVE DI NUOVO NON COMPARE p)

$$\frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \frac{D(\delta x \delta y \delta p)}{Dt} = \frac{1}{\delta x} \frac{D(\delta x)}{Dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{D(\delta y)}{Dt} + \frac{1}{\delta p} \frac{D(\delta p)}{Dt}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial p} = 0$$

NOTA: NON CI SONO RIFERIMENTI AL TEMPO t NE' ALLA DENSITA' ρ .
 $D(\delta p) = \frac{\partial w}{\partial p} \delta p \delta t$

EQUAZIONE DELL' ENERGIA TERMODINAMICA

$$DH = M c_p DT = \delta Q + V DP$$

POICHE'

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{\rho} := \alpha$$

$$\frac{DP}{Dt} = w$$

$$J := \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{Dt}$$

FLUSSO DI CALORE PER UNITA' DI MASSA

POSSO RISOVRIVERE

$$c_p \frac{DT}{Dt} = J + \alpha w$$

OVVERO, USANDO LE COORDINATE ISOBARICHE,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{J}{c_p} + \frac{\alpha}{c_p} w$$

MA ERA $\Gamma_d = g/c_p$, QUINDI

$$\frac{\alpha}{c_p} = \frac{g}{c_p} \frac{\alpha}{g} = \Gamma_d \frac{\alpha}{g}$$

DA CUI

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \Gamma_d \frac{\alpha}{g} \right) w = \frac{J}{c_p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{1}{\rho g} = \Gamma_e \frac{1}{\rho g} = \frac{\alpha}{g} \Gamma_e$$

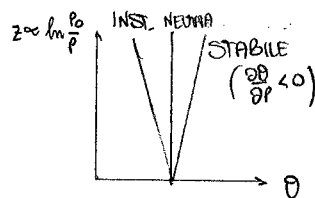
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\alpha}{g} (\Gamma_e - \Gamma_d) w = \frac{J}{c_p}$$

RICORDANDO

$$\Gamma_e - \Gamma_d = - \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho g \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{g}{\alpha} \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

TRAVO INFINO

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{VAR. TEMPERALE}} + \underbrace{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{AVVEZIONE ORIZZONTALE}} + \underbrace{\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} w}_{\text{AVVEZIONE VERTICALE}} = \underbrace{\frac{\sigma}{c_p}}_{\text{IMMISSIONE DI CALORE DALL' ESTERNO}}$$



CHE ESPRIME IN COORDINATE ISOBARICHE LA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA TERMODINAMICA.

NOTA: $w \approx -p g w$

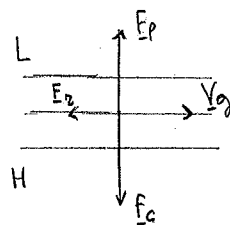
SE L'ATMOSFERA E' STABILE ($\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$) E L'ARIA SALE ($w < 0$) SI HA UN RISCALDAMENTO DELLA MASSA D'ARIA; LO STESSO ACCADE CON L'ATMOSFERA INSTABILE E L'ARIA CHE SCENDE. CONDIZIONI MISTE PROVOCANO UN RAFFREDDAMENTO DELLA MASSA D'ARIA.

FORZE VISCLOSE

IL VENTO $\underline{V}$ NON E' DIRETTO PROPRIO COME $\underline{V}_g$; SUPPONIAMO A SIA

$$\underline{F}_r = -\alpha \underline{V}$$

$$\underbrace{|\underline{F}_c|}_{C_0} = \underbrace{f \underline{V}}_{P} < \underbrace{|\underline{F}_r|}_{P}$$



A COMPENSARE GLI EFFETTI DI $\underline{F}_c$. BILANCIANDO,

$$P \cos \psi = C_0 = f V$$

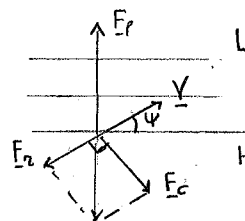
$$P \sin \psi = F_r = \alpha V$$

$$\Rightarrow \tan \psi = \frac{\alpha}{f}$$

QUADRANDO E SOMMANDO,

$$P^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = P^2 = (f^2 + \alpha^2) V^2$$

$$\Rightarrow V = P \frac{1}{\sqrt{f^2 + \alpha^2}} = \frac{P}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{f}\right)^2}} = V_g \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{f}\right)^2}} \leq V_g$$



NOTA: ψ E' L'ANGOLO CHE $\underline{V}$ FORMA CON LA DIREZIONE DEL VENTO GEOSTROFICO. NOTA CHE CAMBIA $\underline{F}_c$ MA NON $\underline{F}_r$.

$$P = f V_g (= F_c(\psi))$$

RICORDANDO IL TERMINE DI FORZE DI STRESS NELLE EQUAZIONI DI

NAYIER-STOKES ERA

$$F_{r,i} = \nu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{V} \cdot \underline{u}) \right]$$

NOTA: PIU' ALTA E' $\underline{F}_c$ E MAGGIORE DEVE ESSERE L'ANGOLO ψ (SEMPRE VERSO PRESSIONI PIU' BASSE).

SE AGGIUNGAMO L'IPOTESI DI FLUIDO INCOMPRESSIBILE,

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$F_{z,i} = \gamma \nabla^2 u_i$$

CHE INSERITA NEL BILANCIO GEOSTRAFICO DA' (CLASSICAL EKMAN LAYER)

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \gamma \nabla^2 u \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \gamma \nabla^2 v \end{cases}$$

SE

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

(IPOTESI SEMPLIFICATIVA, MA IN EFFETTI CI INTERESSIAMO SOLTANTO DELLE VARIAZIONI CON LA QUOTA DI z), LE EQUAZIONI DIVENTANO

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases}$$

DIAMO LE CONDIZIONI AL CONFINAMENTO

$$\begin{cases} z=0 & u=v=0 \\ z \rightarrow \infty & u = u_g, v = v_g \end{cases}$$

NOTA: VUOL DIRE CHE z SI ANNULLA A CONTATTO CON IL TERRAENO, MENTRE LONTANO DA ESSO $z \rightarrow z_g$.

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\begin{cases} 0 = -f(v_g - v) + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} 0 = f(u_g - u) + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases} \quad (II)$$

MOLTIPLICO LA II PER i E POI SOMMO I E II.

OTTENGO

$$0 = f(iu_g - iv) + \gamma \frac{\partial^2(iv)}{\partial z^2}$$

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u+iv) = -f(iu_g - v_g) + f(iu - v)$$

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u+iv) = -if(u_g + iv_g) + if(u+iv)$$

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u+iv) - if(u+iv) = -if(u_g + iv_g)$$

PONENDO PER SEMPLICITA' $v_g = 0$ (BASTA UNA ROTAZIONE DI ASSI),

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u+iv) = if(u+iv) + ifu_g$$

NOTA: $a, b \in \mathbb{C}$, $a = u+iv$, $b = i\frac{1}{\gamma}$,
 $a'' = ba + bu_g$.

CHE RISOLVO COME DI CONSUETO SOLO IL CAMBIO
 $a \rightarrow a + u_g$
 $(a + u_g)'' = b(a + u_g)$

CHE AMMETTE SOLUZIONE

$$u+iv = A \exp \left\{ \sqrt{\frac{i}{\gamma}} z \right\} + B \exp \left\{ -\sqrt{\frac{i}{\gamma}} z \right\} + u_g$$

IMPONENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO

$$z=0 \quad u=v=0 \quad (i)$$

$$\Rightarrow 0 = A + B + u_g$$

$$z=\infty \quad u=u_g, \quad v=v_g=0$$

$$\Rightarrow u = A e^{\infty} + \underbrace{B}_{=0} e^{-\infty} + u_g \quad (ii)$$

PERCHE' NON ESPLODA,

$$A=0 \quad \Rightarrow B = -u_g$$

(QUEST'ULTIMO DALLA (i)), ALLORA

$$u+iv = -u_g \exp \left\{ -\sqrt{\frac{i}{\gamma}} z \right\} + u_g$$

$$\sqrt{\frac{i}{\gamma}} = \sqrt{2i} \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} := (1+i)\gamma$$

$$\gamma := \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

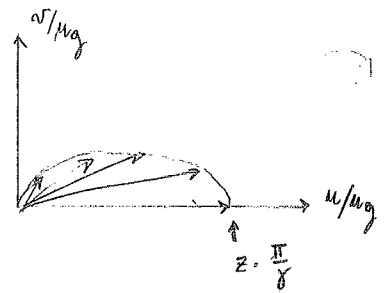
$$u+iv = u_g \left\{ 1 - e^{-(1+i)\gamma z} \right\} = u_g \left\{ 1 - e^{-\gamma z} e^{-i\gamma z} \right\}$$

$$e^{-i\gamma z} = \cos \gamma z - i \sin \gamma z$$

ABBIAMO OTTENUTO

$$u + iv = u_0 \left\{ 1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z + i e^{-\gamma z} \sin \gamma z \right\}$$

$$\begin{cases} u = u_0 (1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z) \\ v = u_0 e^{-\gamma z} \sin \gamma z \end{cases}$$



CHE È L'EQUAZIONE DI UNA SPIRALE (SPIRALE DI EKMAN). PER $z = \frac{\pi}{\gamma}$,

$$u(z = \frac{\pi}{\gamma}) = u_0 (1 + e^{-\pi})$$

$$v(z = \frac{\pi}{\gamma}) = 0$$

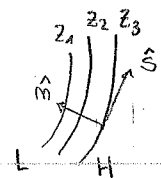
IN REALTÀ SI OSSERVA $u \approx u_0$ PER $z = 10 \text{ km}$ E NON $10 \text{ m} = \frac{\pi}{\gamma}$. IL MOTIVO È CHE $\gamma \approx 10^{-3}$ VA BENE A LIVELLO MOLECOLARE, MA IN ATMOSFERA A DOMINARE È LA TURBOLENZA.

QUESTA È CAUSATA PRINCIPALMENTE DA

- EDDIES : VORTICI GENERATI DALLA SHEAR VERTICALE. SI COMPORTANO COME GROSSE MOLECOLE.
- CONVEZIONE : SI INNESCA SOLO DURANTE IL GIORNO E DOMINA.

VENTO DI GRADIENTE

CONSIDERIAMO ORA IL CAMPO DI PRESSIONI A FIANCO. ANCHE SE LA VELOCITÀ SEMBREREBBE NON CAMBIARE (EQUISPAZIATURA), POICHÉ LE LINEE SONO CURVE LA MASSA D'ARIA STA SUBENDO UNA ACCELERAZIONE.



SI ERA RICAVATA PER IL MOTO ORIZZONTALE

NOTA: L'EQUAZIONE COMPLETA È

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_g$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla_p \phi - f \hat{k} \wedge \mathbf{v}$$

(I)

PARLEREMO DI CIRCOLAZIONE CICLONICA QUANDO IL RAGGIO DI CURVATURA $R > 0$.

LAVORANDO INVECE IN COORDINATE NATURALI,

$$\underline{V} = V \hat{s}$$

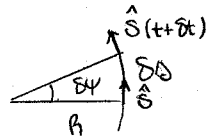
$$V > 0$$

$$\frac{D\underline{V}}{Dt} = \frac{D}{Dt} (V \hat{s}) = \hat{s} \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\hat{s}}{Dt}$$

$$\delta\psi = \frac{\delta s}{|R|}$$

$$\left| \frac{\Delta \hat{s}}{\Delta \psi} \right| \rightarrow |\hat{s}| = 1$$

$$\left| \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \right| = \frac{1}{|R|}$$



DISCLAIMER: QUESTA DIMOSTRAZIONE E' ININTELLIGIBILE, MA VISTA LA BANALITA' DEL RISULTATO NON MI SPORZEO' OLTRA DI DARLE SENSO COMPIUTO.

MA

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial s} \parallel \hat{m}$$

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial s} = \frac{\hat{m}}{R}$$

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{s}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{V}{R} \hat{m}$$

DA CUI

$$\left[\frac{D\underline{V}}{Dt} = \hat{s} \frac{DV}{Dt} + \hat{m} \frac{V^2}{R} \right]$$

* ACCELERAZIONE DI CORIOLIS

$$-f \hat{k} \wedge \underline{V} = -f V \hat{r} \wedge \hat{s} = -f V \hat{m}$$

* GRADIENTE DI PRESSIONE

$$-\nabla_r \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \hat{s} - \frac{\partial \phi}{\partial m} \hat{m}$$

IDENTIFICHIAMO QUINDI NELLA (I)

$$\begin{cases} \frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \frac{V^2}{R} = -\frac{\partial \phi}{\partial m} - fV \end{cases}$$

(II)

$$\frac{D\underline{V}}{Dt} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \hat{s} + \left(-\frac{\partial \phi}{\partial m} - fV \right) \hat{m}$$

INTRODUCIAMO LE SEMPLIFICAZIONI

$$1) \frac{\partial \phi}{\partial s} = f_0 \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (V = \text{cost.})$$

$$2) R = \text{cost.}$$

$$3) f = \text{cost.}$$

IL SISTEMA (II) SI RIDUCE ALLORA A

$$\frac{V^2}{R} = - \frac{\partial \phi}{\partial m} - fV$$

* CASO 1

$$\frac{V^2}{R} \ll - \frac{\partial \phi}{\partial m} - fV$$

(VERO PER $|R| \rightarrow \infty$)

* CASO 2

$$\frac{V^2}{R} \approx - fV$$

VALIDA SE $\frac{\partial \phi}{\partial m} \approx 0$: POICHE' CI ERA IMPOSTO $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$, QUESTO E' VERO SE IL CAMPO DI P E' UNIFORME.

* CASO 3

$$\frac{V^2}{R} \approx - \frac{\partial \phi}{\partial m} \gg fV$$

POICHE' $f = 2\Omega \sin \psi$ (E ALL'EQUATORE $f=0$), QUESTO E' VERO PER BASSE LATITUDINI (SE V E' PICCOLO LO SAREBBE ANCHE V^2) O COMUNQUE SE $R \rightarrow 0$.

② FLUSSO INERZIALE

$$\frac{V^2}{R} = - fV$$

$$V > 0$$

$$V = - fR \Rightarrow R < 0$$

NOTA: NEGLI OCEANI PUO' SUCCEDERE, PERCHE' LI' LA PRINCIPALE FORZA MOTTRICE NON E' ∇p MA L'ATTRITO DEL VENTO SULLA SUPERFICIE.

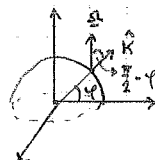


ANTICICLONICA
(ORARIO NELL'EMISFERA
NORD)

IN ATMOSFERA QUESTO NON PUO' SUCCEDERE: NON COMPARE ALCUNA FORZA MOTTRICE, MA CI SONO SOLO FORZE APPARENTI.

NOTA: CI STA PERCHE' IN PRESENZA DI CURVATURA, α CENTRIFUGA E' MOLTO PIU' GRANDE DI QUELLA LINEARE.

NOTA: E' VERO SE STO A LATITUDINE FISSA. OCCHIO CHE A ORIGINARE f_c NON E' LA CIRCOLAZIONE R , MA ANCORA SOLTANTO LA ROTAZIONE DELLA TERRA. SCRIVO $f_c = -f \hat{k} \cdot \hat{y}$, DOVE $f = 2\Omega \sin \psi$ TIENE CONTO DI $\hat{k} \cdot \hat{\Omega}$, ONDEO DELLA COMPONENTE DI $\hat{\Omega}$ LUNGO $\hat{k}$.



③

$$\frac{V^2}{R} = - \frac{\partial \phi}{\partial m} \Rightarrow V = \pm \sqrt{-R \frac{\partial \phi}{\partial m}}$$

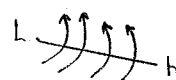
PERCHÉ V SIA REALE,

$$R > 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$$

$$R < 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$$

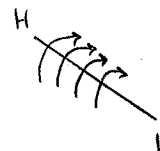


NOTA: IL SEGNO DI $\frac{\partial \phi}{\partial m}$ MI DICE DA CHE PARTE È LA BASSA P ($\nabla_\perp P = \rho \nabla_\perp \phi$ E SÌ, ϕ CRESCE CON P A Z COSTANTE!).



CICLONICO:

ANTICICLONICO, LOW P A SINISTRA.



ANTICICLONICO: CICLONICO, LOW P A DESTRA.

SONO ENTRAMBE POSSIBILI IN ATMOSFERA, MA

LA PRIMA È PIÙ PROBABILE (IL VENTO GEOSTROFICO HA LOW P A SINISTRA).

①

$$\frac{V^2}{R} = - \frac{\partial \phi}{\partial m} - fV$$

SI BILANCIANO

$$C_c = \frac{V^2}{R}$$

CENTRIFUGA

$$C_o = -fV$$

CORIOLIS

$$P = - \frac{\partial \phi}{\partial m}$$

PRESSIONE

$$C_c = P + C_o$$

$$V^2 + fRV + R \frac{\partial \phi}{\partial m} = 0$$

SE

$$V > 0, \quad \frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$$

$$V = - \frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m}}$$

STUDIAMO QUINDI COSA SUCCEDERÀ SE $R < 0$ (CIRCOLAZIONE

ANTICICLONICA, a) O SE $R > 0$ (CIRCOLAZIONE CICLONICA, c).

DISTINGUIAMO

a) $R < 0$: CIRCOLAZIONE ANTICICLONICA

$$a+) \frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$$

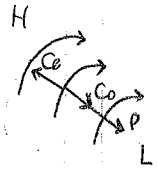
IL VENTO HA LA BASSA P A DESTRA (A DIFFERENZA DEL VENTO GEOSTROFICO):

$$|P| + |C_g| = |C_e|$$

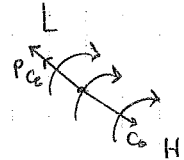
$$a-) \frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$$

STAVOLTA

$$|P| + |C_e| = |C_g|$$



(NELL'EMISFERO NORD)



NOTA: COME DISEGNO
C_g? ANCHE' STO
NELL'EMISFERO NORD E' A
DESTRA PERCHIE' C_g = -f\hat{r} \times \hat{r} \times \hat{r}
E \hat{r} E' SEMPRE IN PER
R > 0 O R < 0.

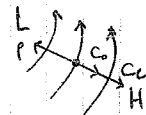
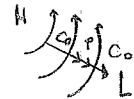
c) $R > 0$: CIRCOLAZIONE CICLONICA

$$c+) \frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$$

NON ESISTE (NON POSSONO BILANCIARSI).

$$c-) \frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$$

$$|P| = |C_e| + |C_g|$$



QUANDO'E' CHE SONO POSSIBILI?

$$a+) R < 0, \frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$$

$$-\frac{fR}{2} = \frac{f|R|}{2} > 0$$

$$\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m} = \frac{f^2 R^2}{4} + |R| \frac{\partial \phi}{\partial m} > \frac{f^2 R^2}{4}$$

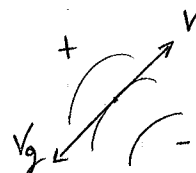
E VEDIAMO CHE

$$V_- = \frac{f|R|}{2} - \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} + |R| \frac{\partial \phi}{\partial m}} < \frac{f|R|}{2} - \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4}} = 0$$

N.A.

INVECE

$$V_+ = \frac{f|h|}{2} + \sqrt{\dots} > 0$$



CHE È ACCETTABILE, MA DA UN VENTO CHE SCORRE IN VERSO OPPOSTO A V_g . SI PARLA DI CIRCOLAZIONE ANOMALA.

a-) SI HANNO

$$R < 0, \frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$$

$$-\frac{fR}{2} = \frac{f|h|}{2} > 0 \quad \text{E} \quad \frac{f^2 R^2}{4} + |h| \frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$$

$$\frac{f^2 R^2}{4} > R \frac{\partial \phi}{\partial m} \Rightarrow R < \frac{4}{f^2} \frac{\partial \phi}{\partial m} < 0 \Rightarrow |h| > \frac{4}{f^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial m} \right|$$

CHE MI DA UN LIMITE INFERIORE A $|h|$: PIÙ AUMENTA $\left| \frac{\partial \phi}{\partial m} \right|$ E PIÙ LE LINEE DIVENTANO PIATTE. VICEVERSA SE R È PICCOLO IL VENTO È DEBOLE. CALCOLIAMO

$$V_- = \frac{f|h|}{2} - \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m}} > \frac{f|h|}{2} - \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4}} = 0$$

NOTA: OSSERVIAMO CHE UN LIMITE SIMILE NON ESISTE NEL CASO CICLONICO. L'ASIMMETRIA È DATA DALLA ROTAZIONE DELLA TERRA.

L'EQUILIBRIO DELLE FORZE SI HA SE

$$|P| + |C_c| = |C_o|$$

CON IL VENTO GEOSTROFICO AVEI AVUTO

$$|P| = |C_{og}|$$

$|P|$ È LA STESSA MENTRE $|C_{og}| = |C_o| - |C_c|$, QUINDI

$$|C_{og}| < |C_o| \quad fV_g < fV \Rightarrow \underline{V_g < V}$$

CALCOLIAMO ORA

$$V_+ = \frac{f|h|}{2} + \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m}} > 0$$

$$\underline{V_+ > V_- > V_g}$$

IL CHE CI DICE CHE V_- È PIÙ PROBABILE DI V_+ PERCHÈ PIÙ VICINA A V_g . V_+ CI DICE ALTA ANORMALE.

c+) $R > 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$: IRREALIZZABILE.

c-) $R > 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$

$$-\frac{fR}{2} < 0$$

$$V_- = -\frac{fR}{2} - \sqrt{\dots} < 0 \quad \text{No.}$$

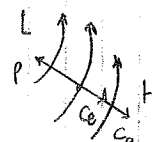
$$V_+ = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m}} > -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4}} = 0$$

PER LE FORZE

$$P = C_c + C_o \equiv C_{og}$$

$$C_o + C_c = C_{og}$$

$$C_{og} > C_o \quad fV_g > fV \quad \Rightarrow \quad V_g > V$$



NOTA: QUI SOTTO SCRIVO $V_g < 0 < V$ PER INDICARE CHE V_g SCORRE IN VERSO OPPOSTO A V .

RICAPITOLANDO,

$R < 0$ $\frac{\partial \phi}{\partial m} > 0$ ANTICLONICA BASSA

$$V_g < 0 < V$$

BASSA ANOMALA a+)

$R < 0$ $\frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$ ANTICLONICA ALTA

$$V_- > V_g > 0$$

ALTA REGOLARE

$$V_+ > V_-$$

ALTA ANOMALA a-)

$R > 0$ $\frac{\partial \phi}{\partial m} < 0$ CLONICA BASSA

$$V_+ < V_g$$

BASSA REGOLARE c-)

IN PRESENZA DI CURVATURA IL VENTO VERO V E' SOLO APPROSSIMATO DA V_g . TENENDO CONTO DELL'ACCELERAZIONE CENTRIFUGA ABBIAMO TROVATO IL VENTO DI GRADIENTE.

NOTA: PARLO DI "CLONICA BASSA" PER DIRE CHE AVVIENE ATTORNO A UN CENTRO DI BASSA PRESSIONE. E' REGOLARE SE SEGUE L'ANDAMENTO DI V_g , CHE HA SEMPRE LE BASSE P A SINISTRA: PER QUESTO IL VENTO GEOSTRAFICO HA CIRCOLAZIONE CLONICA ATTORNO A CENTRI DI BASSA PRESSIONE E VICEVERSA. NEL TERZO CASO L'"ALTA ANOMALA" SEGUE V_g MA E' MOLTO PIU' VELOCE.

VARIATIONE DI V_g CON LA QUOTA

* SUPPONIAMO CHE P NON VARI LUNGO I PIANI XY ,

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \quad \rightarrow \quad z = -H \ln \frac{P}{P_0}$$

CONSIDERIAMO UNO STRATO DI SPESORE

$$z_T - z_b = \Delta z = -H \ln \frac{P_T}{P_b}$$

MA SI ERA VISTO (EQUAZIONE IPSOMETRICA)

$$\Delta z = \frac{R_d}{g_0} \bar{T}_v \ln \frac{P_b}{P_T}$$

DEDUCIAMO CHE $\bar{T}_{T-b} = \text{cost.}$: LE ISOTERME SONO PARALLELE ALLE ISOBARE.

POSSO SCRIVERE

$$T = \text{cost.} \cdot P$$

$$f(P, T) = P(P)$$

SI PARLA DI ATMOSFERA BAROTROPICA.

IL VENTO GEOSTROFICO E' QUINDI NULLO :

$$\underline{V_g} = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \underbrace{\nabla_P z}_{=0} = 0$$

* SUPPONIAMO UN ANDAMENTO UN PO' PIU' COMPLICATO.

$$P = P_0 e^{-\frac{1}{H}(z - \alpha y)}$$

$$z - \alpha y = -H \ln \frac{P}{P_0}$$

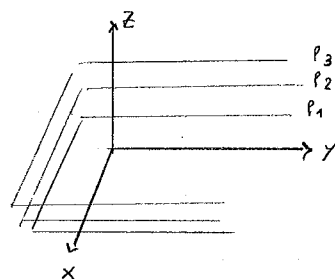
PRENDIAMO UNO STRATO,

$$(z_T - \alpha y) - (z_b - \alpha y) = -H \ln \frac{P_T}{P_0} + H \ln \frac{P_b}{P_0}$$

$$\Delta z = -H \ln \frac{P_T}{P_b}$$

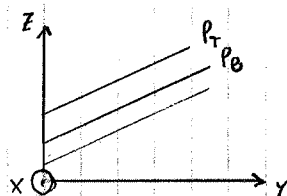
ANCORA TROVO $\Delta z = \text{cost.}$, DA CUI $\bar{T} = \text{cost.}$ E RICADO NEL CASO DI ATMOSFERA BAROTROPICA ANCHE SE I PIANI SONO INCLINATI.

TUTTAVIA IN QUESTO CASO $\underline{V_g}$ NON E' NULLO.



NOTA: OTTENGHI LO STESSO DIFFERENZIANDO $z(P)$ E INTEGRANDO TRA z_b E z_T . SE PERO' z_b, z_T SONO VICINI, IN PRATICA MI MUOVO SU UNA ISOBARA E $\bar{T}_v$ E' SEMPLICEMENTE LA SUA TEMPERATURA.

BAROTROPICA: $\nabla T = 0$ SU SUPERFICI A PRESSIONE COSTANTE. LE SUPERFICI ISOTERME NON INTERSECANO LE SUPERFICI ISOBARE.



P VARIA LUNGO y MA NON LUNGO x . INOLTRE I PIANI A P COSTANTE SONO ANCORA PARALLELI. SI PARLA DI "EQUIVALENT BAROTROPIC".

INFATTI

$$u_g = - \frac{g_0}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{g_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha y - H \ln \frac{p}{p_0} \right) = - \frac{g_0}{f} \alpha$$

NOTA: ERA

$$V_g = \frac{1}{f} \hat{k} \cdot \nabla p \phi = \frac{g_0}{f} \hat{k} \cdot \nabla p z$$

ABBIAMO V_g DIRETTO VERSO OVEST (ENTRANTE, PERCHÉ $\alpha > 0$) E INDIPENDENTE DALLA QUOTA.

NOTA: FUNZIONA ANCHE CON $\nabla_H p$
RICORDANDO $\frac{1}{H} = \frac{g}{pT}$ E $p = p_{AT}$.

* SUPPONIAMO ORA

$$z = + \alpha(p) \cdot y - H \ln \frac{p_0}{p}$$

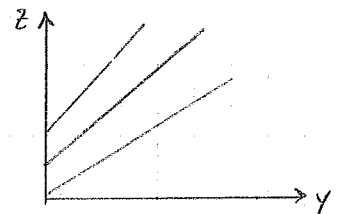
$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} < 0$$

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{H}(2 - \alpha(p) \cdot y)}$$

$$z_T - z_0 = \Delta z = [\alpha(p_T) - \alpha(p_0)] y - H \ln \frac{p_T}{p_0} = \Delta z(y)$$

$$\bar{T}_{0,T} = \bar{T}_{0,T}(y)$$

$$u_g = - \frac{g_0}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\alpha(p) g_0}{f} = u_g(p)$$



LE SUPERFICI ISOBARE NON SONO PIÙ PARALLELE.

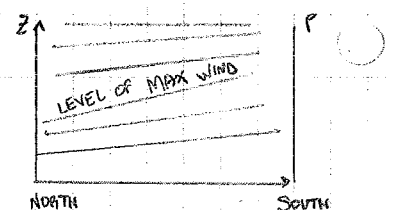
DOVE NOTIAMO CHE u_g NON È LO STESSO A TUTTE LE QUOTE: V_g PRESENTA UNO SHEAR VERTICALE.

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = - \frac{g_0}{f} \frac{\partial \alpha}{\partial p} > 0$$

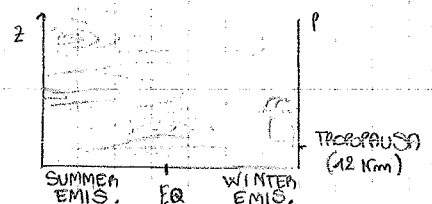
NOTA: NELL'EMISFERA NORD FINO ALLA TROPOPAUSA SI HA $\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{z=const} < 0$, QUINDI

$$u_g = - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} > 0 \text{ (WESERLY)}$$

A RIANCO L'ANDAMENTO REALE IN TROPOSFERA: u_g CRESCE FINO ALLA TROPOPAUSA PER POI DIMINUIRE (ATMOSFERA BAROCLINICA).

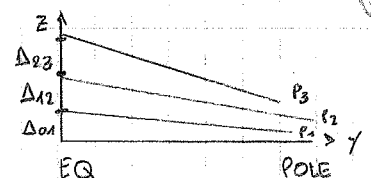


DATA p_0 A LIVELLO TERRA, PER ANDARE A p_1 FACCIO UN SALTO $\Delta z \propto \bar{T}$; ALL'EQUATORE IL SALTO È PIÙ GRANDE CHE NON AI POLI.



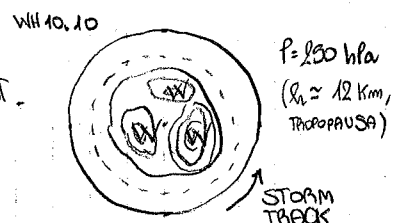
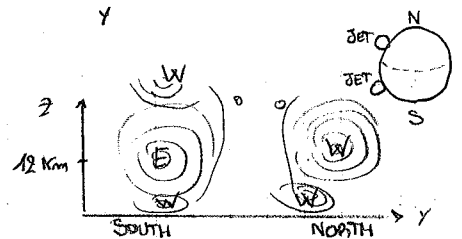
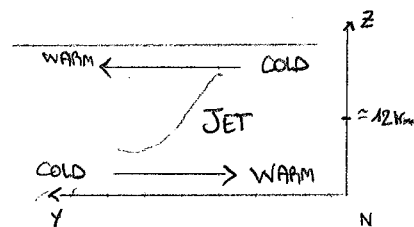
MANO A MANO CHE SALGO PER SALTI DI Δp UGUALI L'INCLINAZIONE DELLE LINEE DI PRESSIONE CRESCE E QUINDI u_g È PIÙ GRANDE (È PROPORZIONALE ALL'INCLINAZIONE DELLE LINEE DI PRESSIONE).

NOTA: DORO LA TROPOPAUSA, L'ARIA SUL POLO È PIÙ CALDA DI QUELLA SULL'EQUATORE!



DOPO LA TROPOPAUSA $T(y)$ SI "INVERTE" E QUINDI u_g DECRESCIE. IN CORRISPONDENZA DEL MASSIMO DI u_g ABBIAMO I JET STREAMS (u_g È LA COMPONENTE ZONALE DI V_g).

NEL GRAFICO, LINEE A $u = \text{cost.}$ VISTE DAL POLO NORD (TRATTEGGATE QUELLE NEGATIVE, OSSIA EASTERLY). NON SONO UNIFORMI PER LA PRESENZA DEI CONTINENTI, MA CI SONO CENTRI IN CUI SI FORMANO CICLONI CHE VANNO A EST.



• VENTO TERMICO

C'È QUINDI UNA RELAZIONE TRA LO SPESSORE TRA DUE LIVELLI E LA VARIAZIONE DI u_g CON LA QUOTA: SCRIVIAMOLA IN FORMULE.

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{1}{g_0} \frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{1}{p g_0} = - \frac{R_d T_v}{g_0 p}$$

NOTA: HO USATO $\frac{\partial p}{\partial z} = -p g_0$.
NEL SEGUITO SOTTINTENDO R_d, T_v .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(- \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = - \frac{g_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \\ &= - \frac{g_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{R T}{g_0 p} \right) = \frac{R}{f p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \end{aligned}$$

NOTA: PER DEFINIZIONE DI u_g , LA DERIVATA IN dy VA PRESA A p COSTANTE.
TRA L'ALTRO, SE L'ATMOSFERA NON È BAROCLINICA, dT/dy PRESA SU UNA SUPERFICIE ISOBARA È SEMPRE NULLA.

$$\frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_p$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = - \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_p$$

NOTA: $\frac{dp}{d \ln p} = \frac{dp}{p}$

QUESTE ULTIME DUE RISCRIVIBILI COME

$$- \frac{\partial V_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f} \hat{k} \wedge \nabla_r T$$

DETTA EQUAZIONE DEL VENTO TERMICO.

USANDO $p = p_0 e^{-z/H}$ (SEMPRE VERA IN FUNZIONE DI z PERCHÉ $\frac{\partial p}{\partial z} = -p g_0$),

$$- \frac{\partial V_g}{\partial \ln p} \propto \frac{\partial V_g}{\partial z} \propto \nabla_r T \propto \nabla_r z$$

NOTA: PUO' DARSÌ INVECE CHE p VARI ALTRIMENTI CON x E y .

INTEGRANDO L'EQUAZIONE DEL VENTO TERMICO HO

$$\int_{u_g(p_0)}^{u_g(p_1)} du_g = \frac{R}{f} \int_{p_0}^{p_1} \frac{\partial T}{\partial y} d \ln p$$

$$u_g(p_1) - u_g(p_0) = - \frac{R}{f} \int_{p_1}^{p_0} \frac{\partial T}{\partial y} d \ln p$$

E SIMILMENTE PER v_g

$$v_g(p_1) - v_g(p_0) = \frac{R}{f} \int_{p_1}^{p_0} \frac{\partial T}{\partial x} d \ln p$$

DEFINIAMO QUINDI IL VETTORE VENTO TERMICO DI COMPONENTI

$$u_T = u_g(p_1) - u_g(p_0)$$

$$v_T = v_g(p_1) - v_g(p_0)$$

AVIAMO DEFINITO LA TEMPERATURA MEDIA VERTICALE

$$\int_{p_0}^{p_1} T d \ln p = \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

QUINDI

$$u_T = - \frac{R}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

$$v_T = \frac{R}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$$

DA CONFRONTARSI CON

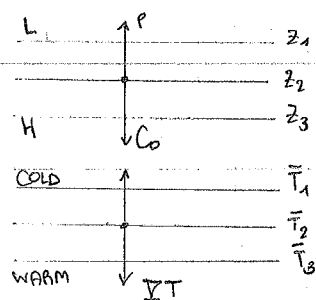
$$u_g = - \frac{g_0}{f} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$v_g = + \frac{g_0}{f} \frac{\partial z}{\partial x}$$

CHE SONO LE EQUAZIONI DEL VENTO GEOSTROFICO, CON PASSAGGI ANALOGHI,

$$\underline{V}_g = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \underline{\nabla}_p z \quad \left(= \frac{1}{\rho f} \hat{k} \wedge \underline{\nabla}_H p \right)$$

$$\underline{V}_T = \frac{R}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \hat{k} \wedge \underline{\nabla}_p \bar{T}$$



ANALOGAMENTE AL BILANCIO GEOSTROFICO (FORZE DOVUTE AL GRADIENTE DI P E A CORIOLIS C_0), IN EQUILIBRIO DI VENTO TERMICO OSSERVIAMO UNA "FORZA" (NEL SENSO CHE BILANCIA ∇T)

$$F = - \frac{R}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \underline{V}_T$$

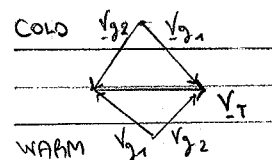
ABBIAMO QUINDI TRE BILANCI FONDAMENTALI:

- GEOSTROFICO
- IDROSTATICO
- DI VENTO TERMICO.

NOTA: LE LINEE ISOTERME SONO LE INTERSEZIONI DELLE SUPERFICI ISOTERME CON LE ISOBARE. QUESTE ESISTONO SOLO SE L'ATMOSFERA E' BAROCLINICA.

IL VENTO TERMICO HA SEMPRE IL "FREDDO" A SINISTRA.

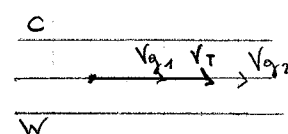
$$V_T = V_{g2} - V_{g1}$$



V_T IN FIGURA E' DETERMINATO DALLA ROTAZIONE DEL V_g IN SENSO ANTIOARIO (SOPRA) O OARIO (SOTTO) NEL SALIRE. NEL PRIMO CASO V_T PORTA ARIA CALDA E VICEVERSA:

- ANTIOARIO: ANVEZIONE FREDDA (CICLONICO)
- OARIO: ANVEZIONE CALDA (ANTICICLONICO)

E' POSSIBILE UN TERZO CASO SENZA ANVEZIONE.



POICHE' V_T E' LA DIFFERENZA DEI V_g A DIVERSE ALTEZZE, AD ALTEZZA INTERMEDIA AVVIENE IL TRASPORTO DI ARIA E GUARDANDO DOVE SONO W, C PRIMA E DOPO DEDUCO CHE C'E' STATA ANVEZIONE.

LA NOSTRA ATMOSFERA E' IN GENERE BAROCLINICA (IL VENTO GEOSTROFICO CAMBIA CON LA QUOTA).

NOTA: PER CAPIRE LA ANVEZIONE, NOTA CHE V_{g1} E V_{g2} INCROCIANO LE ISOTERME NELLO STESSO VEASO: C'E' STATO MOVIMENTO DI VENTO CALDO/FREDDO.

VELOCITA' VERTICALE

FINORA L'AVEVAMO TRASCURATA PERCHE' IN EFFETTI E' PICCOLA.

SI ERANO VISTE, IN COORDINATE ISOBARICHE,

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0$$

CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$$w \approx -\rho g w \quad \left(= \frac{Dp}{Dt} \right)$$

VELOCITA' VERTICALE

POSSO RICOSTRUIRE DA QUESTE

$$\frac{\partial w}{\partial p} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \underbrace{\nabla_H \cdot \underline{V}}_{\text{CONVERGENZA}}$$

$$w(p_2) - w(p_1) = - \int_{p_1}^{p_2} \nabla_H \cdot \underline{V} \, dp$$

$$w(p) = - \int_{p_0}^p \nabla_H \cdot \underline{V} \, dp$$

INFATTI SI PUO' ASSUMERE $w(p_0) = 0$ AL T.O.A. ; TUTTAVIA

$$\nabla_H \cdot \underline{V} = \nabla_H \cdot (\underline{V}_g + \underline{V}_a) = \nabla_H \cdot \underline{V}_a$$

QUINDI IN REALTA' QUESTO NON E' UN GRAN METODO PER CALCOLARE w . SI VEDE PERO' CHE SE C'E'

- CONVERGENZA : L'ARIA SALE ($w < 0$) ← BASSA p (VEDI NOTA)
- DIVERGENZA : L'ARIA SCENDE ($w > 0$) ← ALTA p

SE AD ESEMPIO PRODUCO INQUINAMENTO D'INVERNO E CAPITANO GIORNATE DI ALTA p , QUELLO RESTA LI'. A QUESTO EFFETTO SINOTTICO SI OPPORREBBE LA CONNEZIONE LOCALE, MA NON DI INVERNO QUANDO IL TERRENO E' FREDDO.

POSSO INFINE STIMARE

$$w \sim 10^{-2} \text{ m/s} = 10^0 \text{ cm/s} = 3.6 \text{ m/h}$$

NOTA: TRA POCO SI AFFERMA CHE, SE C'E' CONVERGENZA ($\nabla_H \cdot \underline{V} < 0$), L'ARIA SALE ($w < 0$). IL PROBLEMA DI SEGNI SI RISOLVE RICORDANDO CHE LA DIREZIONE "GIUSTA" IN CUI INTEGRARE E' PER z CRESCENTI (INFATTI HO USATO $\partial/\partial z = -\partial/\partial p$ PER DERIVARE L'EQUAZIONE DELLA CONSERVAZIONE DELLA MASSA). ORA QUESTO FENOMENO HA DEFINITO $p_0 = 0$ AL T.O.A. E INTEGRA PER p CRESCENTI, MA SALTA FUORI UN SEGNO MENO PERCHÉ, DIETRO LE QUINTE, STIAMO INTEGRANDO IN GIU' PER z DECRESCENTI.

NOTA: RICORDI LA CELLA DI HADLEY? SULL' EQUATORE I VENTI CONVERGONO, QUINDI L'ARIA SALE E SI RAFFREDDA; L'ACQUA CONDENSA E PIOVE (INFATTI IL MASSIMO DI PRECIPITAZIONI E' SULL' EQUATORE).

NOTA: IL VENTO GEOSTROFICO HA LE BASSE p A SINISTRA E QUINDI GIRA IN SENSO ANTIORARIO ATTORNO A CENTRI DI BASSA p . SI E' VISTO PERO' CHE IL VENTO VERO DEVIARE VERSO IL CENTRO PERCHÉ, A CAUSA DELL'ATTRITO E DELLA VISCOSITA', LA VELOCITA' CALA E LA FORZA DI CORIOLIS NON E' PIU' IN GRADO DI BILANCIARE IL GRADIENTE DI PRESSIONE. QUESTO SPIEGA PERCHÉ SI OSSERVA CONVERGENZA IN REGIONI DI BASSA PRESSIONE.

CIRCOLAZIONE

AVIAMO DEFINITO

$$C = \oint \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

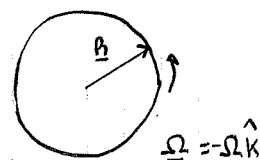
POSITIVA SE IL CIRCUITO E' PERCORSO IN SENSO ANTICLOCKWISE ($C > 0$ CICLONICA NELL' EMISFERO NORD).

CONSIDERIAMO UN ANELLO DI FLUIDO IN ROTAZIONE RIGIDA. DEFINIAMO LA DIREZIONE $\hat{s}$ TANGENTE E $\hat{m}$ ORTOGONALE A SINISTRA COSI' CHE

$$\underline{b} = -\hat{m} R$$

ALLORA

$$\underline{v} = \underline{\omega} \wedge \underline{b} = \omega R (+\hat{k} \wedge \hat{m}) = \omega R \hat{s}$$



$$d\underline{s} = R d\lambda \hat{s}$$

NOTA: SURFAFLO $R d\lambda$,
 $\oint \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint v ds = v \oint ds$

$$C = \oint \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint \omega R \hat{s} \cdot R d\lambda \hat{s} = \oint \omega R^2 d\lambda = 2\pi R^2 \omega = 2\omega A$$

LAVORANDO NEL SISTEMA INERZIALE, CALCOLIAMO L'INTEGRALE SU UN CIRCUITO CHIUSO SUI DUE MEMBRI DELL'EQUAZIONE DI EULERO.

$$C_a = \oint \underline{v}_a \cdot d\underline{s}$$

CIRCOLAZIONE ASSOLUTA

$$\frac{D_a \underline{v}_a}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p + \underline{g}$$

$$\oint \frac{D_a \underline{v}_a}{Dt} \cdot d\underline{s} = -\oint \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p \cdot d\underline{s} + \oint \underline{g} \cdot d\underline{s}$$

MA

$$\underline{g} \cdot d\underline{s} = -g \hat{k} \cdot d\underline{s} = -g dz = -\frac{\partial \phi}{\partial z} dz = -d\phi$$

$$\oint d\phi = 0$$

INOLTRE OSSERVIAMO CHE

$$\frac{D_a}{Dt} (\underline{v}_a \cdot d\underline{s}) = \frac{D}{Dt} (\underline{v}_a \cdot d\underline{s}) = \frac{D \underline{v}_a}{Dt} \cdot d\underline{s} + \underline{v}_a \cdot \frac{D(d\underline{s})}{Dt}$$

E' UNO SCALARE,
NON DIPENDE DAL OR

$$\delta(d\underline{s}) = \delta(dx) \hat{i} + \delta(d\tau) \hat{\phi} + \delta(dz) \hat{k}$$

COME ABBIAMO VISTO STUDIANDO LO STRAIN RATE,

$$\delta(dx) = du \, \delta t$$

$$\delta(d\underline{s}) = du \, \delta t \, \hat{i} + dv \, \delta t \, \hat{j} + dw \, \delta t \, \hat{k}$$

$$\frac{\delta(d\underline{s})}{\delta t} = du \, \hat{i} + dv \, \hat{j} + dw \, \hat{k} = d\underline{V}_a \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} \frac{D(d\underline{s})}{Dt}$$

DA CUI

$$\frac{D\underline{V}_a}{Dt} \cdot d\underline{s} = \frac{D}{Dt} (\underline{V}_a \cdot d\underline{s}) - \underline{V}_a \cdot d\underline{V}_a$$

$$= \frac{D}{Dt} (\underline{V}_a \cdot d\underline{s}) - \frac{1}{2} dV_a^2$$

$$\oint \frac{D\underline{V}_a}{Dt} \cdot d\underline{s} = \oint \frac{D(\underline{V}_a \cdot d\underline{s})}{Dt} - \underbrace{\oint \frac{1}{2} dV_a^2}_0 = \oint \frac{D}{Dt} (\underline{V}_a \cdot d\underline{s})$$

SE IL CIRCUITO NON CAMBIA NEL TEMPO,

$$\frac{D}{Dt} \left(\oint \underline{V}_a \cdot d\underline{s} \right) = \oint \frac{D\underline{V}_a}{Dt} \cdot d\underline{s}$$

$$\frac{D}{Dt} C_a = - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\underline{s} = \underbrace{- \oint \frac{1}{\rho} dp}_{\text{INTEGRALE BARICLINICO}}$$

CIRCOLAZIONE ASSOLUTA

DETTO TEOREMA DELLA CIRCOLAZIONE.

SE L'ATMOSFERA E' BAROTROPICA OTTENGO

$$\frac{D}{Dt} C_a = 0$$

DETTO TEOREMA DELLA CIRCOLAZIONE DI KELVIN.

INFATTI SE L'ATMOSFERA E' BAROTROPICA LE SUPERFICIE ISOBARE SONO PARALLELE ALLE ISOTERME E

$$\nabla p \propto \nabla T \propto \nabla \rho$$

L'INTEGRANDO VALE ALLORA

$$\frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{s} \propto \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{s} = \frac{dp}{\rho} = d\ln p$$

QUINDI

$$\oint \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{s} \propto \oint d\ln p = 0$$

* TUTTAVIA LA CIRCOLAZIONE ASSOLUTA C_a NON CI AIUTA MOLTO.

METTIAMOCI IN UN SISTEMA ROTANTE; POICHE' $\underline{V}_a = \underline{V} + \underline{V}_e$

↑ VISTO SULLA TERRA
← ROTAZIONE DEL SISTEMA TERRA

$$C_a = \oint \underline{V} \cdot d\vec{s} + \oint \underline{V}_e \cdot d\vec{s} = C + C_e$$

DAL TEOREMA DI STOKES

$$\oint \underline{V}_e \cdot d\vec{s} = \iint_A (\nabla \wedge \underline{V}_e) \cdot \hat{m} dA$$

$$\underline{V}_e = \underline{\Omega} \wedge \underline{r}$$

SI CALCOLA FACILMENTE

$$\nabla \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{r}) = 2 \underline{\Omega}$$

PERCIO'

$$\oint \underline{V}_e \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{r}) \cdot \hat{m} dA \approx \iint_A 2 \underline{\Omega} \cdot \hat{r} dA$$

$$= 2 \Omega \sin \varphi \iint_A dA = 2 \Omega \sin \varphi A = f A$$

POSSO SCRIVERE

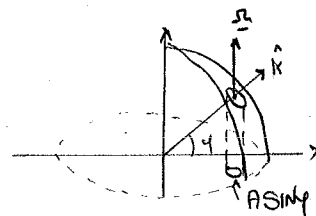
$$\underline{C_e} = f A$$

$$A' = A \sin \varphi$$

DA CUI

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{DC_a}{Dt} - \frac{DC_e}{Dt} = \frac{DC_a}{Dt} - 2 \Omega \frac{DA'}{Dt}$$

$$= \frac{DC_a}{Dt} - \frac{D}{Dt} (f A)$$



ESEMPIO $\left(\frac{DC_a}{Dt}\right)$

ANELLO DI ATMOSFERA $R = 100 \text{ Km}$ ALL' EQUATORE

$$V_\theta = 0, \quad \psi = 0, \quad \rho = \text{cost.} \quad (\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1})$$

ALLORA

$$C_{eq} = 0 = C_a - 2\Omega A' = C_a - 2\Omega A \sin \psi = C_a$$

LA CIRCOLAZIONE E' DOVUTA SOLO A QUELLA ASSOLUTA.

SE CI SPOSTIAMO AI POLI PARTENDO DA $V_\theta = 0$ ($C_a = 0$) LUNGO UN' ISOBARA,

$$\frac{DC_a}{Dt} = - \oint_{\Gamma=0} \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_a = 0$$

$$\Delta C = C_{polo} - C_{eq} = C_{polo}$$

$$\equiv \underbrace{\Delta C_a}_{=0} - 2\Omega A' = -2\Omega A \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = -2\Omega A$$

$$C_{polo} = -2\Omega A$$

ONERO LA VELOCITA' TANGENZIALE ORA E' NON NULLA, RICAVIAMOLA:

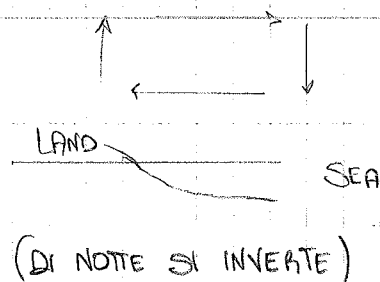
$$C_{polo} \equiv \oint V_{polo} \cdot d\vec{s} = V_{polo} \oint d\vec{s} = V_{polo} 2\pi R$$

$$-2\Omega \pi R^2 \equiv V_{polo} 2\pi R \quad \Rightarrow \quad V_{polo} = -\Omega R \approx -7.3 \text{ m/s}$$

SE STO SULLA TERRA VEDO CHE PORTANDO UN ANELLO DALL' EQ. AL POLO QUESTO SI METTE A GIRARE (IN REALTA' E' LA TERRA A GIRARGLI ATTORNO). NOTA CHE LA DIREZIONE E' ANTICICLONICA (V. FOCUS).

ESEMPIO: BREZZE $\left(\frac{DC_a}{Dt}\right)$

BREZZA DI MARE (DI GIORNO) E BREZZA DI TERRA (NOTTE). A ROMA LA BREZZA DI MARE SI CHIAMA PONENTINA PERCHE' VIENE DA OVEST.



(GRAFICA SODAR, CHE MANDA IMPULSI AUSTICI 4000 KHz RIFLESSI DAGLI STRATI TERMICAMENTE INSTABILI E DOPPLER-SHIFTATI IN BASE A ψ).

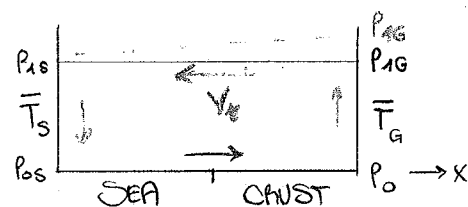
$$① \quad \bar{T}_S = \bar{T}_G$$

$$p_{0S} = p_{0G}, \quad p_{1S} = p_{1G}$$

$$② \quad \bar{T}_G > \bar{T}_S$$

$$p_{1G} > p_{1S} \Rightarrow \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z > 0$$

$$③ \quad p_{0S} > p_{0G} \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 < 0$$



NOTA: IL MODO MIGLIORE DI VEDERLO E' DALL' EQUAZIONE IPSONETRICA,

$$z(p_1) - z(p_0) = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_0}{p_1}$$

(INFATTI HO PORTATO ARIA DALLA TERRA AL MARE → PIU' MASSA → PIU' P).

SU QUESTO CIRCUITO

$$\frac{DC}{dt} = - \oint \frac{dr}{p} = - \oint RT \frac{dp}{p} = - \oint RT d \ln p$$

$$= - \int_{p_0}^{p_1} R \bar{T}_G d \ln p - \int_{p_1}^{p_0} R \bar{T}_S d \ln p = R \ln \frac{p_0}{p_1} (\bar{T}_G - \bar{T}_S)$$

(SUI TRATTI "ORIZZONTALI" L'INTEGRALE E' NULLO). ESPRIMENDO

$$C = SY$$

$$S = 2(L+h)$$

NOTA: E' NULLO PERCHÉ NON SONO "ORIZZONTALI": MI FACCIO FURBO E SEGUO LE ISOBARE ($dp=0$).

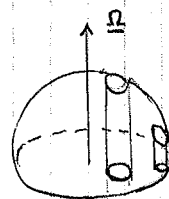
OTTENGO

$$\frac{DC}{dt} = \frac{D}{dt} [2(L+h)Y] = 2(L+h) \frac{DY}{dt}$$

$$\frac{DY}{dt} = \frac{R \ln(p_0/p_1)}{2(L+h)} (\bar{T}_G - \bar{T}_S)$$

SUPPONENDO $L = 20 \text{ km}$, $h = 1 \text{ km}$, $\Delta \bar{T} = 10^\circ \text{C}$, $p_0 = 1000 \text{ hPa}$, $p_1 = 900 \text{ hPa}$,

$$\frac{DY}{dt} \approx 7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



• FOCUS: SULL' ESEMPIO $\frac{DC}{dt}$

E' UN PROBLEMA DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE LUNGO Ω E COME TALE RIGUARDA SOLO LE PROIEZIONI DELLE AREE SUL PIANO SU CUI GIACE L'EQUATORE. VISTO DA FUORI, UN ANELLO CHE GIRA CON LA TERRA SI ALLARGA DI COLPO E PERDE IN VELOCITA' ANGOLARE; VISTO DALLA TERRA, E' COME SE AVESSE ACQUISTATO UNA COMPONENTE DI ROTAZIONE ANTICLONICA.

VORTICITA'

$$\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$$

DEFINIAMO VORTICITA' ASSOLUTA

$$\underline{\omega}_a = \nabla \wedge \underline{v}_a$$

E VORTICITA' RELATIVA (NEL SISTEMA NON INERZIALE)

$$\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{v}$$

IN CARTESIANE

$$\underline{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

L'ANALISI DI SCALA DA'

$$\frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{\partial w}{\partial y} \sim \frac{W}{L} \sim 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{\partial v}{\partial z} \sim \frac{U}{H} \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

PERCIO'

$$\omega_x \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_y \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_z \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

POSSIAMO TRASCUARE IL TERMINE VERTICALE? A PARTE FENOMENI
COME I FRONTI, I FENOMENI ATMOSFERICI AVENGONO SUL PIANO
XY E QUINDI E' PROPRIO ω_z A INTERESSARCI (ANCHE SE PICCOLE
INCLINAZIONI FANNO SUBENTRARE ω_{x-y} DANDO CONTRIBUTI
IMPORTANTI). INDICHIAMO CON

$$\eta = \frac{\partial v_a}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial y} = (\underline{\omega}_a)_z$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = (\underline{\omega})_z$$

COME LE LEGO?

$$\underline{V}_a = \underline{V} + \underline{V}_e$$

$$(\underline{\nabla} \wedge \underline{V}_a)_z = \eta$$

$$(\underline{\nabla} \wedge \underline{V})_z = \zeta$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{V}_e = 2 \underline{\Omega}$$

$$2 \hat{k} \cdot \underline{\Omega} = 2 \Omega \sin \theta = f$$

DA CUI ($\underline{\nabla} \wedge$ E' LINEARE)

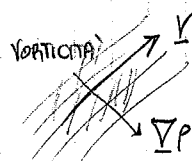
$$\eta = \zeta + f$$

$$f \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \quad \zeta \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

E' PER QUESTO CHE NELL'EMISFERA NORD (DOVE $f > 0$) SI HA $\eta > 0$.

RICORDIAMO CHE

VORTICITA' = SHEAR + ROTAZIONE



* CHE RELAZIONE C'E' TRA CIRCOLAZIONE E VORTICITA'? SI E' VISTO ($C_c = fA$) CHE VALE

$$f = \frac{\delta C_c}{\delta A}$$

E SI DIMOSTRA CHE SIMILMENTE

$$\zeta = \frac{\delta C_a}{\delta A}$$

$$\eta = \frac{\delta C_a}{\delta A}$$

CHI SONO I FATTORI CHE FANNO VARIARE QUESTE QUANTITA'?

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \hat{k} \cdot \left(\underline{\nabla} \wedge \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{\nabla} v \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{\nabla} u \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v$$

PRENDO LA DIFFERENZA TERMINE A TERMINE.

CONSIDERANDO

$$\eta = \zeta + f = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

OTTENGO

$$\frac{D\eta}{Dt} = \underbrace{-\eta \nabla_H \cdot \underline{V}}_{\text{CONVERGENZA (PATTINATORE CHE APRE LE BRACCIA)}} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}_{\text{GENERAZIONE BAROCLINICA}} + \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{\text{VARIATIONE DEL VENTO VERTICALE}}$$

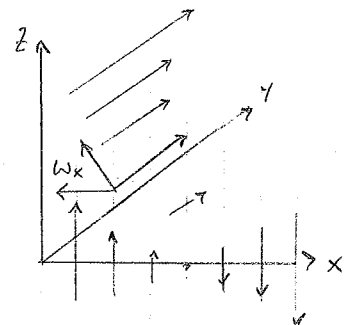
$\underbrace{\frac{D\eta}{Dt}}_{\text{VARIAZ. VORTICITA' (ANALOGO AL MOMENTO ANGOLARE)}} \quad \underbrace{-\eta \nabla_H \cdot \underline{V}}_{\text{CONVERGENZA (PATTINATORE CHE APRE LE BRACCIA)}} \quad \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}_{\text{GENERAZIONE BAROCLINICA}} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{\text{VARIATIONE DEL VENTO VERTICALE}}$

$\uparrow$ NON E' UNA SORGENTE MA SOLO UN RINFORZO
 $\uparrow$ PRODUCE VORTICITA'

USO QUESTA EQUAZIONE PER FARE PREVISIONI (SI E' VISTO CHE NOTA η RICOSTRUISCO IL CAMPO DI VELOCITA').

SUPPONIAMO COME A FIANCO CHE $\underline{V} = V \hat{y}$ E CHE CRESCA CON LA QUOTA:

$$w_x = - \frac{\partial w}{\partial z} < 0$$



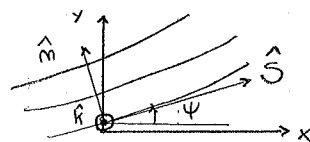
SUPPONIAMO INOLTRE $\frac{\partial w}{\partial x} < 0$: ALLORA IL VENTO TENDE A RUOTARE E SI GENERA VORTICITA'.

RIASSUNTO: DINAMICA ATMOSFERICA

* CONCETTI INTRODUTTIVI

- SCALE: MICROSCALA, MESOSCALA, SINOTTICA, PLANETARIA
- FLUIDO VS SOLIDO: DEFORMAZIONI CON CUI REAGISCONO ALLE FORZE.
- LINEE DI FLUSSO: TANGENTI A $\underline{V}$, NON SI INCONTRANO, PIU' ATTE SE $\underline{V} \gg$.
- TRAIETTORIE: PERCORSI DELLE MASSE D'ARIA (SE STAZIONARIO, $\equiv$ STREAMLINES).
- STREAKLINES: POSIZIONI DELLE PARTICELLE PASSATE PER UN DATO PUNTO.

* COORDINATE NATURALI



- SHEAR $-\frac{\partial v}{\partial u}$ $\rightarrow \rightarrow$
- CURVATURA $v \frac{\partial v}{\partial s}$ $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$
- DIVERGENZA $v \frac{\partial v}{\partial m}$ $\rightarrow \rightarrow$
- STRETCHING $\frac{\partial v}{\partial s}$ $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

- VORTICITA' $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{k} \cdot (\nabla \wedge \underline{V})$
- DIVERGENZA $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla_H \cdot \underline{V}$

SHEAR + CURVATURA

DIVERGENZA + STRETCHING

- DEFORMAZIONE $\begin{cases} \text{STRETCHING} \\ \text{SHEARING} \end{cases}$ $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$
 $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

* TASSI DI DEFORMAZIONE

- NORMAL STRAIN RATE

$$\frac{1}{\delta t} \frac{d(\delta x_1)}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

- VOLUME STRAIN RATE

$$\frac{1}{\delta V} \frac{\partial(\delta V)}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \underline{u} = \text{Tr}(\nabla \underline{u}) = \text{Tr} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \nabla : (\underline{e}_{ij}) = \sum_{ij} \delta_{ij} e_{ij}$$

~ GRADIENTE DI VELOCITA'

- SHEAR STRAIN RATE

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

TENSORE TASSO DI DEFORMAZIONE (SIMMETRICO)

* ROTAZIONE

$$\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$$

$$\zeta = (\underline{\omega})_z$$

VORTICITÀ

$$\Gamma = \oint \underline{u} \cdot d\underline{s} = \int_V (\nabla \wedge \underline{u}) \cdot d\underline{A} = \int_V \underline{\omega} \cdot d\underline{A} \quad \text{CIRCOLAZIONE}$$

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$d\underline{u} = (\nabla \otimes \underline{u}) \cdot d\underline{x}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \omega_k$$

TENSORE ROTAZIONE (ANTISIMMETRICO)

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ijk} \omega_k$$

$$d\underline{u} = \hat{e} \cdot d\underline{x} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \wedge d\underline{x}$$

=>

$$du_i = \left(e_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \omega_k \right) dx_j$$

* DERIVATE E ANNESSIONE

APPROCCIO LAGRANGIANO: FISSO $\underline{x}_0$ PER UN GRUPPO DI MOLECOLE E LE SEGUO

$$\frac{dA}{dt}$$

$A_{\underline{x}_0}$

DERIVATA SOSTANZIALE

APPROCCIO EULERIANO: MISURA IN UN VOLUME CHE SI SPOSTA IN GIRO CON VELOCITÀ $\underline{v}$.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{VARIATIONE LOCALE}} + \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla A}_{\text{VARIATIONE DOLUTA ALLO SPOSTAMENTO DEL VOLUME}}$$

SE MI SPOSTO CON $\underline{v} = \underline{V}$ DEL FLUIDO,

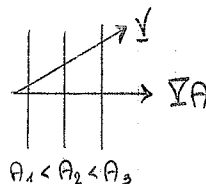
$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{\underline{v}=\underline{V}} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla A$$

DA CUI

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dt} - \underline{V} \cdot \nabla A$$

ANNESSIONE

SE LA PROPRIETÀ A NON CAMBIA PER LE MOLECOLE ($\frac{dA}{dt}=0$), LA VARIATIONE LOCALE È DOLUTA AL FATTO CHE STO PORTANDO FLUIDO CON A PIÙ PICCOLA NEL PUNTO IN CUI STO FACENDO LA MISURA.



* CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{V} = 0$$

SE IL FLUSSO È STAZIONARIO ($\partial/\partial t = 0$) È ANCHE OMogeneo ($\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0$).

SE IL FLUSSO È INCOMPRESSIBILE ($D\rho/Dt = 0$) È ANCHE SOLENOIDALE ($\nabla \cdot \underline{V} = 0$).

* MOTI VERTICALI

BILANCIO IDROSTATICO

LA TERZA COMPONENTE DI NAVIER-STOKES DA' IN PRIMA APPROSSIMAZIONE

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

COORDINATE ISOBARICHE

VOGLIO SCRIVERE $\underline{V}_g$ SENZA DOVER RICORRERE ALLA PRESSIONE. SI DIMOSTRA CHE

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = g_0 \nabla_r z = \nabla_r \phi$$

$$\underline{V}_g = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_r z$$

VELOCITA' VERTICALE ISOBARICA

$$w = \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{V}_H \cdot \nabla_H p - \rho g w \approx -\rho g w$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial p}$$

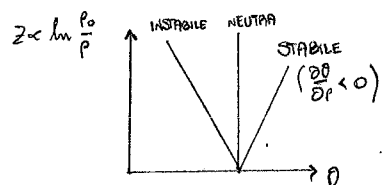
POSSO RISCRIVERE COSI' NAVIER-STOKES. LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA DA'

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial w}{\partial p} = 0$$

* EQUAZIONE DELL' ENERGIA TERMODINAMICA

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \underbrace{\underline{V}_H \cdot \nabla_H T}_{\text{AVVEZIONE ORIZZONTALE}} - \underbrace{\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} w}_{\text{AVVEZIONE VERTICALE}} + \underbrace{\frac{J}{C_p}}_{\text{IMMISSIONE DI CALORE}}$$

VARIAZ. TEMPORALE



L'ATMOSFERA SI SCALDA SE

- a) ATMOS. STABILE ($\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$) E L'ARIA SALE ($w < 0$)
 b) ATMOS. INSTABILE ($\frac{\partial \theta}{\partial p} > 0$) E L'ARIA SCENDE ($w > 0$).

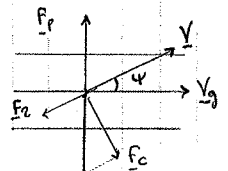
* FORZE VISCOSE

GLI ATTRITI RALLENTANO $\underline{V}$ E QUINDI $\underline{F}_c$ NON COMPENSA PIU' $\underline{F}_p$.

$\underline{V}$ GIRA VERSO LA BASSA p E IL NUOVO EQUILIBRIO SI HA PER

$$\underline{F}_p = \underline{F}_r + \underline{F}_c$$

$$\Rightarrow V = V_g \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{f}\right)^2}} < V_g$$



$$\underline{F}_r = -\alpha \underline{V}$$

POSSO RIRAGGIUNGERE $\underline{F}_r$ NELLA CONS. DEL

MOMENTUM (NEL CASO INCOMPRESSIBILE E' SOLO $\nabla^2 \underline{V}$, CON $\nu \approx 10^{-3}$). IMPONENDO

$$\underline{V}(z=0) = 0, \quad \underline{V}(z \rightarrow \infty) = \underline{V}_g$$

RISOLVO LE EQUAZIONI DELLA SPIRALE DI ECKMAN E SCOPRO CHE $u = u_g$ PER LA PRIMA VOLTA

PER $\tilde{z} = 10 \text{ m}$ SE $\nu = 10^{-3}$. POICHE' IN REALTA' $\tilde{z} \approx 10 \text{ km}$, DESUO CHE LA TURBOLENZA DOMINA SU ∇ .

* VENTO DI GRADIENTE

$$\frac{D\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_p \phi - f \hat{k} \wedge \mathbf{V} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial s}\right) \hat{s} + \left(-\frac{\partial \phi}{\partial m} - fV\right) \hat{m} = \frac{DV}{ds} \hat{s} + \frac{V^2}{R} \hat{m}$$

DOVE SI SONO TRASCURATI GLI ATTRITI. SUPPONIAMO TRASCURABILE L'ACCELERAZIONE LINEARE (i.e. ISO-P EQUISPAZIATE) E STUDIAMO LA CURVATURA DELLE ISO-P PER TRATTI CON R FISSO ($R > 0$ CICLONICA) E LATITUDINI CIRCA COSTANTI ($f = \text{cost}$).

$$\frac{V^2}{R} = - \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial m}}_{F_p} - \underbrace{fV}_{F_c}$$

PRIMA DI COMINCIARE METTIAMOCI NELL'EMISFERA NORD E RICORDIAMO CHE LAVORIAMO AD ALTEZZA COSTANTE. SO CHE

$$\nabla_z p = \rho \nabla_p \phi$$

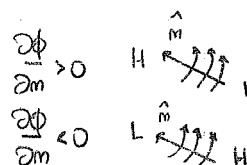
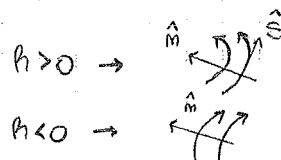
QUINDI IL SEGNO DI $\frac{\partial \phi}{\partial m}$ MI DICE DA CHE PARTE CRESCE P:

VANNO BILANCIATE LE TRE FORZE C_e, P, C_o . FACCIO IL

DISEGNO RICORDANDO CHE C_o VA SEMPRE DALLA STESSA PARTE PER $R \geq 0$, PERCHÉ

A GENERARLA È LA ROTAZIONE DELLA TERRA E NON DEL VENTO:

INVECE F_p VA VERSO LOW P E F_c È CENTRIFUGA.



$F_{c0} = "C_o" = -fV \hat{m}$.
 (OSSA F_{c0} È SEMPRE A DESTRA NELL'EMISFERA N)

STUDIO PRIMA I DUE CASI SEMPLIFICATI:

$\frac{V^2}{R} \approx -fV$: FLUSSO INERZIALE. ESISTE NEGLI OCEANI MA NON IN ATMOSFERA (NO ∇p).

$\frac{V^2}{R} \approx -\frac{\partial \phi}{\partial m}$ C-) CICLONICA BASSA REGOLARE

A+) ANTICICLONICA BASSA ANOMALA

(VERO PER PICCOLE LATITUDINI)

PARLO DI "BASSA" SE AVVIENE ATTORNO A UN CENTRO DI LOW P. RICORDIAMO CHE V_g FAREBBE COSÌ (HA LE BASSE P A SINISTRA), QUINDI È NORMALE. È ANOMALA SE SI DISCOSTA DA V_g IN DIREZIONE O IN VELOCITÀ.

STUDIO IL MODELLO COMPLETO PER CASI, SCEGUENDO LE SOLUZIONI $V_{\pm} > 0$

NELL'EQUAZIONE DI II GRADO

$$V_{\pm} = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial m}}$$

POSSO VEDERLE CON I DISEGNINI (E BILANCIO I MODULI DELLE FORZE) O

ALGEBRAICAMENTE (E IN QUEL CASO I MODULI NON SONO NECESSARI).

* CONSERVAZIONE DEL MOMENTUM

$$\sum_i F_i = M \frac{dY}{dt}$$

• FORZE DI VOLUME: GRAVITA', $\frac{F_g}{M} = -g_0^* \hat{x}_3$

• FORZE DI SUPERFICIE

$d\vec{F}_s = dA \cdot \vec{\tau}$ TENSORE DEGLI STRESS

$$\Rightarrow \frac{F_i}{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \vec{\tau})_i$$

EQUAZIONE DI CAUCHY:

$$\frac{dY}{dt} = -g_0^* \hat{x}_3 + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau}$$

• VOLUMETTO FERMO: $\vec{\tau}$ E' ISOTROPO.

$$\Rightarrow \tau_{ij} = -p \delta_{ij}$$

• VOLUMETTO IN MOTO

$$\tau_{ii} = -3p \quad \leftarrow \text{PRESSIONE TERMODINAMICA NEL CASO STATICO}$$

$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}$ TENSORE DEVIATORIO

IPOTIZZANDO DIPENDENZA LINEARE $\sigma_{ij} = K_{ijmm} e_{mm}$, ISOTROPIA DI K, SIMMETRIA DI σ ,

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u}$$

• PRESSIONE

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{ii} + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \nabla \cdot \underline{u} \quad := \langle p \rangle + K \nabla \cdot \underline{u}$$

p NEL CASO STATICO E p DINAMICA MEDIA $\langle p \rangle$

• ASSUNZIONE DI STOKES: $K=0$

$$\tau_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \underline{u}\right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

• EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g_0^* \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} \right]$$

USANDO QUANTO ESPLICATO E DEFINENDO IL COEFFICIENTE DI VISCOSITA' ANEMATICA $\nu = \mu/\rho$,

$$\frac{Du_i}{Dt} = -g_0^* \delta_{3i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \underline{u} \right]$$

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -g_0^* \hat{z} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) \right]$$

SE $\nu=0$ IL FLUIDO E' INVISCIDO E HO L'EQUAZIONE DI EULERO.

* CONSERVAZIONE MOMENTUM IN SISTEMI NON INERZIALI

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt} = -g_0 \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_c - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}$$

(f_c E' L'ATTRITO)

GRAVITA' EFFETTIVA

$$-g_0 = -g_0^* + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}$$

ORTOGONALE ALLE SUPERFICI GEOPOTENZIALI (QUINDI AL TERRAENO) MA NON DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA TERRA.

FORZA DI CORIOLIS: VIENE DALLA CONSERVAZIONE DI $\mathbf{L}$ E VEDREMO CHE SI APPROSSIMA CON

$$\mathbf{F}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v} := f \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v}$$

PERCIO'

NULLA ALL'EQ.

$$\frac{D\mathbf{u}}{dt} = -g_0 \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_c - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$$

(VISCOSITA')

A QUESTE SI DEVONO AGGIUNGERE I TERMINI DI SFERICITA' IN COORDINATE POLARI.

* APPROSSIMAZIONE GEOSTROFICA

UN'ANALISI DI SCALA IN SCALA SINOTTICA MOSTRA CHE IN PRIMA APPROSSIMAZIONE

NAVIER STOKES SI SCRIVE, TRASCUANDO IL MOTO VERTICALE

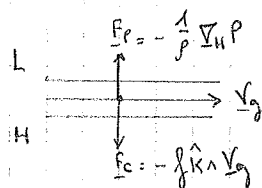
$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v_g = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u_g = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \nabla_H p = f \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v}_g$$

DOVE $\mathbf{v} = (u_g, v_g)$ E' IL VENTO GEOSTROFICO.

BILANCIO GEOSTROFICO

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_c = 0$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{r}} \wedge \nabla_H p$$



LE ISOBARE SONO LINEE DI FLUSSO DI $\mathbf{v}_g$. INOLTRE

$$\nabla_H \cdot \mathbf{v}_g = 0$$

$$\zeta_g = \omega_z = (\mathbf{v} \cdot \nabla_g)_z = \frac{1}{\rho f} \nabla_H^2 p$$

VENTO AGEOSTROFICO

REINTRODUCENDO I TERMINI DI ORDINE SUCCESSIVO

$\mathbf{v}$ DIFFERISCE DA $\mathbf{v}_g$ ATTORNO AL 10% SE $R_0 < 0.1$.

$$\begin{cases} \frac{Du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v = -f v_g + f v := f v_a \\ \frac{Dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u = f u_g - f u := -f u_a \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \mathbf{v}_g = (u - u_g, v - v_g)$$

E' SOLTANTO LUI AD ACCELERARE E

$$\frac{D\mathbf{v}_a}{dt} = -f \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v}_a$$

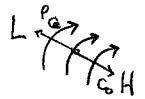
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}_a$$

INSERENDO NEL SISTEMA SOPRA $p(y) = -cy + c_0$ CON $\mathbf{v}(t=0) = 0$, OTTENGO UN OSCILLATORE (ONDE DI INERZIA).

SCOPRO CHE C+) NON ESISTE, C-) E A+) MI DANNO UNA SOLUZIONE CIASCUNO.

NEL CASO A-) TROVO LA CONDIZIONE

$$|A| > \frac{1}{f} \left| \frac{\partial \phi}{\partial m} \right|$$



PIU' CRESCE $\nabla \phi$ (E QUINDI LA VELOCITA' DEL VENTO), PIU' LE LINEE DIVENTANO PIATTE: DOVE IL VENTO CURVA MOLTO, E' DEBOLE. IN BREVE

A+) BASSA ANOMALA $V_g < 0 < V$

A-) ALTA REGOLARE $V_- > V_g > 0$
ALTA ANOMALA $V_+ > V_-$

C-) BASSA REGOLARE $V_+ < V_g$

* VENTO TERMICO

• ATMOSFERA BAROTROPICA

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

$$\Rightarrow \Delta z = -H \ln \frac{P_T}{P_B}$$

MA ERA (EQ. IPSOMETRICA)

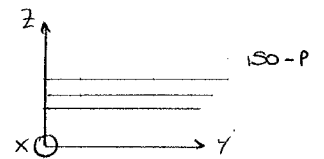
$$\Delta z = \frac{g_0}{g_0} \bar{T}_V \ln \frac{P_0}{P_T}$$

DEDUO CHE SU SUPERFICIA ISOBARE

$$\nabla T \Big|_{P=\text{cost.}} = 0$$

INOLTRE E' NULLO IL VENTO GEOSTROFICO

$$\underline{V}_g = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_P z = 0 \quad \left(= \frac{1}{P f} \hat{k} \wedge \nabla_P P \right)$$



• ATMOSFERA EQUIVALENT BAROTROPIC

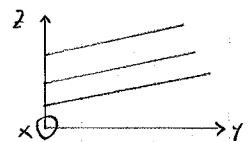
$$P(z, y) = P_0 e^{-\frac{1}{H}(z - \alpha y)}$$

$$\Rightarrow \Delta z = -H \ln \frac{P_T}{P_B}$$

HO DI NUOVO $\nabla T = 0$, MA

$$\underline{V}_g = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_P z = \left(-\frac{g_0}{f} \alpha, 0 \right)$$

INDIPENDENTE DALLA QUOTA.



• ATMOSFERA BAROCLINA

$$P(z, y) = P_0 e^{-\frac{1}{H}(z - \alpha(y))}$$

$$\Rightarrow \Delta z = \Delta z(y)$$

QUINDI $\nabla T \neq 0$. INOLTRE u_y PRESENTA UNO SHEAR VERTICALE:

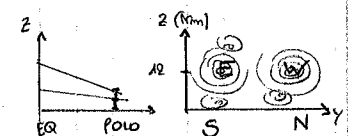
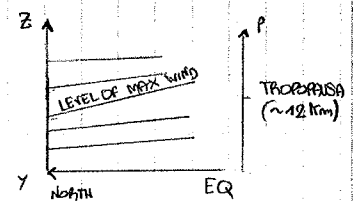
$$u_y = -\frac{g_0}{f} \alpha(P)$$

FINO ALLA TROPOPAUSA $T(y)$ DECRESCe CON y E, POICHE' $\Delta z \propto \bar{T}$, LO

STRATO TRA P_1 E P_2 E' PIU' SPOSSO ALL'EQUATORE; DOPO $T(y)$ CAMBIA

FORMA, PERCIO' ALLA TROPOPAUSA HO IL MASSIMO DI u_y (JET STREAMS).

RICORDANDO $dp = -\rho g dz \Rightarrow \frac{\partial}{\partial m} \propto -\frac{\partial}{\partial z}$, SI DICE EQUAZIONE DEL VENTO TERMICO

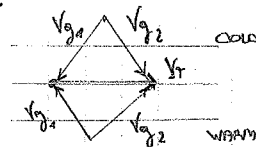


$$\frac{\partial \underline{V}_g}{\partial m} = -\frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_P T$$

· VENTO TERMICO

E' LO SHEAR TRA IL VENTO TERMICO A DUE DIVERSE P_1 E P_2 :

$$\underline{V}_T = \underline{V}_g(P_2) - \underline{V}_g(P_1) = \frac{R}{f} \ln \frac{P_1}{P_2} \hat{k} \wedge \underline{\nabla}_P \bar{T}$$



$\underline{V}_T$ HA SEMPRE IL FREDDO A SINISTRA E RAPPRESENTA LA ROTAZIONE DI $\underline{V}_g$:

< ANTICORARIO: ANVEZIONE FREDDA
 OROARIO: ANVEZIONE CALDA

SE L'ATMOSFERA E' BAROTROPICA, ISO-P // ISO-T (SUPERFICIE) E $\underline{V}_T = 0$.

· VELOCITA' VERTICALE

$$\omega = \frac{Dp}{Dt} \approx -\rho g \sim 10^{-2} \text{ m/s} \Rightarrow \omega(P) = - \int_{P_0}^P \underline{\nabla}_H \cdot \underline{V} \, dP$$

CHE RICAPO DALLA CONSERVAZIONE DELLA MASSA. POICHE' $\underline{\nabla}_H \cdot \underline{V} = \underline{\nabla}_H \cdot \underline{V}_w$

E' DIFFICILE IL CALCOLO DIRETTO, MA SO CHE V_g CIRCOLA CICLONICO ATTORNO A

BASSE P E SE CI METTO A TIRATO V DIMINUISCE, $F_0 = - \oint V$ NON CONTRABILANCIA PIU' $\underline{\nabla} P$

E OTTENGO CONVERGENZA. ALLORA

CONVERGENZA (BASSA P) $\rightarrow \omega < 0 \rightarrow$ L'ARIA SALE
 DIVERGENZA (ALTA P) $\rightarrow \omega > 0 \rightarrow$ L'ARIA SCENDE

* CIRCOLAZIONE E VORTICITA'

$$C = \oint \underline{V} \cdot d\underline{s}$$

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \wedge \underline{V}$$

TEOREMA DELLA CIRCOLAZIONE:

SCRIVENDO

$$\frac{D}{Dt} C_{\omega} = - \oint \frac{1}{P} dP$$

CIRC. ASSOLUTA INTEGRALE BAROCLINO

$$\underline{V}_a = \underline{V} + \underline{V}_e$$

$$C_e = \oint A \quad (\text{SI CALCOLA...})$$

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{DC_a}{Dt} - \frac{DC_e}{Dt} = \frac{DC_a}{Dt} - \frac{D}{Dt} (\oint A)$$

$$\text{DETTI } \eta = (\underline{\omega}_a)_z, \quad \zeta = (\underline{\omega})_z, \quad \eta = \zeta + f \quad f = \frac{DC_e}{dA} \quad \zeta = \frac{DC}{dA} \quad \eta = \frac{DC_a}{dA}$$

SI PUO' RICAVARE

$$\frac{D\eta}{Dt} = -\eta \underline{\nabla}_H \cdot \underline{V} + \frac{1}{P^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)$$

TRASFERIMENTO RADIATIVO

(LIV)

INTERAZIONE TRA LA RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA (SOLE, MOLECOLE DELL'ARIA) E L'ATMOSFERA.

PARAMETRI E UNITA' DI MISURA:

$$\lambda \text{ [cm, mm, } \mu\text{m, nm, } \text{\AA}]$$

LUNGHEZZA D'ONDA

$$\tilde{\nu} = \frac{c}{\lambda} \text{ [s}^{-1}, \text{Hz}]$$

FREQUENZA

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

VELOCITA' DELLA LUCE (ARIA, VUOTO)

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}}{c} = \frac{1}{\lambda}$$

NUMERO D'ONDA

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c} \text{ [s]}$$

PERIODO

$$\omega = 2\pi \tilde{\nu} = 2\pi \frac{c}{\lambda} \text{ [RAD/s, s}^{-1}, \text{Hz}]$$

PULSAZIONE

LE REGIONI DELLO SPETTRO A CUI SIAMO MAGGIORMENTE INTERESSATI SONO

- VISIBILE (SHORT WAVE, 400-700 nm)
- INFRAROSSO TERMICO (LONG WAVE, FINO A 1mm)

ANGOLO SOLIDO

$$\Omega = \frac{\sigma}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{r \sin\theta \, d\varphi \, r \, d\theta}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

AD ESEMPIO L'AREA DELLA CUPOLA DI RAGGIO r VALE

$$S_{\text{emisf.}} = \int_{\Omega_{\text{em}}} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^1 d\cos\theta = 2\pi r^2$$

RADIANZA (INTENSITA') SPETTRALE

CONSIDERIAMO DELL'ENERGIA dE CHE

- 1) ATTRAVERSA dA PERPENDICOLARMENTE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE
- 2) PROVIENE DA DIREZIONI CONTENUTE IN $d\Omega$ ATTORNO A $\Omega(\theta, \varphi)$
- 3) IN UN TEMPO dt
- 4) IN UN RANGE DI LUNGHEZZA D'ONDA $d\lambda$ INTORNO A λ .

ESPRIMIAMO QUESTA ENERGIA COME

$$d^4 E_{\lambda}(\theta, \varphi, t) = I_{\lambda}(\theta, \varphi, t) dA_{\perp} d\Omega dt d\lambda$$

DOVE I_{λ} E' UNA GRANDEZZA FINITA CHE FUNGE DA COSTANTE DI PROPORZIONALITA': ESSA E' DETTA RADIANZA (O INTENSITA') SPETTRALE.

NOTO CHE

$$dA_{\perp} = dA \cos \theta$$

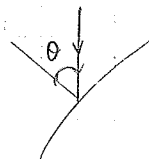
INTEGRANDO SU λ OTTENGO LA RADIANZA

$$I(\theta, \varphi, t) = \int_{\Delta\lambda} I_{\lambda}(\theta, \varphi, t) d\lambda$$

DOVE

$$[I_{\lambda}] = \frac{[E]}{[L^2 T L]} = [P] [L^2] [L^{-1}] = W m^{-2} \mu m^{-1} (s^{-1})$$

$$[I] = W m^{-2} (sr^{-1})$$

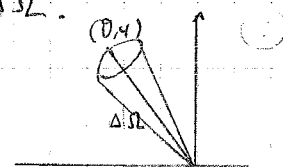


• IRRADIANZA (DENSITA' DI FLUSSO)

SPETTRALE SE PER UNITA' DI LUNGHEZZA D'ONDA. SI CALCOLA COME LA RADIANZA (SPETTRALE) CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE dA DA TUTTE LE DIREZIONI CONTENUTE IN UN ANGOLO SOLIDO $\Delta\Omega$.

$$F_{\lambda}(t) = \int_{\Delta\Omega} I_{\lambda}(\theta, \varphi, t) \cos \theta d\Omega$$

$$= \iint_{\Delta\theta \Delta\varphi} I_{\lambda}(\theta, \varphi, t) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

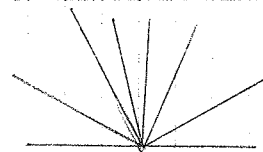


$$[F] = W m^{-2}$$

• ESEMPIO

$$F_{\lambda, \text{EMISFERO}}(t) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} I_{\lambda}(\theta, \varphi, t) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

SE L'IRRADIANZA E' ISOTROPA,



$$F_{\lambda, \text{EMISF}}(t) = 2\pi I_{\lambda}(t) \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi I_{\lambda}(t)$$

RADIANZA COLLIMATA

(θ_0, φ_0) ZENITALE E AZIMUTALE SOLARE

$$I_\lambda(\theta, \varphi) = I_{\lambda 0} \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

↑
SOLE

NOTA: IN REALTÀ
(VEDI SOPRA) È

$$I_\lambda(\theta, \varphi) = I_{\lambda 0} \delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$F_{\lambda, sf} = \int_{sf} I_{\lambda 0} \cos \theta d\Omega = I_{\lambda 0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

POICHÉ

$$\int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi_0) d\varphi = 1$$

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \delta(\theta - \theta_0) d\theta = \int_{-1}^1 \delta(\mu - \mu_0) \mu d\mu = \mu_0 = \cos \theta_0$$

PERCÌ

$$F_{\lambda, sf} = I_{\lambda 0} \cos \theta_0$$

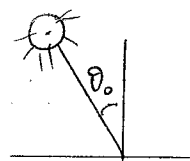
ANIMALE! QUESTO CAMBIO DI VARIABILI È
SBAGLIATO, PERCHÉ $\delta(\theta) = \sin \theta \delta(\cos \theta)$. SI OTTIENE
PERÒ LO STESSO RISULTATO RIDEFINENDO I_λ
COME SOPRA, DATO CHE $\delta(\Omega) \neq \delta(\theta)\delta(\varphi)$.

FLUSSO

$$f_\lambda(t) = \int_A F_\lambda(t) dA$$

$$[f_\lambda] \equiv W \mu m^{-1}$$

$$[f] \equiv W$$



EMISSIONE DI CORPO NERO

$$I_\lambda(\theta, \varphi, t) = B_\lambda(T)$$

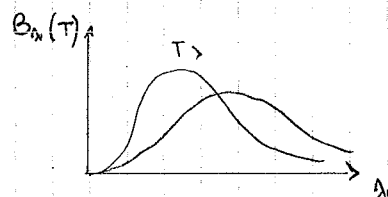
INFATTI L'EMISSIONE È ISOTROPA, QUINDI NON DIPENDE DA θ, φ .

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2 \lambda^{-5}}{\pi [\exp\{\frac{hc}{k_B \lambda T}\} - 1]}$$

NOTA: SECONDO ME ERA

$$B_\lambda(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$[B_\lambda(T)] \equiv W m^{-2} sr^{-1} m^{-1}$$



INTEGRANDO SU TUTTE LE λ HO LA RADIANZA (INTENSITÀ)

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \frac{2}{15} \frac{\pi^3 k_B^4}{h^3 c^2} T^4$$

↑
 $x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$

LEGGE DI
STEPHAN -
BOLTZMANN

SU UN EMISFERO SI HA UN'IRRADIANZA PARI A

$$F_{\text{em}}(T) = \pi B(T) := \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

IMPONENDO $\frac{\partial B_{\lambda}(T)}{\partial \lambda} \equiv 0$ SI OTTIENE LA LEGGE DI WIEN

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{a}{T}$$

$$a = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ m K} \approx 2.9 \text{ cm} \cdot \text{K}$$

EMISSIONE DEL SOLE

IPOTIZZIAMO CHE IL SOLE SIA UN CORPO NERO.

IL SOLE E' FATTO DA STRATI CHE EMETTONO E RIASSORBONO A DIVERSE T. LA LUCE CHE ARRIVA A NOI PROVIENE DALLA FOTOSFERA, A TEMPERATURA

$$T \approx 5800 \text{ K}$$

L'IRRADIANZA A QUESTA TEMPERATURA VALE

$$F_0 = \sigma \cdot (5800 \text{ K})^4 = 6.41 \cdot 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

$$\lambda_{\text{max} \odot} = \frac{a}{5800 \text{ K}} = 0.5 \mu\text{m} = 500 \text{ nm}$$

CHE E' IL CENTRO DELLA REGIONE VISIBILE DELLO SPETTRO.

IL FLUSSO VALE ($R_0 = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$)

$$\dot{Q} = F_0 \cdot A_0 = 4 \cdot 10^{27} \text{ W}$$

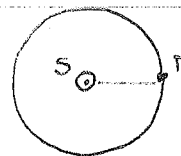
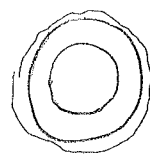
POICHE' $\bar{R}_{\text{ST}} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, ALLA TERRA ARRIVA

$$F_{0, \text{ST}} = \frac{\dot{Q}}{4\pi \bar{R}_{\text{ST}}^2} = 1320 \text{ W m}^{-2}$$

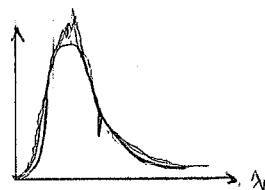
MISURANDOLA CON I SATELLITI SI TROVA

$$F_{0, \text{ST}} = 1360 \text{ W m}^{-2} := S$$

DETTA TOTAL SOLAR IRRADIANCE (TSI) O COSTANTE SOLARE (IN DISUSO PERCHE' NON E' COSTANTE).



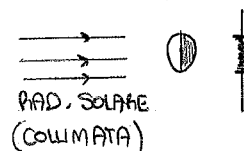
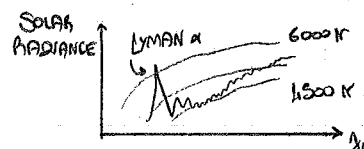
A FIANCO LE DENIAZIONI MISURATE DALLA
EMISSIONE DI CORPO NERO A T_{SOLE} .



* QUANTA ENERGIA VIENE EFFETTIVAMENTE
INTERCETTATA DALLA TERRA?

$$\bar{F} = \frac{S \pi R_T^2}{4 \pi R_T^2} = \frac{S}{4}$$

OSSIA SOLO $1/4$ DELLA COSTANTE SOLARE S .



INOLTRE UNA PARTE DI $\bar{F}$ VIENE RIFLESSA NELLO SPAZIO (CIROA
IL 30%), PERCIO'

$$\bar{F}_{\text{in}} = \frac{S}{4} (1-A) = 238 \text{ Wm}^{-2}$$

NOTA: QUESTO IN
MEDIA; NELLA ZONA
ILLUMINATA NE VEDO
IL DOPIO.

DOVE $A = 0.3$ SI DICE ALBEDO TERRESTRE.

FACCIAMO L'IPOTESI CHE IL PIANETA TERRA SIA IN EQUILIBRIO
RADIATIVO (VERIFICATA A MENO DI 0.6 Wm^{-2} TRATTENUTI DAGLI
OCEANI). SUPPONENDO CHE LA TERRA EMETTA COME UN CORPO
NERO, GETTA T_E LA TEMPERATURA DI EQUILIBRIO

$$\bar{F}_{\text{out}} = \sigma T_E^4 \equiv \frac{S}{4} (1-A) \Rightarrow T_E = 255 \text{ K} = -18^\circ \text{C}$$

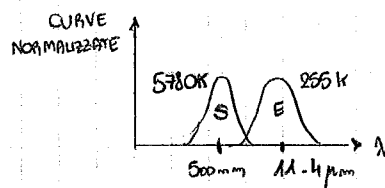
MA LA SUPERFICIE TERRESTRE HA TEMPERATURA

$$T_s = 288 \text{ K} = 25^\circ \text{C}$$

VEDREMO IL PERCHE'. IL MASSIMO DI EMISSIONE SI TROVA A

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{a}{255 \text{ K}} = 11.4 \mu\text{m}$$

(OLW, OUTGOING LONG WAVE - INFRAROSSO).



AVREMMO $T_s = T_E$ SE NON CI FOSSE DI MEZZO L'ATMOSFERA:
NON ABBIAMO PIU' A CHE FARE CON UN CORPO NERO.

DEFINIAMO L'EMISSIVITA' SPETTRALE

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{I_{\lambda} (\text{EMESSA})}{B_{\lambda}}$$

EMISSIVITA'

(INFATTI IL CORPO NERO EMETTE E ASSORBE TUTTO QUANTO PERMESSO A QUELLA T). DEFINIAMO

$$\alpha_{\lambda} = \frac{I_{\lambda} (\text{ASSORBITA})}{B_{\lambda}}$$

ASSORBIVITA'

$$\rho_{\lambda} = \frac{I_{\lambda} (\text{RIFLESSA})}{I_{\lambda} (\text{INCIDENTE})}$$

RIFLETTANZA

$$T_{\lambda} = \frac{I_{\lambda} (\text{TRASMESSA})}{I_{\lambda} (\text{INCIDENTE})}$$

TRASMITTANZA

LA LEGGE DI KIRCHHOFF AFFERMA CHE A UNA DATA λ

$$\epsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$$

UN CORPO NERO HA $\epsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} = 1$. SUPPONIAMO DI SOVRAPPORVI UNO STRATO CHE NELLE DUE REGIONI VISIBILE E INFRAROSSO HA

$$\epsilon_{\text{vr}} = \alpha_{\text{vr}} \quad , \quad \epsilon_{\text{ir}} = \alpha_{\text{ir}}$$

NEL TOP OF ATMOSPHERE (A TEMPERATURA T_A) SONO IN EQUILIBRIO

$$F_{\text{in}} = (1 - \alpha_{\text{ir}}) \sigma T_S^4 + \epsilon_{\text{ir}} \sigma T_A^4$$

IN ATMOSFERA SI BILANCIANO

$$\alpha_{\text{vr}} F_{\text{in}} + \alpha_{\text{ir}} \sigma T_S^4 = 2 \epsilon_{\text{ir}} \sigma T_A^4$$

IN SUPERFICIE

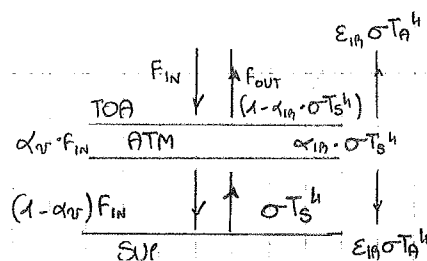
$$(1 - \alpha_{\text{vr}}) F_{\text{in}} + \epsilon_{\text{ir}} \sigma T_A^4 = \sigma T_S^4$$

DOVE F_{in} E' UNA COSTANTE E LE INCOGNITE SONO SOLO T_A E T_S , CHE SI TROVANO VALERE

$$T_S = \sqrt[4]{\frac{2 - \epsilon_{\text{vr}}}{2 - \epsilon_{\text{ir}}}} T_E$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \frac{1 - \epsilon_{\text{ir}}}{\epsilon_{\text{ir}}} \left(\frac{T_S}{T_E} \right)^4} T_E$$

$$\text{DOVE } F_{\text{in}} = \sigma T_E^4$$



NOTA: STO ANCORA PENSANDO ALLA TERRA COME A UN CORPO NERO CON $T = T_S$.

UN'ATMOSFERA GRIGIA ($\epsilon_r = \epsilon_{ir}$) E' COME SE NON CI FOSSE. ($T_s = T_a = T_e$).

UN'ATMOSFERA BIANCONERA ($\epsilon_r = 0, \epsilon_{ir} = 1$) COMPORTA

$$T_s = 303 \text{ K}$$

$$T_a = T_e$$

INSERENDO INFINE $\epsilon_r = 0.2, \epsilon_{ir} = 0.8$ TROVO

$$T_s = 283 \text{ K}$$

$$T_a = 247 \text{ K} < T_e$$

ASSORBIMENTO ED EMISSIONE

L'ENERGIA DI UNA MOLECOLA DI GAS SI PUO' SCRIVERE COME

$$\underbrace{E_{rot} + E_{vib} + E_{el}}_{\text{QUANTIZZATE}} + \underbrace{E_{trasl}}_{\text{CONTINUA}}$$

INIZIAMO DA

$$E_T = \frac{3}{2} k_B T \xrightarrow{280 \text{ K}} 5.8 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

INVECE PER LE ALTRE ENERGIE

$$\Delta E_{\text{quant}} = h \tilde{\nu} = h \frac{c}{\lambda}$$

POICHE' IN ATMOSFERA

$$\lambda < 1 \mu\text{m} \longrightarrow \Delta E > 2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\lambda < 20 \mu\text{m} \longrightarrow \Delta E > 10^{-20} \text{ J}$$

$$\lambda < 1 \text{ cm} \longrightarrow \Delta E > 2 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

NOTIAMO CHE

$$E_T > E_a, \quad E_T < E_r, E_{el}$$

CONFRONTABILE CON I LIVELLI ROTAZIONALI CHE QUINDI VARIANO DANDO LUOGO A SPETTRI COMPLESSI (IN GENERE INVECE STIAMO NEI LIVELLI FONDAMENTALI DI E_r, E_{el}).

SE UN FOTONE HA ENERGIA SUFFICIENTE PUO' DISSOCIARE LA MOLECOLA; L'ENERGIA IN ECCESSO

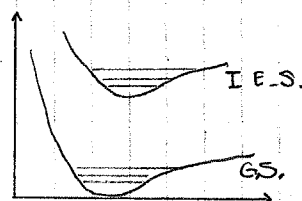
VA IN E_T , QUINDI VIENE GENERATO CALORE. ALTRIMENTI HO SOLO UNA VARIAZIONE DEI LIVELLI DI E_r, E_{el} .

ELETTRONICA

VIBRAZIONALE

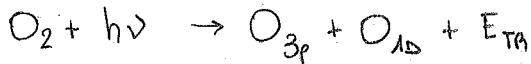
ROTAZIONALE

NOTA: UN CONCETTO ANALOGO E' CHE A T_{atm} SONO OCCUPATI TUTTI I LIVELLI E_a .

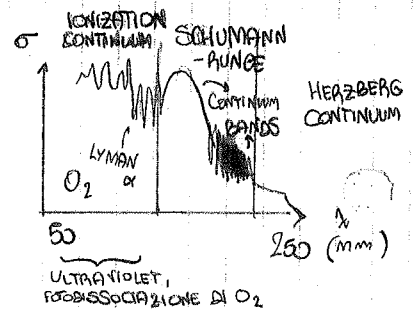


NOTA: ACCADE NELLA TERMOSFERA (FOTODISSOCIAZIONE - FOTIONIZZAZIONE).

* PER L'O₂, A UNA REGIONE DEL CONTINUO NE SEGUE UNA CON BANDE SOVRAPPORTE AL CONTINUO, DOVE

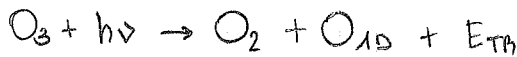


IN QUESTA REGIONE O E' ECITATO E FORMA LEGAMI CON FACILITA'; SI OSSERVANO APPUNTO RIGHE MOLTO FITTE E PARZIALMENTE SOVRAPPORTE.

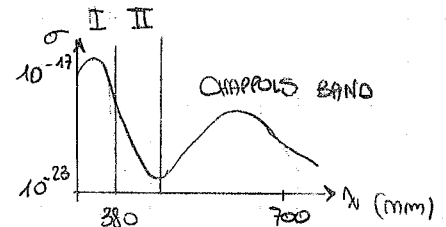
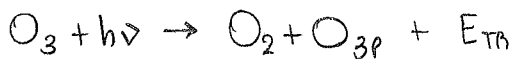


* SPETTRO DELL'OZONO O₃.

HARTLEY BAND (I)



HUGGING BANDS (II)



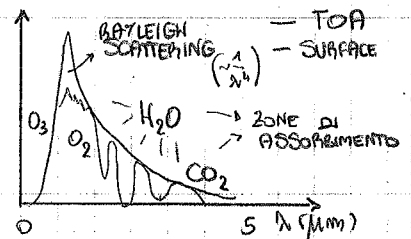
ALTRE MOLECOLE: SO₂, NO₂ ...

* RICIPIOTOLANDO (SPETTRO DELL'OSSIGENO)

100 - 175 mm	UNC (100 - 280)	O ₂ (S-R CONTIN.)	TERMO-MESESFERA
		I ₂ (127 mm, LYMAN alpha H)	
175 - 200 mm		O ₂ (S-R BANDS)	MESESFERA
200 - 242 mm		O ₂ HERZ., O ₃ HARTLEY	STRATO
242 - 310 mm	UNA (280 - 310)	O ₃ HARTLEY	STRATO
310 - 400 mm	UNA (310 - 400)	O ₃ HUGGINGS	STRATO-TROPOSPERA
400 - 850 mm	UNA (400 - 850)	O ₃ CHAPPUIS	TROPO
	VISIBILE E INFRAROCCO L.A.		

* RIGHE DI ASSORBIMENTO DI CO, CH₄, NO (PROTOSILDO DI AZOTO), O₃, CO₂, H₂O (ACQUA PESANTE), H₂O NELL'INFRAROCCO TERMICO.

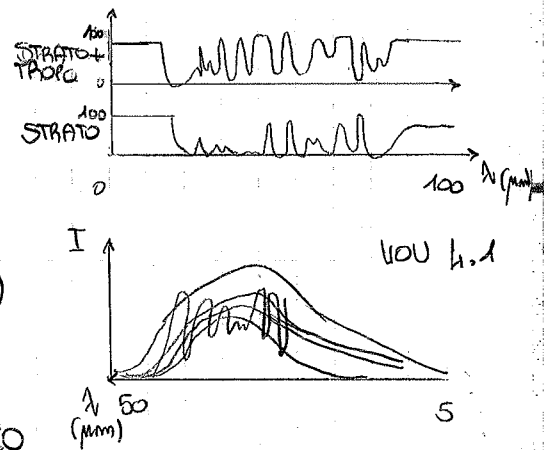
DOPO 13 μm ASSORBE IN PRATICA SOLO CO₂; TRA 8-13 μm NON ASSORBE NESSUNO (FINESTRA ATMOSFERICA: E' QUELLA CHE VEDO



DALLO SPAZIO CON I SATELLITI) ; PRIMA HO ALCUNI BUCHI (INFRAROSSO VICINO).

SE SO CHI ASSORBE A UNA DATA λ E IN CHE STRATO DELL'ATMOSFERA CIO' ACCADE, POSSO INVIARE LUCE DA TERRA E MISURARE $I(\lambda)$ DA UN SATELLITE PER OTTENERE UN PROFILO VERTICALE DI TEMPERATURA: PER FARLO INTERSECO

I VARI PUNTI DELLO SPETTRO CON CURVE DI CORPO NERO PASSANTI PER QUEL PUNTO E TROVO LA TEMPERATURA DI BRILLANZA.



• TEMPERATURA DI BRILLANZA (BRIGHTNESS TEMPERATURE)

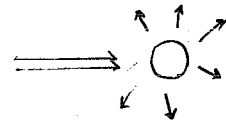
T CHE DOVREBBE AVERE UN EMETTITORE PER COMPORTARSI COME UN CORPO NERO CHE EMETTE A QUELLA LUNGHEZZA D'ONDA.

$$B_{\lambda}(T_b) = I_{\lambda}$$

(ESEMPIO: LAMPADA CHE EMETTE A 500 nm - CHE T DEVE AVERE?)

• SCATTERING (DIFFUSIONE)

DIPENDE DA PIU' FATTORI.



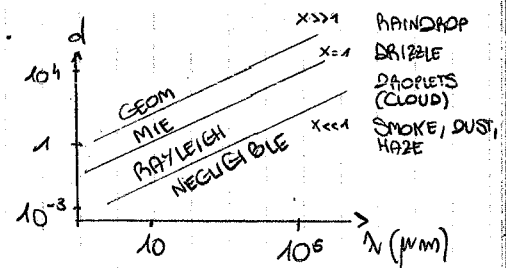
a) DIMENSIONE SCATTERATORE

$1 \mu m \rightarrow$ MIE ; $10^{-2} \mu m \rightarrow$ RAYLEIGH. PER DIMENSIONI MAGGIORI HO SCATTERING GEOMETRICO.

LO SCATTERING DI RAYLEIGH CONSISTE NELLO STUDIARE RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA CHE INCIDE SUL DIPOLO.

b) LUNGHEZZA D'ONDA

AL CRESCERE DI λ CAMBIA IL REGIME DI SCATTERING (MIE SE SONO CONFRONTABILI λ E d).



NOTA: CIO' CHE CONTA E' IL SIZE PARAMETER $x = \frac{2\pi r}{\lambda}$. PER $x > 1$ USO MIE E PER $x < 1$ USO RAYLEIGH.

SCATTERING RAYLEIGH

CAMPO E_i INCIDENTE, PRODUCE UN DIPOLO

P NELLA MATERIA E QUESTO OSCILLA

PRODUCENDO A SUA VOLTA RADIAZIONE. SE IL CAMPO INCIDENTE E'

$$\underline{E}_i = \underline{E}_0 e^{-ik(z-ct)}$$

$$\underline{P} = \alpha \underline{E}_i$$

DOVE α E' LA POLARIZZABILITA' (IN ATMOSFERA POSSO CONSIDERARLO UNO SCALARE), E' INDOTTO QUINDI UN DIPOLO

$$\underline{P} = \underline{P}_0 e^{-ik(z-ct)} = \alpha \underline{E}_0 e^{-ik(z-ct)}$$

DALLA TEORIA DEI DIPOLI, IL CAMPO E TOTALE DIFFUSO SODDISFA

$$\underline{E} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial t^2} \sin \gamma$$

NOTA: γ E' L'ANGOLO TRA $\underline{P}$ DIFFUSO E LA DIREZIONE DI OSSERVAZIONE.

DOVE γ E' LA DIREZIONE DI OSSERVAZIONE. POICHE'

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial t} = i k c \underline{P}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \underline{P}$$

$$\underline{E} = -\frac{k^2}{r} \alpha \underline{E}_0 e^{-ik(z-ct)} \sin \gamma \quad (I)$$

INDIVIDUIAMO IL PIANO DI SCATTERING COME

IN FIGURA: DIPENDE DALLA DIREZIONE DI

PROPAGAZIONE DELLA LUCE E DA QUELLA DI OSSERVAZIONE.

θ E' L'ANGOLO DI SCATTERING. SIANO E_{0l} E E_{0r} LE COMPONENTI

// E $\perp$ AL PIANO, ALLORA PER COSTRUZIONE

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$$

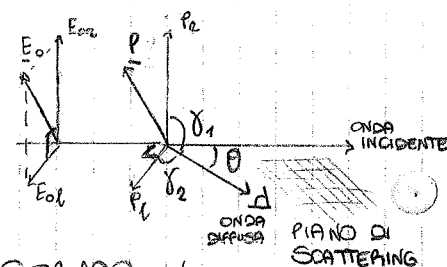
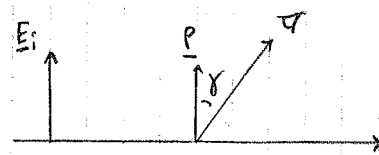
$$\gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \theta$$

E USANDO LA (I)

$$E_r = -\frac{k^2}{r} \alpha E_{0r} e^{-ik(z-ct)} \frac{\sin \gamma_1}{=1}$$

$$E_l = -\frac{k^2}{r} \alpha E_{0l} e^{-ik(z-ct)} \frac{\sin \gamma_2}{=\cos \theta}$$

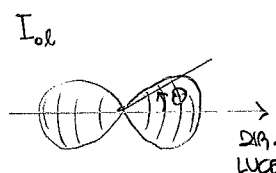
$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0r} \\ E_{0l} \end{pmatrix} \frac{k^2 \alpha}{r}$$



ALLORA, DETTI

$$I = \text{cost.} \cdot |E|^2$$

$$I_z = \text{cost.} \cdot |E_z|^2 \quad I_{0z} = \text{cost.} \cdot |E_{0z}|^2$$



SI HANNO

$$I_z = I_{0z} \frac{k^4 \alpha^2}{r^2}$$

$$I_l = I_{0l} \frac{k^4 \alpha^2}{r^2} \cos^2 \theta$$

NOTO QUINDI CHE I_z NON DIPENDE DALL'ANGOLO DI SCATTERING. INVECE, SE IL CAMPO E VIBRA SUL PIANO DI SCATTERING, I_l VA COME $\cos^2 \theta$. IN PARTICOLARE PER $\theta = \frac{\pi}{2}$ NON OSSERVO SCATTERING.

COSA SUCCEDDE SE NON POSSO DIVIDERE E_{0l}, E_{0z} (LUCE NON POLARIZZATA)? AVREMO

$$I_{0z} = I_{0l} = \frac{I_0}{2}$$

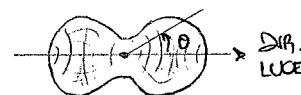
$$I = I_z + I_l = \frac{k^4 \alpha^2}{r^2} (I_{0z} + I_{0l} \cos^2 \theta) = \frac{k^4 \alpha^2}{r^2} \frac{I_0}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

E' QUESTO IL CASO DELLA RADIAZIONE SOLARE.

ANCHE QUI A 90° L'INTENSITA' E' MINIMA. INOLTRE

$$k^4 = \frac{1}{\lambda^4}$$

$$\Rightarrow I \propto \frac{1}{\lambda^4}$$



PER λ CORTE (UV) HO MOLTO PIU' SCATTERING: E' PER QUESTO CHE VEDIAMO IL CIELO BLU. LO VEDIAMO ROSSO SOLO AL TRAMONTO, QUANDO LA COMPONENTE BLU VIENE DEVIATA DAL GRANDE SPESSORE DELL'ATMOSFERA ATTRAVERSAATA.

SI DEFINISCE LA FUNZIONE DI FASE $P(\cos \theta)$ t.c.

$$\int_{4\pi} \frac{P(\cos \theta)}{4\pi} d\Omega = 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P(\cos \theta)}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$$

NOTA: NON VIOLA, CONVOLUZIONE CON LA CURVA DELL'OCCHIO UMANO.

NOTA: LA NORMALIZZA COME UNA $P(\theta)$ MA A 4π E NON A 1.

POICHE'

$$P(\cos \theta) = \text{cost.} \cdot (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\frac{\text{cost.}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\text{cost.}}{2} \left[\int_0^\pi \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$

DA CUI

$$\int \frac{P(\cos\theta)}{4\pi} d\Omega = \frac{\text{cost.}}{2} \left[-\int_1^{-1} dx - \int_1^{-1} x^2 dx \right] = \frac{1}{3} \text{cost.} = 1$$

PERCIO'

$$P(\cos\theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2\theta)$$

IN TERMINI DELLA QUALE LA RADIANZA DIFFUSA DA UN DIPOLO SI SCRIVE

$$I = I_0 \frac{k^4 \alpha^2}{r^2} \frac{1}{3} P(\cos\theta)$$
$$= I_0 \frac{32 \pi^4}{3 r^2} \frac{1}{\lambda^4} P(\cos\theta)$$

I VA COME r^{-2} E λ^{-4} .

SEZIONE D'URTO PER SCATTERING

$$\sigma_s = \frac{\int}{F_0} \quad \begin{array}{l} \text{FLUSSO DIFFUSO} \\ \text{IRRADIANZA INCIDENTE} \end{array}$$

DOVE

$$F_{0,\lambda} = \int_{\Delta\Omega} I_{r,\lambda} d\Omega \cdot \cos\theta$$

$\Delta\Omega$, $\angle$ ANGOLO DA CUI DEBINA

$$\int = \int_A F_s dA$$

$\uparrow$
IRRADIANZA DIFFUSA

SE A E' UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO r , $dA = r^2 d\Omega$ E

$$\int = \int_{\Omega} F_s r^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_0 \frac{32 \pi^4}{3 r^2} \frac{1}{\lambda^4} P(\cos\theta) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= F_0 \frac{32}{3} \pi^4 \alpha^2 \frac{1}{\lambda^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi}_{= 4\pi} = F_0 \frac{32}{3} \pi^4 \alpha^2 \frac{1}{\lambda^4} 4\pi$$

DA CUI

$$\sigma_s = \frac{128}{3} \pi^5 \alpha^2 \frac{1}{\lambda^4}$$

DOVE

$$\alpha \propto \frac{m_{\lambda} - 1}{m_{\lambda} + 1}$$

m_{λ} INDICE DI RIFFRAZIONE

AEROSOL

MATERIA CONDENSATA IN ARIA CHE NON SI MUOVE PER PROPULSIONE PROPRIA (NON GLI INSETTI E GLI AEREI, MA SI VIRUS, BATTERI, POLLINI).

LI CONSIDERIAMO TUTTI CON LA STESSA DIMENSIONE ($0.03 \mu\text{m} - 100 \mu\text{m}$), LA CONCENTRAZIONE VARIA, MA IN MEDIA E' ATTORNO A $10^{6-7}/\text{cm}^3$ IN CITTA' E $10^3/\text{cm}^3$ IN CAMPAGNA (AL POU HO LA POLA KAZE).

GLI AEROSOL SONO NUCLEI DI CONDENSAZIONE PER IL VAPORE ACQUEO. LE MAGGIORI FONTI SONO LE POLVERI (DAL SUOLO O INDUSTRIALI) E IL SALE MARINO (ROTTURA DELLE CRESTE ONDOSE).

SI SUDDIVIDONO IN TRE CATEGORIE IN BASE ALLA LORO DIMENSIONE ($0.1 \mu\text{m} - 1 \mu\text{m}$, SOTTO E SOPRA).

LE MISURE DI CONCENTRAZIONE SI FANNO CON IL LASER (PROFILO VERTICALE DELLO SCATTERING DI IMPULSI LASER, CON MISURA DEL TEMPO DI RITORNO).

SE VALE ($X = \text{SIZE PARAMETER}$)

$$X = \frac{2\pi r}{\lambda} \gtrsim 1$$

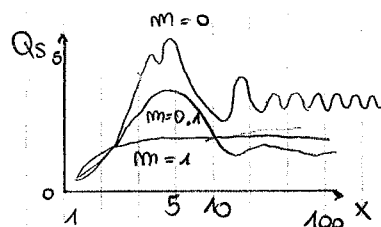
SI APPLICA PER LO SCATTERING LA TEORIA DI MIE (PARTICELLE SFERICHE E OMOGENEE: I SOLIDI NON LO SONO MAI).

SI DICE EFFICIENZA DI SCATTERING

$$Q_s = \frac{\sigma_s}{\pi a^2} \leftarrow \text{RAGGIO}$$

$$\text{NOTA: } \frac{dN}{dt} = \sigma \cdot N_b \cdot \Phi_a$$

$$\text{E } \frac{dN}{dt} \propto I \text{ E L'INTENSITA' DI DIFFRAZIONE.}$$

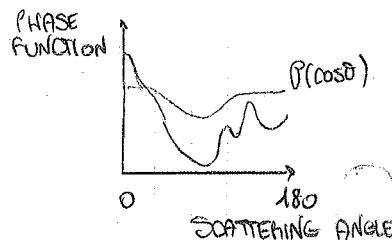


SI OSSERVANO FRANGE TRICHE DELL'INTERFERENZA

CHE SONO PIU' IMPORTANTI TANTO MENO LA RADIAZIONE E' ASSORBITA (NEL GRAFICO m E' LA PARTE IMMAGINARIA DELL'INDICE DI RIFFRAZIONE, CHE QUANTIFICA L'ASSORBIMENTO).

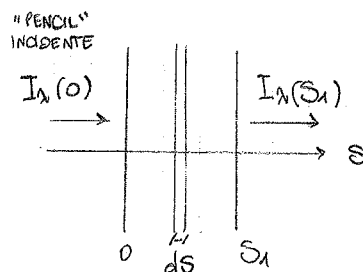
SI NOTI CHE LA SEZIONE D'URTO E' 2 VOLTE L' "OMBRA" DELLA PARTICELLA A CAUSA DELLA DIFFRAZIONE (PRINCIPIO DI BABINET).

PIU' LA PARTICELLA E' GRANDE RISPETTO A λ
E PIU' LO SCATTERING E' SOSTANZIALMENTE
IN AVANTI.



EQUAZIONE DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO

CONSIDERO LO STRATO COMPRESO TRA 0 E S_1 .
ABBIAMO UNA DIMINUIZIONE DELLA RADIANZA
PER ASSORBIMENTO E SCATTERING E UN SUO
AUMENTO PER EMISSIONE (E SCATTERING MULTIPLO,
CHE PERO' HA SEZIONE D'URTO PICCOLISSIMA).



NOTA:
 $dI_{\text{abs}}^{(\lambda)} = -I_{\lambda} K_{\lambda} \rho ds$
 $dI_{\text{emi}}^{(\lambda)} = B_{\lambda}(T) \epsilon_{\lambda}$
(ρ E' LA CONCENTRAZIONE $\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$ DEL GAS)

$$dI_{\text{ESTING.}} = -\tilde{\kappa} dM \cdot I$$

$$dI_{\text{EMISS.}} = \tilde{j} dM$$

POICHE'

$$dM = \rho dV = \rho A ds$$

$$dI_{\text{EST}} = -\tilde{\kappa} \rho A I ds := -K \rho I ds$$

$$K := \tilde{\kappa} A, [K] = \frac{[L]^2}{[M]}$$

(K E' UNA SEZIONE D'URTO PER UNITA' DI MASSA). SIMILMENTE

$$dI_{\text{EMI}} = j \rho ds$$

$$j := \tilde{j} A, [j] = \frac{[I][L]}{[M]}$$

($\tilde{j}$ ERA UNA RADIANZA PER UNITA' DI MASSA). DEFINENDO

$$J = \frac{j}{K}$$

$$[J] = [I]$$

CHE HA LE DIMENSIONI DI UNA RADIANZA (FUNZIONE DI PRODUZIONE), TROVO

$$dI = dI_{\text{EST}} + dI_{\text{EMI}} = K \rho ds (J - I)$$

$$\frac{dI}{K \rho ds} = J - I$$

NOTA: VUOL DIRE CHE I
TENDE ESPONENZIALMENTE
A J LUNGO LO STRATO (E IN
GENERE $J \approx B_{\lambda}$).

CHE E' L'EQUAZIONE GENERALE DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO.

ESEMPIO: RADIAZIONE SOLARE

SI HA $J=0$: INFATTI LA TEMPERATURA DI BRILLANZA PER $\lambda_{\text{visibile}}$ E'

$T \approx 5000K$ E NON VI SONO IN ATMOSFERA CORPI COSI' CALDI.

ALLORA

$$\frac{dI}{k_p ds} = -I$$

$$\Rightarrow I(s) = I(0) e^{-\int_0^s k_p ds'}$$

DETTA LEGGE DI BEER LAMBERT. SUPPONENDO k COSTANTE E DETTO

$$l(s) = \int_0^s p ds'$$

$$\Rightarrow I(s) = I(0) e^{-kl}$$

(SE LO STRATO E' SOTTILE, k COSTANTE VA BENE).

• RICAPITOLANDO:

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda p ds} = J_\lambda - I_\lambda$$

DOVE k_λ E' LA SEZIONE D'URTO PER UNITA' DI MASSA, J_λ LA FUNZIONE SORCENTE.

PER LO SPETTRO SOLARE DEFINISCO LA TRASMITTANZA

$$T_\lambda(s) = \frac{I_\lambda(s)}{I_\lambda(0)} = e^{-\int_0^s k_\lambda p ds}$$

$$A_\lambda(s) = 1 - T_\lambda(s) = 1 - e^{-\int_0^s k_\lambda p ds}$$

DOVE A_λ E' L'ASSORBANZA (VERO IN ASSENZA DI SCATTERING).

• IR TERMICO, LW, SPETTRO TERRESTRE

IN QUESTO CASO $J_\lambda \neq 0$ E PONIAMO

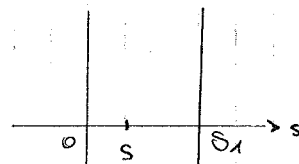
$$J_\lambda = B_\lambda(T_E)$$

DEFINIAMO LO SPESSORE OTTICO

$$\tau_\lambda(s_1, s) := \int_s^{s_1} k_\lambda(s') p(s') ds'$$

$$d\tau_\lambda = -k_\lambda p ds$$

(SI NOTI CHE E' UN PARAMETRO ADIMENSIONALE).



SOSTITUISCO ALLA VARIABILE S LA VARIABILE SPESORE OTTICO.

$$\frac{dI}{k_f ds} = - \frac{dI}{d\tau} \quad d\tau = -k_f ds$$

$$\left(- \frac{dI}{d\tau} = B - I \right) e^{-\tau} d\tau$$

NOTA: HO MOLTIPLICATO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{-\tau} d\tau$.

$$-dI e^{-\tau} = B e^{-\tau} d\tau - I e^{-\tau} d\tau$$

$$-(dI e^{-\tau} - I e^{-\tau} d\tau) = B e^{-\tau} d\tau$$

MA $d(I e^{-\tau}) = dI e^{-\tau} - I e^{-\tau} d\tau$, QUINDI

$$-d(I e^{-\tau}) = B e^{-\tau} d\tau$$

CHE INTEGRATO TRA $S \in [0, S_1]$, COE' $\tau \in [\tau(0), \tau(S_1)]$, DOVE

$$\tau(0) = \int_0^{S_1} k_f ds'$$

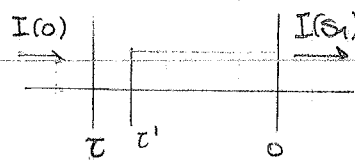
$$\tau(S_1) = \int_{S_1}^{S_1} k_f ds' = 0$$

$$-\int_{I(0)e^{-\tau(0)}}^{I(S_1)} d(I e^{-\tau}) = \int_{\tau(0)}^0 B e^{-\tau} d\tau$$

CON $B = B(T) = B[T(S)] = B[T(\tau)] = B(\tau)$. DETTO $\tau(0) := \tau$ (IL τ DELLO STATO),

$$I(0)e^{-\tau} - I(S_1) = - \int_0^{\tau} B e^{-\tau'} d\tau'$$

$$I(S_1) = \underbrace{I(0)e^{-\tau}}_{\text{ATTENUAZIONE}} + \underbrace{\int_0^{\tau} B e^{-\tau'} d\tau'}_{\text{AUMENTO (A SUA VOLTA ATTENUATO DA } e^{-\tau})}$$

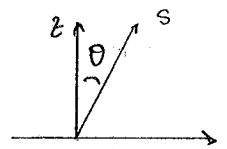


DETTA EQUAZIONE DI SCHWARZSCHILD.

APPROSSIMAZIONE PIANO-PARALLELA

SE TRASCURIAMO LA CURVATURA DELL'ATMOSFERA, POSSIAMO SCRIVERE

$$f(z) \quad dz = ds \cos \theta \quad \mu := \cos \theta$$



ALLORA, RIDEFINENDO τ COME

$$\tau_\lambda(z) = \int_z^\infty \kappa_\lambda(z') \rho(z') dz' \quad d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho dz$$

ESPRIMIAMO

$$I_\lambda(\varphi, \theta, z) \rightarrow I_\lambda(\varphi, \mu, \tau)$$

$$\kappa_\lambda ds = \frac{\kappa_\lambda dz}{\mu} = -\frac{d\tau}{\mu}$$

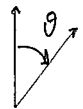
$$-\mu \frac{dI(\varphi, \mu, \tau)}{d\tau} = J(\varphi, \mu, \tau) - I(\varphi, \mu, \tau)$$

NOTA: PIU' IN ALTO MI METTO E PIU' PICCOLO E' LO SPESORE OTTICO CHE LA LUCE DEVE ATTRAVERSARE PER ENTRARE. OVVIAMENTE $\rho(z)$ CONTA SEMPRE MENO AL CRESCERE DI z .

NOTA: L'APPROSSIMAZIONE E' SUPPORRE CHE T, ρ IN ATMOSFERA DIPENDANO SOLO DA z .

DETTA USCENTE LA DIREZIONE VERSO L'ALTO,

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \cos \theta > 0 \quad \mu > 0$$



INVECE E' ENTRANTE LA RADIAZIONE CHE VA VERSO IL BASSO,

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad \cos \theta < 0 \quad \mu < 0$$

PER LA PARTE $\uparrow$ E $\downarrow$ RISPETTIVAMENTE,

$$-\mu \frac{dI_\lambda(\varphi, \mu, \tau)}{d\tau} = J_\lambda(\varphi, \mu, \tau) - I_\lambda(\varphi, \mu, \tau)$$

$$(\uparrow) \quad I^\uparrow$$

$$\mu \frac{dI_\lambda(\varphi, -\mu, \tau)}{d\tau} = J_\lambda(\varphi, -\mu, \tau) - I_\lambda(\varphi, -\mu, \tau)$$

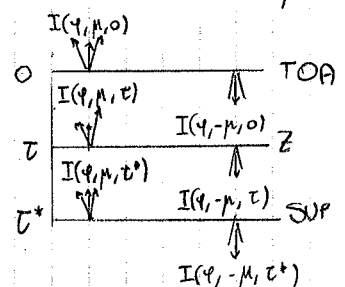
$$(\downarrow) \quad I^\downarrow$$

(SOTTINTENDIAMO D'ORA IN POI IL λ , INTENDENDO I MONOCROMATICA).

MOLTIPLICANDO PER

$$\uparrow e^{-\tau/\mu} d\tau/\mu$$

$$\downarrow e^{\tau/\mu} d\tau/\mu$$



NOTA: NEL DISEGNO SONO MOSTRATI I CONTRIBUTI CHE CONSIDERIAMO.

OTTENIAMO

$$\begin{cases} -dI^\uparrow e^{-\tau/\mu} = J^\uparrow e^{-\tau/\mu} d\tau/\mu - I^\uparrow e^{-\tau/\mu} d\tau/\mu \\ dI^\downarrow e^{\tau/\mu} = J^\downarrow e^{\tau/\mu} d\tau/\mu - I^\downarrow e^{\tau/\mu} d\tau/\mu \end{cases}$$

OVVERO

$$\begin{cases} -d(I^\uparrow e^{-\tau/\mu}) = J^\uparrow e^{-\tau/\mu} d\tau/\mu \\ +d(I^\downarrow e^{\tau/\mu}) = J^\downarrow e^{\tau/\mu} d\tau/\mu \end{cases}$$

INTEGRANDO

$$\begin{array}{l} \uparrow \quad \text{TAA} \quad \tau^* \in \tau, \quad I^\uparrow(\tau^*)e^{-\tau^*/\mu} \quad \text{A} \quad I^\uparrow(\tau)e^{-\tau/\mu} \\ \downarrow \quad \text{TAA} \quad 0 \in \tau, \quad I^\downarrow(0) \quad \text{A} \quad I^\downarrow(\tau)e^{\tau/\mu} \end{array}$$

OTTENGO

$$\begin{cases} I^\uparrow(\tau)e^{-\tau/\mu} + I^\uparrow(\tau^*)e^{-\tau^*/\mu} = \int_{\tau^*}^{\tau} J^\uparrow e^{-\tau'/\mu} d\tau'/\mu \\ I^\downarrow(\tau)e^{\tau/\mu} - I^\downarrow(0) = \int_0^{\tau} J^\downarrow e^{\tau'/\mu} d\tau'/\mu \end{cases}$$

$$+ I^\uparrow(\tau)e^{-\tau/\mu} = + I^\uparrow(\tau^*)e^{-\tau^*/\mu} + \int_{\tau}^{\tau^*} J^\uparrow e^{-\tau'/\mu} d\tau'/\mu$$

$$\begin{cases} I^\uparrow(\tau) = I^\uparrow(\tau^*)e^{-\frac{\tau^*-\tau}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau^*} J^\uparrow e^{-\frac{\tau'-\tau}{\mu}} d\tau'/\mu \\ I^\downarrow(\tau) = I^\downarrow(0)e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} J^\downarrow e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} d\tau'/\mu \end{cases}$$

COSA CI DICONO? LA RADIANZA CHE ENTRA IN UNO STRATO (DA SOPRA E DA SOTTO) È DATA DAL CONTRIBUTO DEGLI EMETTITORI

$I^\uparrow(\tau^*)$: DALLA SUPERFICIE

$I^\downarrow(0)$: DALLO SPAZIO

} ATTENUATE $e^{-"t"}$

MENTRE UN SECONDO CONTRIBUTO (GLI INTEGRALI) È DATO DAGLI

STRATI INTERMEDI. SI NOTI CHE IL PERCORSO SU CUI INTEGRAO È

INVERSAMENTE PROPORZIONALE A $\mu = \cos \theta$ (OSSIA CRESCE CON θ).

SE MI METTO IN $\tau=0$ HO $I'(0)$, CHE È L'EMISSIONE AL TOA MISURATA DAI SATELLITI.

$$I'(0) = I'(\tau^*) e^{-\tau^*/\mu} + \int_0^{\tau^*} J' e^{-\tau'/\mu} d\tau'/\mu$$

MA

$$I_{\lambda}^{\uparrow}(\tau^*) = \epsilon_{\lambda, s} B_{\lambda}(T_s)$$

CHE POSSO CONFRONTARE CON $I_{\lambda}^{\uparrow}(\tau^*)$ CHE OTTENDO MISURANDO $I'(0)$ NELLA FINESTRA IN CUI L'ATMOSFERA È TRASPARENTE:

INFATTI LÌ $J_{\lambda}^{\uparrow} = 0$. IN ALTRE PORZIONI DI λ POSSO FARE UNA STIMA SOLO SE CONOSCO BENE $J_{\lambda}^{\uparrow}$.

INVECE $I^{\downarrow}(0)$ È LA RADIANZA PROVENIENTE DALLO SPAZIO: NOTA $J^{\downarrow}$, LA TROVO MISURANDO $I^{\downarrow}(\tau^*)$.

• RISCALDAMENTO SOLARE

SI DICE HEATING/COOLING RATE

$$\frac{\partial T}{\partial t} \quad [K s^{-1}], [^{\circ}C s^{-1}], [^{\circ}C H_2]$$

SI ERA DERIVATA DALLA 1^a LEGGE (IN TERMINI DI ENTALPIA, $p = \text{cost.}$)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

RICORDIAMO IL FLUSSO RADIATIVO

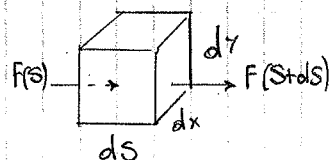
$$j = \frac{\partial Q}{\partial t} = F \cdot A \quad ([E] \cdot [t^{-1}])$$

IN TERMINI DI IRRADIANZA F AVREMO PERCIÒ

$$F(S+ds) \approx F(S) + \frac{\partial F}{\partial S} ds$$

$$dj = (F_{in} - F_{out}) dx dy = - \frac{\partial F}{\partial S} dS dx dy = - \frac{\partial F}{\partial S} dV$$

$$\frac{dj}{dV} = - \frac{dF}{dS}$$



E POSSO RISCRIVERE ($dz = -ds$)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{\partial F}{\partial z}$$

NOTA: SI POTEA EVITARE DI DEINTEGRARE IN ds ...

NOTA: L'HO RISCRIITTA CON dz IN LUGO DI ds PERCHÉ IN EFFETTI F È UN FLUSSO PER UNITÀ DI AREA A INCIDENZA NORMALE.

DOVE A DESTRA HO LA CONVERGENZA DELLA IRRADIANZA, CHE PROVOCA (1° PRINCIPIO) UN AUMENTO DI T . USANDO LA DEFINIZIONE

$$dz = - \frac{1}{k\rho} d\tau$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - k \frac{\partial F}{\partial z}$$

DALLA LEGGE DI BEER-LAMBERT ($I(s) = I_0 e^{-\int_0^s k\rho ds'}$),

$$I(z) = I_0 e^{-z/\mu_0}$$

NOTA: $I(s)$ QUI SOPRA SI RIFERISCE A UNA DEF. DIVERSA DI S (È OPPOSTO A $\hat{z}$, $S=0 \leftrightarrow z=\infty$).

POICHÉ LA RADIANZA È COLLIMATA, L'IRRADIANZA È SEMPLICEMENTE

$$F(z) = \mu_0 I_0 e^{-z/\mu_0} = F_0 e^{-z/\mu_0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_0 e^{-z/\mu_0} \left(-\frac{1}{\mu_0} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c_p \mu_0} F(z)$$

ORA POICHÉ

$$\rho = \rho_0 e^{-z/H}$$

$$\tau = \int_z^\infty k\rho dz' \approx k\rho_0 \int_z^\infty e^{-z'/H} dz' = Hk\rho_0 e^{-z/H} = Hk\rho$$

QUINDI (SE k È PRESSOCCHÉ COSTANTE NELLO STRATO)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\tau}{c_p H \mu_0} F(\tau)$$

NOTA: OK COSTANTE, MA COME MINIMO HO UN k DIVERSO PER OGNI SPECIE CHIMICA CHE ASSORBE (VEDI GRAFICO PROSSIMA PAGINA).

QUANT'È IL MASSIMO LIVELLO DI RISCALDAMENTO?

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\tau}{H\mu_0} F(\tau) \right] \equiv 0$$

$$\frac{F(\tau)}{H\mu_0} + \frac{\tau}{H\mu_0} \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0$$

NOTA: SE CI PENSI QUESTO NON VUOL DIRE TRASCUOARE LA DIPENDENZA $F(\tau)$. INVECE $H\mu_0$ È SOLO UNA COSTANTE INUTILE. INOLTRE SI È VISTO SOPRA CHE

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{1}{\mu_0} F(\tau)$$

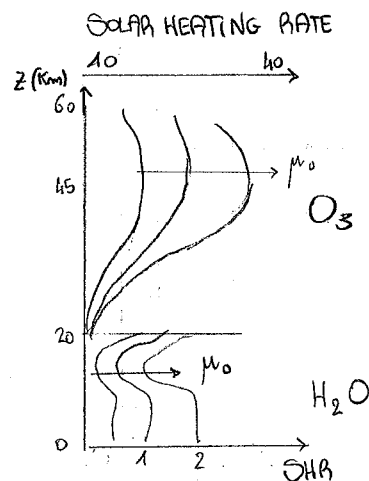
$$\frac{F}{H\mu_0} - \frac{\tilde{\tau}}{H\mu_0^2} F = 0$$

QUINDI HO IL MASSIMO CALORE ASSORBITO PER

$$\tilde{\tau} = \mu_0$$

DALLA DEFINIZIONE DI $\tilde{\tau} = KHP(\tilde{z}) = \mu_0$ RICAVO

$$\tilde{z} = H \ln \left(\frac{KHP_0}{\mu_0} \right)$$



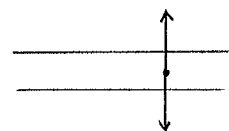
• RAFFREDDAMENTO IR

CALCOLIAMO IL COOLING RATE PARTENDO DA

$$F = F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)$$

CHE ANDREMO A SOSTITUIRE IN

$$\frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial F}{\partial z}$$



RICORDIAMO

$$\begin{cases} I^\uparrow(\tau) = I^\uparrow(\tau^*) e^{-\frac{\tau^* - \tau}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau^*} J^\uparrow e^{-\frac{\tau' - \tau}{\mu}} d\tau'/\mu \\ I^\downarrow(\tau) = I^\downarrow(0) e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} J^\downarrow e^{-\frac{\tau - \tau'}{\mu}} d\tau'/\mu \end{cases}$$

ASSUMIAMO PER SEMPLICITÀ

$$J^\uparrow, J^\downarrow = B$$

E CHE DALLO SPAZIO NON ARRIVI RADIAZIONE IR, CIOÈ AL TOA

$$I^\downarrow(0) = 0$$

E, COME ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE, ANCHE PER LA SUPERFICIE

$$I^\uparrow(\tau^*) = B(\tau^*)$$

DEFINISCO LA TRASMITTANZA

$$T(\tau/\mu) = e^{-\tau/\mu}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{1}{\mu} e^{-\tau/\mu} = -\frac{1}{\mu} T(\tau/\mu)$$

E POSSO RISCRIVERE

$$I^\uparrow(\tau) = B(\tau^*) T\left(\frac{\tau^* - \tau}{\mu}\right) - \int_{\tau}^{\tau^*} B(\tau') \left\{ \frac{d}{d\tau'} T\left(\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) \right\} d\tau'$$

$$I^\downarrow(\tau) = \int_0^\tau B(\tau') \left\{ \frac{d}{d\tau'} T\left(\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) \right\} d\tau'$$

INTEGRANDO SU μ E μ (L'INTERO EMISFERO), OTTENGO L'IRRADIANZA

$$F^\downarrow = 2\pi \int_0^1 I^\downarrow \mu d\mu$$

DEFINISCO INNAZZITUTTO LA TRASMITTANZA DIFFUSA

$$T^\downarrow(\tau) := 2 \int_0^1 T\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \mu d\mu$$

INTEGRO QUINDI $I^\uparrow$ E $I^\downarrow$:

$$\begin{cases} 2\pi \int_0^1 I^\uparrow \mu d\mu = F^\uparrow(\tau) = 2\pi \int_0^1 B(\tau^*) T\left(\frac{\tau^*-\tau}{\mu}\right) \mu d\mu - 2\pi \int_0^1 \int_\tau^{\tau^*} B(\tau') \frac{d}{d\tau'} \left\{ T\left(\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) \right\} d\tau' \mu d\mu \\ F^\downarrow(\tau) = 2\pi \int_0^1 \int_0^\tau B(\tau') \frac{d}{d\tau'} \left\{ T\left(\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) \right\} d\tau' \mu d\mu \end{cases}$$

NOTO CHE $B(\tau)$ NON DIPENDE DA μ E, RICONOSCENDO $T^\downarrow(\tau)$,

$$\begin{cases} F^\uparrow(\tau) = \pi B(\tau^*) T^\downarrow\left(\frac{\tau^*-\tau}{\mu}\right) - \int_\tau^{\tau^*} \pi B(\tau') \frac{d}{d\tau'} T^\downarrow\left(\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) d\tau' \\ F^\downarrow(\tau) = \int_0^\tau \pi B(\tau') \frac{d}{d\tau'} T^\downarrow\left(\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) d\tau' \end{cases}$$

RICORDANDO CHE PER

$$\tau = \tau^* \rightarrow z = 0$$

$$\tau = 0 \rightarrow z = \infty$$

CAMBIO DI VARIABILI E RISOVRIVO

NOTA: CALIAMO UN VELO PIETOSO SU QUESTO CAMBIO.

$$\begin{cases} F^\uparrow(z) = \pi B(0) T^\downarrow(z) + \int_0^z \pi B(z') \frac{d}{dz'} T^\downarrow(z-z') dz' \\ F^\downarrow(z) = \int_\infty^z \pi B(z') \frac{d}{dz'} T^\downarrow(z-z') dz' \end{cases}$$

SOMMANDOLE OTTENGO

$$F = F^\uparrow - F^\downarrow = \pi B(0) T^\downarrow(z) + \int_0^\infty \pi B(z') \frac{d}{dz'} T^\downarrow(z-z') dz'$$

DOVREI DERIVARLA E CERCARE IL MASSIMO.

USO INVECE L'APPROSSIMAZIONE COOLING TO SPACE: I FLUSSI DALL'ALTO E DAL BASSO SI COMPENSANO

(VERO DI PER SÈ SOLO SE GLI STRATI AVESSERO LA STESSA TEMPERATURA); NON SI COMPENSA

SOLO IL CONTRIBUTO RELATIVO ALLO STRATO CHE STIAMO OSSERVANDO, IN ALTRI TERMINI TRASCURO IN F IL TERMINE

$$\pi B(0) T^{\frac{1}{2}}(z)$$

E PENSO $B(z') = 0 \quad \forall z' \neq z$, COSÌ CHE

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \pi B(z) \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} \frac{d}{dz'} T^{\frac{1}{2}}(z-z') dz' = \pi B(z) \frac{d}{dz} T^{\frac{1}{2}}(z_{\infty}-z) \propto \pi B(z) e^{-z/\mu}$$

CONTA QUINDI SOLO QUELLO CHE PASSA DALLO STRATO IN QUESTIONE ALLO SPAZIO. MEDIANDO μ ,

$$\bar{\mu} = 0.66 \rightarrow \theta = 53^\circ$$

IN STRATOSFERA SI HA PERFETTO EQUILIBRIO RADIATIVO, MENTRE LA TROPOSFERA EMETTE PIU' RADIAZIONE DI QUANTA NE ASSORBA.

COME E' RISTABILITO L'EQUILIBRIO IN TROPOSFERA?

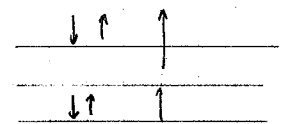
$$100 \text{ UNITA'} \equiv 340 \text{ W/m}^2$$

NOTA CHE TROPO, STRATO EMETTONO DI PIU' DOVE SONO PIU' CALDE. AL NETTO,

STRATO 0

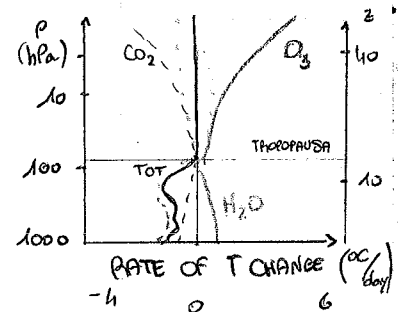
TROPO -29

SUPERF. 29

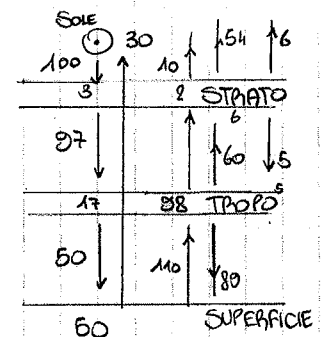


$$\text{NOTA: } \frac{d}{dz} T(\tau/\mu) = -\frac{1}{\mu} e^{-\tau/\mu} p_K$$

PER FARE IL GRAFICO QUI SOTTO MI SERVE CALCOLARE

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial F}{\partial z}$$


-- LONGWAVE
- SHORTWAVE



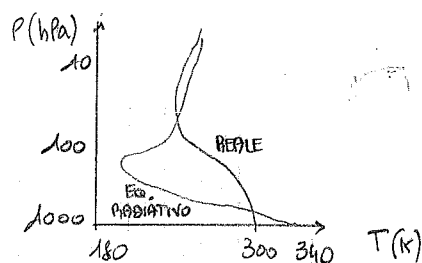
(VALORI MISURATI)

SI VEDE QUINDI CHE A COMPENSARE LA PERDITA NELLA TROPOSFERA E' LA SUPERFICIE E LO FA SOTTO FORMA DI CALORE SENSIBILE (S, CONVEZIONE E TURBOLENZE) O LATENTE (24, ACQUA CHE SALE E CONDENSA).

SE NON FOSSE PER LA SUPERFICIE, LA TROPO SI RAFFREDDEREBBE COSI' DA EMETTERE DI MENO; INOLTRE IL LAPSE RATE SAREBBE MOLTO PIU' ALTO.

UN'ATMOSFERA IN EQUILIBRIO RADIATIVO E' MOLTO PIU' INSTABILE.

LA NOSTRA ATMOSFERA E' IN EQUILIBRIO RADIATIVO - CONVETTIVO (L'INSTABILITA' DOVUTA AL RAFFREDDAMENTO PROVOCA CONVEZIONE GRAZIE A CUI E' RIPRISTINATO L'EQUILIBRIO).



NOTA: SI RICORDI CHE L'ATMOSFERA E' STABILE SE $T(z)$ DECRESCIE PIU' LENTAMENTE DI QUELLA DI UN PACCHETTO SOLLEVATO ADIABATICAMENTE ($\Gamma_e < \Gamma_{d,a}$).

RADIAZIONE E CHIMICA DELL'ATMOSFERA



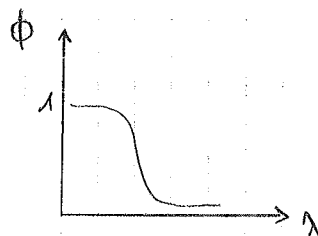
DOVE γ E' IL COEFFICIENTE DI FOTODISSOCIAZIONE. IL NUMERO m_{AB} DI MOLECOLE DI AB VARIA COME

$$\frac{dm_{AB}}{dt} = -j m_{AB}$$

DOVE

$$j = \int_{\lambda} \phi(\lambda) \sigma_a(\lambda) F_{act}(\lambda) d\lambda$$

CON F_{act} IL FLUSSO ATTINICO, ϕ L'EFFICIENZA (PROBABILITA' DI DISSOCIARSI), σ_a LA SEZIONE D'URTO DI ASSORBIMENTO; DIMOSTRIAMOLO.

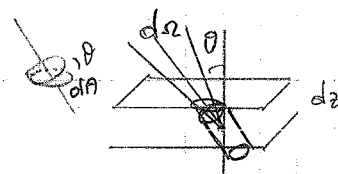


PRENDO UNO STRATO $d\Omega$ SU CUI INCIDE

$$dE_{\lambda}^{(inc)} = I_{\lambda} \cos\theta A d\Omega dt d\lambda$$

IL NUMERO DI MOLECOLE COLPITE E' $dN_a = m A d\Omega$. INOLTRE

$$\sigma_a = \frac{dE^{(ass)}/dt}{dE^{(inc)}/dt \cdot dN_a/dA}$$



NOTA: L'HO RIFATTA DA CIMA A FONDO, NON STAVA NE' IN CIELO NE' IN TERRA.

$$\begin{aligned} dE^{(ass)} &= dE^{(inc)} \cdot \sigma \cdot m d\Omega = dE^{(inc)} \cdot \sigma \cdot m \frac{d\Omega}{\cos\theta} \\ &= I_{\lambda} A d\Omega dt d\lambda \cdot \sigma \cdot m d\Omega \end{aligned}$$

CHE NON DIPENDE PIU' DA θ . SI DISSOCIANO

$$dN_d = \phi(\lambda) dE_{\lambda}^{(ASS)}$$

QUINDI NELLO STATO IL RATE DI DISSOCIAZIONE VALE

$$\begin{aligned} \frac{dN_d}{dt} &= -Am dz \int_{4\pi} \int_{\Delta\lambda} \phi(\lambda) \sigma(\lambda) I_{\lambda}(\theta, \varphi) d\lambda d\Omega \\ &= -Am dz \int_{\Delta\lambda} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\lambda}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \right]}_{\text{FLUSSO ATTINICO}} \phi(\lambda) \sigma_{\lambda}(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

IL FLUSSO ATTINICO DIFFERISCE DALL' IRRADIANZA SOLO PER L'ASSENZA DEL TERMINE $\cos\theta$ NELL' INTEGRALE.

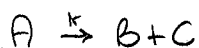
DIVIDENDO PER L'UNITA' DI VOLUME $V = Adz$,

$$\frac{1}{V} \frac{dN_d}{dt} = -m \int_{\Delta\lambda} F_{act} \phi \sigma_{\lambda} d\lambda$$

STUDIAMO TRE TIPI DI FOTODISSOCIAZIONE.

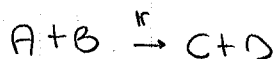
RICORDIAMO

REAZIONE DEL I° ORDINE:



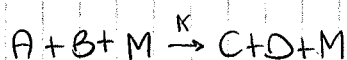
$$\frac{dm_a}{dt} = -K m_a$$

II° ORDINE



$$\frac{dm_a}{dt} = \frac{dm_b}{dt} = -K m_a m_b$$

III° ORDINE



$$\frac{dm_a}{dt} = \frac{dm_b}{dt} = -K m_a m_b m_M$$

PRODUZIONE DI OZONO

MISURIAMO LA QUANTITA' DI OZONO COME

$$m/V = m_{O_3}$$

$$[m^{-3}]$$

$$m_{O_3} = \frac{m_{O_3}}{m_d} \cdot 10^6$$

$$[ppm], \text{ MIXING RATIO}$$

$$p_{O_3}$$

$$[hPa], \text{ PRESSIONE PARZIALE}$$

P_{O_3} SI PUO' MISURARE IN DOBSON UNITS (DU) : PRENDO TUTTO L' O_3 IN UNA COLONNA D'ARIA E LO PORTO IN STP ($P = 1013 \text{ hPa}$, $T = 273.16 \text{ K}$), QUINDI NE MISURO LO SPESSORE (IN UNITA' DI 10^{-5} m). PER L'INTERA ATMOSFERA, AD ESEMPIO,

$$m_d(z) = m_d(z_{STP}) e^{-\frac{z-z_{STP}}{H}}$$

$$N_d = A m_d(z_{STP}) \int_{z_{STP}}^{\infty} e^{-(z-z_{STP})/H} dz = A H m(z_{STP})$$

$$\frac{N_d}{m(z_{STP})} = V_{STP} = A H$$

$$H \simeq 8 \text{ km} = 8 \cdot 10^8 \text{ DU}$$

L'OZONO IN ATMOSFERA E'

$$300 \text{ DU} = 3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 3 \text{ mm}$$

$$\frac{DU_{O_3}}{DU_d} = \frac{3 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^8} = 3.75 \cdot 10^{-7} = 0.375 \text{ ppm} = 375 \text{ ppb}$$

NOTA: m_d E' UNA DENSITA' NUMERICA E COME TALE $m_d \sim e^{-z/H}$.

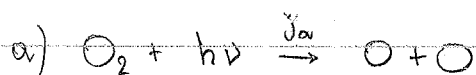
N_d : NUMERO DI MOLECOLE IN UNA COLONNA D'ARIA DI AREA UNITARIA ($A = 1 \text{ m}^2$)

VOLUME OCCUPATO DALLE N_d PARTICELLE DI PRIMA POSTE IN STP.

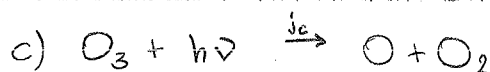
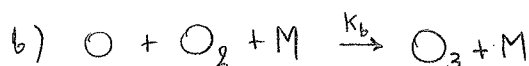
ALL' EQUATORE HO MINIMA CONCENTRAZIONE DI O_3 , MENTRE E' MASSIMA AL POLO PRIMAVERILE.

MODELLO FOTOCHIMICO DI CHARMANN

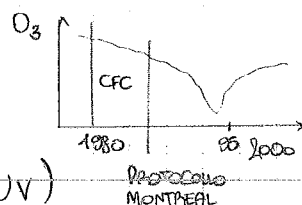
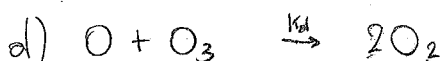
$$M_1 = M_O, \quad M_2 = M_{O_2}, \quad M_3 = M_{O_3}$$



$\lambda < 240 \text{ nm}$ (UV)

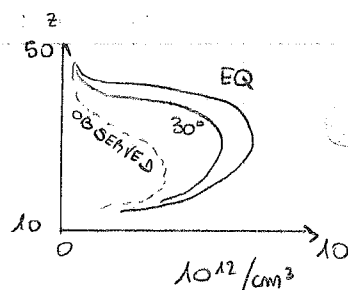


$\lambda < 310 \text{ nm}$ (UV VIOLETO)



NOTA: QUELLE CON j SONO FOTOLITICHE.

CI DIMOSTRA CHE IL RISULTATO DEL CICLO E' QUELLO A FIANCO. CI PRENDE LA FORMA MA NON LA QUANTITA' (REAZIONI CATALITICHE E CONNESSIONE).



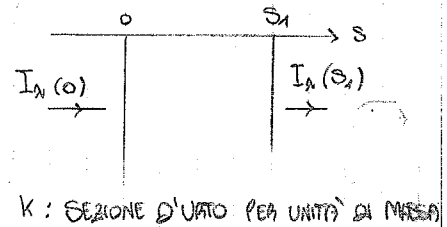
SOMMARIO: TRASFERIMENTO RADIATIVO

- ANGOLO SOLIDO
- INTENSITA' (RADIANZA SPETTRALE)
- IRRADIANZA
- RADIANZA COLLIMATA
- FLUSSO
- EMISSIONE DI CORPO NERO
- EMISSIONE SOLARE
- MODELLO ATMOSFERA BLACKBODY
- ENERGIA DELLE MOLECOLE
- SPETTRI DI ASSORBIMENTO
- TEMPERATURA DI BRILLANZA
- TEMPERATURE SOUNDING
- SCATTERING
- SCATTERING RAYLEIGH
- SEZIONE D'URTO
- AEROSOL
- EQUAZIONE DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO
- LEGGE DI BEER-LAMBERT (EMISSIONE SOLARE)
- EMISSIONE TERRESTRE
- EQUAZIONE DI SCHWARZCHILD
- RISCALDAMENTO SOLARE
- RAFFREDDAMENTO IA
- BILANCIO TERMICO
- RADIAZIONE E CHIMICA DELL' ATMOSFERA
- MODELLO FOTOCHIMICO DI CHAPMAN

• RIASSUNTO DELL'ULTIMA PARTE (MA SOLO IN PARTE)

* EQUAZIONE DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO

CONSIDERO UN "PENNEL" DI RADIAZIONE.



$$dI^{(\text{ESTINZIONE})} = -k p I ds \quad (\text{ASSORBIMENTO, SCATTERING})$$

$$dI^{(\text{EMISSIONE})} = j p ds \quad (\text{EMISSIONE BLACKBODY})$$

DETTA $J = j/k$ LA FUNZIONE DI PRODUZIONE (E' UNA RADIANZA - INTENSITA'),

$$\frac{dI}{k p ds} = J - I$$

EQUAZIONE DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO
(L'INTENSITA' SI AVVICINA ESPONENZIALMENTE A $B_n(T)$) (I)

• RADIATIONE SOLARE (LUCE VIOLETTA)

POICHE' $T^{(\text{EARTH})}(\sim 500 \text{ mm}) \approx 5000 \text{ K}$ E IN ATMOSFERA NON VI SONO CORPI COSI' CALDI,
AVRO' $j = 0 \Rightarrow J = 0$, DA CUI

$$I(s) = I(0) e^{-\int_0^s k p ds'}$$

LEGGE DI BEER - LAMBERT

POSSO ANCHE DEFINIRE

$$T(s) = I(s) / I(0)$$

TRASMITTANZA

$$A(s) = 1 - T(s)$$

ASSORBENZA (IN ASSENZA DI SCATTERING)

• RADIATIONE TERRESTRE (IR)

PONIAMO PER SEMPLICITA' $J_n = B_n(T_e)$. DEFINIAMO

$$\tau_n(s, s_1) = \int_s^{s_1} k_n(s') p(s') ds' \quad \text{SPESORE OTTICO}$$

NOTO CHE E' ADIMENSIONALE. SE LO CALCOLO A TERRA HO $\tau(0) := \tau$, LO SPESORE
DELLO STRATO DI ATMOSFERA ALTO FINO A s_1 . INVECE AL CRESCERE DI s
 τ DIMINUISCE. POSSO RISCRIVERE LA (I) USANDO

$$d\tau = -k p ds.$$

E INTEGRANDOLA ($B(T(s)) = B(\tau)$) HO L'EQUAZIONE DI SCHWARZCHILD

$$I(s_1) = \underbrace{I(0) e^{-\tau}}_{\text{ATTENUAZIONE}} + \underbrace{\int_0^{\tau} B(\tau') e^{-\tau'} d\tau'}_{\text{AUMENTO (A SUA VOLTA ATTENUATO)}} \quad (\text{II})$$

• APPROSSIMAZIONE PIANO - PARALLELA

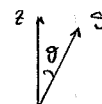
TRASCURIAMO LA CURVATURA DELL'ATMOSFERA E SUPPONIAMO $T = T(z)$, $p = p(z)$.

$$dz = ds \cdot \cos \theta := ds \cdot \mu$$

MANDIAMO $S_1 \rightarrow \infty$ (TANTO $p(s) \rightarrow 0$) E RIDEFINIAMO

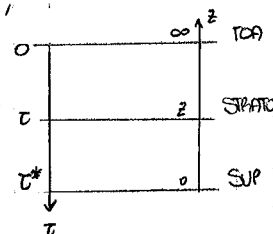
$$\tau(z) = \int_z^\infty K(z') p(z') dz'$$

$$d\tau = -K p dz$$



CONSIDERANDO L'EMISSIONE DELLA SUPERFICIE TERRESTRE VERSO L'ALTO, DEGLI STRATI SOTTOSTANTI VERSO L'ALTO E DI QUELLI SOPRASTANTI VERSO IL BASSO,

$$\begin{cases} I^{\uparrow}(\tau) = I^{\uparrow}(\tau^*) e^{-\frac{\tau^* - \tau}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau^*} J^{\uparrow} e^{-\frac{\tau - \tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} \\ I^{\downarrow}(\tau) = I^{\downarrow}(0) e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} J^{\downarrow} e^{-\frac{\tau - \tau'}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} \end{cases} \quad (III)$$



DOVE $I^{\uparrow}(\tau^*)$ DERIVA DALLA SUPERFICIE E $I^{\downarrow}(0)$ DALLO SPAZIO, MENTRE GLI INTEGRALI SONO I CONTRIBUTI DEGLI STRATI INTERMEDII (AL CRESCERE DI θ CRESCe LA LUNGHEZZA DEL CAMMINO DI INTEGRAZIONE).

• STIME

SI E' VISTO CHE C'E' UNA FINESTRA DI λ IN CUI L'ATMOSFERA E' TRASPARENTE. POSSO CONFRONTARE QUANTO MISURATO DAI SATELLITI AL TOA ($\tau=0$) CON

$$I_{\lambda}^{\uparrow}(0) = I_{\lambda}^{\uparrow}(\tau^*) e^{-\tau^*/\mu} = \epsilon_{\lambda, S} B_{\lambda}(T_S) e^{-\tau^*/\mu}$$

ALTRE STIME SONO POSSIBILI QUANDO E' BEN NOTA J_{λ} .

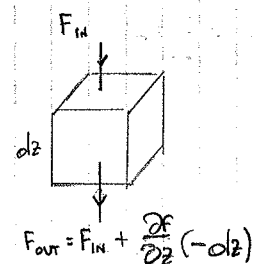
* RISCALDAMENTO SOLARE

DALL'EQUAZIONE DELLA TERMODINAMICA

$$p c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

IN TERMINI DI IRRADIANZA

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\delta y} [(F_{in} - F_{out}) dA] = \frac{1}{\delta y} \left[+ \frac{\partial F}{\partial z} dz dA \right] = + \frac{\partial F}{\partial z}$$



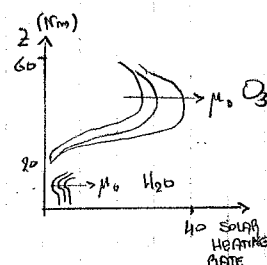
USANDO $d\tau = -K p dz$ E LA LEGGE DI BEER LAMBERT (PENSAI, CI STA CHE SIA SCRITTA COSI')

$$I(\tau) = I_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

E CONSIDERANDO INFINE CHE $F(z) = \mu_0 I(z) := F_0 e^{-\tau/\mu_0}$ (E' COLLIMATA),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\mu_0 c_p} F(\tau)$$

(K DIVERSA PER O_3 , H_2O ...)



TRA L'ALTRO, POSTO $p = p_0 e^{-z/H}$ E SUPPOSTO K COSTANTE IN z , RICAVO $\tau = H k p$ DA CUI

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\tau}{\rho c_p H p_0} F(z)$$

DERIVANDO $\tau F(z)$ TROVO UN MASSIMO PER $\tilde{z} = \mu_0$, OSSIA PER $\tilde{z} = H \ln \left(\frac{k H p_0}{\mu_0} \right)$.

* RAFFREDDAMENTO 1A

VOGLIAMO CALCOLARE

$$\frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial F}{\partial z}$$

PER FARLO CI SERVE $F = F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)$. PARTIAMO DALLE EQUAZIONI (III) CHE CI Danno $I^\uparrow(z)$ E $I^\downarrow(z)$, CHE INTEGRIAMO SULL'EMISFERA PER AVERE L'IRRADIANZA F . SUPPONIAMO:

- $J^\uparrow, J^\downarrow = B$
- $I^\downarrow(0) = 0$ (DALLO SPAZIO NON ARRIVA RADIAZIONE 1A)

OTTENIAMO

$$F(z) = \pi B(0) T^\dagger(z) + \int_0^\infty \pi B(z') \frac{d}{dz'} T^\dagger(z-z') dz'$$

DOVE SI SONO DEFINITE TRASMITTANZA (T) E TRASMITTANZA DIFFUSA ($T^\dagger$) COME

$$T(\tau/\mu) = e^{-\tau/\mu}$$

$$T^\dagger(z) = 2 \int_0^1 T\left(\frac{z}{\mu}\right) \mu d\mu$$

DERIVARE $F(z)$ E' DIFFICILE E QUINDI USO IL COOLING-TO-SPACE: I FLUSSI DI CALORE DALL'ALTO E DAL BASSO SI COMPENSANO (COME SE GLI STRATI AVESSERO LA STESSA TEMPERATURA) E CONTA SOLO IL CONTRIBUTO DELLO STRATO IN QUESTIONE. CIO' COMPORTA CHE TRASCURIAMO $B(z=0)$ E NELL'INTEGRALE PONIAMO $B(z')=0 \quad \forall z \neq z'$; VEDI GLI APPUNTI PER I GRAFICI.

SCORRO CHE LA STRATOSFERA E' IN EQUILIBRIO RADIATIVO, MENTRE LA TROPOSFERA E' IN EQUILIBRIO RADIATIVO-CONVETTIVO CON LA SUPERFICIE (CALORE LATENTE O SENSIBILE).

UN'ATMOSFERA IN EQUILIBRIO RADIATIVO E' PIU' FREDDA E PIU' INSTABILE ($\Gamma_e \gg$).

GLI ARGOMENTI SUCCESSIVI E LA PRIMA PARTE (FINO AGLI AEROSOL) SONO PIU' SEMPLICI E SI TROVANO SUGLI APPUNTI.

THAT'S ALL, FOLKS.