Appunti del corso di

Fluidodinamica per l'Astrofisica

di Davide Venturelli

Anno 2016/2017

venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

FLUIDODINAMICA - PROGRAMMA

CINEMATICA DEI CORPI DEFORMABILI, DINAMICA

- RAPPRESENTAZIONE MATERIALE, REFERENZIALE, SPAZIALE
- DEF. MASSA, RELAZIONE TRA ρ CON MAPPE DIVERSE
- TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS
- EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA
- EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO
- CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE
- DEFORMAZIONE LOCALE
- LINEAR STRAIN RATE, VOLUME STRAIN RATE, ROTOTRASLAZIONI, ROTAZIONI
- PRINCIPI DI NOLL, RELAZIONI COSTITUTIVE PER I FLUIDI NEWTONIANI

TERMODINAMICA DEI CONTINUI

- DEFINIZIONE E CALCOLO DELL'ENERGIA INTERNA e
- EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE
- BILANCIO DI ENERGIA CINETICA E BILANCIO DI ENERGIA INTERNA
- DEFINIZIONE DELLA FORMA DEVIATORICA
- BILANCIO DI ENTROPIA (CLAUSIUS - DUHEM)
- RELAZIONE COSTITUTIVA PER IL FLUSSO DI CALORE
- BILANCIO DI ENERGIA IN FORMA ENTALPICA
- BILANCIO DI ENERGIA IN θ E ρ
- EQUAZIONE DI BERNOULLI

EQUAZIONI DI NAVIER - STOKES

- FORMA ADIMENSIONALE DELLE EQUAZIONI DI N-S
- TEOREMA DI BUCKINGHAM, ESEMPIO DELLA RESISTENZA DI UNA SFERA
- CASO INCOMPRIMIBILE
- FLUSSO TRA PARETI MOBILI, FLUSSO DI COUETTE, FLUSSO DI POISEUILLE

FENOMENI ONDULATORI

- ONDE DI PRESSIONE
- ONDE DI PRESSIONE IN UN GAS PERFETTO
- ONDE E TEMPERATURA
- EQUAZIONE DELLE ONDE NEI FLUIDI
- ONDE SFERICHE
- ONDE D'URTO E RELAZIONI DI SALTO (RANKINE - HUGONIOT)
- URTO NORMALE IN UN GAS PERFETTO

APPLICAZIONE ALLO STUDIO DI PARTICOLARI SISTEMI

- URTO FORTE (TAYLOR - SEDOV)
- ESPLOSIONE DI UNA SUPERNOVA (CENNI)
- CORPO AUTOGRAVITANTE
- NEBULOSE
- TURBOLENZA: PROBLEMA DELLA CHIUSURA
- TURBOLENZA: EQUAZIONI DI PRODUZIONE E DISSIPAZIONE
- TURBOLENZA: IPOTESI DI RICHARDSON E SCALA DI KOLMOGOROV

- NOTAZIONE INDICIALE

PRESA UNA BASE ORTONORMALE $\vec{e}_{(i)}$, POSSO SCRIVERE

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_{(1)} + v_2 \vec{e}_{(2)} + \dots + v_m \vec{e}_{(m)}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} v_i \vec{e}_{(i)}$$

USANDO LA NOTAZIONE DI EINSTEIN (LEVI - CIVITA)

$$\vec{v} = v_i \, \vec{e}_{(i)}$$

SIMILMENTE RAPPRESENTO LA MATRICE A COME

$$A = a_{ij}$$

ALLORA

$$\vec{v} = A \vec{u}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 \\ v_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= a_{1j} u_j \\ v_2 &= a_{2j} u_j \\ &\vdots \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v_i = a_{ij} u_j$$

DOVE j È INDICE RIPETUTO (MENTRE i NO).

SE

$$S = \{ \vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)} \}$$

È UNA BASE, ALLORA

$$\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

- PRODOTTO SCALARE

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_j \vec{e}_{(j)} \cdot v_i \vec{e}_{(i)} = u_j v_i \, \vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = u_j v_i \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} i = 1 \quad & = u_1 v_1 \delta_{11} + u_2 v_1 \delta_{12} + u_3 v_1 \delta_{13} \\ i = 2 \quad & + u_1 v_2 \delta_{21} + u_2 v_2 \delta_{22} + u_3 v_2 \delta_{23} \\ i = 3 \quad & + u_1 v_3 \delta_{31} + u_2 v_3 \delta_{32} + u_3 v_3 \delta_{33} \end{aligned}$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i$$

NOTA CHE

$$u_j v_i \delta_{ij} = u_j v_j = u_i v_i$$

- DEFINIAMO IL <u>PRODOTTO MISTO</u>

$$\vec{e}_{(i)} \cdot \left(\vec{e}_{(j)} \wedge \vec{e}_{(k)} \right) := \varepsilon_{ijk}$$

TENSORE DI RICCI (DEL III ORDINE)

(TENSORE: OGGETTO CHE NON CAMBIA AL VARIARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO, ANCHE SE CAMBIANO LE SUE COMPONENTI)

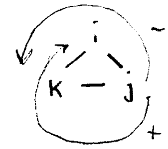
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{PERMUTAZIONI PARI DEGLI INDICI} \\ 0 & \text{SE ALMENO DUE INDICI SONO UGUALI (PROPRIETÀ DI } \underline{a} \wedge \underline{b}) \\ -1 & \text{PERMUTAZIONI DISPARI} \end{cases}$$

- <u>ESEMPIO</u>

$$\varepsilon_{ijk} = + \varepsilon_{jki}$$

$$\varepsilon_{ijk} \rightarrow \varepsilon_{jik} \rightarrow \varepsilon_{jki}$$

OPPURE LO PENSO CICLICO: SONO CONCORDI SE DEVO GIRARE A DESTRA PER ANDARE DA i A j..



$\varepsilon_{jki} \rightarrow$ $\quad$ ε_{jik}

- <u>ESEMPIO</u>

$$\varepsilon_{123} = \vec{e}_{(1)} \cdot \left(\vec{e}_{(2)} \wedge \vec{e}_{(3)} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\varepsilon_{213} = -1$$

$$\underline{\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_{(i)} \cdot \left(\vec{e}_{(j)} \wedge \vec{e}_{(k)} \right) = \det \left(\vec{e}_{(i)}, \vec{e}_{(j)}, \vec{e}_{(k)} \right)}$$

- <u>REGOLA</u>

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klq} = \delta_{il} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jl}$$

NOTA CHE k È RIPETUTO (LIBERO, MUTO), PERCIÒ È UN TENSORE DI ORDINE IV. GLI INDICI RIPETUTI DEVONO ESSERE IN POSIZIONE CONTIGUA NEL MEMBRO A SINISTRA; IN QUELLO A DESTRA,

$$\delta_{il} \delta_{jq} - \ldots$$

PRIMI $\quad$ SECONDI $\quad$ ALTRE COPPIE

- ## PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{e}_{(1)} \wedge \vec{e}_{(2)} = \vec{e}_{(3)} = \varepsilon_{12k}\, \vec{e}_{(k)}$$

$$\vec{e}_{(2)} \wedge \vec{e}_{(3)} = \vec{e}_{(1)} = \varepsilon_{23k}\, \vec{e}_{(k)} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{e}_{(i)} \wedge \vec{e}_{(j)} = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_{(k)}$$

$$\vec{e}_{(3)} \wedge \vec{e}_{(1)} = \vec{e}_{(2)} = \varepsilon_{31k}\, \vec{e}_{(k)}$$

NOTA: USANDO $\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_{(i)} \cdot \left(\vec{e}_{(j)} \wedge \vec{e}_{(k)}\right)$ HO SUBITO $\vec{e}_{(j)} \wedge \vec{e}_{(k)} = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_{(i)} = \varepsilon_{jki}\, \vec{e}_{(i)}$.

INOLTRE $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k = det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= u_i\, \vec{e}_{(i)} \wedge v_j\, \vec{e}_{(j)} \\ &= u_i v_j\, \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_{(k)} \\ &= \underbrace{\left(\varepsilon_{ijk}\, u_i v_j\right)}_{\text{COMPONENTE K-ESIMA DI } (\vec{u} \wedge \vec{v})} \vec{e}_{(k)}\end{aligned}$$

AD ESEMPIO PER $k = 1$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_{(1)} & \vec{e}_{(2)} & \vec{e}_{(3)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, \vec{e}_{(1)}$$

CHE RIPRODUCIAMO CON

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij1}\, u_i v_j &= \varepsilon_{111}\, u_1 v_1 + \varepsilon_{121}\, u_1 v_2 + \varepsilon_{131}\, u_1 v_3 \\ &+ \varepsilon_{211}\, u_2 v_1 + \varepsilon_{221}\, u_2 v_2 + \underbrace{\varepsilon_{231}\, u_2 v_3} \\ &+ \varepsilon_{311}\, u_3 v_1 + \underbrace{\varepsilon_{321}\, u_3 v_2} + \varepsilon_{331}\, u_3 v_3 \\ &= u_2 v_3 - u_3 v_2\end{aligned}$$

- ## PRODOTTO TENSORIALE (ESTERNO)

$$\vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)} := \vec{e}_{(i)} \vec{e}_{(j)} = \vec{e}_{(i)l}\, \vec{e}_{(j)q} = \begin{cases} 1 & l = i \text{ E } q = j \\ 0 & \text{ELSEWHERE} \end{cases}$$

È UN TENSORE DEL II ORDINE (MATRICE).

NOTA CHE POSSO COSTRUIRE QUALSIASI MATRICE A COME

$$A = a_{ij}\, \vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)} \qquad \left(\text{RICORDA } \vec{u} = u_i\, \vec{e}_{(i)}\right)$$

NOTA:

$\vec{e}_{(i)l}$ È LA COORDINATA l-ESIMA DEL VETTORE $\vec{e}_{(i)}$. OTTENGO COSÌ L'ELEMENTO a_{lq} DELLA MATRICE.

OPERATORI DIFFERENZIALI

- $$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_{(2)} + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_{(3)}$$

DATA

$$f(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial x_i} f \vec{e}_{(i)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) := \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

DATO

$$\vec{u} = u_j \vec{e}_{(j)}$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \vec{\nabla} \otimes \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)} := \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad \text{(MATRICE JACOBIANA)}$$

SI NOTI CHE IL GRADIENTE PRENDE UN TENSORE DI ORDINE m E NE RESTITUISCE UNO DI ORDINE $m+1$.

- DEFINIAMO LA DIVERGENZA

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_{(i)} \cdot u_j \vec{e}_{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

SI NOTI CHE LA DIVERGENZA ABBASSA DI UN GRADO IL TENSORE.

- ESISTONO MOLTI ALTRI MODI DI APPLICARE $\vec{\nabla}$. TRA QUESTI

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_{(i)} \wedge u_j \vec{e}_{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\vec{e}_{(k)} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\vec{e}_{(k)}$$

CHE SI DEFINISCE ROTORE.

IL LAPLACIANO SI OTTIENE COME $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$.

OTTENGO L'OPERATORE HESSIANO COME $\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}$ E SE APPLICO LA MATRICE COSÌ OTTENUTA AL CAMPO SCALARE $f(\underline{x})$ HO LA SUA MATRICE HESSIANA.

- RICAPITOLANDO (NOTAZIONE INDICIALE)

$\vec{v} = v_i \vec{e}_{(i)}$ (SOMMO SUGLI INDICI RIPETUTI)

$A = a_{ij}$

$\vec{v} = A\vec{u}$ $\qquad v_i = a_{ij} u_j$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i$ (PRODOTTO SCALARE)

$$u_j v_i \delta_{ij} = u_j v_j = u_i v_i$$

$$\vec{e}_{(i)} \cdot \left(\vec{e}_{(j)} \wedge \vec{e}_{(k)} \right) = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{PERMUTAZIONI PARI} \\ 0 & \text{DUE O PIU' INDICI UGUALI} \\ -1 & \text{PERMUTAZIONI DISPARI} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klq} = \delta_{il}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jl}$$

$\vec{e}_{(i)} \wedge \vec{e}_{(j)} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_{(k)}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\varepsilon_{ijk} u_i v_j \right) \vec{e}_{(k)}$ (PRODOTTO VETTORIALE)

$\vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)} = \vec{e}_{(i)}\vec{e}_{(j)} = \vec{e}_{(i)l}\, \vec{e}_{(j)q}$

$A = a_{ij}\, \vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)}$ (PRODOTTO TENSORIALE)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_{(i)}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_{(i)} := \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)} := \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{e}_{(k)}$$

• **FOCUS:** DESCRIZIONI

DATO UN CORPO $\mathcal{B}$, NE PRENDO UNA CONFIGURAZIONE $D = k(\mathcal{B})$ CON $D \in E$; E È UNO SPAZIO EUCLIDEO, k UNA MAPPA CONTINUA E BIUNIVOCA. LO STESSO VALE PER OGNI PUNTO $\underline{x} = k(P)$, $\underline{x} \in E$. IL MOTO È DESCRITTO DA UNA SUCCESSIONE DI CONFIGURAZIONI NEL TEMPO, $\underline{x} = \chi(P,t)$: SI PARLA DI DESCRIZIONE MATERIALE.

→ DESCRIZIONE REFERENZIALE

FISSO UN PUNTO $\tilde{x} \in E$, $\tilde{x} = k(P)$. INVERTENDO, $P = k^{-1}(\tilde{x})$ E POSSO ESPRIMERE

$$\underline{x} = \chi(P,t) = \chi(k^{-1}(\tilde{x}),t) := \chi_k(\tilde{x},t)$$

SE LA CONFIGURAZIONE SCELTA COME RIFERIMENTO È QUELLA AL TEMPO t_0, OSSIA $\tilde{x} = k(P) = \chi(P,t_0)$, LA DESCRIZIONE È DETTA LAGRANGIANA.

DATA UNA QUANTITÀ SCALARE $\underbrace{A(P,t)}_{\text{MATERIALE}} \equiv \underbrace{A(\tilde{x},t)}_{\text{REFERENZIALE}}$, SEGUENDO UNA PARTICELLA HO

$$\frac{\partial}{\partial t} A(P,t)\Big|_P \equiv \frac{\partial}{\partial t} A(\tilde{x},t)\Big|_{\tilde{x}} \quad \text{E IN PARTICOLARE} \quad u = \frac{\partial \chi(P,t)}{\partial t}\Big|_P \equiv \frac{\partial \chi_k(\tilde{x},t)}{\partial t}\Big|_{\tilde{x}}$$

→ DESCRIZIONE SPAZIALE (EULERIANA)

MI SVINCOLO DAL CORPO E USO SOLO LE VARIABILI $\underline{x}$ E t DEL PUNTO NELLO SPAZIO EUCLIDEO, $f(\underline{x},t)$. TUTTAVIA LE LEGGI DEL MOTO SI RIFERISCONO AI CORPI $(P, \tilde{x})$ E NON ALLE POSIZIONI $\underline{x}$ DELLO SPAZIO. DEFINISCO ALLORA, DATA UNA $F(\tilde{x},t)$ (REFERENZIALE), UNA FUNZIONE $f(\underline{x},t)$ CHE ASSUME LO STESSO VALORE DI F PER QUEGLI $\tilde{x}$ E $\underline{x}$ COLLEGATI DALLA MAPPA DI MOTO χ_k, OVVERO, RICORDANDO $\underline{x} = \chi_k(\tilde{x},t)$,

$$F(\tilde{x},t) = F(\chi_k^{-1}(\underline{x},t),t) \equiv f(\underline{x},t) = f(\chi_k(\tilde{x},t),t)$$

AVREMO ALLORA, SEGUENDO IL MOTO DI OGNI PARTICELLA

$$\frac{\partial F(\tilde{x},t)}{\partial t}\Big|_{\tilde{x}} = \dot{F} \equiv \dot{f} = \frac{d f(\chi_k(\tilde{x},t),t)}{dt}\Big|_{\tilde{x}}$$

SI DEFINISCE PERCIÒ DERIVATA MATERIALE $\dot{f}$ E SI SCRIVE

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{k_i}} \cdot \frac{\partial \chi_{k_i}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} f$$

IN ALTRI TERMINI, TRA TUTTI I MODI CON CUI POSSO SPOSTARE IL PUNTO $(\underline{x},t)$ DELLO SPAZIO CHE STO OSSERVANDO, SCELGO DI SEGUIRE IL FLUIDO STESSO.

- IPOTESI DI MEZZO CONTINUO

PRENDIAMO UN CONTENITORE PIENO DI GAS; COME È USUALE, DEFINIAMO LA PRESSIONE IN TERMINI DEGLI URTI DELLE PARTICELLE CONTRO LE PARETI. TOGLIAMO GRADUALMENTE PARTICELLE FINO A CHE I SINGOLI URTI DIVENTANO DISTINGUIBILI.

MEZZO CONTINUO: V. SONO IN UN VOLUMETTO INFINITESIMO UN NUMERO ANCORA ALTISSIMO DI COSTITUENTI ELEMENTARI, COSÌ CHE SI POSSA ANCORA PARLARE DI EFFETTI MEDIATI.

SI PARLA DI MEZZO CONTINUO SE

$$\lambda \ll R$$

DOVE R È LA DIMENSIONE TIPICA DEL SISTEMA CONSIDERATO E λ IL LIBERO CAMMINO MEDIO (TRA DUE URTI SUCCESSIVI).

- ESEMPIO: BICCHIERE D'ACQUA

$$\rho_{H_2O} = 1\ g/cm^3$$

$$m = 18\ m_H$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-24}\ g$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{PARTICELLE/} \\ \text{UNITÀ DI VOLUME}}}{n} = \frac{\rho}{m} = 3 \cdot 10^{22}/cm^3$$

POSSO STIMARE

$$\lambda \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim 10^{-8}\ cm$$

DA CONFRONTARSI CON $R \sim 10\ cm$.

· ESEMPIO: GIGANTE ROSSA

$n = 10^8 / cm^3$

$r = 10^{-5}\ cm = 100\ nm$ (RAGGIO DELLE POLVERI)

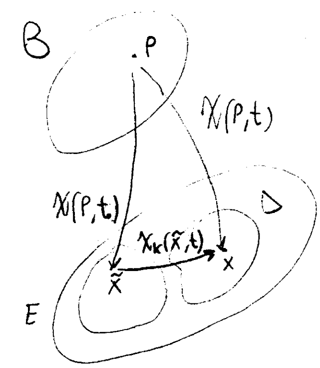
$\lambda_{POLVERI} \sim \frac{1}{n\sigma} \sim 30\ cm$ $\lambda_{GAS} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim 10^{-3}\ cm$

AREA FRONTALE CHE OPPONE AL MOTO

DA CONFRONTARSI TUTTAVIA CON

$R \simeq 10^{14}\ cm$

CINEMATICA DEI CORPI DEFORMABILI



VOGLIO RAPPRESENTARE L'INSIEME DI PUNTI (CORPO) B NELLO SPAZIO EUCLIDEO E.
LO FACCIO TRAMITE UNA MAPPA CONTINUA E BIUNIVOCA (QUINDI INVERTIBILE)

$D = K(B)$ RAPPRESENTAZIONE DI B IN E

$B = K^{-1}(D)$

$\underline{x} = K(P)$ $P = K^{-1}(\underline{x})$

NOTA: C'È DA DIRE CHE PER QUESTA PRIMA PARTE HA FATTO UN BEL CASINO: GUARDALA DALLE DISPENSE, OPPURE NEL FOGLIO DI UN PAIO DI PAGINE FA.

UNA SUCCESSIONE DI RAPPRESENTAZIONI SIFFATTE MI DÀ L'EVOLUZIONE DEL CORPO NEL TEMPO:

$\underline{x} = \chi(P,t)$ MAPPA DI MOTO

$D = \chi(B,t)$

POSSO FISSARE UNA CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO

$\tilde{x} = K(P) = \chi(P, t_0)$

$\underline{x} = \chi(P,t) = \chi(K^{-1}(\tilde{x}), t) := \chi_K(\tilde{x}, t)$

NOTA: $\underline{x}$ E $\tilde{x}$ VIVONO ENTRAMBI IN E. K È LA χ AL TEMPO t_0 SCELTO COME RIFERIMENTO.

OSSIA ESPRIMO IL MOTO IN FUNZIONE DELLA CONFIGURAZIONE FISSATA $\tilde{x}$ (DESCRIZIONE REFERENZIALE).

SCEGLIERE UNA PARTICELLA FLUIDA DEL CORPO E SEGUIRLA LUNGO IL SUO MOTO SI DICE DESCRIZIONE MATERIALE (NELLE VARIABILI P E t).
SE COME QUI DEFINISCO UN TEMPO INIZIALE $(t=0)$ E USO

$$\underline{x} = \chi_K(\tilde{x}, t) \qquad \tilde{x} = \chi(P, t=0)$$

LA DESCRIZIONE È DETTA LAGRANGIANA (ED È UN ESEMPIO DI DESCRIZIONE REFERENZIALE).

LA QUANTITÀ SCALARE O TENSORIALE

$$A(P,t) \equiv A(\tilde{x}, t)$$

SI PUÒ DERIVARE SEGUENDO IL MOTO DELLA PARTICELLA:

$$\dot{A} = \underbrace{\left.\frac{\partial A(P,t)}{\partial t}\right|_P}_{\substack{\text{DESCRIZIONE}\\ \text{MATERIALE (SEGUO } P)}} = \underbrace{\left.\frac{\partial A(\tilde{x},t)}{\partial t}\right|_{\tilde{x}}}_{\substack{\text{DESCRIZIONE REFERENZIALE}\\ \text{(SEGUO } P \text{ TRAMITE IL RIFERIMENTO } \tilde{x})}}$$

NOTA: NELLA MATERIALE E BASTA LA TRAIETTORIA È $\chi(P,t)$. LA STESS COSA DESCRITTA IN MODO REFER. È $\chi_K(\tilde{x}, t)$.

UN APPROCCIO ALTERNATIVO È QUELLO EULERIANO: OSSERVO UN PUNTO $(\underline{x}, t)$ NELLO SPAZIO INDIPENDENTEMENTE DALLA PARTICELLA CHE VI PASSA. PER SEMPLIFICARE I CALCOLI, TUTTAVIA, CONVIENE APPOGGIARSI A UNA CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO (QUINDI LA DESCRIZIONE È REFERENZIALE).

NOTA: IL CORPO È DISPONIBILE ALL'OSSERVAZIONE SOLTANTO ATTRAVERSO UNA DELLE SUE CONFIGURAZIONI. INOLTRE LE LEGGI DELLA DINAMICA SI RIFERISCONO AL CORPO E NON A $\underline{x}$ ($\in E$); DEC ALLORA DI SEGUIRLO. COMUNQUE GIRA PAGINA CHE È SPIEGATO MEGL

POSSO RIDEFINIRE OGNI FUNZIONE

$$F(\tilde{x}, t) = f(\underline{x}, t)$$

$$\underline{x} = \chi_K(\tilde{x}, t)$$

$$F(\tilde{x}, t) = F(\chi_K^{-1}(\underline{x}, t), t) \equiv f(\underline{x}, t) = f(\chi_K(\tilde{x}, t), t)$$

$$\dot{F} = \left.\frac{dF(\tilde{x}, t)}{dt}\right|_{\tilde{x}} \qquad u_i = \left.\dot{\chi}_{K_i}\right|_{\tilde{x}} = \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{\tilde{x} \text{ FISSATO}}$$

$$\dot{f} = \left.\frac{df(\chi_K(\tilde{x}, t), t)}{dt}\right|_{\tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{K_i}} \dot{\chi}_{K_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial \chi_{K_i}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla f := \frac{Df}{Dt}$$

NOTA: DI FATTO ORA STO SEGUENDO IL CORPO: $\dot{\chi}_K$ È L VELOCITÀ DEL CORPO.

DOVE QUEST' ULTIMA È DETTA DERIVATA MATERIALE.

RICAPITOLANDO: $\dot{A}(\tilde{x},t) = \left.\dfrac{dA}{dt}\right|_{\tilde{x}}$

DERIVATA TEMPORALE RISPETTO A UNA POSIZIONE DI RIFERIMENTO

→ PRENDO UNA PARTICELLA E LA SEGUO.

QUESTO FUNZIONA SE LE DISTANZE RECIPROCHE TRA PARTICELLE VARIANO DI POCO, COSA NON SEMPRE VERA PER UN FLUIDO.

DA QUI L'ESIGENZA DELL'APPROCCIO EULERIANO. COME CAMBIA LA DEFINIZIONE DI $\dot{A}$?

NOTA: L'APPROCCIO EULERIANO MI PERMETTE DI SVINCOLARMI DAL MOTO DELLA SINGOLA PARTICELLA: CONSIDERO UN PUNTO $(\underline{x},t)$ IN E. TUTTAVIA È COMODO MUOVERE $(\underline{x},t)$ CON LA STESSA VELOCITÀ $\dot{\chi}_K$ DEL FLUIDO PERCHÉ LA DINAMICA VIENE MEG SE RIFERITA AL CORPO IN ESAME.

DATA LA PROPRIETÀ

$F(\tilde{x},t)$

DEFINISCO

$f(\underline{x},t)$

SE $\underline{x}$ E $\tilde{x}$ SONO COLLEGATE TRAMITE LA MAPPA DI MOTO

$\underline{x} = \chi_K(\tilde{x},t)$

ALLORA LE DUE DEFINIZIONI COINCIDONO:

$$F(\tilde{x},t) = F(\chi_K^{-1}(\underline{x},t),t) \equiv f(\underline{x},t) = f(\chi_K(\tilde{x},t),t)$$

CALCOLO LA SUA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO COME

$$\dot{F} = \left.\frac{dF}{dt}\right|_{\tilde{x}\text{ FISSATO}} = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\tilde{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\chi_K} + \left.\frac{\partial f}{\partial \chi_K}\right|_{t} \left.\frac{\partial \chi_K}{\partial t}\right|_{\tilde{x}}$$

DESTRO

SE VOGLIAMO EVIDENZIARE LA NATURA VETTORIALE DI

$x_i = \chi_{K_i}(\tilde{x},t)$

$$\dot{F} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\chi_K} + \left.\frac{\partial f}{\partial \chi_{K_i}}\right|_{t} \cdot \left.\frac{\partial \chi_{K_i}}{\partial t}\right|_{\tilde{x}} \qquad u_i = \dot{\chi}_{K_i}\big|_{\tilde{x}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i = \frac{Df}{Dt}$$

CHE SI DICE DERIVATA MATERIALE (= SEGUENDO LA PARTICELLA).

RISCRIVO

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} f + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{VARIAZIONE LOCALE}} + \underbrace{\underline{u} \cdot \underline{\nabla} f}_{\text{(CONVEZIONE)}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \right) f$$

- DATO UN CORPO DEFORMABILE $\mathcal{B}$, DOBBIAMO DEFINIRE SULLA SUA RAPPRESENTAZIONE LA <u>MASSA</u> DELLE SUE PARTI $\mathcal{B}_m$.

$$M(\mathcal{B}_m) = \int_{D_m} \rho(\underline{x})\, dV$$

$$= \int_{K(\mathcal{B}_m)} \rho(K(P))\, dV$$

$D_m = K(\mathcal{B}_m)$

$\underline{x} = K(P)$

$dV = dx_1 dx_2 dx_3$ CON $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3$

DEFINIAMO QUINDI LA DENSITÀ

$$\rho(\underline{x}) = \lim_{m \to \infty} \frac{M(\mathcal{B}_m)}{V(K(\mathcal{B}_m))}$$

$$\mathcal{B}_{m+1} \subset \mathcal{B}_m \quad \forall m$$

COME EVOLVE LA PROPRIETÀ M?

DATE DUE DIVERSE RAPPRESENTAZIONI DI $\mathcal{B}_m$,

$$\underline{x}_1 = K_1(P)$$

$$\underline{x}_2 = K_2(P)$$

NOTA: INFATTI LA MASSA È UNA PROPRIETÀ DI $\mathcal{B}_m$ E NON PUÒ DIPENDERE DALLA SU CONFIGURAZIONE. (SI RICORDI CHE PER OGNI F HO INFINITE POSSIBILI CONFIGURAZIONI).

$$\int_{K_1(\mathcal{B}_m)} \rho_1(\underline{x}_1)\, dV_1 = \int_{K_2(\mathcal{B}_m)} \rho_2(\underline{x}_2)\, dV_2$$

POSSO PASSARE DA UNA CONFIGURAZIONE ALL'ALTRA TRAMITE

$$\underline{x}_1 = K_1(P) = K_1(K_2^{-1}(\underline{x}_2)) := \lambda^{-1}(\underline{x}_2)$$

(SE NO NEL SEGUITO È INVERTITO)

ANCORA CONTINUA E BIUNIVOCA (LO ERANO K_1, K_2). HO OTTENUTO LA MAPPA λ CHE RAPPRESENTA IL CAMBIO DI VARIABILI TRA I DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO.

DETTO $|J|$ IL JACOBIANO DI λ, $|J| = \det\left(\frac{\partial x_{2_i}}{\partial x_{1_j}}\right)$

$$dV_2 = |J|\, dV_1$$

POSSO SCRIVERE, CAMBIANDO VARIABILI,

$$\int_{K_1(B_m)} \rho_1(\underline{x}_1)\, dV_1 = \int_{K_1(B_m)} \rho_2(\lambda(\underline{x}_1))\, |J|\, dV_1$$

DA CUI

$$\rho_1 = \rho_2 |J|$$

NOTA LA DENSITÀ IN UNA CERTA CONFIGURAZIONE, CALCOLO QUELLA DELLE ALTRE NOTA LA MAPPA CHE MI FA PASSARE DALLA PRIMA ALLA SECONDA.

NOTA: QUESTO VALE ANCHE PER LE CONFIGURAZIONI SUCCESSIVE CON CUI DESCRIVO IL MOTO.

TORNANDO ALLA DESCRIZIONE REFERENZIALE,

$$\tilde{x} = \chi(P, t_0)$$

$$\underline{x} = \underbrace{\chi_K(\tilde{x}, t)}_{\text{REFERENZIALE}} \quad \Big(= \underbrace{\chi(P,t)}_{\text{MATERIALE}}\Big)$$

NOTA: RICORDA CHE χ SI APPLICA AL CORPO E χ_K ALLA SUA RAPPRESENTAZIONE REFERENZIALE.

LA MASSA SI CONSERVA:

$$\dot{M}(B_M) = 0 = \frac{d}{dt} \int_{\chi(B_m,t)} \rho(\underline{x},t)\, dV$$

NOTA: L'INTEGRALE ORA COME ORA È ESPRESSO IN DESCRIZIONE MATERIALE. VOGLIO PASSARLO IN REFERENZIALE.

SFRUTTANDO IL FATTO CHE LA CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO NON DIPENDE DAL TEMPO, POTREMO SCAMBIARE L'ORDINE DI DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE. CI SERVIAMO DEL SEGUENTE TEOREMA.

- <u>TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS</u>

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_m,t)} f(\underline{x},t)\, dV = \int_{\chi(B_m,t)} \left[\frac{Df}{Dt} + f\, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \right] dV$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\chi(B_m,t_0)} f(\chi_K(\tilde{x},t), t)\, |J|\, dV_0$$

$$= \int_{\chi(B_m,t_0)} \frac{d}{dt} (f |J|)\, dV_0$$

$$(|J| = |J|(\tilde{x},t))$$

NOTA: $dV_0 = d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 d\tilde{x}_3$. SONO PASSATO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO DI $\tilde{x}$ CON IL CAMBIO $\underline{x} = \chi_K(\tilde{x},t)$

$$|J| = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}\right)$$

È IL JACOBIANO DELLA MAPPA DALLA CONFIGURAZIONE DI RIFERIMENTO A QUELLA ATTUALE: SCARICO LA $\frac{d}{dt}\int_{\chi(B_m,t)}$ SU $|J|$.

$$= \int_{\chi(B_m,t_0)} \left[\frac{d}{dt} f \cdot |J| + f \frac{d|J|}{dt} \right] dV_0$$

USIAMO IL RISULTATO (CHE POI DIMOSTRIAMO)

$$\frac{d|J|}{dt} = |J| \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

E RICONOSCENDO NEL PRIMO ADDENDO LA DERIVATA MATERIALE DELLA f

$$= \int_{\chi(B_m,t_0)} \left[\frac{Df}{Dt} |J| + f \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, |J| \right] dV_0$$

$$= \int_{\chi(B_m,t)} \left[\frac{Df}{Dt} + f \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \right] dV$$

DOVE SI È TORNATI AL SISTEMA INIZIALE. $\therefore$

· APPLICHIAMO QUESTO RISULTATO ALL' EQUAZIONE DI <u>CONSERVAZIONE DELLA MASSA</u>:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\chi(B_m,t)} \rho(\underline{x},t) \, dV = \int_{\chi(B_m,t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \right] dV$$

POICHÈ DEVE VALERE SU QUALSIASI VOLUME, OTTENIAMO IN FORMA DIFFERENZIALE L'EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

NEL CASO PARTICOLARE DI FLUIDO INCOMPRIMIBILE SI HA

$\rho = \text{COST.}$

$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$

ESPANDENDO LA DERIVATA MATERIALE,

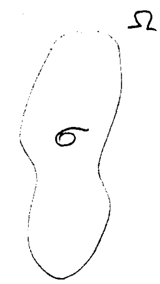
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

(<u>EQUAZIONE IN FORMA CONSERVATIVA</u>).

* VEDIAMONE IL SIGNIFICATO:



$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) \right] dV = 0$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Omega \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) \, dV$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_\Omega \rho \, dV}_{\text{MASSA}} + \int_\sigma \underbrace{\rho \underline{u}}_{\text{FLUSSO DI MASSA}} \cdot \hat{m} \, dS$$

SI NOTI CHE TUTTO QUESTO È STATO DERIVATO INDIPENDENTEMENTE DA CHI FOSSERO LE PARTICELLE NEL VOLUME CONSIDERATO (APPROCCIO EULERIANO).

* RIMANE DA DIMOSTRARE

$$\frac{d|J|}{dt} = |J| \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

$$|J| = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \right| = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_k}$$

NOTA: RICORDA CHE

$\varepsilon_{ijk} = \underline{e}_{(i)} \cdot (\underline{e}_{(j)} \wedge \underline{e}_{(k)}) = \det(\underline{e}_{(i)}, \underline{e}_{(j)}, \underline{e}_{(k)})$

$\det(\lambda \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \lambda \det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$

OPPURE SEMPLICEMENTE

$\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

INFINE QUI I VETTORI $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ SONO PROPRIO

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2} & \cdots \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_1} & \vdots & \end{pmatrix} \quad \text{E} \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \right| = \left| \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \right|$$

INFATTI $\det(A) = \det({}^tA)$.

$$\dot{|J|} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial u_3}{\partial \tilde{x}_k}$$

$$|\dot{J}| = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_k}$$

$$= |J| \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = |J| \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

- <u>CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO</u>

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_m,t)} f \, dV = \int_{\chi(B_m,t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} \right) dV \xrightarrow{①} \int_{\chi(B_m,t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (f \underline{u}) \right) dV$$

$$= \int_{\chi(B_m,t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV \xrightarrow{②} \int_{\chi(B_m,t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \right) dV$$

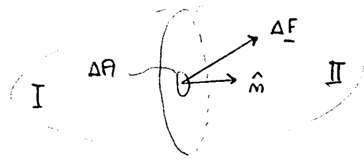
(TH. DEL TRASPORTO).

USIAMO IL TEOREMA PER ESPLICITARE LA 2^ LEGGE DI NEWTON

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \sum_i \underline{F}_e$$

DISTINGUIAMO DUE TIPI DI FORZE ESTERNE: DI SUPERFICIE O DI VOLUME. DETTA $\underline{f}$ LA FORZA PER UNITÀ DI MASSA, PER LE SECONDE HO

$$\underline{F}_e^{(VOL)} = \int_{\chi(B_m,t)} \rho \, \underline{f} \, dV$$



DEFINIAMO LA FORZA PER UNITÀ DI SUPERFICIE

$$\underline{t}_{(n)} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

NOTA: NON STA SCRITTO DA NESSUNA PARTE CHE $\underline{t}_{(n)}$ SIA PARALLELO A $\hat{n}$, CON ESSO DESCRIVIAMO ANCHE GLI SFORZI DI TAGLIO.

$$\underline{F}_e^{(SUP)} = \int_{\partial\chi(B_m,t)} \underline{t}_{(n)} \, dS$$

DOBBIAMO ORA ESPLICITARE IL PRIMO MEMBRO:

$$\underline{q} = \int_{\chi(B_m,t)} \rho \, \underline{u} \, dV$$

SCRIVIAMO INFINE

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \rho \underline{u}\, dV = \int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \rho \underline{f}\, dV + \int_{\partial\mathcal{X}(B_m,t)} \underline{t}_{(m)}\, dS$$

PROBLEMI:

1. $\frac{d}{dt}$ NON COMMUTA CON $\int_{\mathcal{X}(B_m,t)}$. RISOLVO CON IL TEOREMA DEL TRASPORTO.

2. APPARE ANCHE UN INTEGRALE DI SUPERFICIE.

L'EQUAZIONE DIVENTA

$$\int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \left[\frac{D\rho\underline{u}}{Dt} + \rho\underline{u}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\right] dV = \int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \rho\underline{f}\, dV + \int_{\partial\mathcal{X}(B_m,t)} \underline{t}_{(m)}\, dS$$

MA IL PRIMO MEMBRO SI PUO' SCRIVERE

$$\int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \left[\frac{D\rho u_i}{Dt} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] dV = \int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \left[\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] dV$$

$$= \int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \left[\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)\right] dV$$

NOTA: USANDO LA PRIMA FORMA DEL TEOREMA DEL TRASPORTO CI SI RISPARMIA QUALCHE PASSAGGIO.

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \left[\frac{\partial \rho\underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}\otimes\underline{u})\right] dV$$

NOTA: $\underline{u}\otimes\underline{u} = u_i u_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

POSSO DIVIDERE ENTRAMBI I MEMBRI PER d^2 E OTTENGO

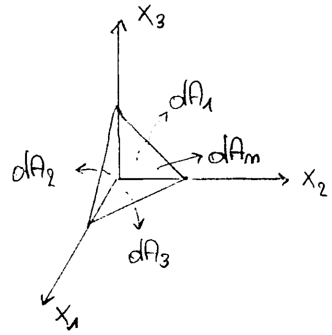
$$\frac{1}{d^2}\int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \left[\frac{\partial \rho\underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}\otimes\underline{u})\right] dV = \frac{1}{d^2}\int_{\mathcal{X}(B_m,t)} \rho\underline{f}\, dV + \frac{1}{d^2}\int_{\partial\mathcal{X}(B_m,t)} \underline{t}_{(m)}\, dS$$

DOVE d E' LA DIMENSIONE CARATT., $V \sim d^3$, $S \sim d^2$. AL $\lim\limits_{d\to 0}$ RESTA

$$\lim_{d\to 0} \frac{1}{d^2}\int_{\partial\mathcal{X}(B_m,t)} \underline{t}_{(m)}\, dS = 0$$

AL LIMITE PER d PICCOLO LE FORZE DI SUPERFICIE SULLA PARTICELLA FLUIDA SI BILANCIANO. (ANZI, L'INTEGRALE VA A ZERO PIU' VELOCEMENTE DI d^2).

COSTRUISCO IL "TETRAEDRO DI CAUCHY".



$$\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

$$dA_i = (\underline{n}\cdot\hat{x}_i)\, dA_n = n_i\, dA_n$$

NOTA: $(\underline{n}\cdot\hat{x}_i)$ È IL COSEN
DELL'ANGOLO TRA $\underline{n}$ E $\hat{x}_i$

ALLORA, SE LE FORZE SI DEVONO BILANCIARE,

$$\underline{t}_{(n)}\, dA_n - \underline{t}_{(1)}\, dA_1 - \underline{t}_{(2)}\, dA_2 - \underline{t}_{(3)}\, dA_3 = 0$$

$$\underline{t}_{(n)} = n_1 \underline{t}_{(1)} + n_2 \underline{t}_{(2)} + n_3 \underline{t}_{(3)}$$

NOTE LE TENSIONI SUPERFICIALI SU TRE PIANI INDIPENDENTI, RICOSTRUISCO LA TENSIONE SU QUALSIASI ALTRO PIANO (TEOREMA DI CAUCHY).

$$t_{(n)i} = t_{(j)i}\, n_j$$
$$:= T_{ij}\, n_j$$

DOVE T_{ij} SI DICE <u>TENSORE DELLE TENSIONI</u>.

$$\underline{t}_{(n)} = T\cdot\underline{n}$$

TORNIAMO ALLA NOSTRA EQUAZIONE E SCRIVIAMO

$$\int_{\mathcal{X}(B_n,t)} \left[\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\, \underline{u}\otimes\underline{u}) \right] dV = \int_{\mathcal{X}(B_n,t)} \rho\, \underline{f}\, dV + \int_{\partial\mathcal{X}(B_n,t)} T\cdot\underline{n}\, dS$$

APPLICANDO GAUSS-GREEN,

$$\int_{\partial\mathcal{X}(B_n,t)} T\cdot\underline{n}\, dS = \int_{\mathcal{X}(B_n,t)} \underline{\nabla}\cdot T\, dV$$

($\underline{\nabla}$ AGISCE PER CONVENZIONE SUL SECONDO INDICE DEL TENSORE. LO USIAMO SIA SU T CHE SU $\underline{u}\otimes\underline{u}$; PER I FLUIDI VEDREMO CHE $T_{ij} = T_{ji}$).

POICHÈ IL VOLUME SU CUI INTEGRIAMO È ARBITRARIO, DEVE ESSERE

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\, \underline{u}\otimes\underline{u}) = \rho\, \underline{f} + \underline{\nabla}\cdot T$$

DETTA EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO (DI CAUCHY).

QUESTA È VALIDA PER QUALSIASI MEZZO CONTINUO; LA FORMA DI T MI DÀ LA SPECIFICITÀ DEL MEZZO. DI PER SÈ VALE ANCHE PER I SOLIDI.

È SCRITTA IN FORMA CONSERVATIVA PERCHÈ NEL TERMINE CONVETTIVO HO $\underline{\nabla}\cdot$ (TUTTI I TERMINI). RISCRIVENDOLA IN FORMA INDICIALE,

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$$

NOTA: SI DICE "FORMA CONSERVATIVA" PERCHÈ PER PORTARE ρ DENTRO $\frac{\partial}{\partial t}$ E ρu_j DENTRO $\frac{\partial}{\partial x_j}$ HO IMPIEGATO LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA.

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

MA RICONOSCIAMO

$$u_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_i u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = u_i\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right]$$

$$= u_i\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})\right] = 0$$

PERCIÒ L'EQUAZIONE SOPRA SI RIDUCE A

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad \left(u_j = \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)$$

$$\rho a_i = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad \frac{ma}{V} = \frac{F}{V}$$

$$\underline{\rho\underline{a} = \rho\underline{f} + \underline{\nabla}\cdot T}$$

<u>EQUAZIONE DI CAUCHY</u>

NOTA: TUTTI QUESTI CALCOLI SONO TRANQUILLAMENTE EVITABILI USANDO FIN DA SUBITO LA SECONDA FORMA DEL TEOREMA DEL TRASPORTO. AVREMMO

$$\frac{D}{Dt}(\rho\underline{u}) + \rho\underline{u}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) = \rho\underline{f} + \underline{\nabla}\cdot T$$

$$\| $$

$$\frac{D\rho}{Dt}\underline{u} + \rho\frac{D\underline{u}}{Dt} + \underline{u}\rho(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) \overset{\text{MASSA}}{=} \rho\frac{D\underline{u}}{Dt}$$

· ESPLICITIAMO LA DERIVATA MATERIALE.

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$i=1 \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

$$i=2 \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

· CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d}{dt}\int_{\chi(B_m,t)} (\underline{x} \wedge \underline{u})\rho \, dV = \int_{\chi(B_m,t)} (\underline{x} \wedge \underline{f})\rho \, dV + \int_{\partial\chi(B_m,t)} \underline{x} \wedge \underline{t}_{(m)} \, dS$$

$$\int_{\chi(B_m,t)} \rho \frac{D}{Dt}(\underline{x} \wedge \underline{u}) \, dV = \int_{\chi(B_m,t)} (\underline{x} \wedge \underline{a})\rho \, dV$$

DOVE SI È USATA LA SECONDA FORMA DEL TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS,

$$\frac{d}{dt}\int_{\chi(B_m,t)} \rho h \, dV$$

$$① = \int_{\chi(B_m,t)} \frac{D\rho h}{Dt} + \rho h \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, dV$$

$$② = \int_{\chi(B_m,t)} \rho \frac{Dh}{Dt} \, dV$$

NOTA: TUTTO SI RIDUCE A DIMOSTRARE CHE

$$\int_{\partial\chi} \underline{x} \wedge \underline{t}_{(m)} \, dS \nLeftrightarrow \int_{\chi} \underline{x} \wedge (\underline{\nabla} \cdot T) \, dV$$

MA SUBENTRA UN TERMINE AGGIUNTIVO,

$$\int_{\chi} \varepsilon_{ijk} T_{kj} \, \underline{e}_{(i)} \, dV$$

CHE VA ANNULLATO.

NOTA: HO USATO $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$

E IL FATTO CHE $\frac{Dx}{Dt} \wedge \underline{u} = \underline{u} \wedge \underline{u} = 0$.

ESPLICITIAMO IN FORMA INDICIALE

$$\int_{\partial\chi(B_m,t)} \underline{x} \wedge \underline{t}_{(m)} \, dS = \int_{\partial\chi(B_m,t)} \underline{x} \wedge (T \cdot \underline{m}) \, dS$$

$$= \int \varepsilon_{ijk} \, x_j \, (T \cdot \underline{m})_k \, \underline{e}_{(i)} \, dS$$

MA

$(T\cdot \underline{m})_r = T_{kq}\, m_q$

$$\int \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \int u_i\, m_i\, dS$$

QUINDI HO

$$\int_{\partial \chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\, x_j\, T_{rq}\, m_q\, \underline{e}_{(i)}\, dS \overset{\text{GAUSS-GREEN}}{=} \int_{\chi(B_m,t)} \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\varepsilon_{ijr}\, x_j\, T_{rq}\right) \underline{e}_{(i)}\, dV$$

$$= \int_{\chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\left[\frac{\partial x_j}{\partial x_q} T_{rq} + x_j \frac{\partial T_{rq}}{\partial x_q}\right] \underline{e}_{(i)}\, dV$$

$$= \int_{\chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\, \delta_{jq}\, T_{rq}\, \underline{e}_{(i)}\, dV + \int_{\chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\, x_j \frac{\partial T_{rq}}{\partial x_q}\, \underline{e}_{(i)}\, dV$$

TORNANDO IN FORMA VETTORIALE,

$$\int_{\chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\, T_{rj}\, \underline{e}_{(i)}\, dV + \int_{\chi(B_m,t)} \underline{x} \wedge \underline{\nabla}\cdot T\, dV$$

SI È QUINDI OTTENUTA

$$\int_{\chi(B_m,t)} (\underline{x}\wedge \underline{a})\rho\, dV = \int_{\chi(B_m,t)} (\underline{x}\wedge \underline{f})\rho\, dV + \int_{\chi(B_m,t)} (\underline{x}\wedge \underline{\nabla}\cdot T)\, dV + \int_{\chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\, T_{rj}\, \underline{e}_{(i)}\, dV$$

$$\int_{\chi(B_m,t)} \underline{x} \wedge \underbrace{\left(\rho \underline{a} - \rho \underline{f} - \underline{\nabla}\cdot T\right)}_{=\,0} dV = \int_{\chi(B_m,t)} \varepsilon_{ijr}\, T_{rj}\, \underline{e}_{(i)}\, dV$$

(BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO)

INFATTI BASTA SOSTITUIRE NELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO

$$\rho \underline{a} = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho\, \underline{u}\cdot \nabla \underline{u} = \rho \frac{D\underline{u}}{Dt}$$

(DERIVATA MATERIALE DI OGNI COMPONENTE)

DEVE QUINDI ESSERE

$\varepsilon_{ijr}\, T_{rj}\, \underline{e}_{(i)} = 0$

$i = 1 \qquad \varepsilon_{1jr}\, T_{rj} = 0$

$$\varepsilon_{123}\, T_{32} + \varepsilon_{132}\, T_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{32} - T_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{32} = T_{23}$$

NOTA: NON ESISTE UN'EQUAZIONE PER LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE. SI È RACCHIUSA QUESTA PROPRIETÀ NELLA CONDIZIONE SULLE COMPONENTI DI T, $T_{ij} = T_{ji}$.

RIPETENDO IL RAGIONAMENTO PER LE ALTRE COMPONENTI,

$T_{jr} = T_{rj}$

NOTA: OPPURE OSSERVO CHE ε_{ijk} È ANTISIMMETRICO IN j,k.

(SONO PASSATO DA 9 A 6 INCOGNITE NEL TENSORE).

· DEFORMAZIONE LOCALE

DATO UN PUNTO IN DESCRIZIONE REFERENZIALE

$$\underline{x} = \chi_N(\tilde{x}, t)$$

NOTA: MI RENDO CONTO CHE $\nabla \chi_N = \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \underline{e}_{(i)}\underline{e}_{(j)}$ MA ORMAI POSSO FARCI POCO. IL FATTO È CHE SE SCRIVO $d f = \nabla f \cdot d\underline{x}$ → È TRASPOSTO!

DEFINISCO LA SUA DEFORMAZIONE

$$F = \underline{\nabla}\, \chi_N(\tilde{x}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \underline{e}_{(i)}\underline{e}_{(j)}$$

NOTA: IN QUESTO MODO $d\underline{x} = F\, d\tilde{x} \rightarrow dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} dx_j$

(È UN TENSORE, IN QUANTO GRADIENTE DI UN VETTORE). MA HA POCO SENSO PER I FLUIDI FARLO RISPETTO A $\tilde{x}$ (NON C'È UN'INDEFORMATA). INVECE

$$\tau = t + \varepsilon \qquad \varepsilon \to 0$$

MI VOGLIO RIFERIRE ALLA CONFIGURAZIONE ATTUALE t; LA CONFIGURAZIONE EVOLUTA DIVIENE

NOTA: IN MATERIALE SAREBBE $\xi = \chi(P, \tau)$.

$$\xi = \chi_N(\tilde{x}, \tau) = \chi_N\left(\chi_N^{-1}(\underline{x}, t), \tau\right) = \chi_t(\underline{x}, \tau)$$

(È ANCORA UNA DESCRIZIONE REFERENZIALE). LA DERIVO COME

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \chi_t(\underline{x}, \tau) = \dot{\xi} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \tau} \chi_t(\underline{x}, \tau)\Big|_{\tau = t} = \dot{\underline{x}}$$

INFATTI

$$\xi\Big|_{\tau = t} = \chi_t(\underline{x}, t) = \underline{x}$$

SIMILMENTE

$$F = \underline{\nabla}\, \chi_t(\underline{x}, \tau) = \frac{\partial \xi_i(x, \tau)}{\partial x_j} \underline{e}_{(i)}\underline{e}_{(j)}$$

$$F\Big|_{\tau = t} = \delta_{ij} = I$$

(NON CAMBIA NULLA AL TEMPO $\tau = t_{\text{RIFERIMENTO}}$)

$$\dot{F} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) \underline{e}_{(i)}\underline{e}_{(j)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \xi_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \dot{\xi}_i$$

$$\dot{F}\Big|_{\tau = t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \dot{x}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underline{\nabla}\, \underline{u}$$

NOTA: CALCOLARE $\dot{F}$ PER $\tau = t$ SIGNIFICA MANDARE $\varepsilon \to 0$.

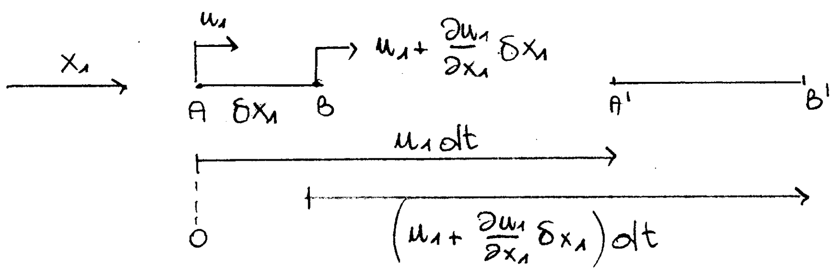
IL RATEO DI DEFORMAZIONE È DATO DAL GRADIENTE DI VELOCITÀ.

UN TENSORE PUO' ESSERE DIVISO NELLE SUE PARTI SIMMETRICA E ANTISIMMETRICA AGGIUNGENDO E SOTTRAENDO METÀ DELLA TRASPOSTA:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{e_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}}$$

- CONSIDERIAMO UN SEGMENTO δx_1 IN DUE ISTANTI SUCCESSIVI.



CALCOLIAMO LA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE RELATIVA

$$\frac{1}{\delta x_1}\frac{d\,\delta x_1}{dt} = \frac{1}{\delta x_1}\lim_{dt\to 0}\frac{\delta x_1' - \delta x_1}{dt} \equiv D_r$$

$$\delta x_1' = \overline{A'B'} = \delta x_1 + \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1\right)dt - u_1 dt = \delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1\, dt$$

$$D_r = \frac{1}{\delta x_1}\lim_{dt\to 0}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dt}{dt}\delta x_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11}$$

I TERMINI LUNGO LA DIAGONALE MI DICONO QUANTO SI ALLUNGA IL CORPO NELLA DIREZIONE DEL SEGMENTO:

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\delta x_i}\frac{d\delta x_i}{dt} \qquad \text{(NO SUM ON } i\text{)}$$

SI PARLA DI ALLUNGAMENTO PURO (PURE STRETCHING).

NOTA: IN ALTERNATIVA, CONSIDERA CHE $\overline{A'B'} - \overline{AB} = \overline{B'B} - \overline{A'A}$ E PROSEGUI.

- CERCO COME SI DEFORMA IL VOLUMETTO GENERICO

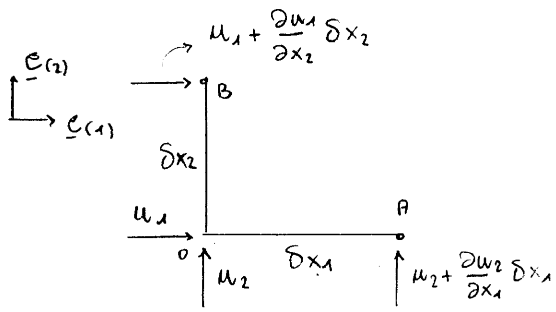
$$\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$$

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\,\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}\frac{d}{dt}\left(\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3\right)$$

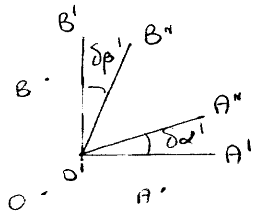
$$= \frac{1}{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}\left[\delta x_2 \delta x_3 \frac{d\delta x_1}{dt} + \delta x_1 \delta x_3 \frac{d\delta x_2}{dt} + \delta x_1 \delta x_2 \frac{d\delta x_3}{dt}\right]$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \mathrm{Tr}(e_{ij}) = e_{ii} = (\underline{\nabla} \otimes \underline{u}) : I$$

LA DIVERGENZA DELLE VELOCITÀ DESCRIVE LA VARIAZIONE DI VOLUME NELLA PARTICELLA FLUIDA.



- CONSIDERIAMO ORA DUE SEGMENTI OA, OB CHE RUOTANO E INSIEME TRASLANO (SE SI MUOVE $\underline{O}$). CALCOLO



$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta\alpha + \delta\beta) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\alpha' + \delta\beta'}{dt}\right) \equiv D_a$$

$$\mathrm{TAN}(\delta\beta') \simeq \delta\beta' \simeq \frac{B''B'}{B'O'} = \frac{1}{\delta x_2}\left[\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2\right)dt - u_1\,dt\right] = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dt$$

$$\delta\alpha' \simeq \mathrm{TAN}(\delta\alpha') = \frac{A''A'}{A'O'} = \frac{1}{\delta x_1}\left[\left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1\right)dt - u_2\,dt\right] = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dt$$

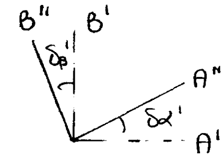
$$D_a = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\frac{dt}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = e_{12} = e_{21}$$

QUINDI QUESTE COMPONENTI CI PARLANO DELLA VARIAZIONE DELL'ANGOLO TRA DUE SEGMENTI (A VOLUME COSTANTE).
LA TOTALITÀ DELLE DEFORMAZIONI È DATA DALLA PARTE SIMMETRICA DEL TENSORE $\underline{\nabla u}$.

DEFINIAMO VORTICITÀ

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \wedge \underline{u}$$

SVOLGENDO LA DIMOSTRAZIONE DI PRIMA SUPPONENDO COSTANTE L'ANGOLO TRA I SEGMENTI (VEDI OLTRE),



$$\frac{d}{dt}(\delta\alpha' + \delta\beta') = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \omega_3 = \Omega_{12} = -\Omega_{21}$$

OSSERVIAMO CHE

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}$$

SE ESPLICITIAMO

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \wedge \underline{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \, \underline{e}_{(k)}$$

$$= \underline{e}_{(1)}\left(\varepsilon_{231}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{321}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \underline{e}_{(2)}\left(\varepsilon_{312}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \varepsilon_{132}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \underline{e}_{(3)}\left(\varepsilon_{123}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \varepsilon_{213}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

$$= \underline{e}_{(1)}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \underline{e}_{(2)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \underline{e}_{(3)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

POSSO SCRIVERE

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega_k$$

NOTA: SENZA TROPPI COMPLIMENTI,

$$\omega_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

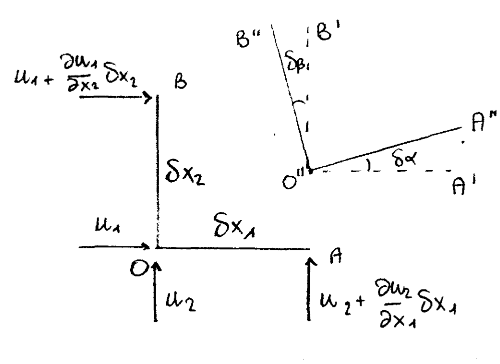
$$\omega_k = -\varepsilon_{jik}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\varepsilon_{ijk}\,\Omega_{ij}$$

SI NOTI CHE IN NOTAZIONE INDICIALE È EVIDENTE CHE IL TENSORE SIA ANTISIMMETRICO (LO È ε_{ijk} SE FISSO k).

MA COSA SIGNIFICA FISICAMENTE?

CONSIDERIAMO UNA ROTOTRASLAZIONE AD ANGOLO FISSATO TRA I DUE SEGMENTI.



$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta\alpha + \delta\beta) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{2}\frac{(\delta\alpha + \delta\beta)}{dt}$$

NOTA: DEVI DISEGNARLO MALE ($O''A''$ PIÙ LUNGO DI $O''A'$), ALTRIMENTI NON ESCE. CHIARAMENTE È GIUSTO NEL LIMITE DI ANGOLI PICCOLI.

MA

$$\delta\beta \simeq \tan(\delta\beta) = \frac{B''B'}{B'O''} = -\frac{1}{\delta x_2}\left[\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2\right)dt - u_1\,dt\right]$$

LA LUNGHEZZA DEVE ESSERE POSITIVA, DA CUI IL SEGNO.

$$= \frac{1}{\delta x_2}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2\,dt\right) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dt$$

$$\delta\alpha \simeq \tan(\delta\alpha) = \frac{A''A'}{A'O''} = \frac{1}{\delta x_1}\left[\left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1\right)dt - u_2\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\delta x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1\,dt\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dt$$

ALLORA

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta\alpha + \delta\beta) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \Omega_{21} = -\Omega_{12}$$

IL TENSORE ANTISIMMETRICO MI PARLA DELLE <u>ROTAZIONI RIGIDE</u> (SENZA DEFORMAZIONE) DELLA PARTICELLA FLUIDA.

RELAZIONI COSTITUTIVE E FLUIDI NEWTONIANI

TORNIAMO ALLA RELAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{(SONO 3 EQ. AL VARIARE DI } i\text{)}$$

RICORDIAMO CHE IN FLUIDODINAMICA LA DIVERGENZA

$$\underline{\nabla} \cdot T$$

AGISCE SEMPRE SUL SECONDO INDICE DEL TENSORE, OVVERO

$$T \cdot \overleftarrow{\nabla}$$

(CONTRAZIONE SUL SECONDO INDICE; DERIVA DAL TH. DI GAUSS-GREEN).

L'EQUAZIONE SOPRA HA TROPPE INCOGNITE. DALLA CONSERVAZIONE DI $\underline{L}$ ABBIAMO DEDOTTO $T_{ij} = T_{ji}$; VOGLIAMO ORA DETERMINARE I COEFFICIENTI T_{ij}.

PRINCIPI DI NOLL

1) PRINCIPIO DI DETERMINISMO (T DIPENDE SOLO DA PASSATO E PRESENTE)
2) PRINCIPIO DI EFFETTO LOCALE (T DIPENDE SOLO DALL'INTORNO)
3) PRINCIPIO DI INVARIANZA DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO (T È INVARIANTE)

NOI SEMPLIFICHIAMO ① RIFERENDOCI SOLO ALLO STATO ATTUALE:

② È SODDISFATTO PERCHÉ MI ARRESTO AL I ORDINE

$$T_{ij} = f\left(u_p, \frac{\partial u_p}{\partial x_q}, \text{STATO TERMODINAMICO}\right)$$

GRADIENTE DI VELOCITÀ

SI NOTI CHE NON DIPENDE ESPLICITAMENTE DALLO SPAZIO (SE NO NON SAREBBE INVARIANTE PER TRASLAZIONI), MA PER LO STESSO MOTIVO f NON PUÒ DIPENDERE SE NON IMPLICITAMENTE DA $\underline{u}$. INOLTRE

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_q} = e_{pq} + \Omega_{pq}$$

NOTA: SE MI METTO NEL SISTEMA SOLIDALE AL FLUIDO CHE TRASLA E RUOTA MISURO $\underline{u}=0$, $\Omega_{ij}=0$. PER ESSERE INVARIANTE, f NON PUÒ DIPENDERE DA LORO.

MA SE f DIPENDESSE DA Ω_{pq}, CAMBIANDO L'ORIENTAMENTO DI UNA ROTAZIONE AVREI TENSIONI OPPOSTE.

DEDUCO CHE IN REALTÀ DEVE ESSERE

$$T_{ij} = f(e_{pq}, \text{STATO TERMODINAMICO})$$

*NOTA: UN TENSORE ISOTROPO INVARIANTE PER ROTAZIONI, OSS. ESISTE UNA BASE IN CUI È DIAGONALE. VEDI A.10.

SE INFINE IL MEZZO È ISOTROPO, LO DEVE ESSERE ANCHE IL SUO TENSORE DELLE TENSIONI. T_{ij} DEVE ESSERE DATO DA UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI TENSORI ISOTROPI* δ_{ij}:

$$T_{ij} = A_0 \delta_{ij} e^0_{pq} + A_1 \delta_{ij}\delta_{pq} e^1_{pq} + A_2 \delta_{ip}\delta_{jq} e^1_{pq} + A_3 \delta_{iq}\delta_{jp} e^1_{pq} + [\dots] e^2_{pq} + \dots$$

SI PARLA DI FLUIDO STOKESIANO. SE ARRESTO LO SVILUPPO AL PRIMO ORDINE (e^1_{pq}) OTTENGO UN FLUIDO NEWTONIANO:

$$T_{ij} = A_0 \delta_{ij} + A_1 \delta_{ij} \underset{\uparrow\, Tr(e_{ij}) = \nabla \cdot \underline{u}}{e_{pp}} + A_2 e_{ij} + A_3 e_{ji}$$

NOTA: QUANDO δ COMPARE IN UN ESPRESSIONE CON INDICI RIPETUTI, SOSTITUISCE L'INDICE. AD ESEMPIO: $\delta_{ij} a_j = a_i \quad \delta_{jq} e_{pq} = e_{pj}$

$$= A_0 \delta_{ij} + A_1 \delta_{ij} e_{pp} + (A_2 + A_3) e_{ij}$$

NOTA: INFATTI IN UN FLUIDO A RIPOSO OSSERVO IN TUTTE LE DIREZIONI $\underline{t}_{(m)} = T \cdot \hat{m} \equiv -p\,\hat{m}$

CHIAMO

$A_0 = -p$	PRESSIONE TERMODINAMICA
$A_1 = \lambda$	COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ "IN ESPANSIONE"
$(A_2 + A_3) = 2\mu$	COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ DINAMICA

E RISCRIVO

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda e_{pp} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} := -p\delta_{ij} + \underbrace{\sigma_{ij}}_{\text{TENSORE DELLA VISCOSITÀ}}$$

CHE È IL TENSORE DELLE TENSIONI PER UN FLUIDO NEWTONIANO. λ, μ SONO QUANTITÀ MISURABILI E DIPENDONO, INSIEME A p, DALLO STATO TERMODINAMICO.

SOSTITUENDO I VALORI DI T_{ij} TROVATI NELL' EQUAZIONE DI CAUCHY OTTENGO (IPOTIZZANDO λ COSTANTE NELLO SPAZIO)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-p\delta_{ij} + \lambda e_{pp}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial e_{pp}}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_p} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

SOSTITUENDO HO INFINE

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

CHE SONO LE PRIME DUE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES. IN FORMA VETTORIALE (QUELLA SOPRA È LA COMPONENTE i-ESIMA!),

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underbrace{\rho \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\underline{u}}_{\text{TERMINE CONVETTIVO}} = \rho \underline{f} - \underline{\nabla} p + \underbrace{(\lambda+\mu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) + \mu \nabla^2 \underline{u}}_{\text{TERMINI DIFFUSIVI}} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\rho\underline{u} = 0$$

SI NOTI CHE ABBIAMO 4 EQUAZIONI E 5 INCOGNITE.

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI ρ = COST. SAPPIAMO GIÀ RISOLVERE IL SISTEMA (CASO INCOMPRIMIBILE, HO UN'INCOGNITA IN MENO):

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\underline{u} = \rho \underline{f} - \underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u} \qquad (\mathrm{II})$$

SI NOTI CHE $\rho\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\underline{u}$ E GLI ULTIMI DUE TERMINI AL SECONDO MEMBRO REDISTRIBUISCONO QUANTITÀ DI MOTO (TERMINE CONVETTIVO E DIFFUSIVI), MENTRE GLI ALTRI TERMINI LA GENERANO (CI STIAMO RIFERENDO ALLA I).

RICONOSCIAMO IN ρf_i UNA FORZANTE ESTERNA, IN

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

NOTA: USANDO IL LINGUAGGIO DI FISICA ATMOSFERICA IL TERMINE CONVETTIVO RAPPRESENTA L'AVVEZIONE DELLA VELOCITÀ.

IL TERMINE CONVETTIVO (CAMBIA $\underline{u}$ PERCHÈ SPOSTA LE PARTICELLE) E IN

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

I TERMINI DIFFUSIVI (A CAUSA DELL' ATTRITO SI "DIFFONDONO" LE VELOCITÀ).

PARTENDO DA UN CAMPO DI VELOCITÀ NULLO, I TERMINI CONVETTIVO E DIFFUSIVO SONO NULLI: SERVONO SOLO A RIPOSIZIONARE LA VELOCITÀ ALL' INTERNO DEL CAMPO.

TERMODINAMICA DEI CONTINUI

IN TERMODINAMICA CLASSICA CONSIDERIAMO SEMPRE E SOLO EVOLUZIONE TRA STATI DI EQUILIBRIO SUCCESSIVI.

PRESO UN FLUIDO, PERÒ, NON POSSIAMO IN GENERE DEFINIRE UNO STATO DI EQUILIBRIO GLOBALE, MA SOLO UNO LOCALE.

DEFINISCO L' ENERGIA INTERNA (PER OGNI SINGOLO VOLUMETTO FLUIDO)

$$e = g(\underline{x}, t) \underset{\text{REFERENZIALE}}{=} g(\chi_K(\tilde{x}, t), t) := g_K(\tilde{x}, t)$$

PER ESSERE FUNZIONE DI STATO, e DEVE DIPENDERE DA (x,t) SOLO ATTRAVERSO v E S:

$$e = \hat{e}(v, s, \tilde{x})$$

v: VOLUME SPECIFICO $(1/\rho)$; s: ENTROPIA PER UNITÀ DI MASSA — DUE VARIABILI INTENSIVE

$$de = \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_S dv + \left.\frac{\partial e}{\partial S}\right|_v dS := -p\,dv + \vartheta\,dS$$

È UN DIFF. ESATTO (FUNZIONE DI STATO)

QUEST' ULTIMA DETTA RELAZIONE DI GIBBS, VALIDA SE IL FLUIDO È OMOGENEO (LA RELAZIONE FUNZIONALE È LA STESSA PER OGNI PARTICELLA $\tilde{x}$).

$\tilde{x} = K(P$

SEGUENDO UNA PARTICELLA POSSO CALCOLARE

$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{\tilde{x}} = \frac{De}{Dt} = -p\frac{Dv}{Dt} + T\frac{Ds}{Dt}$$

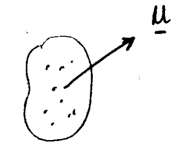
SE NON SEGUO IL MOTO HO (CASO GENERALE $e = \hat{e}(v, s, \tilde{x})$)

$$\frac{de}{dt} = -p\frac{\partial v}{\partial t} + T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}_K}\frac{\partial \tilde{x}_K}{\partial t} \rightarrow \text{TERMINE DI NON OMOGENEITÀ TERMODINAMICA}$$

E IL GRADIENTE (DERIVATA SPAZIALE)

$$\frac{\partial e}{\partial x_i} = -p\frac{\partial v}{\partial x_i} + T\frac{\partial s}{\partial x_i} + \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}_K}\frac{\partial \tilde{x}_K}{\partial x_i}$$

CONSIDERIAMO UN VOLUMETTO CON N PARTICELLE.



$$\underline{u}^{(l)} = \langle \underline{u} \rangle + \underline{u}'^{(l)}$$

↖ FLUTTUAZIONE DALLA MEDIA

$$\langle \underline{u} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \underline{u}^{(l)} \qquad \langle \underline{u}' \rangle = 0$$

DENTRO IL VOLUMETTO LE MOLECOLE SONO TUTTE UGUALI, QUINDI

$$E = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2} m\, \underline{u}^{(l)} \cdot \underline{u}^{(l)} = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2} m \left(\langle \underline{u} \rangle + \underline{u}'^{(l)}\right) \cdot \left(\langle \underline{u} \rangle + \underline{u}'^{(l)}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2} m \left(\langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle + 2\, \underline{u}'^{(l)} \cdot \langle \underline{u} \rangle + \underline{u}'^{(l)} \cdot \underline{u}'^{(l)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m N \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{u} \rangle + \frac{1}{2} m \langle \underline{u} \rangle \cdot \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \underline{u}'^{(l)}}_{=0} + \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2} m\, \underline{u}'^{(l)} \cdot \underline{u}'^{(l)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \langle \underline{u} \rangle \langle \underline{u} \rangle}_{\text{ENERGIA DEL VOLUMETTO}} + \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2} m\, \underline{u}'^{(l)} \cdot \underline{u}'^{(l)} := \frac{1}{2} M \langle \underline{u} \rangle \langle \underline{u} \rangle + M e$$

NOTA: $e = \frac{1}{N}\sum_{l} \underline{u}'^{(l)} \cdot \underline{u}'^{(l)}$

QUINDI L'ENERGIA e È LEGATA ALLE FLUTTUAZIONI MICROSCOPICHE.
IN TERMODINAMICA CLASSICA IL PRIMO TERMINE NON C'È (SI CONSIDERA IL SISTEMA FERMO).

NOTA: VOLENDO, QUESTO È IL II TEOREMA DI KÖENIG.

STUDIAMO IL BILANCIO DELL'ENERGIA CINETICA + INTERNA.

TORNANDO AL MACROSCOPICO SCRIVO $\langle \underline{u} \rangle \equiv \underline{u}$. ALLORA

$$E = \int_{\chi(B_m,t)} \rho \left(e + \frac{\underline{u}\cdot\underline{u}}{2} \right) dV$$

COME VARIA NEL TEMPO E ?

FORZE DI VOLUME FORZE DI SUPERFICIE

$$\frac{d}{dt}\int_{\chi(B_m,t)} \rho \left(e + \frac{\underline{u}\cdot\underline{u}}{2} \right) dV = \int_{\chi(B_m,t)} \rho \underline{f}\cdot\underline{u}\, dV + \int_{\partial\chi(B_m,t)} \underline{t}_{(m)}\cdot\underline{u}\, dS$$

$$+ \int_{\chi(B_m,t)} \rho Q\, dV + \int_{\partial\chi(B_m,t)} h\, dS$$

$[Q] = \dfrac{[\text{CALORE}]}{[m]\cdot[t]}$ CALORE ENTRANTE

SCAMBI DI CALORE ATTRAVERSO IL VOLUME O LA SUPERFICIE (REAZIONI CHIMICHE, RADIAZIONE; CONDUZIONE, CONVEZIONE)

PER IL PRINCIPIO DI FOURIER-STOKES POSSO ESPRIMERE L'ULTIMO INTEGRALE USANDO

$$h = -\underline{q}\cdot\hat{m} = -q_i m_i$$

METTO IL SEGNO MENO COSÌ CHE UN FLUSSO RIVOLTO VERSO L'INTERNO DIA CONTRIBUTO POSITIVO AL BILANCIO.

FLUSSO DI CALORE: POSSO SEMPRE TROVARE QUESTA $\underline{q}$ DATA h.

USANDO IL TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS

$$\frac{d}{dt}\int_{\chi(B_m,t)} \rho \left(e + \frac{\underline{u}\cdot\underline{u}}{2} \right) dV = \int_{\chi(B_m,t)} \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{\underline{u}\cdot\underline{u}}{2} \right) dV$$

PER IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN, E TENENDO CONTO CHE

$$(T\cdot\hat{m})\cdot\underline{u} = (\underline{u}\cdot T)\cdot\hat{m} \qquad (T\cdot\hat{m})_i = T_{ij}m_j \qquad (\underline{u}\cdot T)_j = u_i T_{ij}$$

$$\int_{\partial\chi(B_m,t)} \underline{t}_{(m)}\cdot\underline{u}\, dS = \int_{\chi(B_m,t)} \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot T)\, dV$$

E SIMILMENTE SULL'ULTIMO INTEGRALE. DATA L'ARBITRARIETÀ DI $\chi(B_m,t)$ POSSO INFINE SCRIVERE

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{\underline{u}\cdot\underline{u}}{2} \right) = \rho\underline{f}\cdot\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot T) + \rho Q - \underline{\nabla}\cdot\underline{q}$$

CHE ESPRIME LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE (INTERNA PIÙ CINETICA). RICAVIAMO QUELLA RELATIVA ALLA SOLA ENERGIA CINETICA PER POI RISALIRE A QUELLA PER LA SOLA ENERGIA INTERNA.

DALLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

DOVE HO SOSTITUITO

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

USANDO

$$\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{u_i^2}{2} \qquad u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i p) - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE PER $\underline{u}$ ENTRAMBI I MEMBRI (MOLTIPLICO PER u_i, ESSENDO L'EQUAZIONE RIFERITA ALLA COMPONENTE i-ESIMA),

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i^2}{2}\right) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i^2}{2}\right) = -\frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho f_i u_i$$

LA CONFRONTO CON L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{u_i^2}{2}\right) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(e + \frac{u_i^2}{2}\right) = \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \sigma_{ij}) + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i)$$

SE LE SOTTRAGGO OTTENGO

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

NEL CASO STATICO L'ULTIMO ADDENDO È NULLO, $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ INDICA LA VARIAZIONE DI VOLUME E RITROVO

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} - p\, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underset{\sim}{\Sigma : \nabla \underline{u}}$$

CHE RENDE NEL CASO DI UN CONTINUO L'USUALE

$$dE = dQ - p dV$$

OSSIA IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA.

NOTA: ANCHE IN QUESTO CASO, SE SI RIESCE A LAVORARE IN VETTORIALE E NON IN INDICIALE, I CALCOLI SONO MOLTO PIÙ BREVI E INTUITIVI.

RICAPITOLANDO,

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i T_{ij}) + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \qquad (I)$$

CONFRONTANDOLA CON $u_i \cdot$ (EQ. CONSERVAZIONE IMPULSO),

$$u_i\left(\rho \frac{Du_i}{Dt}\right) = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i\right) u_i$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i T_{ij}) - T_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (II)$$

SOTTRAENDOLE,

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \qquad (III)$$

SE È VERO CHE IL TERMINE VISCOSO

$$T_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} > 0$$

RITROVIAMO IN ESSO UNA FONTE DI ENERGIA INTERNA (E UN TERMINE DISSIPATIVO PER L'ENERGIA CINETICA, COME SI LEGGE NELLA II).

VERIFICHIAMOLO. INNANZITUTTO, RICORDANDO LA DEFINIZIONE DI T_{ij},

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij}$$

$$e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} := \underset{\text{FORMA DEVIATORICA}}{d_{ij}} + \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}$$

$$d_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}$$

$$d_{ii} = e_{ii} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ii} = Tr(e_{ij}) - \frac{1}{3}Tr(e_{ij})\cdot 3 = 0$$

NOTA: PERCHÈ DEFINISCO D? SI È VISTO CHE GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE DI 'E' SONO VARIAZIONI DI VOLUME E I FLUIDI VI OPPONGONO UNA RESISTENZA (ATTRITO) CHE NON È IL SOLITO SHEAR. QUINDI HO MESSO IN D CHE HA $Tr(D)=0$, SOLO LO SHEAR

$(= I : D = \delta_{ij} d_{ij})$

POSSO COSÌ RISCRIVERE

$$T_{ij} = \underbrace{-p\delta_{ij}}_{\text{PRESSIONE}} + \underbrace{2\mu d_{ij}}_{\text{SFORZI DI TAGLIO (SHEAR)}} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)e_{kk}\delta_{ij}}_{\text{BULK VISCOSITY}}$$

NOTA: IN UN FLUSSO DI STOKES TRASCURO IN PRATICA GLI ATTRITI "VOLUMICI" DESCRITTI SOPRA (PUOI PENSARLI IN TERMINI DI POTENZIALI ATTRATTIVI).

IL VANTAGGIO È CHE NEL CASO INCOMPRIMIBILE L'ULTIMO ADDENDO È NULLO ($\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0$). IDEM PER UN FLUSSO DI STOKES, PER CUI

$$2\mu = -3\lambda$$

NOTA: L'APPROSSIMAZIONE È BUONA A BASSI Ma (INCOMPRIMIBILE).

RISCRIVO LA (III) PRODOTTO SCALARE TRA TENSORI, "DOPPIO CONTRATTO": $A:B = A_{ij}B_{ij}$

$$\rho \frac{De}{Dt} = T : \nabla \underline{u} + \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

POSSO INOLTRE RISCRIVERE LA (II) DEFINENDO

$$K = \frac{1}{2} u_i u_i$$

$$\rho \frac{DK}{Dt} = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{u} \cdot T) - T : \nabla \underline{u}$$

$$T = -pI + 2\mu D + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) I$$

↑ TENSORE IDENTITÀ

NOTA: COL SENNO DI POI, PARTI DA

$$\rho \frac{De}{Dt} = T:E + \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

$$\rho \frac{DK}{Dt} = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot (\underline{\nabla} \cdot \hat{T})$$

$$T = -pI + \lambda(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) I + 2\mu E$$

· <u>DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS - DUHEM</u> (BILANCIO DI ENTROPIA)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(B_m,t)} \rho s \, dV - \int_{\mathcal{V}(B_m,t)} \frac{\rho Q}{\theta} dV + \int_{\partial\mathcal{V}(B_m,t)} \frac{\underline{q} \cdot \underline{m}}{\theta} dS \geq 0$$

VARIAZIONE DI ENTROPIA DEL VOLUMETTO FLUIDO

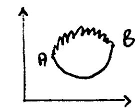
VARIAZIONE DI ENTROPIA DELL'UNIVERSO (CHE SCAMBIA CALORE DI VOLUME E SUPERFICIE CON IL VOLUMETTO). $[Q] \doteq J s^{-1}$.

SE VALE L'UGUAGLIANZA IL SISTEMA È DETTO REVERSIBILE; SE $\underline{q} = 0$ È ADIABATICO. QUI θ È LA TEMPERATURA ASSOLUTA.

SI NOTI CHE LE ALTRE EQUAZIONI DI BILANCIO DESCRIVONO QUALSIASI FENOMENO: QUESTA SOLAMENTE QUELLI AMMISSIBILI. È UN VINCOLO E NON UNA LEGGE DI EVOLUZIONE.

USANDO IL TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS E QUELLO DI GAUSS-GREEN,

$$\int_{\mathcal{V}(B_m,t)} \rho \frac{Ds}{Dt} dV - \int_{\mathcal{V}(B_m,t)} \frac{\rho Q}{\theta} dV + \int_{\mathcal{V}(B_m,t)} \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\underline{q}}{\theta}\right) dV \geq 0$$



IN FORMA DIFFERENZIALE,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} - \frac{\rho Q}{\theta} + \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\underline{q}}{\theta}\right) \geq 0$$

NOTA: PARTO DALLA RELAZIONE DI CLAUSIUS

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (= 0 \text{ SE REVERSIBILE})$$

SUL CICLO IN FIGURA, POICHÉ $dS = \frac{\delta Q}{T}\Big|_{REV}$,

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T_{(IRR)}} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T_{(REV)}} \leq 0 \Rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q}{T_{(IRR)}} \leq \int_A^B \frac{\delta Q}{T_{(REV)}} = \Delta S_e$$

ESPLICITANDO LE DERIVATE,

NOTA: $\nabla(f(\theta)) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$

$$0 \le \rho \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{Q}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \underline{q} - \frac{1}{\theta^2} \underline{q} \cdot \nabla \theta$$

$$0 \le \rho \theta \frac{Ds}{Dt} \underbrace{- \rho Q + \nabla \cdot \underline{q}}_{\text{LO RITROVO NELL'EQ. DELL'ENERGIA}} - \frac{\underline{q} \cdot \nabla \theta}{\theta}$$

HO MOLTIPLICATO PER $\theta \ge 0$.

$$0 \le \rho \theta \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{De}{Dt} + T : \nabla \underline{u} - \frac{\underline{q}}{\theta} \cdot \nabla \theta$$

RICORDIAMO ORA

$$v = \frac{1}{\rho} \qquad dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$$

NOTA: v È UN VOLUME PER UNITÀ DI MASSA, $v = \frac{V}{M} = \frac{1}{\rho}$.

$$de(s,v) = \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v ds + \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s dv$$

$$= \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v ds + \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s \left(-\frac{1}{\rho^2} d\rho\right)$$

LO SCOPO DEI PROSSIMI PASSAGGI È TOGLIERE DI MEZZO De/Dt SOSTITUENDO CON LE SUE DERIVATE PARZIALI.

VERO IN PARTICOLARE SE SEGUO UNA PARTICELLA,

$$\frac{De}{Dt} = \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v \frac{Ds}{Dt} - \frac{1}{\rho^2} \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s \frac{D\rho}{Dt}$$

LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA DAVA

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

PERCIÒ

$$\frac{De}{Dt} = \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s \nabla \cdot \underline{u}$$

PRESO IL TENSORE $E = e_{ij}$,

$$\delta_{ij} E_{ij} = E_{ii} = I : E$$

OVVERO

$$\delta_{ij} e_{ij} = e_{ii} = \delta_{ij} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

IN FORMA VETTORIALE

$$I : E = Tr(E) = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\underline{u} + \underline{\nabla}\underline{u}^T\right) : I = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

SOSTITUENDO SOPRA,

$$0 \leq \rho\theta \frac{Ds}{Dt} - \rho \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v \frac{Ds}{Dt} - \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s I : E + T : \underline{\nabla}\underline{u} - \frac{q}{\theta} \cdot \underline{\nabla}\theta$$

MA

$$T : \underline{\nabla}\underline{u} = T : (E + \Omega) = T : E + \overset{0}{\overset{\|}{T : \Omega}} = T : E$$

PRESO COMUNQUE UN TENSORE A_{ij} ANTISIMMETRICO, $\exists\, \underline{a}$ t.c.

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k$$

QUINDI

$$\begin{aligned} T_{ij}\,\Omega_{ij} &= T_{ij}\,\varepsilon_{ijk}\,w_k \\ &= T_{23}\,\varepsilon_{231} w_1 + T_{32}\,\varepsilon_{321} w_1 + (k = 2,3) \\ &= T_{23} w_1 - T_{32} w_1 + (k=2,3) \qquad = 0 \end{aligned}$$

INFATTI T È SIMMETRICO. ALLORA IN GENERALE, SE B È SIMMETRICO E A ANTISIMMETRICO,

$$A : B = 0$$

RISCRIVO ALLORA

$$0 \leq \rho \frac{Ds}{Dt}\left(\theta - \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v\right) + \left(T - \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s I\right) : E - \frac{q}{\theta} \cdot \underline{\nabla}\theta$$

CHE È SICURAMENTE SODDISFATTA SE RICHIEDO

$$\rho \frac{Ds}{Dt}\left(\theta - \left.\frac{\partial e}{\partial s}\right|_v\right) \geq 0 \qquad \left(T - \left.\frac{\partial e}{\partial v}\right|_s I\right) : E \geq 0 \qquad \frac{q}{\theta} \cdot \underline{\nabla}\theta \leq 0$$

PER LA PRIMA, ρ È POSITIVO MA NON HO CONTROLLO SU $\frac{Ds}{Dt}$. ANNULLO ALLORA IL TERMINE.

PER FARLO RICHIEDO

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial s}\Big|_v$$

CHE È POI LA DEFINIZIONE DI TEMPERATURA ASSOLUTA.

PER LA SECONDA, SOSTITUISCO

$$T = -p I + 2\mu D + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)(\nabla \cdot \underline{u}) I \;:=\; -p I + \Sigma_1$$

$$\left(-p I + \Sigma_1 - \frac{\partial e}{\partial v}\Big|_s I\right) : E \geq 0$$

$$\left[-\left(p + \frac{\partial e}{\partial v}\Big|_s\right) I + \Sigma_1\right] : E \geq 0$$

ANNULLO IL PRIMO IMPONENDO

$$p = -\frac{\partial e}{\partial v}\Big|_s$$

(DEFINIZIONE DI PRESSIONE) E RICHIEDO

$$0 \leq \Sigma_1 : E = \left[\left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) I (\nabla \cdot \underline{u}) + 2\mu D\right] : \left[D + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \underline{u}) I\right]$$

POICHÉ $I : D = Tr(D) = 0$, $I : I = 3$,

$$0 \leq 2\mu D : D + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)(\nabla \cdot \underline{u})^2$$

POICHÉ $D:D$ È QUADRATICO, RICHIEDO

$$\mu \geq 0 \quad , \quad \frac{2}{3}\mu + \lambda \geq 0$$

CI RESTA LA TERZA CONDIZIONE,

$$\frac{\underline{q}}{\theta} \cdot \nabla\theta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{q} \cdot \nabla\theta \leq 0$$

OSSIA $\underline{q}$ HA VERSO DISCORDE AL $\nabla\theta$: IL CALORE VA DAL LATO PIÙ CALDO A QUELLO PIÙ FREDDO.

NOTA: SI PUÒ PENSARE DI FARE TUTTA QUESTA DIMOSTRAZIONE SENZA MAI METTERE DI MEZZO D. QUI TROVEREI

$$\lambda(\nabla \cdot \underline{u})^2 + 2\mu E : E \geq 0$$

VISTO CHE NON LE STIAMO RISOLVENDO IN MODO ESATTO, I LIMITI CHE SI OTTENGONO SONO UN PO' DIVERSI:

$$\mu \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

CHE TUTTO SOMMATO CI STA (SONO I COEFFICIENTI DI DISSIPAZIONE VISCOSA) TUTTAVIA LA CONDIZIONE È PIÙ RESTRITTIVA

NOTA: SOSPETTO CHE, SE PRENDIAMO PER BUONE LE DEFINIZIONI DI p E θ E IL PRINCIP ZERO DELLA TERMODINAMICA, L'UNICA COSA CHE QUESTO BILANCIO CI DICE È PROPRIO $\mu \geq 0$, $\frac{2}{3}\mu + \lambda \geq 0$

· RELAZIONE COSTITUTIVA PER IL FLUSSO DI CALORE

$$q_i = f\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_q}, \text{S.T.}\right)$$ COSÌ DA SODDISFARE DETERMINISMO + AZIONE LOCALE: $q_i = f(\theta, \nabla\theta)$.
PER SODDISFARE L'INVARIANZA SCRIVO:

$$q_i = A_0 \frac{\partial\vartheta}{\partial x_i} + A'_{ij}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} + \underbrace{A''_{ijk}}_{\text{HESSIANO (PER OGNI } i \text{ FISSATO)}}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}$$

CON A_0, A'_{ij}, A''_{ijk} TENSORI ISOTROPI SE LO È IL MATERIALE, E TUTTI FUNZIONE DI θ.

SI NOTI CHE MANCA L'ORDINE ZERO, PERCHÉ SE AVESSI UN FLUSSO DI CALORE CON $\theta = \text{cost}$ $(\nabla\theta = 0)$ NON POTREI CONTROLLARE $\underline{q}\cdot\underline{\nabla}\vartheta \le 0$.

DECIDO DI FERMARMI AL PRIMO ORDINE:

$$A_0 = A(\theta, \rho) \qquad A''_{ijk} = 0$$

$$A'_{ij} = B(\theta, \rho)\,\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad q_i = A\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i} + B\delta_{ij}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} = (A+B)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}$$

SOSTITUENDOLA SOPRA,

$$(A+B)\underline{\nabla}\theta \cdot \underline{\nabla}\theta \le 0$$

SI DICE LEGGE DI FOURIER

$$\underline{q} = -K(\theta, \rho)\,\underline{\nabla}\theta$$

↑ FLUSSO DI CALORE

NOTA: ERANO
$$\Sigma' = 2\mu D + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\,I$$
$$T = -\rho I + \Sigma'$$

RISCRIVO L'ENERGIA INTERNA COME

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho Q + \underline{\nabla}\cdot(K\underline{\nabla}\theta) - \rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u} + \Sigma' : \underline{\nabla u}$$

A K COSTANTE,
$$\underline{\nabla}\cdot(K\underline{\nabla}\theta) = K\nabla^2\theta$$

$$T : \underline{\nabla u} = (-\rho I + \Sigma') : \underline{\nabla u}$$

E L'ENERGIA CINETICA

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\rho + \underline{u}\cdot(\underline{\nabla}\cdot\Sigma') + \rho\,\underline{f}\cdot\underline{u}$$

INFATTI

$$\rho\frac{D}{Dt}(E_{TOT}) = \rho\,\underline{f}\cdot\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot T) + \rho Q - \underline{\nabla}$$

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \rho\,\underline{f}\cdot\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot T) + \rho\underline{\nabla}\cdot\underline{u} - \Sigma' : \underline{\nabla u}$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot T) = \underline{\nabla}\cdot[\underline{u}\cdot(-\rho I + \Sigma')] = \underline{\nabla}\cdot(-\rho\underline{u}) + \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot\Sigma') = -\underline{\nabla}\rho\cdot\underline{u} - \rho\underline{\nabla}\cdot\underline{u} + \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot\Sigma')$$

RICORDIAMO CHE

$$\Sigma' : (E + \Omega) = \Sigma' : E \ge 0$$

(INFATTI T_{ij} È SIMMETRICO, QUINDI LO È ANCHE σ_{ij}). INOLTRE

$$\underline{u}\cdot(\underline{\nabla}\cdot\Sigma') = \underline{\nabla}\cdot(\Sigma'\cdot\underline{u}) - \Sigma' : \underline{\nabla u}$$

↳ TERMINE DISSIPATIVO, SEMPRE POSITIVO

EQUAZIONE DELL'ENERGIA IN FORMA ENTALPICA

$$h = e + p v$$

PARTO DALLE EQUAZIONI SOPRA PIÙ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

(CONSERVAZIONE DELLA MASSA) E OTTENGO

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho Q + \frac{1}{\rho} p \frac{D\rho}{Dt} + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\nabla} \underline{u} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

INOLTRE

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} + p \frac{D\,1/\rho}{Dt} \right) = \rho Q + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\nabla} \underline{u} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

ORA CONSIDERO

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dp}{Dt}$$

$$= \frac{De}{Dt} + p \frac{D\,1/\rho}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \rho Q + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\nabla} \underline{u} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

CHE È IL BILANCIO DELL'ENERGIA IN FORMA ENTALPICA.

BILANCIO DI ENERGIA NELLE VARIABILI θ E p

$$dh = de + v\,dp + p\,dv$$

$$= \theta\, dS - p\,dv + v\,dp + p\,dv$$

$$= \theta\, dS + v\,dp$$

NOTA: PURTROPPO È PROPRIO QUELLA CHE USEREMO PER LA FORMA ADIMENSIONALE DELLE EQUAZIONI DI N-S.

CERCHIAMO DI SOSTITUIRE $\frac{Dh}{Dt}$ CON DERIVATE DI θ E p.

SOSTITUISCO QUINDI

$$s(\theta, p)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \theta}\bigg|_p d\theta + \frac{\partial s}{\partial p}\bigg|_\theta dp$$

$$dh = \theta \frac{\partial s}{\partial \theta}\bigg|_p d\theta + \left(\theta \frac{\partial s}{\partial p}\bigg|_\theta + v\right) dp$$

DEFINIAMO (O RICONOSCIAMO) I CALORI SPECIFICI

$$c_p = \theta \frac{\partial s}{\partial \theta}\bigg|_p \qquad c_v = \theta \frac{\partial s}{\partial \theta}\bigg|_v$$

NOTA: $c = \frac{\delta Q}{\partial T}$ E $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

INOLTRE (RELAZIONE DI MAXWELL)

$$\frac{\partial s}{\partial p}\bigg|_\theta = - \frac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_p$$

NOTA: VIENE DA
$G = h - \theta s = e + pv - \theta s$
$dG = v\,dp - s\,d\theta$
(GUARDACASO È FUNZIONE DI p E θ).

PERCIÒ

$$dh = c_p\, d\theta + \left(-\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_p + v\right) dp$$

$$= c_p\, d\theta + \left(1 - \frac{\theta}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_p\right) v\, dp$$

$$= c_p\, d\theta + (1 - \beta\theta)\, v\, dp$$

DOVE SI È DEFINITO IL COEFFICIENTE DI ESPANSIONE TERMICA A PRESSIONE COSTANTE

$$\beta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_p$$

NOTA: PER UN GAS PERFETTO TROVO $\beta = \frac{1}{\theta}$, COSÌ CHE $dh = c_p d\theta$.

INFINE POSSO CALCOLARE

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{D\theta}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{\beta\theta}{\rho}\frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho c_p \frac{D\theta}{Dt} + (1 - \beta\theta)\frac{Dp}{Dt}$$

SOSTITUENDO NEL BILANCIO IN FORMA ENTALPICA,

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \rho Q + \Sigma' : \nabla \underline{u} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

OTTENGO

$$\underline{\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} - \beta \theta \frac{DP}{Dt} = \rho Q + \Sigma' : \underline{\nabla} \underline{u} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}}$$

CHE ESPRIME IN UNA TERZA FORMA LA CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA.

· **EQUAZIONE DI BERNOULLI**

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{u^2}{2}\right) = \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \cdot (\Sigma' \cdot \underline{u}) - \underline{\nabla} \cdot (P \underline{u})$$

$\hookrightarrow = \underline{u} \cdot \Sigma'$, INFATTI Σ' E' SIMMETRICO

CONSIDERO CHE *

$$\underline{\nabla} \cdot (P \underline{u}) = P \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} P = \underbrace{-P \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\text{CONSERV. MASSA}} + \underbrace{\frac{DP}{Dt} - \frac{\partial P}{\partial t}}_{\text{DERIVATA MATERIALE}}$$

POICHE'

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\underline{\nabla} \cdot (P \underline{u}) = P \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt} + \frac{DP}{Dt} - \frac{\partial P}{\partial t} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \frac{\partial P}{\partial t}$$

DOVE SI E' USATO

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{P}{\rho} = \frac{DP}{Dt} + \rho P \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

NOTA*: IN ALTERNATIVA NOTO CHE $\underline{\nabla} \cdot (P\underline{u}) = \underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{u} \frac{P}{\rho}\right)$ E VERIFICO SUI

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \rho \underline{u} \cdot \underline{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (P \underline{u}) - \frac{P}{\rho} \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u})\right]}_{=0}$$

NEL CASO IN CUI LE FORZE ESTERNE SONO CONSERVATIVE,

$$\underline{f} = -\underline{\nabla} \Psi$$

NOTA: IN EFFETTI VALE, SU UNA g GENERICA,

$$\rho \frac{Dg}{Dt} = \rho \frac{\partial g}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \underline{\nabla} g \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONS. MASSA}}}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} g)$$

INOLTRE

$$\underline{u} \cdot \underline{\nabla} \Psi = \frac{D\Psi}{Dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{u^2}{2}\right) = \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} - \rho \frac{D\Psi}{Dt} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\Sigma' \cdot \underline{u}) - \rho \frac{D}{Dt} \frac{P}{\rho} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

CHE RISCRIVO COME

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e+\frac{u^2}{2}+\psi+\frac{p}{\rho}\right) = \rho Q - \underline{\nabla}\cdot\underline{q} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\left(\Sigma'\cdot\underline{u}\right) + \frac{\partial p}{\partial t}$$

(BILANCIO DI ENERGIA CON FORZE CONSERVATIVE).

SE ψ, p SONO STAZIONARI $(\dot{\psi}=\dot{p}=0)$, NON HO SCAMBI DI CALORE $(Q=\underline{\nabla}\cdot\underline{q}=0)$, NON CI SONO FORZE VISCOSE ($\Sigma'=0$, FLUIDO INVISCIDO), OTTENGO

$$e+\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\psi = \text{cost.}$$

CHE È L'<u>EQUAZIONE DI BERNOULLI</u> (IN FORMA PARTICOLARE). RICORDANDO

$$h = e + p v = e + \frac{p}{\rho}$$

POSSO RISCRIVERE

$$\underline{h+\frac{u^2}{2}+\psi = \text{cost.}}$$

- <u>ESEMPIO</u>

IN UN FLUIDO IN UN CAMPO UNIFORME E CON e COSTANTE,

$$p+\frac{1}{2}\rho u^2 = 0$$

SE PARTENDO DA u_∞, p_∞ FRENO IL FLUIDO A $u_0=0$, DEVE ESSERE

↳ LO RALLENTO ISOENTROPICAMENTE

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2$$

↑ PRESSIONE TOTALE ↑ PRESSIONE STATICA ↑ PRESSIONE DINAMICA

↑ ATMOSFERA

MANO FUORI DAL FINESTRINO → TOTALE ≃ DINAMICA

- <u>NOTA</u>

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) - u_i\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)\right)}_{=0,\ \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ}}$$

· FORMA ADIMENSIONALE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER - STOKES

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$ (VEDI NOTA DIETR

$$\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} = \beta \theta \frac{Dp}{Dt} + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q$$

(DOVE SI SONO SUPPOSTI COSTANTI I COEFFICIENTI DI VISCOSITÀ E DI DIFFUSIONE TERMICA λ, μ, K).

SIAMO DI FRONTE A 5eq E 6 INCOGNITE : CI MANCA UN'EQUAZIONE PER RENDERE IL SISTEMA CHIUSO.

QUESTA È DATA DALL'EQUAZIONE DI STATO

$$p = \hat{p}(\rho, \theta)$$

NON SI È ANCORA DIMOSTRATO SE LA SOLUZIONE ESISTA, SIA UNICA E DIPENDA IN MODO CONTINUO DAI DATI INIZIALI.

SAPPIAMO PERÒ RISOLVERE IL SISTEMA IN ALCUNI CASI SEMPLICI, TRASCURANDO ALCUNI TERMINI; BISOGNA SAPER STIMARE QUALI CONTANO DI PIÙ CASO PER CASO. COME FACCIO?

PER OGNI GRANDEZZA q NE PRENDO UNA DI RIFERIMENTO q_0 E DEFINISCO LA QUANTITÀ ADIMENSIONALE

$$q^* = \frac{q}{q_0}$$

SI NOTI CHE LA SCELTA DI q_0 NON È SCIENTIFICA, MA È DETTATA DALLA PRATICA E HA LO SCOPO DI MANTENERE $q^* \sim 10^0$.

HO BISOGNO DELLE COSTANTI

$$\rho_0, U_0, L_0, t_0$$

PER POTER DEFINIRE COME SOPRA

$$\rho^*, u_i^*, x_i^*, t^*$$

SOSTITUENDOLE NELLE EQUAZIONI SOPRA, DEVO CONSIDERARE CHE

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{t_0} \underbrace{\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*}}_{\sim 1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \frac{\rho_0 U_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*}$$

QUALE DEI DUE TERMINI CONTA DI PIU`?

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 U_0}{L_0} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0$$

DIVIDENDO PER IL COEFFICIENTE DEL TERMINE CONVETTIVO,

$$\frac{L_0}{t_0 U_0} =: \frac{1}{St} \qquad St = \frac{t_0 U_0}{L_0}$$

NOTA: DIVIDERE PER QUESTO COEFFICIENTE E` CIO` CHE RENDE ADIMENSIONALE St.

DOVE SI E` DEFINITO $St$ IL NUMERO DI STROUHAL (ADIMENSIONALE). A MENO DI TROVARCI A STUDIARE EVENTI PERIODICI, E` NATURALE SCEGLIERE LE GRANDEZZE DI RIFERIMENTO COSI` DA AVERE $St = 1$.

HO OTTENUTO

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\rho^* u_i^*) = 0$$

POICHE` $\partial_{t^*} \rho^* \sim 1$, A DARMI IL SUO ORDINE DI GRANDEZZA E` IL COEFFICIENTE $\frac{1}{St}$. SE QUESTO FOSSE MOLTO PICCOLO, POTREI A RAGIONE TRASCURARE L'INTERO TERMINE.

APPLICHIAMO LA STESSA IDEA ALLA CONSERVAZIONE DELL'IMPULSO:

$$\frac{\rho_0 U_0}{t_0} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 U_0^2}{L_0} \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* u_i^* u_j^*) = \rho_0 f_0 \rho^* f_i^* - \frac{P_0}{L_0} \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{\mu_0 U_0}{L_0^2} (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right)$$

$$+ \frac{\mu_0 U_0}{L_0^2} \mu^* \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}$$

NOTA: QUANDO LA RIGA NON RIFLETTERE SULLE DIMENSIONI FISICHE, SCRIVITELI COME TI VENGONO.

(SI NOTI CHE, ESSENDO λ, μ VISCOSITA`, ADIMENSIONALIZZO λ E μ CON LA STESSA COSTANTE μ_0).

DIVIDENDO ANCORA PER IL COEFFICIENTE DEL TERMINE CONVETTIVO $\frac{\rho_0 U_0^2}{L_0}$,

$$\frac{1}{St}\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* u_i^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*}(\rho^* u_i^* u_j^*) = \frac{1}{Fr}\rho^* f_i^* - \frac{1}{Ru}\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}+1\right)\frac{\partial}{\partial x_i^*}\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}$$

DOVE SI È DEFINITO IL NUMERO DI <u>FROUDE</u> Fr (A VOLTE Fr^2)

$$Fr := \frac{U_0^2}{g_0 L_0}$$

$\downarrow g$ $v = 300$ m/s $\Rightarrow Fr \simeq 10^3$

IL NUMERO DI <u>RUARK</u> Ru

$$Ru = \frac{\rho_0 U_0^2}{p_0}$$

FLUSSO INCOMPRIMIBILE, $Ru \sim 1$

DEFINENDO INVECE $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ E LA VELOCITÀ DEL SUONO

$$a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

DETTO Ma IL NUMERO DI <u>MACH</u>, $Ma = \frac{U_0}{a_0}$, SI HA

$$Ru = \gamma \frac{U_0^2}{a_0^2} = \gamma Ma^2$$

$Ma < 0.3$ FLUSSO INCOMPRIMIB

$0.3 < Ma < 1$ FLUSSO COMPRIMIB SUBSONICO

$Ma > 1$ FLUSSO SUPERSONIC

IL NUMERO DI <u>REYNOLDS</u> Re È DEFINITO COME

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}$$

FLUSSO LAMINARE, FLUSSO TURBOLENTO

SE Re È BASSO, IL TERMINE VISCOSO È PREPONDERANTE RISPETTO A QUELLO CONVETTIVO E QUINDI SONO IN REGIME LAMINARE. SONO I TERMINI CONVETTIVI A RENDERE CAOTICO IL MOTO (E DIFFICILE LA SUA DESCRIZIONE, ALTRIMENTI ANALITICAMENTE GIÀ NOTA).

ESPERIMENTI CONDOTTI SU SISTEMI FISICI DIVERSI MA CARATTERIZZATI DAGLI STESSI NUMERI DANNO GLI STESSI RISULTATI.

- <u>ESEMPIO</u>: AEREO E SUO MODELLINO

L_0, U_0 $\qquad$ l_0, u_0

$$\frac{L_0 U_0 \rho_0}{\mu_0} = \frac{l_0 u_0 \rho_0}{\mu_0}$$ $\Rightarrow$ È LO STESSO ESPERIMENTO, MA IN SCALA!

INFINE RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA.

$$\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = \rho_0 c_0 \frac{\vartheta_0}{t_0} \rho^* c_p^* \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \rho_0 c_0 \frac{U_0 \theta_0}{L_0} \rho^* c_p^* u_i^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*}$$

DIVIDENDO ANCORA PER IL COEFFICIENTE DEL 2° TERMINE,

$$\frac{\cancel{\theta_0}}{t_0} \frac{L_0}{U_0 \cancel{\theta_0}} = \frac{1}{St}$$

POI

$$\beta \theta \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \beta^* \theta^* \left(\frac{P_0}{t_0} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{U_0 P_0}{L_0} u_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right) = \frac{U_0 P_0}{L_0} \beta^* \theta^* \left(\frac{1}{St} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right)$$

DOVE NON COMPAIONO $\beta_0 \vartheta_0$: INFATTI

$$\beta = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big|_p \qquad \beta^* = \beta \theta_0$$

NOTA: INSOMMA $[\beta] = [\theta]^{-1}$

SI DEFINISCE NUMERO DI <u>ECKERT</u> $\quad E := \frac{U_0}{c_0 \theta_0}$ ($\sim$ ENERGIA INTERNA).

SI OTTIENE

$$\rho^* c_p^* \left(\frac{1}{St} \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*} \right) = \frac{E}{Ru} \beta^* \theta^* \left(\frac{1}{St} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \right) + \frac{1}{Re\, Pr} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j^*} + \frac{E}{Re} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{Ce}{St} \rho^* Q^*$$

IN CUI SI SONO INFINE INTRODOTTI Ce E IL NUMERO DI <u>PRANDTL</u> Pr:

$$\frac{1}{Pr} = \frac{K_0}{c_0 \mu_0}$$

- <u>TEOREMA DI BUCKINGHAM</u>

DATE N VARIABILI FISICHE E K GRANDEZZE FONDAMENTALI, POSSO DEFINIRE (N-K) NUMERI ADIMENSIONALI CHE DESCRIVONO COMPLETAMENTE IL SISTEMA.

PRENDIAMO AD ESEMPIO

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

QUANTITÀ FISICHE: ρ, u, x, t $\quad$ GRANDEZZE: L, T, M $\quad$ $N = 4$, $K = 3$ $\Rightarrow St$.

CON LA CONSERVAZIONE DELL' IMPULSO (CASO INCOMPRIMIBILE),

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i$$

VARIABILI : ρ, u, x, t, P, μ, f $\qquad N = 7$

GRANDEZZE : L, T, M $\qquad K = 3$

INFATTI HO TROVATO I 4 NUMERI STROUHAL, RUARK, REYNOLDS, FROUDE.

NELLA TERZA EQUAZIONE HO

VARIABILI: $\rho, u, x, t, P, \mu, K, \theta, Q, c_p$ $\qquad N = 10$

GRANDEZZE: L, T, M, θ $\qquad K = 4$

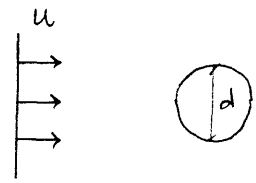
MI ASPETTO 6 NUMERI ADIMENSIONALI : STROUHAL, ECKERT, RUARK, REYNOLDS, PRANDTL, Ce.

SI NOTI CHE A VOLTE SI INTRODUCE IL NUMERO DI PERRIER

$Pe = Re \cdot Pr$

MA NON E' INDIPENDENTE DAGLI ALTRI.

ESEMPIO



SFERA IMMERSA IN UN FLUIDO. MI CHIEDO COME VARIA LA SUA RESISTENZA D. MI ASPETTO

$$D = f(u, d, \rho, \mu)$$

NOTA: $[\rho \frac{\partial u}{\partial t}] = [\mu \nabla^2 u]$, OSSIA $[\mu] = \left[\frac{\rho L^2}{T}\right] = \left[\frac{M}{LT}\right]$

NOTO CHE $N = 5$, $K = 3$. DI QUESTE 5 VARIABILI NE SCELGO 3,

u, d, ρ

NOTA: LE GRANDEZZE SONO L, T,

E ADIMENSIONALIZZO CON QUESTI GLI ALTRI DUE (μ E D). PONGO

$$\pi_1 = \mu \cdot u^\alpha d^\beta \rho^\gamma$$

NOTA: LA RESISTENZA D E' UNA FO

DEVO SOLO TROVARE I COEFFICIENTI GIUSTI PERCHE' π_1 SIA ADIMENSIONALE.

NOTA: POI PORRO' $\pi_2 = D \cdot u^\alpha d^\beta \rho^\gamma$

CONSIDERO CHE

$$[\mu] = \frac{M}{LT} \qquad [u] = \frac{L}{T} \qquad \Rightarrow \qquad [\pi_1] = \frac{M}{LT}\left(\frac{L}{T}\right)^{\alpha} L^{\beta}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{\gamma}$$

PERCHÈ π_1 SIA ADIMENSIONALE,

$$M^{1+\gamma} L^{\alpha+\beta-1-3\gamma} T^{-1-\alpha} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 1+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta-1-3\gamma = 0 \\ 1+\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

PERCIÒ

$$\pi_1 = \frac{\mu}{U d \rho} = \frac{1}{Re}$$

E POSSO USARE IL SUO INVERSO, $\pi_1' = Re$. PER IL SECONDO,

$$[D] = \frac{ML}{T^2} \qquad \pi_2 = D\underline{u^{\alpha} d^{\beta} \rho^{\gamma}}$$

$$[\pi_2] = \frac{ML}{T^2}\left(\frac{L}{T}\right)^{\alpha} L^{\beta}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{\gamma} = M^{1+\gamma} L^{\alpha+\beta+1-3\gamma} T^{-2-\alpha} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \beta = -2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

$$\pi_2 = \frac{D}{\rho u^2 d^2}$$

IN FLUIDODINAMICA SI USA SPESSO L'AREA FRONTALE

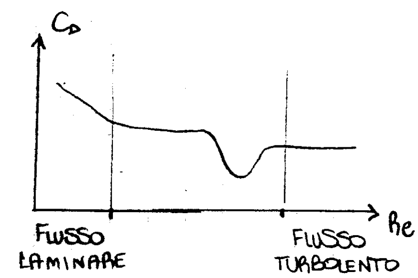
$$A = \frac{\pi}{4} d^2 \quad \left(= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi r^2 \right)$$

E AGGIUNGENDO UN FATTORE $\frac{1}{2}$ SI TROVA IL COEFFICIENTE DI RESISTENZA

$$\pi_2' = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho u^2 A} =: C_D$$

IL PROBLEMA INIZIALE SI TRADUCE PERCIÒ NELLA RICERCA DELLA FUNZIONE $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$C_D = \hat{f}(Re)$$



AL POSTO DI UNA FUNZIONE $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ (DA RAPPRESENTARE IN 5D!).

· SOLUZIONI ESATTE DI CASI PARTICOLARI

① CASO INCOMPRIMIBILE

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \left(\text{QUINDI ANCHE } \rho = \text{COST.}, \text{ ESSENDO } \frac{D\rho}{Dt} = \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \right)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{Ru}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{Fr} f_i$$

NOTA: $St = \frac{U_0 T_0}{L_0}$, $Ru = \frac{\rho_0 U_0^2}{P_0}$, $Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}$

HO POSTO $St = 1$ PERCHE' IL FENOMENO NON E' PERIODICO.

INOLTRE SE LE f_i SONO TRASCURABILI POSSO MANDARE $Fr \to \infty$.

MOLTIPLICANDO TUTTO PER Re (AVENDO GIA' DIVISO PER ρ),

$$Re\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{Re}{Ru}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

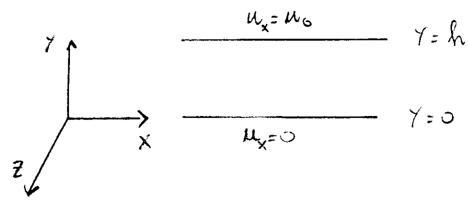
NOTA: UNO PUO' ASTRARSI DAL SIGNIFICA[TO] FISICO DI Re, Ru E TRATTARLI COME PARAMETRI DELL' EQUAZIONE.

SE FACCIO TENDERE $Re \to 0$, $Ru \to 0$ E TORNANDO IN FORMA DIMENSIONALE HO IL SISTEMA DI EQUAZIONI DI STOKES

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

NOTA: MANDO $Ru \to 0$ PER EVITARE CASI BANALI.

② FLUSSO TRA PARETI MOBILI (2D)



SUPPONIAMO IL FLUIDO INCOMPRIMIBILE,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

NOTA: LA PARETE SOPRA SI MUOVE ED E' LEI A GENERARE IL MOTO.

SE IL PROBLEMA E' STAZIONARIO (E IN ASSENZA DI FORZANTI ESTERNE)

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{=0} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

NOTA: HO POSTO PER SEMPLICITA' $\rho = 1$ E LO POSSO FARE PERCHE' IL FLUS[SO] E' INCOMPRIMIBILE.

CERCO $u_x(Y)$. DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO,

$$\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{OMOGENEITA' LUNGO X}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_y = C_0 \equiv 0$$

INFATTI LE PARETI SONO IMPERMEABILI PERCIO' IL VALORE DI C_0 SI DEDUCE DA $u_y(0) = u_y(h) = 0$

SCRIVO PER LE DUE COMPONENTI IL BILANCIO DELL'IMPULSO,

$$u_x \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{=0} + u_y \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)$$

$$u_x \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{u_y}_{=0} \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{=0}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad p = \hat{p}(x)$$

SI NOTI CHE NON SI È IMPOSTO $Re \to 0$ (ANCHE SE LA SITUAZIONE DESCRITTA CORRISPONDE A REYNOLDS PICCOLI). OTTENGO

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \qquad \text{CON LE C.C.} \quad \begin{cases} u_x(y=0) = 0 \\ u_x(y=h) = u_0 \end{cases}$$

u_x OMOGENEA IN X

$$\frac{dp}{dx}(x) = \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2}(y) \qquad \text{QUINDI SONO ENTRAMBE COSTANTI} \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx} := K$$

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{K}{\mu}\,; \qquad \frac{du_x}{dy} = \frac{K}{\mu} y + A\,; \qquad u_x = \frac{K}{\mu}\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

IMPONENDO LE C.C. (DETTE DI "ADERENZA"),

$$\begin{cases} u_x(y=0) = 0 & B = 0 \\ u_x(y=h) = u_0 = \dfrac{K}{\mu}\dfrac{h^2}{2} + Ah & A = \dfrac{u_0}{h} - \dfrac{K}{\mu}\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

$$u_x = \frac{K}{\mu}\frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{y}{h}\right] + u_0\left(\frac{y}{h}\right) = \frac{K}{2\mu} y^2 + \left(\frac{u_0}{h} - \frac{Kh}{2\mu}\right) y$$

RISOLVO POI (FLUSSO DI COUETTE) IL CASO PARTICOLARE $K=0$,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad\qquad u_x = u_0 \frac{y}{h}$$

NOTA: SI PENSI A UNA CISTERNA CHE SI SVUOTA TRAMITE UN TUBO ALLA BASE: È UN MODO PER FISSARE P_0 P_L AI DUE CAPI. INVECE UN TUBO ORIZZONTALE E LIBERO HA $K=0$.

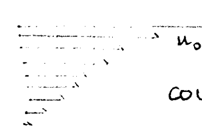
L'UNICO SFORZO VISCOSO È

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} = \mu \frac{u_0}{h}$$

SI NOTI CHE È QUESTA L'UNICA COMPONENTE DEL TENSORE Σ A SOPRAVVIVERE: INFATTI $\sigma_{ij} = \lambda \underbrace{(\nabla \cdot \underline{u})}_{=0} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} = 2\mu \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

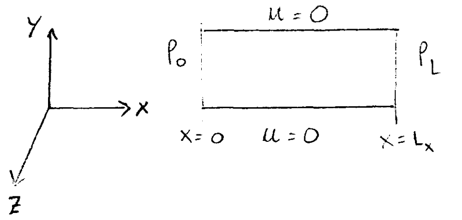
È QUESTO UNO DEI MODI IN CUI SI MISURA μ (VISCOSIMETRO).

NOTA: $T_{ij} = \begin{pmatrix} -p & \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} & -p \end{pmatrix}$



COUETTE

③ FLUSSO DI POISEUILLE $(u_0 = 0)$



SE IL CANALE È ABBASTANZA LUNGO,

$$K = \frac{dP}{dx} \qquad P = Kx + A$$

IMPONGO $A = P_0$, $P_L = K L_x + P_0 \Rightarrow K = \frac{P_L - P_0}{L_x}$ ← SALTO DI PRESSIONE AI CAP ← LUNGHEZZA DEL CANALE

HO OTTENUTO

$$P = (P_L - P_0)\frac{x}{L_x} + P_0$$

NOTA: STAVOLTA LE DUE PARET SONO FERME; A GENERARE IL MOTO È IL SALTO DI PRESSIONE

CALCOLO GLI SFORZI VISCOSI,

NOTA: RICORDA CHE $[\tau] = [P]$

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dY} = \mu \frac{K}{\mu}\frac{h^2}{2}\left[2\frac{Y}{h}\frac{1}{h} - \frac{1}{h}\right] = K\frac{h}{2}\left[2\frac{Y}{h} - 1\right] = K\left(Y - \frac{h}{2}\right)$$

INFATTI, POICHÉ $u_0 = 0$, IL PROFILO DI VELOCITÀ È DATO DA

$$u_x = \frac{K}{\mu}\frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{Y}{h}\right)^2 - \frac{Y}{h}\right] = \frac{K}{2\mu} Y (Y - h)$$

NOTA: NEL RIFARLA, DEFINISCI DAF τ_W IN MODO CHE SI CAPISCA CO SI STA PER FARE. NOTA INOLTRE $\tau_w = \tau(h) = -\tau(0)$ CHE PER SIMMETRIA ERA AUSPICABI

CALCOLO, A PARTIRE DA

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 u_x}{dY^2}$$

$$\int \frac{dP}{dx} dS = \mu \int \frac{d^2 u_x}{dY^2} dS$$

NOTA: $dS = dx\,dY$ MA TU INTEGRALA DIRETTAMENTE IN d

$$\frac{dP}{dx} h L_x = \mu L_x \int_0^h \frac{d^2 u_x}{dY^2} dY = L_x \mu \frac{du_x}{dY}\bigg|_0^h = L_x \cdot \tau \bigg|_0^h = 2 L_x \tau_W$$

DOVE

$$\tau(Y = 0) = -K\frac{h}{2}$$

$$\tau(Y = h) = K\frac{h}{2} =: \tau_W \quad \text{(WALL)}$$

NOTA: IO QUI CI LEGGO CHE LA PERDITA DI CARICO È DOVUTA ALL'ATTRITO CON LE PARETI, INFATTI LE FORZE INTERNE NON POSSONO FAR PERDERE AL SISTEMA QUANTITÀ DI MOTO (NOTA CHE $[\tau] = [F/L^2]$).

CIOÈ

$$\underbrace{\frac{dP}{dx} L_x}_{\text{SALTO DI PRESSIONE (PERDITA DI CARICO)}} \underset{\uparrow \text{AREA DELLA BASE}}{h L_z} = \tau_W \cdot \underbrace{2 L_x L_z}_{\text{AREA DELLE PARETI}}$$

È LA LEGGE CHE SPIEGA PERCH IL SANGUE SI FERMA SE IL CU SMETTE DI BATTERE, O PERCHÉ (ACQUEDOTTI SI FANNO INCLINATI

(SE MOLTIPLICO I DUE MEMBRI PER L_z HO EFFETTIVAMENTE DELLE AREE).

· ONDE DI PRESSIONE

RICORDIAMO IL SIGNIFICATO DEL NUMERO DI MACH, $Ma = \frac{u}{c}$:

$Ma < 0.3$	FLUSSO INCOMPRIMIBILE
$0.3 < Ma < 1$	FLUSSO SUBSONICO
$1 < Ma < 3.0$	FLUSSO SUPERSONICO
$Ma > 3.0$	FLUSSO IPERSONICO

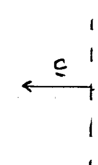
RISCRIVIAMO LE NOSTRE EQUAZIONI (TRALASCIAMO LE $\underline{f}$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho\, \underline{u} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{u} = - \underline{\nabla} P + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u}\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] = \underbrace{- \underline{\nabla} \cdot (P \underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\Sigma}}' \cdot \underline{u})}_{\underline{\nabla} \cdot (\underline{u} \cdot T)} + \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

IMMAGINO UN'ONDA DI PRESSIONE A VELOCITÀ c CHE INVESTE LA REGIONE DI FLUIDO CONSIDERATA $(\rho, u = 0, \theta, P)$ PROVOCANDO LE VARIAZIONI $(\rho + d\rho, du, \theta + d\theta, P + dP)$.



METTIAMOCI NEL CASO INVISCIDO $(\underline{\underline{\Sigma}}' = 0)$ E ADIABATICO $(\underline{q}, Q = 0)$. TROVIAMO L'EQUAZIONE DI EULERO

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho\, \underline{u} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{u} = - \underline{\nabla} P$$

MENTRE L'EQUAZIONE DEL BILANCIO ENERGETICO DIVENTA

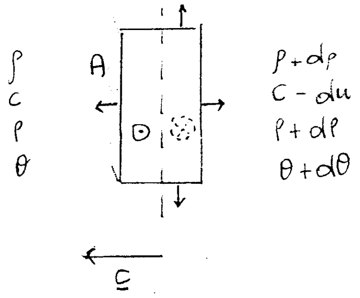
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u}\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] = - \underline{\nabla} \cdot (P \underline{u})$$

METTIAMOCI NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DELL'ONDA :

$$(\rho, c, P, \theta) \rightarrow (\rho + d\rho, c - du, P + dP, \theta + d\theta)$$

NOTA: AVENDO TRASCURATO I FLUSSI DI CALORE E I TERMINI DISSIPATIVI, IL PROCESSO È IN EFFETTI ISOENTROPICO.

INTEGRO QUINDI LA PRIMA NEL CASO STAZIONARIO,



$$\int \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})\,dV = 0 \qquad \text{INFATTI } \frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

$$\int \rho\,\underline{u}\cdot\hat{m}\,dS = 0 \qquad \text{TH. DI GREEN}$$

NEL SISTEMA DELL'ONDA, $\underline{u}=(c,0,0)$

$$\xrightarrow{\underline{u}}$$

$$-\rho c A + (c-du)(\rho+d\rho)A = 0$$

$$-\rho cA + \rho cA + cA\,d\rho - \rho\,du\,A - \underset{\sim\sim}{d\rho du}\,A = 0$$

$$du = c\,\frac{d\rho}{\rho} \qquad \underline{\frac{du}{c} = \frac{d\rho}{\rho}}$$

INTEGRIAMO L'EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (DI EULERO)

$$\rho\frac{\partial\underline{u}}{\partial t} + \rho\,\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u} = -\underline{\nabla}p$$

CHE RISCRIVIAMO IN FORMA CONSERVATIVA (USANDO LA CONS. MASSA)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{u}) - \underline{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\,\underline{u}\otimes\underline{u}) - \underline{u}\,\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}) = -\underline{\nabla}p$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{u}) + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}\underline{u}) = -\underline{\nabla}p$$

NOTA: QUESTA COSA SI PUÒ FARE CON UNA f GENERICA,

$$\rho\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}f)$$

SI PARLA ALLORA DI "FORMA CONSERVATIVA" (INFATTI OTTENGO L'EQUAZIONE DELLA MASSA SE $f=1$

NEL CASO STAZIONARIO IL PRIMO TERMINE È NULLO. INTEGRANDO SU V,

$$\int dV\ \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}\underline{u}) = -\int\underline{\nabla}p\,dV$$

$$\int\rho\,\underline{u}\underline{u}\cdot\hat{m}\,dS = -\int p\,\hat{m}\,dS$$

INFATTI

$$\underline{\nabla}p = \underline{\nabla}\cdot p\underline{\underline{I}} \qquad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}p\,\delta_{ij}$$

$$\int\underline{\nabla}p\,dV = \int p\,\underline{\underline{I}}\cdot\hat{m}\,dS \qquad \int\frac{\partial p}{\partial x_i}dV = \int p\,\delta_{ij}m_j\,dS = \int p\,m_i\,dS$$

HO OTTENUTO (IN FORMA INDICIALE)

$$\int\rho\,u_iu_jm_j\,dS = -\int p\,m_i\,dS$$

SI TRATTA DI TRE EQUAZIONI; LA PRIMA ($i=1 := x$) DÀ

$$\int \rho u_x u_j n_j \, dS = -\int P \, n_x \, dS$$

CONSIDERANDO CHE $\underline{u} = (u_x, 0, 0)$,

$$-\rho c^2 A + (\rho + d\rho)(c - du)^2 A = -\left[-PA + (P + dP)A\right]$$

$$-\rho c^2 A + \rho c^2 A - 2\rho c \, du \, A + \rho \, du^2 A + d\rho \, c^2 A - 2c \, d\rho \, du \, A + d\rho \, du^2 A = PA - PA - dPA$$

$$-2\rho c \, du + c^2 d\rho = -dP$$

UNENDOLA A $du = c \frac{d\rho}{\rho}$ OTTENGO

$$-dP = -2c^2 d\rho + c^2 d\rho = -c^2 d\rho$$

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

CONSISTENTE CON QUELLA NOTA $c = \sqrt{\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_S}$: INFATTI ABBIAMO CONSIDERATO UN FLUSSO ADIABATICO E TRASCURATO TUTTE LE VARIAZIONI CHE RENDONO IL PROCESSO IRREVERSIBILE, IL QUALE È QUINDI A TUTTI GLI EFFETTI ISOENTROPICO.

SE $dP > 0$ SI PARLA DI ONDA DI COMPRESSIONE. NE CONSEGUONO UN $d\rho > 0$ E UNA DIMINUZIONE DI VELOCITÀ ($c \to c - c\frac{d\rho}{\rho}$).

AL CONTRARIO SE $dP < 0$ HO UN' ONDA DI ESPANSIONE: LA VELOCITÀ AUMENTA (NEL SISTEMA DELL' ONDA!) E LA DENSITÀ DIMINUISCE.

RESTA DA UTILIZZARE

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{u^2}{2}\right) + \underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u} \left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] = -\underline{\nabla} \cdot (P \underline{u})$$

(SCRITTA IN FORMA CONSERVATIVA). NEL CASO STAZIONARIO,

$$\underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u} \left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u} \left(\frac{P}{\rho}\right)\right] = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u} \left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right)\right] = 0$$

REINTRODUCENDO L'ENTALPIA $h = e + \frac{p}{\rho} \left(= e + pv \right)$,

$$\underline{\nabla} \cdot \left[\rho \underline{u} \underbrace{\left(h + \frac{u^2}{2} \right)}_{h_0} \right] = 0 \qquad \underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{u} h_0 \right) = 0$$

NOTA: CON UN OCCHIO ALL'EQUAZIONE DI BERNOULLI, L'ENTALPIA TOTALE h_0 È QUELLA CHE OTTENGO FRENANDO IL FLUIDO ISOENTROPICAMENTE FINO A $u = 0$

POSSO QUINDI INTEGRARE I DUE MEMBRI OTTENENDO

$$\int \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} h_0) dV = \int \rho h_0 \, \underline{u} \cdot \hat{m} \, dS \equiv 0$$

$$-\rho h_0 c A + (\rho + d\rho)(h_0 + dh_0)(c - du) A = 0$$

$$-\rho h_0 c + \rho h_0 c + d\rho h_0 c + \rho dh_0 c + \underset{\sim}{d\rho dh_0} c - \rho h_0 du - \underset{\sim}{d\rho h_0 du} - \underset{\sim}{\rho dh_0 du} - \underset{\sim}{d\rho dh_0 du} =$$

$$c h_0 d\rho + \rho c dh_0 - \rho du h_0 = 0$$

USANDO ANCORA $du = c \frac{d\rho}{\rho}$,

$$\rho c dh_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{dh_0 = 0}$$

- <u>ONDE DI PRESSIONE IN UN GAS PERFETTO</u>

$$dh = c_p d\theta + (1 - \beta\theta) v dp \underset{\text{G.P.}}{=} c_p d\theta$$

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = \text{COST.}$$

INFATTI PER UN GAS PERFETTO $\beta = \theta^{-1}$.

ABBIAMO SEMPLICEMENTE RITROVATO LA COSTANZA DELL'ENERGIA TOTALE.

PRENDIAMO DUE PUNTI QUALSIASI NEL FLUIDO:

$\overset{1}{\cdot}$ $u_1, p_1, \theta_1, \rho_1$ $\qquad$ $\overset{2}{\cdot}$ $u_2, p_2, \theta_2, \rho_2$

$$h_{01} = h_{02}$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

SE IL PUNTO 2 HA $u_2 = 0$ ED È RAGGIUNGIBILE A PARTIRE DA 1 TRAMITE UNA TRASFORMAZIONE ISOENTROPICA,

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 =: h_0$$

CON h_0 ENTALPIA TOTALE.

PORTANDO ISOENTROPICAMENTE IL FLUIDO ALLA VELOCITÀ DEL SUONO LOCALE HO L'ENTALPIA CRITICA $h^* = h_0 - \frac{c^2}{2}$.

INOLTRE DA $h_0 = h$ DISCENDE (SEMPRE LUNGO UN'ISOENTROPICA)

$$c_p \theta_0 = c_p \theta + \frac{u^2}{2}$$

$$\frac{\theta_0}{\theta} = 1 + \frac{u^2}{2 c_p \theta}$$

RICORDANDO PER IL GAS PERFETTO

$$R = c_p - c_v \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

RISCRIVO

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \qquad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\frac{\theta_0}{\theta} = 1 + \frac{u^2(\gamma - 1)}{2 \gamma R \theta}$$

USANDO LE RELAZIONI PER L'ADIABATICA REVERSIBILE,

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = K \text{ (ISOENTROPICA)} \qquad \frac{p}{\rho} = R\theta \text{ (EQUAZIONE DI STATO)}$$

$$c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = K \gamma \rho^{\gamma - 1} = \gamma \frac{K \rho^\gamma}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma R \theta$$

$$\frac{\theta_0}{\theta} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{u^2}{c^2}\right) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\theta_0}{\theta} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

NOTO Ma LOCALE HO INFORMAZIONI SU θ. POSTO $Ma = 1$,

$$\Rightarrow \underline{\frac{\theta_0}{\theta^*} = \frac{\gamma + 1}{2}}$$

DOVE θ^* È LA TEMPERATURA CRITICA,

$$c_p \theta_0 = c_p \theta^* + \frac{c^2}{2}$$

NOTA: POICHÉ $Ma = \frac{u}{c}$, θ^* È LA TEMPERATURA A CUI SI EGUAGLIANO LA VELOCITÀ DEL SUONO E QUELLA DEL FLUIDO (VE NE SONO INFINITE, MA UNA SOLA È RAGGIUNGIBILE SEGUENDO UN'ISOENTROPICA

ONDE E TEMPERATURA

SI È VISTO CHE AL PASSAGGIO DI UN'ONDA DI COMPRESSIONE LE PARTICELLE SI SPOSTANO SEGUENDO L'ONDA,** MENTRE SE L'ONDA È DI ESPANSIONE SI OSSERVA UNA du IN DIREZIONE OPPOSTA A QUELLA DI PROPAGAZIONE (IL TUTTO SE OSSERVATO STAVOLTA IN UN SISTEMA "FERMO").

COSA FA LA TEMPERATURA? SI È VISTO CHE RESTA COSTANTE

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 = c_p\vartheta + \frac{1}{2}u^2$$

$$c_p\vartheta_1 + \frac{1}{2}c^2 = c_p\vartheta_2 + \frac{1}{2}(c-du)^2$$

$$c_p\vartheta_1 + \underset{\sim}{\frac{1}{2}c^2} = c_p\vartheta_2 + \underset{\sim}{\frac{1}{2}c^2} - c\,du$$

NOTA: RICAVALA NELLA FORMA $d\vartheta = \frac{c}{c_p}du$ E CONFRONTALA CON $\frac{du}{c} = \frac{d\rho}{\rho}$.

OVVERO

$$c_p\vartheta + \frac{c^2}{2} = c_p(\vartheta + d\vartheta) + \frac{1}{2}(c-du)^2$$

SI HA $\vartheta_2 > \vartheta_1$ SE $du > 0$, OSSIA SE HO UN'ONDA DI COMPRESSIONE ($d\rho > 0$); INVECE IL FLUIDO SI RAFFREDDA, $\vartheta_1 > \vartheta_2$, SE $du < 0$ (ONDA DI ESPANSIONE).

SI È VISTO PER LA VELOCITÀ DEL SUONO *

$$c = \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_s = \sqrt{\gamma R\vartheta} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

QUINDI SE ϑ È CRESCIUTA AUMENTA c. SE ORA MANDO UNA SECONDA ONDA, QUESTA RAGGIUNGERÀ LA PRIMA SCALDANDO ULTERIORMENTE IL FLUIDO. SE CONTINUO A MANDARE ONDE (DI COMPRESSIONE!), QUESTE SI IMPACCHETTANO (ONDA D'URTO). SI NOTI CHE NON ESISTONO ONDE D'URTO DI ESPANSIONE: DOPO IL LORO PASSAGGIO ϑ DIMINUISCE E COSÌ c.

*NOTA: SI È MOSTRATO QUESTO RISULTATO NEL CASO DEL GAS PERFETTO MA PIÙ IN GENERALE NEI CASI DA NOI CONSIDERATI SI HA CHE c CRESCE AL CRESCERE DI ϑ.

** NOTA: MICA LE ONDE TRASPORTAVANO "ENERGIA MA NON MATERIA"? SI PUÒ PENSARE CHE IN EFFETTI QUI TRASPORTI INFORMAZIONE, TRA CUI QUELLA SULLA VELOCITÀ u.

EQUAZIONE DELLE ONDE NEI FLUIDI

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

NOTA: TIENILA NELLA FORMA (VEDI SOTTO)

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

IPOTIZZO

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$p = p_0 + p'$$

$$u = u'$$

CON ρ_0, p_0 UNIFORMI (E STAZIONARI).

(SE PARTIVO DA FERMO)

SOSTITUENDOLE SOPRA, NELLA PRIMA HO

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho_0 + \rho')u_i'\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho' + \rho_0 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

(TRASCURO IL CONTRIBUTO $\rho' u_i'$ E RICORDO CHE ρ_0 E' UNIFORME)

NELLA SECONDA

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i' + \underset{\sim}{u_j'} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_0 + p')$$

NOTA: QUESTA VIENE MOLTO PIU' SEMPLICE SE SI EVITA DI DIVIDERE PER ρ L'EQUAZIONE DELL'IMPULSO.

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i}$$

SI DICE CHE HO LINEARIZZATO IL SISTEMA.

MI MANCA UNA RELAZIONE TRA p E ρ, CHE RICAVO SVILUPPANDO

$$p = p_0 + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \rho' = p_0 + c_0^2 \rho'$$

NOTA: CONFRONTANDOLA CON $p = p_0 + p'$ TROVO $p' = c_0^2 \rho'$.

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} = c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i}$$

RISOSTITUENDO HO OTTENUTO (ANCHE SENZA INDICE i NEL CASO 1D)

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i' + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0 \xrightarrow{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}u_i' + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \xrightarrow{\partial/\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' + \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i}u_i' = 0$$

DA CUI RICAVO L'EQUAZIONE DELLE ONDE

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' - c_0^2 \nabla^2 \rho' = 0$$

INOLTRE DALLA RELAZIONE

$$p' = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_0 \rho'$$

SI VEDE CHE ANCHE p' SEGUE L'EQUAZIONE DELLE ONDE. LO STESSO SI PUÒ DIRE DI $\underline{u}$ DERIVANDO AL CONTRARIO PER $\frac{\partial}{\partial t}$ E $\frac{\partial}{\partial x_i}$ LE RELAZIONI DI PRIMA: LA PERTURBAZIONE È ONDULATORIA IN TUTTE LE SUE VARIABILI.

È INUTILE

CERCHIAMO LA SOLUZIONE NEL CASO DI ONDA PIANA. RIDEFINISCO

$$\rho' = \rho_0 \varphi$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

SIA $\varphi(x,t) \to \varphi(\eta, \gamma)$ CON

$$\eta(x,t) = x - c_0 t$$

$$\gamma(x,t) = x + c_0 t$$

COSÌ CHE

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(-c_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(+c_0)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} c_0^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial \eta}(-c_0^2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \gamma}(-c_0^2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} c_0^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \gamma} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2}$$

NOTA: UN METODO ALTERNATIVO (ARFKEN, DA P. 404). CONSIDERA

$$\mathcal{L}\varphi = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi \equiv 0$$

SCEGLIENDO $s = ax + by$, $t = bx - ay$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = a\frac{\partial \varphi}{\partial s} + b\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b\frac{\partial \varphi}{\partial s} - a\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

E

$$\mathcal{L}\varphi = (a^2 + b^2)\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = f(t) = f(bx - ay)$$

LE CURVE A t COSTANTE NEL PIANO XY SI DICONO CARATTERISTICHE DI $\mathcal{L}$: SONO LE LINEE DI FLUSSO DI S CHE VARIA LUNGO LE ISO-t (E ISO-S $\perp$ ISO-t). NEL NOS CASO, φ È COSTANTE LUNGO LE ISO-t.

ORA

$$\left[a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi \equiv 0$$

PERCIÒ

$$\varphi_1 = f(bx - ay) \qquad \varphi_2 = g(bx + ay)$$

SONO DUE SOLUZIONI INDIPENDENTI.

QUI LE CARATTERISTICHE CHIAMALE Z E HAI

$$\Box \rho' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho' \quad \text{CON } s = t + cx,\ z = x - ct$$

(NELLA PRIMA, CON IL +)

SOSTITUENDO NELL' EQUAZIONE DELLE ONDE, LA MOLTIPLICAZIONE PER c_0^2 DEL SECONDO TERMINE COMPORTA DIVERSE SEMPLIFICAZIONI E MI RIMANE

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \, \partial \eta} = 0$$

LA SCRITTURA

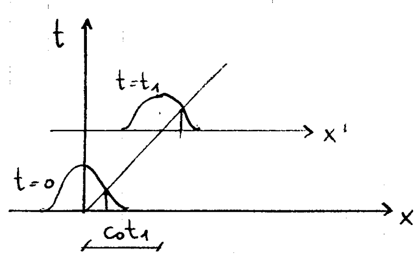
$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = F(\gamma)$$

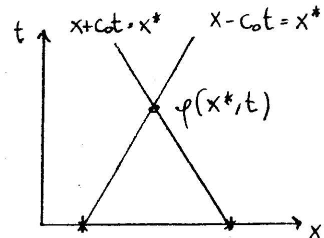
$$\varphi = f(\gamma) + g(\eta)$$
$$= f(x + c_0 t) + g(x - c_0 t)$$

SIA ALLORA

$$\varphi(x, t=0) = \hat{\varphi}(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

SPOSTANDOMI LUNGO LE CURVE $x + c_0 t$ O $x - c_0 t$ LA FUNZIONE φ SI MANTIENE COSTANTE.





PER LE ALTRE VARIABILI HO

$$P' = c_0^2 \rho' = c_0^2 \rho_0 \varphi$$

PERCIÒ P' SI COMPORTA ANALOGAMENTE A ρ', MENTRE PER $\underline{u}$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i' + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

INTEGRANDO E TENENDO CONTO DELLE C.I. $(u_i'(t=0) = 0)$

$$u_i' = -\frac{c_0^2}{\rho_0} \int_0^t \frac{\partial \rho'}{\partial x} \, dt' = -c_0^2 \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dt'$$

MA ERA

$$\varphi = f(x + c_0 t) + g(x - c_0 t) = f(\gamma) + g(\eta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{df}{d\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{dg}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{df}{d\gamma} + \frac{dg}{d\eta}$$

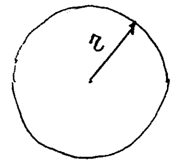
QUINDI ANCHE u' SI PROPAGA COME UN'ONDA IN QUANTO

$$u_1' = -c_0^2 \int_0^t \left(\frac{df}{d\gamma} + \frac{dg}{d\eta} \right) dt' = -c_0 \int_0^t \left(\frac{df}{d\gamma} \underbrace{c_0}_{\frac{d\gamma}{dt}} + \frac{dg}{d\eta} \underbrace{c_0}_{-\frac{d\eta}{dt}} \right) dt' = -c_0 \int_0^t \left(\frac{df}{dt} - \frac{dg}{dt} \right) dt'$$

$$= -c_0 \left[f(\gamma(t)) - g(\eta(t)) \right]$$

NOTA: COSÌ FACENDO NON HO SOLO MOSTRATO CHE u' È UN'ONDA, MA HO STABILITO UN LEGAME TRA LA SOLUZIONE SCELTA PER ρ' E QUELLA DI

- ONDE SFERICHE



$$\rho(r,t)\,,\quad \vartheta(r,t)\,,\quad P(r,t)\,,\quad u(r,t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

IN COORDINATE SFERICHE IL LAPLACIANO DIVENTA

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

CERCO LA SOLUZIONE PER LA FUNZIONE

$$\beta = r\varphi \qquad\qquad \varphi = \frac{\beta}{r}$$

NOTA: RICORDA CHE β SARÀ UN'ONDA PIANA E CHE
$\varphi = \frac{1}{r} \cdot$ (ONDA PIANA)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r}$$

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\beta + r \frac{\partial \beta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2}$$

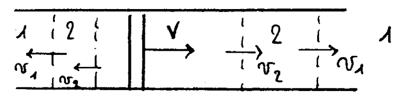
L'EQUAZIONE DELLE ONDE DIVENTA

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} = 0$$

$$\varphi = \frac{1}{r} \left[f(r + c_0 t) + g(r - c_0 t) \right]$$

ONDE D'URTO

IMMAGINO DI IMPRIMERE LA VELOCITÀ V AL PISTONE IN UN TUBO. NEL PASSARE DA 0 A V



IL PISTONE GENERA A DESTRA UN'ONDA DI COMPRESSIONE DI VELOCITÀ

$v_1 = a_1$

DEL SUONO NEL FLUIDO INDISTURBATO (STATO 1). DOPO IL PASSAGGIO DELL'ONDA IL FLUIDO SI TROVA NELLO STATO 2.

IMPRIMO UN SECONDO IMPULSO AL PISTONE E GENERO COSÌ UN'ONDA DI VELOCITÀ

$v_2 = a_2 + u_2$

DOVE u_2 È LA VELOCITÀ CON CUI SI STA MUOVENDO IL FLUIDO.

CHE RELAZIONE C'È TRA v_1 E v_2?

SAPPIAMO CHE

$a_2 > a_1 \quad , \quad \theta_2 > \theta_1$

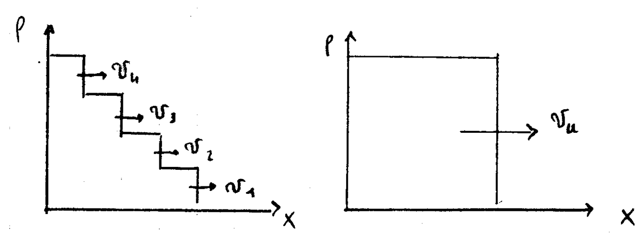
INOLTRE, SE L'ONDA È DI COMPRESSIONE, $u_2 > 0$, PERCIÒ

$v_2 > v_1$

CONTINUANDO A GENERARE ONDE LA PRESSIONE CRESCE GRADUALMENTE (DOPO IL PASSAGGIO DELL'ONDA IL FLUIDO PERMANE NELLO STATO ALTERATO). INOLTRE

$v_4 > v_3 > v_2 > v_1$

QUANDO L'ULTIMA ONDA RAGGIUNGE LA PRIMA SI PARLA DI ONDA D'URTO.



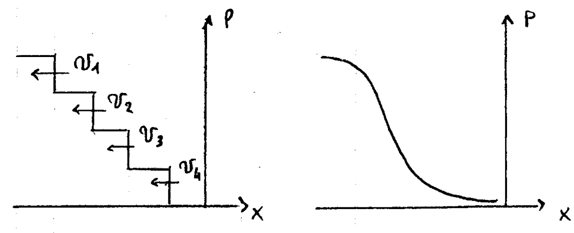
A SINISTRA DEL PISTONE HO UN'ONDA DI ESPANSIONE DI VELOCITÀ

$v_1 = a_1$

PROCEDENDO COME SOPRA,

$\theta_2 < \theta_1 \quad , \quad a_2 < a_1 \quad , \quad u_2 > 0$

$v_2 = a_2 - u_2 < v_1$

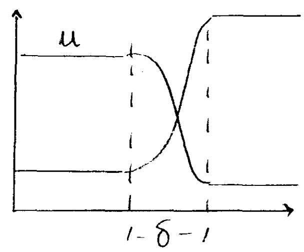


$v_1 > v_2 > v_3 > v_4$

OSSERVO CHE L'ONDA RISULTANTE TENDE AD ACCRESCERE LA SUA DIMENSIONE CARATTERISTICA NEL TEMPO. INOLTRE NON HO PIÙ LA "DISCONTINUITÀ" NEL CAMPO CHE OSSERVAVO NELLE ONDE DI COMPRESSIONE.

IN CHE STATO SI TROVA IL FLUIDO DOPO L'ONDA D'URTO? NELLA PRATICA NON POSSO RISALIRE ALL'INDIETRO PER STUDIARE LE SINGOLE ONDE CHE HO IMPACCHETTATO (BASTI PENSARE A UN CASO CONTINUO INVECE DEL NOSTRO ESEMPIO DISCRETO).

STUDIAMO INVECE IL FRONTE DELL'ONDA D'URTO.



FUORI DALLA ZONA δ VALGONO LE EQUAZIONI DI EULERO, MA NELLA ZONA δ (PER Re FISSATO) IL TERMINE $\nabla^2 \underline{u}$ NON È PIÙ TRASCURABILE:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{u}$$

LO STESSO VALE PER I TERMINI DIFFUSIVI CHE AVEVO TRASCURATO NEL DERIVARE L'EQUAZIONE DELLE ONDE. DEVO RIPARTIRE DALLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

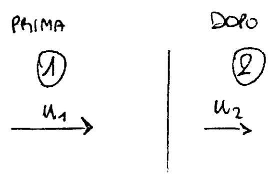
$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\Sigma}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \underline{\nabla} \cdot (\rho E \underline{u}) = -\underline{\nabla} \cdot (p \underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\Sigma}') - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

NOTA: $E = e + \frac{u^2}{2}$.

(FORZE DI MASSA ESTERNE NULLE E IN ASSENZA DI FONTI ESTERNE DI CALORE).

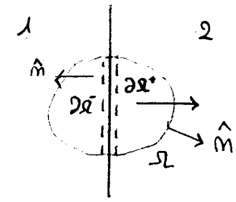
NOTO COMPLETAMENTE LO STATO 1, CERCO LO STATO 2.



NOTA: $|u_2| < |u_1|$. CONT
SOLO u RELATIVA AL FRON

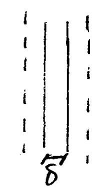
INOLTRE IPOTIZZO CHE I TERMINI CHE HO REINTRODOTTO RESTINO TRASCURABILI FUORI DALLA ZONA DELL'URTO, DOVE SUPPONGO CHE IL CAMPO SIA UNIFORME.

SCELTA UNA REGIONE Ω, NEL SISTEMA DELL'URTO (STAZIONARIO)



$$\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})\, dV = \int_{\partial\Omega} \rho\underline{u}\cdot\hat{m}\, dS \equiv 0$$

FACCIO COLLASSARE, AL LIMITE, IL VOLUME Ω SULLA ZONA TRATTEGGIATA:



$$\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u})\, dV = \int_{\partial\Omega^-} \rho\underline{u}\cdot\hat{m}\, dS + \int_{\partial\Omega^+} \rho\underline{u}\cdot\hat{m}\, dS$$

$$= (-\rho_1 u_{m1} + \rho_2 u_{m2})\cdot A$$

INDICANDO IL SALTO CON

$$[a]_1^2 = a_2 - a_1$$

HO OTTENUTO (u_m È LA COMPONENTE DI $\underline{u}$ NORMALE ALL'URTO)

$$[\rho u_m]_1^2 = 0$$

RIPETENDO PER LA SECONDA EQUAZIONE

$$\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}\otimes\underline{u})\, dV = -\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(P\,\mathrm{I})\, dV + \int_\Omega \underline{\nabla}\cdot\Sigma_1\, dV$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho\underline{u}\otimes\underline{u}\cdot\hat{m}\, dS = -\int_{\partial\Omega} P\hat{m}\, dS + \int_{\partial\Omega} \Sigma_1\cdot\hat{m}\, dS$$

MA $\partial\Omega$ STA FUORI DALL'URTO, QUINDI IL TERZO INTEGRALE È NULLO. PASSANDO ORA AL LIMITE (MA COMUNQUE FUORI DALL'URTO: A ME INTERESSA QUEL CHE AVVIENE PRIMA E DOPO L'URTO),

$$-\rho_1\underline{u}_1 u_{m1} + \rho_2\underline{u}_2 u_{m2} = +P_1\hat{m} - P_2\hat{m}$$

CON $\hat{m}$ LA NORMALE ALL'URTO (VERSO DESTRA). IL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO MI DÀ QUINDI

$$[\rho\underline{u}\, u_m + P\hat{m}]_1^2 = 0$$

CHE MOLTIPLICATA SCALARMENTE PER $\hat{m}$ O PER $\hat{\tau}$ DÀ IN COMPONENTI

$$[\rho u_m^2 + P]_1^2 = 0 \qquad\qquad [\rho u_\tau u_m]_1^2 = 0.$$

OVVERO, RICORDANDO

$$\rho_2 u_{m2} - \rho_1 u_{m1} = 0$$

$$-\rho_1 u_{\tau 1} u_{m1} + \rho_2 u_{\tau 2} u_{m2} = 0$$

DIVIDENDO PER $\rho_1 u_{m1}$ OTTENGO

$$[u_\tau]_1^2 = 0$$

OSSIA LA COMPONENTE TANGENZIALE DELLA VELOCITÀ RESTA INVARIATA DOPO L'URTO.

INFINE INTEGRO LA TERZA EQUAZIONE,

$$\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(\rho E \underline{u})\, dV = -\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(P\underline{u})\, dV + \int_\Omega \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}')\, dV - \int_\Omega \underline{\nabla}\cdot \underline{q}\, dV$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho E \underline{u}\cdot\hat{m}\, dS = -\int_{\partial\Omega} P\underline{u}\cdot\hat{m}\, dS + \int_{\partial\Omega} \underline{u}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}'\cdot\hat{m}\, dS - \int_{\partial\Omega} \underline{q}\cdot\hat{m}\, dS$$

RAGIONANDO COME PRIMA, GLI ULTIMI DUE INTEGRALI SONO NULLI PERCHÈ VALUTATI IN "SOLUZIONE ESTERNA" (LA "SOLUZIONE INTERNA" È LA REGIONE IN CUI CONTANO I TERMINI DIFFUSIVI). HO ALLORA

$$-\rho_1 E_1 u_{m1} + \rho_2 E_2 u_{m2} = P_1 u_{m1} - P_2 u_{m2}$$

$$-\rho_1 u_{m1}\left(E_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \rho_2 u_{m2}\left(E_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) = 0$$

NOTA: SI ERA DEFINITA L'ENTALPIA TOTALE (PRIMA ERA h_0) COME

$$H = h + \frac{u^2}{2} = e + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} = E + \frac{P}{\rho}$$

USANDO LA PRIMA RELAZIONE DI SALTO, DIVIDO PER $\rho_1 u_{m1}$ E HO

$$-H_1 + H_2 = 0 \quad \rightarrow \quad [H] = 0$$

OVVERO LA CONSERVAZIONE DELL'ENTALPIA TOTALE (BANALE IN ASSENZA DI FORZE O FONTI DI CALORE ESTERNE: L'ONDA SI LIMITA A TRASFORMARE ENERGIA TERMICA IN CINETICA O VICEVERSA)

SI SONO RICAVATE LE <u>RELAZIONI DI SALTO</u> (RANKINE HUGONIOT)

$$[\rho u_m] = 0$$

$$[\rho u_m^2 + P] = 0 \qquad [u_\tau] = 0$$

$$[H] = 0$$

URTO NORMALE IN UN GAS PERFETTO

$$p = \rho R \theta \qquad h = c_p \theta$$

NOTA: $dh = c_p d\theta$, MA POSSO FISSARE A ZERO LA COSTANTE.

E ABBIAMO 6 EQUAZIONI IN 6 INCOGNITE SE LE UNIAMO A

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ h_1 + \dfrac{u_1^2}{2} = h_2 + \dfrac{u_2^2}{2} \end{cases}$$

RISOLVIAMOLO INIZIANDO DALLA TERZA EQUAZIONE.

$$c_p \theta_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p \theta_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$$

NOTA: $R = c_p - c_v = c_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \dots$

$$\frac{\gamma R \theta_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R \theta_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

POICHÈ È

$$a = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S} = \sqrt{\gamma R \theta}$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

PORTANDO A ZERO ISOENTROPICAMENTE LA VELOCITÀ DEL FLUIDO,

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_{01}^2}{\gamma - 1}$$

NOTA: NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO "A TERRA" QUESTO SIGNIFICA ACCELERARE IL FLUIDO!

CON a_{01} VELOCITÀ DEL SUONO TOTALE (O DI RISTAGNO).

RIPETENDO IL RAGIONAMENTO PER IL FLUIDO DOPO L'URTO,

$$\frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{a_{02}^2}{\gamma - 1}$$

NOTA: LA CONSERVAZIONE DI a_0 NON È BANALE, PERCHÈ L'URTO IN GENERALE NON È ISOENTROPICO.

OSSIA PRIMA E DOPO L'URTO NON CAMBIA LA VELOCITÀ TOTALE:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \text{COST.}$$

$$a_{01} = a_{02} := a_0$$

SIMILMENTE SI CONSERVA LA TEMPERATURA TOTALE

$$\theta_{01} = \theta_{02}$$

(BENCHÈ CAMBI QUELLA STATICA, OSSIA QUELLA CHE MISURO CON UN TERMOMETRO SENZA AVER FRENATO ISOENTROPICAMENTE IL FLUIDO).

PORTANDO IL FLUIDO ISOENTROPICAMENTE IN UNA SITUAZIONE IN CUI ESSO E IL SUONO HANNO LA STESSA VELOCITÀ (ANCHE SOLO TEORICAMENTE

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_1^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a_1^{*2}}{2} = \frac{2+\gamma-1}{2(\gamma-1)} a_1^{*2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_1^{*2}$$

$$\frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{a_2^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a_2^{*2}}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_2^{*2}$$

SI PARLA DI VELOCITÀ DEL SUONO CRITICA.

POICHÈ SONO UGUALI I PRIMI MEMBRI DELLE DUE EQUAZIONI, DOPO L'URTO SI CONSERVA LA VELOCITÀ DEL SUONO CRITICA

$$\underline{\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}} \quad \left(= \frac{a_0^2}{\gamma-1}\right) \qquad a_1^* = a_2^* := a^*$$

RICORDANDO IL NUMERO DI MACH $M = \frac{u}{a}$, DEFINIAMO <u>MACH CRITICO</u>

$$M^* := \frac{u}{a^*}$$

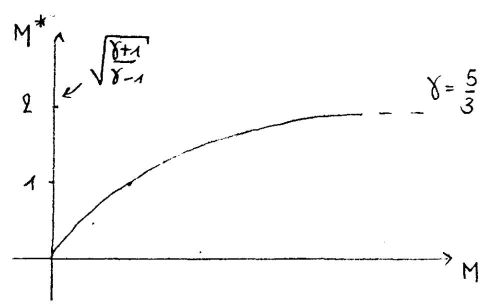
CERCO $M^* = M^*(M)$. SCRIVO IN GENERALE

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}$$

$$\frac{1}{M^2(\gamma-1)} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1}{M^{*2}}$$

$$2\frac{1}{M^2} + (\gamma-1) = (\gamma+1)\frac{1}{M^{*2}}$$

$$\underline{M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}}$$



SI HA QUINDI

$$M = 1 \qquad M^* = 1$$

$$M \to 0 \qquad M^* \to 0$$

$$M \to \infty \qquad M^* \to \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} > 1$$

TORNIAMO ALLE PRIME EQUAZIONI DEL SISTEMA.

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2$$

DIVIDENDO I DUE MEMBRI PER $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$,

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1 u_1} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2 u_2}$$

RICORDANDO

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad \left(= \sqrt{\gamma R \theta} \right)$$

$$u_1 + \frac{a_1^2}{\gamma u_1} = u_2 + \frac{a_2^2}{\gamma u_2}$$

NOTA: USA LA FORMA

$$\frac{1}{\gamma u_1}\left(\gamma u_1^2 + a_1^2\right) = \frac{1}{\gamma u_2}\left(\gamma u_2^2 + a_2^2\right)$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1$$

USIAMO LA RELAZIONE TROVATA (UNITA AL FATTO CHE $a_1^* = a_2^* := a^*$)

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}$$

NOTA: L'OBBIETTIVO È ELIMINARE a_1 E a_2.

NOTA: USA LA FORMA

$$a_1^2 = \frac{1}{2}\left[(\gamma+1)a^{*2} - (\gamma-1)u_1^2\right]$$

$$a_1^2 = \left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} - \frac{1}{2} u_1^2\right](\gamma-1)$$

E SIMILMENTE PER a_2^2. SOSTITUENDO SOPRA,

$$\frac{(\gamma+1)}{2\gamma}\frac{a^{*2}}{u_1} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_1 - \frac{(\gamma+1)}{2\gamma}\frac{a^{*2}}{u_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_2 = u_2 - u_1$$

$$\frac{(\gamma+1)}{2\gamma}\cdot\frac{a^{*2}}{u_1 u_2}(u_2 - u_1) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}(u_2 - u_1) = u_2 - u_1$$

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\frac{a^{*2}}{u_1u_2} = -\frac{\gamma-1}{2\gamma} + 1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma}$$

NOTA: IL FINALE SI FA COSÌ:
$\frac{1}{u_1}(u_1^2+a^{*2}) = \frac{1}{u_2}(u_2^2+a^{*2})$; $u_1 + \frac{a^{*2}}{u_1}\cdot\frac{u_2}{u_2} = u_2 + \frac{a^{*2}}{u_2}\cdot\frac{u_1}{u_1}$

E ABBIAMO OTTENUTO LA <u>RELAZIONE DI PRANDTL</u>

$$\frac{a^{*2}}{u_1u_2} = 1 \qquad a^{*2} = u_1u_2$$

CHE POSSO RISCRIVERE COME

$$M_1^* M_2^* = 1$$

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

NOTA: QUESTO È QUASI BANALE SE LO S
GUARDA DAL FRONTE DELL'URTO. DOPO L'ON
U AUMENTA NELLA DIREZIONE DEL FRONTE,
QUINDI DIMINUISCE U RELATIVA CHE È L'UN
AD AVERE SIGNIFICATO.

SE PRIMA DELL'URTO $M_1^* > 1$, DOPO È DI CERTO $M_2^* < 1$.
QUESTO DI PER SÈ NON DICE NULLA SUL FATTO CHE IL FLUSSO SIA SUPERSONICO; MA LA RELAZIONE TROVATA PRIMA CI DICE CHE

$$M_2^* < 1 \quad \Rightarrow \quad M_2 < 1$$

NOTA: OVVERO CHE M^* È UNA FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE DI M, CON $M^*(M=1) = 1$.

PER URTI NORMALI, SE IL FLUSSO PRIMA DELL'URTO È SUPERSONICO ALLORA DOPO L'URTO È SUBSONICO (E VICEVERSA SE PRIMA È SUBSONICO DOPO È SUPERSONICO, MA SU QUESTO RITORNEREMO). NON È VERO PER URTI NON NORMALI.

RICAVIAMO

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \qquad \text{(I)}$$

CHE CI DICE COME VARIA ρ DOPO L'URTO SULLA BASE DELLA CONOSCENZA DEL SOLO PARAMETRO M_1 PRIMA DELL'URTO:
ρ_2 È UNIVOCAMENTE DETERMINATO DA ρ_1 E M_1.
PER QUANTO RIGUARDA LA PRESSIONE,

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1^2\left(1 - \frac{\rho_2 u_2 u_2}{\rho_1 u_1 u_1}\right) = \rho_1 u_1^2\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)$$

O ANCHE, DIVIDENDO PER P_1,

$$\frac{P_2}{P_1} - 1 = \gamma \underbrace{\frac{\rho_1}{\gamma P_1}}_{1/a_1^2} u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = \gamma M_1^2 \left[1 - \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2}\right]$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(M_1^2 - 1\right) \qquad \text{(II)}$$

E SI HA

$M_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1$

$M_1 > 1 \quad \Rightarrow \quad P_2 > P_1$

CERCHIAMO INFINE COSA AVVIENE ALLA TEMPERATURA.

$$P = \rho R \theta$$

$$R\theta = \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

NOTA: $\frac{\theta_2}{\theta_1} = \gamma \frac{M_1^2}{M_1^{*4}} \left(M_1^{*2} - 1\right) > 1$ SE $M_1 > 1$.

NOTO PERÒ CHE SCEGLIENDO $M_1 < 1$ OTTENGO $\rho_2 < \rho_1$, OVVERO UN'ONDA DI ESPANSIONE! A IMPEDIRE LA CONTRADDIZIONE È IL LIMITE SULL'ENTROPIA: VEDIAMO QUINDI COME QUESTA CAMBIA DOPO L'URTO.

$$dh = de + P dv + v dP$$

NOTA: QUI L'OBBIETTIVO È SCRIVERE dS IN FUNZIONE DI $d\theta$ E dP.

$$\theta dS - P dv = de = dh - v dP - P dv$$

$$dS = c_p \frac{d\theta}{\theta} - \frac{v}{\theta} dP = c_p \frac{d\theta}{\theta} - \frac{R}{P} dP$$

$(Pv = R\theta, \; dh = c_p d\theta)$

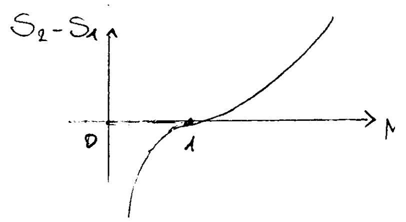
$$\int_1^2 dS = c_p \int_1^2 \frac{d\theta}{\theta} - R \int_1^2 \frac{dP}{P}$$

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{\theta_2}{\theta_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

I DUE ARGOMENTI DEI log DIPENDONO SOLO DA M_1, QUINDI QUESTA RELAZIONE INTRODUCE UN LIMITE SUL NUMERO DI MACH.

SI HA INFATTI

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}(M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + M_1^2(\gamma-1)}{(\gamma+1) M_1^2} \right] \right\}$$
$$- R \ln \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}(M_1^2 - 1) \right]$$



PERCIO'

$M_1 < 1$

NON E' FISICAMENTE AMMISSIBILE.

QUINDI IN REALTA' PER $M_1 < 1$ NON AVVIENE ALCUN URTO.

RICAPITOLANDO, IN UN URTO $M_1 \geq 1$ E SARANNO

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 1 \qquad \frac{\theta_2}{\theta_1} \geq 1 \qquad \frac{p_2}{p_1} \geq 1$$

NOTA: IN QUESTE E NELLE RELAZIO[NI] CHE SEGUONO L'UGUAGLIANZA E' ASSUNTA SOLO PER $M_1 = 1$.

CHE COSA FA, INFINE, LA PRESSIONE TOTALE?

FRENANDO IL FLUIDO ISOENTROPICAMENTE,

$$\theta_1 \to \theta_{01} \qquad \theta_2 \to \theta_{02}$$
$$p_1 \to p_{01} \qquad p_2 \to p_{02}$$
$$S_1 \to S_{01} = S_1 \qquad S_2 \to S_{02} = S_2$$

$$S_{02} - S_{01} = c_p \ln \frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} - R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \equiv S_2 - S_1 \geq 0$$

POICHE' $\theta_{02} = \theta_{01}$,

$$- R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} \leq 1$$

DOPO L'URTO LA PRESSIONE TOTALE DIMINUISCE.

QUESTO SANCISCE L'IRREVERSIBILITA' DEL SISTEMA. INFATTI

$S = S(p_0)$

SE p_0 VARIA IL SISTEMA NON E' ISOENTROPICO. PER QUANTO SI E' VISTO, p_0 NON VARIA SOLAMENTE NEL CASO LIMITE CON $M = 1$ (ONDA D'URTO INFINITESIMA E ISOENTROPICA, ANCHE

DETTA "ONDA DI MACH").

NEL LIMITE $M \to \infty$ SI PARLA INVECE DI "ONDA D'URTO FORTE".

URTO FORTE (TAYLOR - SEDOV)

$$M_1 = \frac{u_1}{a_1} = u_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma P_1}} \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2+(\gamma-1) M_1^2} = M_1^{*2} \qquad \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)$$

PERCIÒ PER $P_1, \theta_1 \to 0$, $M_1 \to \infty$. GUARDANDO ALLE RELAZIONI SOPRA,

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\lim_{M_1 \to \infty} P_2 = \lim_{\substack{M_1 \to \infty \\ P_1 \to 0}} P_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \right] = \lim_{\substack{M_1 \to \infty \\ P_1 \to 0}} P_1 \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]$$

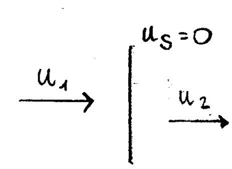
$$= \lim_{P_1 \to 0} P_1 \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma P_1} = \frac{2\rho_1 u_1^2}{\gamma+1}$$

SI SONO PERCIÒ TROVATI

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \to \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

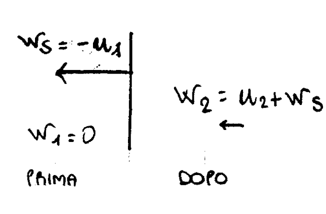
$$P_2 \to \frac{2\rho_1 u_1^2}{\gamma+1}$$

LE RELAZIONI TROVATE FINORA SONO STATE RICAVATE IN UN SISTEMA IN CUI L'URTO È FERMO. NEL SISTEMA IN CUI IL FLUIDO A VALLE (PRIMA) È FERMO ($w_1 = 0$), SCRIVO LE VELOCITÀ



$$w_S = -u_1$$

$$w_2 = u_2 - u_1 = u_2 + w_S$$



NOTA: VA TUTTO BENE. CHE IL FLUIDO NON FOSSE INIZIALMENTE FERMO NON È COSÌ IMPORTANTE ($v' = v - u_i$): CONTA u RELATIVA ED È $|u_2| < |u_1|$. INOLTRE SONO ONDE MECCANICHE: LE VELOCITÀ SI SOMMANO!

ALLORA

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \equiv \frac{w_2 - w_S}{-w_S} = 1 - \frac{w_2}{w_S}$$

$$w_2 = w_S \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = \frac{2 w_S}{\gamma+1}$$

SUPPONIAMO CHE ALL' ISTANTE t SIA RILASCIATA DELL' ENERGIA E IN UN VOLUME PICCOLO DELLO SPAZIO (ESPLOSIONE).

ρ_1 $\quad P_1, \theta_1 \to 0$ (TEMPERATURA E PRESSIONE BASSE RISPETTO A DOPO L' URTO)

SI GENERA (SE POSSO PENSARE IL RILASCIO DI ENERGIA PUNTIFORME) UN' ONDA D'URTO SFERICA E MI CHIEDO COME SI MUOVE IL FRONTE

$R = R(t)$

AVENDO PRESO COME CENTRO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO IL PUNTO IN CUI È AVVENUTA L' ESPLOSIONE. MI ASPETTO

$R = f(E, t, \rho_1)$

HO 4 GRANDEZZE FISICHE, 3 DIMENSIONI

$[R] = L \qquad [t] = T \qquad [\rho] = ML^{-3} \qquad [E] = ML^2 T^{-2}$

QUINDI PER IL TEOREMA DI BUCKINGHAM POSSO DESCRIVERE IL SISTEMA CON UNA SOLA QUANTITÀ ADIMENSIONALE:

$$L^\alpha T^\beta (ML^{-3})^\delta (ML^2 T^{-2})^\sigma \equiv L^0 M^0 T^0$$

$$\begin{cases} \alpha - 3\delta + 2\sigma = 0 \\ \beta - 2\sigma = 0 \\ \delta + \sigma = 0 \end{cases}$$

FISSO $\alpha = 1$ COSÌ CHE IN

$R^\alpha t^\beta \rho^\delta E^\sigma = K$

R ABBIA ESPONENTE UNITARIO. OTTENGO QUINDI

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2/5 \\ \delta = 1/5 \\ \sigma = -1/5 \end{cases}$$

DA CUI

$$R\, t^{-\frac{2}{5}} \rho^{\frac{1}{5}} E^{-\frac{1}{5}} = K$$

$$R = K \left(\frac{E t^2}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{5}} \equiv r_s$$

POSIZIONE DEL FRONTE D'ONDA.

DA CONSIDERAZIONI PURAMENTE DIMENSIONALI SI È VISTO CHE R È PROPORZIONALE A E E t E DECRESCE CON ρ_1; RESTA DA DETERMINARE LA COSTANTE K. POSSO INTANTO CALCOLARE

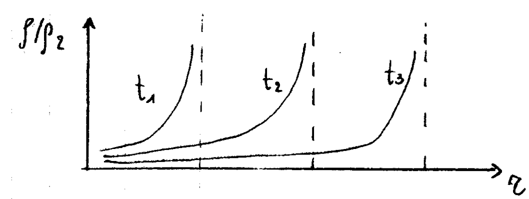
$$w_s = \frac{dr_s}{dt} = K \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{2}{5} \frac{t^{2/5}}{t} = \frac{2}{5} \frac{r_s}{t}$$

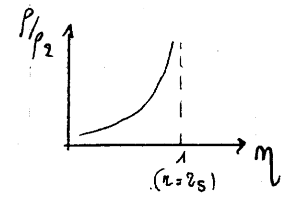
NOTA: CERCHEREMO CIOÈ LE AUTOFUNZIONI DI

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} w \\ p \\ \rho \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \mathcal{L}\begin{pmatrix} w \\ p \\ \rho \end{pmatrix} = r_s \begin{pmatrix} w \\ p \\ \rho \end{pmatrix}$$

CERCHIAMO LE COSIDDETTE SOLUZIONI AUTOSIMILI.

SE LA FORMA DELLE SOLUZIONI SI RIPETE NEL TEMPO, UNA OPPORTUNA NORMALIZZAZIONE FA COLLASSARE TUTTE LE SOLUZIONI SU DI UN SOLO RAMO.





NEL NOSTRO CASO BASTA DEFINIRE

$$r \rightarrow \eta = \frac{r}{r_s} \qquad \text{CON } \eta_s = 1 \qquad \eta \in [0,1]$$ (r VA DA ZERO AL FRONTE)

$$\rho(r,t) = \rho_2 A(\eta) \qquad \text{CON } A(\eta_s) = 1$$

(A: FUNZIONE DI FORMA)

QUI ρ_2, LA DENSITÀ SUBITO DOPO L'URTO, SERVE A DARE LA SCALA VERTICALE DEL PROBLEMA:

$$p(r,t) = p_2 P(\eta) \qquad \text{CON } P(\eta_s) = 1 \qquad p_2 = \frac{2\rho_1 w_s^2}{\gamma+1} \qquad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1$$

$$w(r,t) = w_2 V(\eta) \qquad \text{CON } V(\eta_s) = 1 \qquad w_2 = \frac{2 w_s}{\gamma+1}$$

SI NOTI CHE SONO PASSATO DA EQUAZIONI IN (r,t) ALLE DERIVATE PARZIALI A EQUAZIONI ORDINARIE NELLA SOLA VARIABILE η.

METTIAMOCI IN UNA SITUAZIONE DI URTO SFERICO E TRASCURIAMO I TERMINI VISCOSI (SUPPONIAMO CIOÈ PICCOLI I GRADIENTI DI VELOCITÀ, TEMPERATURA): POSSIAMO UTILIZZARE L'EQUAZIONE DI EULERO E LA CONSERVAZIONE DELL'ENTROPIA.

CERCHIAMO SOLUZIONI AUTOSIMILI DELLE EQUAZIONI DI NAVIER - STOKES.

IN GEOMETRIA SFERICA LE EQUAZIONI DEL BILANCIO SI SCRIVONO

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho u_r\right) = 0 \qquad {}^{*}\text{DA} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad \text{DA} \qquad \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u} = -\underline{\nabla} P$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r}\right) S = 0 \qquad \text{DA} \qquad \frac{DS}{Dt} = 0$$

SOSTITUENDO ρ, r, u ESPRESSE NEL NUOVO SISTEMA DI COORDINATE,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\rho_2 A(\eta) = \rho_2 \dot{A}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\rho_2 w_s}{r_s}\eta \dot{A}$$

NOTA*: PER RICORDARE $\underline{\nabla}\cdot$, RICORDA C
$\nabla^2 = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}$ E CHE IN COORDINATE SFERICHE
$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$, $\underline{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$$\eta = \frac{r}{r_s} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{r}{r_s^2}\frac{\partial r_s}{\partial t} = -\eta \frac{w_s}{r_s}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r) + \frac{2\rho u_r}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\rho_2 A(\eta) w_2 V(\eta)\right] + \frac{2\rho u_r}{r}$$

NOTA:
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u_r)$$

$$= \rho_2 w_2 \left(\dot{A}V + A\dot{V}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{2\rho u_r}{r} = \rho_2 w_2 \left(\dot{AV}\right)\frac{1}{r_s} + \frac{2\rho_2 w_2 AV}{\eta r_s}$$

MA

$$\frac{\rho_2 w_2}{r_s} = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} w_s \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{r_s} = \frac{2}{\gamma-1}\rho_1 \frac{w_s}{r_s}$$

NOTA: SI SONO USATE
$$w_2 = \frac{2w_s}{\gamma+1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

PERCIÒ

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r) + \frac{2\rho u_r}{r} = \frac{2}{\gamma-1}\rho_1 \frac{w_s}{r_s}\left\{ \left(\dot{AV}\right) + \frac{2AV}{\eta} \right\}$$

POICHÈ

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

NOTA: SCOPO DI QUESTI PASSAGGI È OTTENERE UN'EQUAZIONE NELLE SOLE A, V, β, η. VI SONO MODI MIGLIORI QUESTO PER OTTENERLO, GIOCACI UN PO

RICOMPONENDO I PEZZI OTTENGO L'EQUAZIONE PER LA MASSA

$$-\eta \dot{A} + \frac{2}{\gamma+1}\left(\dot{A}V + A\dot{V}\right) + \frac{4}{\gamma+1}\frac{AV}{\eta} = 0 \qquad \eta \in [0,1], \quad \begin{cases} A(1) = 1 \\ V(1) = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

NOTA $A(\eta)$,

$$\rho(r,t) = \rho_2 A(\eta) = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} A(\eta)$$

RISCRIVIAMO ALLO STESSO MODO

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

RICORDANDO

$$r_s = K\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5} \qquad w_2 = w_s \frac{2}{\gamma+1} \qquad w_s = \frac{dr_s}{dt} = \frac{2}{5}\frac{r_s}{t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{r_s} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\eta \frac{w_s}{r_s} \qquad t = \frac{2}{5}\frac{r_s}{w_s}$$

NOTA: E $\frac{1}{t} = \frac{5}{2}\frac{w_s}{r_s}$ ...

NOTA: SCOPO NON DICHIARATO DEL PROSSIMO PASSAGGIO È ISOLARE w_s^2/r_s. SI VEDE DOPO, QUINDI LASCIALO A METÀ E POI RIPRENDILO.

NOTA: IN QUESTO PASSAGGIO NON SOSTITUIRE w_s; ELIMINA SUBITO $\frac{1}{t}$.

OTTENGO PER IL PRIMO TERMINE

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[w_2 V(\eta)\right] = V \frac{\partial}{\partial t} w_2 + w_2 \dot{V}\left(-\eta \frac{w_s}{r_s}\right)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{2}{\gamma+1}\frac{\partial w_s}{\partial t} = \frac{2}{\gamma+1}\frac{2}{5}\left(\frac{1}{t}\cdot w_s - \frac{1}{t^2} r_s\right) = \frac{2}{\gamma+1}\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\frac{r_s}{t^2} - \frac{r_s}{t^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\gamma+1}\frac{6}{25}\frac{r_s}{t^2} = -\frac{2}{\gamma+1}\frac{6}{25}\frac{r_s}{\frac{4}{25}\frac{r_s^2}{w_s^2}} = -\frac{3}{\gamma+1}\cdot\frac{w_s^2}{r_s}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = V\left(-\frac{3}{\gamma+1}\cdot\frac{w_s^2}{r_s}\right) - \frac{2}{\gamma+1}\dot{V}\eta\frac{w_s^2}{r_s} = \frac{w_s^2}{r_s}\cdot\frac{1}{\gamma+1}\left(-3V - 2\dot{V}\eta\right)$$

IL SECONDO TERMINE DIVENTA

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = w_2 V \frac{\partial}{\partial r}\left(w_2 V\right) = w_2^2 V \frac{\partial V}{\partial r} = w_2^2 V \dot{V} \frac{1}{r_s}$$

$$= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2 \frac{w_s^2}{r_s} V\dot{V}$$

INFINE IL TERZO TERMINE DÀ

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2 A(\eta)}\frac{\partial}{\partial r} p_2 P(\eta) = \frac{p_2}{\rho_2 A}\dot{P}\frac{1}{r_s} = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 w_s^2 \cdot \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1 r_s\right)^{-1}\cdot\frac{\dot{P}}{A}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{W_s^2}{r_s}\frac{\dot{P}}{A}$$

RICOMPONENDO LE PARTI OTTENGO

$$\frac{1}{\gamma+1}\frac{W_s^2}{r_s}\left(-3V-2\dot{V}\eta\right)+\frac{4}{(\gamma+1)^2}\frac{W_s^2}{r_s}V\dot{V} = -\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{W_s^2}{r_s}\frac{\dot{P}}{A}$$

$$-3V-2\dot{V}\eta+\frac{4}{\gamma+1}V\dot{V} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{2\dot{P}}{A} \qquad (\mathrm{I}$$

E HO ANCORA UN' EQUAZIONE DIFFERENZIALE NELLA SOLA η.
IL SISTEMA NON È ANCORA CHIUSO PERCHÈ HO INTRODOTTO P;
USO ALLORA LA TERZA EQUAZIONE,

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u_r\frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

$$dS = c_p\frac{d\theta}{\theta}-R\frac{dp}{p}$$

NOTA: $h = e + pv$ E $dh = c_p\,d\theta$
INSIEME A $de = \theta dS - p dv$ E $pv = RT$

$$S = c_p\ln\theta - R\ln p + K$$

$$= c_p\ln\theta-(c_p-c_v)\ln p+K = c_p\ln\left(\frac{\theta}{p}\right)+c_v\ln p+K$$

$$\frac{p}{\rho} = R\theta\,,\quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$S = c_p\ln\left(\frac{1}{R\rho}\right)+c_v\ln p+K = c_p\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)+c_v\ln p+K'$$

$$= c_v\left(\gamma\ln\frac{1}{\rho}+\ln p\right)+K' = c_v\ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+K'$$

NOTA: QUI LO SCOPO ERA ELIMINARE θ E
PORTARE TUTTI I TERMINI DENTRO LO STESS
$\ln$ INTRODUCENDO COME UNICA COSTANTE γ

SOSTITUENDOLA OTTENGO

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

NOTA CHE È UNA DERIVATA
MATERIALE IN COORDINATE
SFERICHE.
PUOI ANCHE LIMITARTI A PORTARTI
DIETRO $\frac{D}{Dt}$.

$$\frac{1}{(p/\rho^\gamma)}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{p}{\rho^\gamma} = 0$$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}\right]p-\gamma\frac{\rho^\gamma}{\rho^{\gamma+1}}\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}\right]\rho = 0$$

E INFINE

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}\right]P-\gamma\frac{P}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_r\frac{\partial}{\partial r}\right]\rho=0$$

CALCOLO QUINDI

NOTA: RICICLA DA PRIMA

$$\frac{\partial w_s}{\partial t}=-\frac{3}{2}\frac{w_s^2}{r_s}$$

$$\dot{\eta}=-\eta\frac{w_s}{r_s}\;,\quad w_2=\frac{2w_s}{\gamma+1}\;(=u_r/V)$$

$$P_2=\frac{2\rho_1 w_s^2}{\gamma+1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1\left[2w_s\frac{\partial w_s}{\partial t}\mathcal{P}+w_s^2\dot{\mathcal{P}}\left(-\eta\frac{w_s}{r_s}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1\left[-2w_s\frac{3}{2}\frac{w_s^2}{r_s}\mathcal{P}-\frac{w_s^3}{r_s}\dot{\mathcal{P}}\eta\right]$$

$$=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1\frac{w_s^3}{r_s}\left(-3\mathcal{P}-\dot{\mathcal{P}}\eta\right)$$

$$u_r\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{2}{\gamma+1}w_s V\cdot\frac{2}{\gamma+1}\rho_1 w_s^2\dot{\mathcal{P}}\frac{1}{r_s}=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1\frac{w_s^3}{r_s}\left(\frac{2}{\gamma+1}V\dot{\mathcal{P}}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1\dot{A}\left(-\eta\frac{w_s}{r_s}\right)$$

$$u_r\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{2}{\gamma+1}w_s V\rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\dot{A}\frac{1}{r_s}$$

$$\gamma\frac{P}{\rho}=\gamma\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\rho_1 w_s^2\mathcal{P}\right)\cdot\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1 A\right)^{-1}=\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}w_s^2\frac{\mathcal{P}}{A}$$

RIMETTO INSIEME E HO

$$\frac{2}{\gamma+1}\rho_1\frac{w_s^3}{r_s}\left(-3\mathcal{P}-\eta\dot{\mathcal{P}}+\frac{2}{\gamma+1}V\dot{\mathcal{P}}\right)+\frac{2\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2}\frac{w_s^3}{r_s}\frac{\mathcal{P}}{A}\rho_1\left(-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\dot{A}\eta+\frac{2}{\gamma+1}\dot{A}V\right)=0$$

$$-3-\eta\frac{\dot{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}}+\frac{2}{\gamma+1}V\frac{\dot{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}}+\gamma\frac{\dot{A}}{A}\eta-\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\dot{A}V}{A}=0 \qquad \text{(III)}$$

SI È TROVATA COSÌ UNA TERZA EQUAZIONE ALLE DERIVATE ORDINARIE IN $A(\eta)$, $V(\eta)$, $\mathcal{P}(\eta)$. RICORDIAMO LE CONDIZIONI AL CONTORNO

$$A(1)=1,\quad V(1)=1,\quad \mathcal{P}(1)=1$$

ANCHE IN QUESTO CASO NON È NOTA UNA SOLUZIONE ANALITICA PER IL SISTEMA (NE ESISTE UNA, MA MUOVE DA PRESUPPOSTI DIVERSI ED È DIFFICILE).

RICAPITOLANDO:

$$-\eta \dot{A} + \frac{2}{\gamma+1}\left(\dot{A}V + A\dot{V}\right) + \frac{4}{\gamma+1}\cdot\frac{AV}{\eta} = 0 \qquad \text{CON} \begin{cases} A(\eta=1) = 1 \\ P(\eta=1) = 1 \\ V(\eta=1) = 1 \end{cases}$$

$$-2\eta\dot{V} - 3V + \frac{4V\dot{V}}{\gamma+1} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\frac{2\dot{P}}{A}$$

$$-3 - \frac{\dot{P}}{P}\eta + \frac{2}{\gamma+1}\cdot\frac{V\dot{P}}{P} + \gamma\eta\frac{\dot{A}}{A} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}V\frac{\dot{A}}{A} = 0$$

UN MODO DI PROCEDERE È DEFINIRE

$$z = \gamma\frac{P}{A}$$

MA LA SOLUZIONE È COMUNQUE COMPLICATA. CONVIENE ESPRIMERE

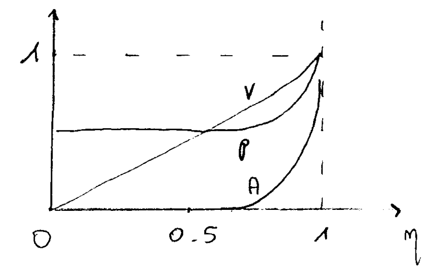
$\dot{A} = f(A, V, P)$ DENSITÀ

$\dot{P} = g(A, V, P)$ PRESSIONE

$\dot{V} = h(A, V, P)$ VELOCITÀ

E INTEGRARLA NUMERICAMENTE (CON UN METODO DEL II ORDINE).

SI TROVANO GLI ANDAMENTI A FIANCO.



DI FATTO LA MASSA SI CONCENTRA DIETRO L'URTO ($A(0) = 0$); LA PRESSIONE A ZERO VA A COSTANTE: È COME SE AVESSI UN NUCLEO SOLIDO "DENTRO" L'URTO, QUINDI L'AUMENTO DI PRESSIONE VA VERSO L'ESTERNO E FA SÌ CHE L'URTO CONTINUI A ESPANDERSI. INFINE $V(0) = 0$ (SIAMO IN SIMMETRIA SFERICA).

POSSIAMO RICONDURCI INFINE A

$$w(r,t) = w_2\, V(\eta)$$

$$\rho(r,t) = \rho_2\, A(\eta)$$

$$P(r,t) = P_2\, P(\eta)$$

NOTA: RICAVATI SUBITO QUESTE RELAZIONI E TIENILE SOTTO MANO MENTRE DERIVI LE TRE EQUAZIONI.

DOVE

$$w_2 = \frac{2}{\gamma+1} w_s \qquad w_s = \frac{2}{5}\frac{r_s}{t} \quad \text{E} \quad \frac{\partial w_s}{\partial t} = -\frac{3}{2}\frac{w_s^2}{r_s}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1 \qquad r_s = K\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5}$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 w_s^2 \qquad \eta = \frac{r}{r_s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\eta\frac{w_s}{r_s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{r_s}$$

MA QUANTO VALE K? AD OGNI t DEVE CONSERVARSI

$$E = \int_V \rho\left(e + \frac{w^2}{2}\right)dV = \int_0^\infty \rho\left(e+\frac{w^2}{2}\right)4\pi r^2\, dr = \int_0^{r_s} + \int_{r_s}^\infty$$

DOVE (RICORDANDO $R = c_p - c_v$, $\gamma = c_p/c_v$)

$$e = c_v\theta = \frac{R\theta}{\gamma-1} = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} \qquad \eta = \frac{r}{r_s}$$

POICHE' PRIMA DELL' URTO $p_1 \to 0, w_1 = 0$ (ERANO LE IPOTESI INIZIALI), SCRIVO

$$E = \int_0^{r_s} \rho\left(\frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{w^2}{2}\right)4\pi r^2\, dr \underset{r\to\eta}{=} \int_0^1 \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho w^2}{2}\right)4\pi r_s^3 \eta^2\, d\eta$$

$$= 4\pi r_s^3 \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\rho_1 w_s^2 P\right) + \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1 A \frac{4}{(\gamma+1)^2} w_s^2 V^2\right]\eta^2\, d\eta$$

$$= 4\pi r_s^3 w_s^2 \rho_1 \frac{2}{\gamma^2-1}\underbrace{\int_0^1 \left(P + AV^2\right)\eta^2\, d\eta}_{I} = 4\pi r_s^3 w_s^2 \rho_1 \frac{2}{\gamma^2-1}\cdot I$$

$$= \frac{32}{25}\pi \frac{\rho_1}{t^2}\cdot I \cdot \frac{r_s^5}{\gamma^2-1}$$

$$= \frac{32}{25}\pi\frac{\rho_1}{t^2}\frac{I}{\gamma^2-1}\cdot K^5\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right) = \frac{32}{25}\pi\frac{I}{\gamma^2-1}EK^5$$

RICAVIAMO

$$K = \left(\frac{32}{25}\pi I \frac{1}{\gamma^2-1}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

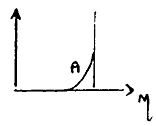
PER $\gamma = \frac{5}{3}$ SI OTTIENE $K \simeq 1{,}15$. SI NOTI CHE, COME ANTICIPATO, K È UNA COSTANTE (NON DIPENDE DA E, ρ, t, r_s PER COSTRUZIONE, MA A PRIORI SAREBBE POTUTA DIPENDERE DA η).

- ESPLOSIONE DI UNA SUPERNOVA

INIZIAMO RICHIAMANDO

$$r_S = K\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$w_S = \frac{2}{5}\frac{r_S}{t} \sim t^{-3/5} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$$



POSSIBILE CHE L'INFORMAZIONE ARRIVI PRIMA DELLA MATERIA? NO: DEDUCIAMO CHE LA NOSTRA TEORIA NON VALE NEGLI ISTANTI INIZIALI (SI ERA DERIVATA SEMPLIFICANDO NAVIER-STOKES). RICHIEDO INVECE

$$w_S \sim w_{EX}$$

NOTA: DICO "INFORMAZIONE" PERCHE' DI FATTO E' UN'ONDA.

LA TEORIA INIZIA QUINDI A VALERE QUANDO w_S E' DELL'ORDINE DELLA VELOCITA' w_{EX} CON CUI E' ESPULSA LA MATERIA. TIPICAMENTE

$$w_{EX} \simeq 10^4 \ Km/s$$

QUINDI LA TEORIA SI APPLICA A PARTIRE DAL TEMPO

$$t \simeq 70 \text{ ANNI}$$

(CALCOLATO IMPONENDO VALORI TIPICI DI E).

E' VERO CHE L'ENERGIA SI MANTIENE COSTANTE (VEDI PERDITE PER IRRAGGIAMENTO)?

E PER QUANTO VALE IL LIMITE DI URTO FORTE (P, V MOLTO PIU' BASSE PRIMA CHE DOPO L'URTO)?

RICORDO

$$P_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 w_S^2 = \frac{1}{\gamma+1}\frac{8}{25}\rho_1 K^2\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{5}} t^{-\frac{6}{5}}$$

PER

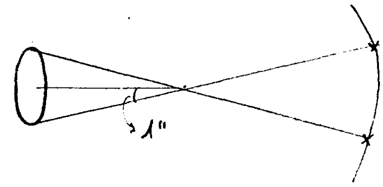
$$r_S = 300 \text{ pc} \quad \rightarrow \quad P_2 = 4\cdot 10^{-13}\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} = 4\cdot 10^{-14}\text{ Pa} = 4\cdot 10^{-19}\text{ atm}$$

OVVERO

$$t = 300\cdot 10^6 \text{ ANNI}$$

QUINDI (SECONDO LA TEORIA!) DOPO QUESTO t L'URTO NON E' PIU' FORTE.

SI RICORDA CHE



$$1\ pc = 3.26 \text{ ANNI LUCE} = 9.46 \cdot 10^{15}\ m$$

INOLTRE SUBITO DOPO L'URTO

$$\vartheta_2 = \frac{1}{R}\frac{P_2}{\rho_2} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{w_s^2}{R}$$

PER

$$t = 10^5 \text{ ANNI} \qquad r_s = 30\,pc \qquad \vartheta_2 = 2\cdot 10^5\ K$$

L'ENERGIA IRRADIATA È

$$E_{RAD} = 10^{51}\ erg = 10^{51}\ 10^{-7}\ J = 10^{44}\ J$$

LA BOMBA ATOMICA PIÙ POTENTE MAI COSTRUITA AVEVA ENERGIA

$$E = 57 \text{ MEGATONI} = 57 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{12}\ J \sim 10^{20}\ J$$

(E QUELLA SOPRA È SOLO L'1% DELL'ENERGIA TOTALE IRRADIATA SE TENGO CONTO DEI NEUTRINI).

DOPO L'URTO FORTE ENTRIAMO IN UN REGIME IN CUI SI MANTIENE COSTANTE L'IMPULSO ("REGIME SPAZZANEVE"):

$$q = \int_V \rho\, u\, dV$$

E SI HA

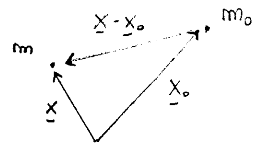
$$r_q = K' \left(\frac{q t}{\rho_1}\right)^{1/4} \qquad w_q = \frac{1}{4}\frac{r_q}{t}$$

FINITO QUESTO REGIME ENTRO IN QUELLO DI ONDA ACUSTICA.

CORPO AUTOGRAVITANTE

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}' + \rho \underline{f}$$

STUDIAMO IL CASO IN CUI $\underline{F}$ È QUELLA DI GRAVITÀ,



$m_0 \quad x_0$

$m \quad x$

$$\underline{F} = -\frac{G m m_0}{|\underline{x}-\underline{x}_0|^3}(\underline{x}-\underline{x}_0) = m \underline{g}$$

DOVE

$$\underline{g} = -\underline{\nabla}\varphi$$

$$\varphi = -\frac{G m_0}{|\underline{x}-\underline{x}_0|}$$

NOTA: φ COSÌ DEFINITO È UN POTENZIALE PER UNITÀ DI MASSA,

$$\underline{F} = -m\underline{\nabla}\varphi$$

$$\underline{f} = -\underline{\nabla}\varphi$$

ORA NON ABBIAMO CORPI PUNTIFORMI, MA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA

$$dm_0 = \rho(\underline{x}_0)\, dV_0$$

$$\varphi = \int_{V_0} d\varphi = \int_{V_0} -\frac{G\, dm_0}{|\underline{x}-\underline{x}_0|} = -\int_{V_0}\frac{G\rho(\underline{x}_0)\, dV_0}{|\underline{x}-\underline{x}_0|}$$

DEFINIAMO COME SEMPRE LA FORZA PER UNITÀ DI MASSA

$$\underline{f} = \frac{\underline{F}}{m} = -\underline{\nabla}\varphi(\underline{x})$$

RICORDANDO CHE

$$\nabla^2 \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0|} = -4\pi\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$$

$\left(-\frac{1}{4\pi|\Delta x|}\right.$ È LA FUNZIONE DI GREEN DI $\left.\mathcal{L} = \nabla^2\right)$, OTTENGO

$$\nabla^2\varphi = \nabla^2\int_{V_0} d\varphi = -\int G\rho(x_0)\,\nabla^2\left[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0|}\right]dV_0 = 4\pi G\int_{V_0}\rho(x_0)\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\, dV_0$$

$$= 4\pi G\rho(\underline{x})$$

HO ALLORA IL SISTEMA

$$\rho\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}' - \rho\underline{\nabla}\varphi \qquad \nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}) = 0$$

$$\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho}\underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\nabla}\underline{u} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla}\cdot\underline{q} + Q$$

NOTA: LA FORMA QUI USATA DELLA CONS. E SI RICAVA INSERENDO LA CONS. MASSA NELL' USUALE

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\underline{\nabla}\cdot\underline{u} + \underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\nabla}\underline{u} - \underline{\nabla}\cdot\underline{q} + \rho Q$$

NON RICAVARLA, USA DIRETTAMENTE QUESTA.

TRASCUREREMO IL TERMINE $\underline{\underline{\Sigma}}'$ (FLUIDO INVISCIDO).

UN MODO PER RISOLVERLO È ASSUMERE CHE ESISTA UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO E PERTURBARLA (ANALISI DELLE PERTURBAZIONI). SIANO

$$P = P_0(\underline{x}) \qquad \rho = \rho_0(\underline{x}) \qquad \varphi = \varphi_0(\underline{x}) \qquad \underline{u} = \underline{u}_0 = 0$$

(NON È DETTO CHE TALE CONDIZIONE ESISTA, PERÒ MI BASTA CHE IL SISTEMA VI RIMANGA PER UN PERIODO ABBASTANZA LUNGO).

L'EQUAZIONE DELLA MASSA È BANALE. QUELLA DI N-S DIVENTA

$$0 = -\underline{\nabla} P_0 - \rho_0 \underline{\nabla} \varphi_0 \qquad \text{(I)}$$

L'EQUAZIONE COSTITUTIVA PER φ DÀ

$$\nabla^2 \varphi_0 = 4\pi G \rho_0 \qquad \text{(II)}$$

E QUELLA PER L'ENERGIA

$$-\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \rho Q = 0$$

(I TRASFERIMENTI DI CALORE SONO TALI DA BILANCIARSI).

CONSIDERO UN VOLUME INFINITO E MI METTO IN GEOMETRIA SFERICA.

NOTA: STO INIZIANDO DALLA (II), IL CUI RISULTATO ANDRÀ INSERITO NELLA (I) DOPO AVER SPECIFICATO LA RELAZIONE TRA P_0 E ρ_0.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\right) = 4\pi G \rho_0$$

$$r^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = G \int_0^r 4\pi \rho_0(r)\, r^2\, dr = G\, m(r)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = \frac{G m(r)}{r^2}$$

E POICHÉ φ_0 DIPENDE SOLO DA r

$$\underline{\nabla} \varphi_0 = \frac{G\, m(r)}{r^2}\, \hat{e}_r$$

USANDOVI N-S E SOSTITUENDOVI QUANTO APPENA TROVATO,

$$\underline{\nabla} P_0 = -\rho_0 \frac{G\, m(r)}{r^2}\, \hat{e}_r$$

NON SAPENDO NULLA DI $\underline{q}$ E Q, MI METTO NEL LIMITE IN CUI I TEMPI DI PROPAGAZIONE DEL CALORE SONO MOLTO PIÙ BREVI DI QUELLI DI OSSERVAZIONE.

ADOTTO QUINDI IL LIMITE ISOTERMO (CASO PARTICOLARE DELLE POLITROPICHE $\frac{P}{\rho^\alpha} = \text{cost}$):

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R\theta}{\mu} = \text{COST.} := a_0^2$$

μ ↑ PESO MOLECOLARE MEDIO; a_0 ↑ VELOCITÀ DEL SUONO ISOTERMA.

NOTA: SI ERA VISTO, USANDO L'ADIABATICA, $a^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_S = \gamma \frac{P}{\rho}$. SE USO UNA POLITROPICA TROVO $a^2 = \alpha \frac{P}{\rho}$.

ALLORA

$$a_0^2 \nabla \rho_0 = -\rho_0 \frac{G m(r)}{r^2} \hat{e}_r$$

NOTA: USIAMO $P_0 = a_0^2 \rho_0$. SE IL PROBLEMA È A SIMMETRIA SFERICA, $\nabla \rho_0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \hat{e}_r$.

$$a_0^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = -\rho_0 \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho_0(r') r'^2 \, dr'$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_0^2 r^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[-G \int_0^r 4\pi \rho_0(r') r'^2 dr'\right] = -4\pi G \rho_0(r) r^2$$

SI È OTTENUTA

NOTA: IN PRATICA PRIMA DI CONTINUARE HO DOVUTO RISCRIVERE PER ESPLICITO $m(r)$, CHE NASCONDEVA UN'ALTRA ρ_0.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_0^2 r^2}{\rho_0(r)} \cdot \frac{\partial \rho_0(r)}{\partial r}\right) = -4\pi G \rho_0(r) r^2$$

CERCO SOLUZIONI NELLA FORMA

$$\rho_0 = A r^m$$

NOTA: DI FATTO STO CERCANDO UNA SOLUZIONE PER SERIE, DI CUI SOPRAVVIVERÀ UN SOLO TERMINE (METODO DI FROBENIUS).

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial r} = A r^{m-1} m \qquad \frac{r^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{r^2}{A r^m} m A r^{m-1} = m r$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE,

$$a_0^2 m = -4\pi G A r^{m+2}$$

PERCHÉ SIA VERIFICATA PER OGNI r, DEVONO VALERE

$$\begin{cases} m+2 = 0 \\ a_0^2 m = -4\pi G A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ A = \frac{a_0^2}{2\pi G} \end{cases}$$

HO TROVATO LA <u>CONDIZIONE DI EQUILIBRIO</u>

$$\rho_0(r) = \frac{a_0^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2} \qquad P_0 = \frac{a_0^4}{2\pi G} \frac{1}{r^2}$$

PERCHÉ ρ_0, P_0 HANNO UNA SINGOLARITÀ PER $r = 0$? IN REALTÀ L'IPOTESI DI SISTEMA ISOTERMO DECADE PER ρ_0, P_0 GRANDI. LA SINGOLARITÀ È MATEMATICA, INTRODOTTA DALLA SIMMETRIA SFERICA.

★ COSA SUCCEDE SE ORA PERTURBO L'EQUILIBRIO IDROSTATICO?

ESEMPIO: STELLE CEFEIDI, IL CUI RAGGIO VARIA PERIODICAMENTE E COSÌ LA SUA LUMINOSITÀ. QUESTO NON È DETTATO DA VARIAZIONI DELLE REAZIONI ALL'INTERNO DELLA STELLA; POSSO DESCRIVERE LA SITUAZIONE COME DELLE OSCILLAZIONI ATTORNO A UNO STATO DI EQUILIBRIO

$$P = P_0 + P' \qquad \rho = \rho_0 + \rho' \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi' \qquad \underline{u} = \underline{u}'$$

NOTA: A DIFFERENZA DI P_0, ρ_0, φ_0 LE PERTURBAZIONI SONO ANCHE FUNZIONI DI t.

LINEARIZZANDO IN QUESTO MODO LE EQ. DI N-S, PER LA MASSA HO

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \underline{\nabla} \cdot [(\rho_0 + \rho')\underline{u}'] = 0$$

TRASCURO I TERMINI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO, COME $\rho' \underline{u}'$.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot [\rho_0 \underline{u}'] = 0 \qquad \text{(I)}$$

PER L'IMPULSO

$$(\rho_0 + \rho')\left[\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underline{u}' \cdot \underline{\nabla}\underline{u}'\right] = -\underline{\nabla}(P_0 + P') - (\rho_0 + \rho')\underline{\nabla}(\varphi_0 + \varphi')$$

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -\underline{\nabla}(P_0 + P') - \rho_0 \underline{\nabla}(\varphi_0 + \varphi') - \rho' \underline{\nabla}\varphi_0 \qquad \underline{\nabla}P_0 + \rho_0 \underline{\nabla}\varphi_0 = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -\underline{\nabla}P' - \rho_0 \underline{\nabla}\varphi' - \rho' \underline{\nabla}\varphi_0 \qquad \text{(II)}$$

L'EQUAZIONE COSTITUTIVA DÀ

$$\nabla^2(\varphi_0 + \varphi') = 4\pi G(\rho_0 + \rho')$$
$$\nabla^2 \varphi' = 4\pi G \rho' \qquad \text{(III)}$$

SUPPONIAMO ORA INVECE CHE GLI SCAMBI DI CALORE AVVENGANO SU SCALE DI TEMPO MOLTO MAGGIORI DEI TEMPI DI OSSERVAZIONE (FLUSSI DI CALORE NULLI). SAPPIAMO CHE PER UNA POLITROPICA

$$\frac{P}{\rho^\alpha} = \text{cost.} \qquad \frac{dP}{\rho^\alpha} - \alpha\frac{P\,d\rho}{\rho^{\alpha+1}} = 0 \qquad \underline{\frac{dP}{P} = \alpha\frac{d\rho}{\rho}} \qquad \text{(IV)}$$

PRENDENDO LA DERIVATA MATERIALE DEI DUE MEMBRI E LINEARIZZANDO,

$$\frac{DP}{Dt} = \alpha \frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

NOTA: ABBIAMO APPLICATO IL LIMITE ISOTERMO ALLA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO E ORA VI SOVRAPPONIAMO DELLE FLUTTUAZIONI ADIABATICHE

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \underline{u}'\cdot\underline{\nabla} P_0 = \alpha \frac{P_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \underline{u}'\cdot\underline{\nabla}\rho_0\right)$$

METTIAMOCI NEL LIMITE ADIABATICO. DERIVANDO LA (II) RISPETTO A t

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = -\underline{\nabla} \frac{\partial P'}{\partial t} - \frac{\partial\rho'}{\partial t}\underline{\nabla}\varphi_0 - \rho_0\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = -\underline{\nabla}\frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{\partial\rho'}{\partial t}\frac{1}{\rho_0}\underline{\nabla} P_0 - \rho_0\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$

NOTA: FERMATI. IL SISTEMA DI EQUAZIONI È CHIUSO, MA I CONTI CHE SEGUONO NON PORTAN DA NESSUNA PARTE. TORNA ALLE EQUAZIONI (I), (II), (IV) E APPLICA LE SEMPLIFICAZIONI DI CUI SI PARLA TRA POCO ($\varphi'=0$, φ_0, ρ_0, P_0 UNIFORMI); LAVORA SU QUELLE E RICAVA L'EQUAZIONE DELLE ONDE PER $\underline{u}'$, POI PER ρ'.

NEL CASO ADIABATICO $\alpha=\gamma$; PER QUANTO VISTO SOPRA E PER LA (I)

$$dP = \frac{\gamma P}{\rho}\, d\rho$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \underline{u}'\cdot\underline{\nabla} P_0 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\underline{u}'\cdot\underline{\nabla}\rho_0\right) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\left[-\underline{\nabla}\cdot(\rho_0 \underline{u}') + \underline{u}'\cdot\underline{\nabla}\rho_0\right]$$

RICAVO $\dot{P}'$ E LO SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE SOPRA,

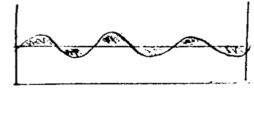
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = -\underline{\nabla}\left[-\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\underline{\nabla}\cdot(\rho_0\underline{u}') + \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\underline{u}'\cdot\underline{\nabla}\rho_0 - \underline{u}'\cdot\underline{\nabla}P_0\right] - \frac{1}{\rho_0}\underline{\nabla}\cdot(\rho_0\underline{u}')\underline{\nabla}P_0 - \rho_0\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = -\underline{\nabla}\left[-\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\rho_0\underline{\nabla}\cdot\underline{u}' - \underline{u}'\cdot\underline{\nabla}P_0\right] - \frac{1}{\rho_0}\underline{\nabla}\cdot(\rho_0\underline{u}')\underline{\nabla}P_0 - \rho_0\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = \underline{\nabla}\left[\gamma P_0\underline{\nabla}\cdot\underline{u}' + \underline{u}'\cdot\underline{\nabla}P_0\right] - \frac{1}{\rho_0}\underline{\nabla}\cdot(\rho_0\underline{u}')\underline{\nabla}P_0 - \rho_0\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$ (QUESTO È INUTILE)

$$\frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\underline{\nabla}\left[\gamma P_0\underline{\nabla}\cdot\underline{u}' + \underline{u}'\cdot\underline{\nabla}P_0\right] - \frac{1}{\rho_0^2}\underline{\nabla}\cdot(\rho_0\underline{u}')\underline{\nabla}P_0 - \underline{\nabla}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}$$

CHE SI PUÒ RISOLVERE SE COSTATIAMO (ES.: BACINELLA D'ACQUA - FERMA - SCOSSA)



$$\varphi' = -\int_{V_0}\frac{G\rho'(x_0)}{|\underline{x}-\underline{x}_0|}\,dV_0 \sim 0$$

(È ANALOGO A CALCOLARE LA MEDIA DELLE FLUTTUAZIONI ATTORNO A UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO).

IN GENERALE È POSSIBILE DEFINIRE L'EQUILIBRIO COME LAGRANGIANO O EULERIANO,

$\rho'(\underline{x},t) \leftarrow$ FLUTTUAZIONI LAGRANGIANE (QUELL'INTEGRALE NON FA ZERO!)

$\rho'(\underline{x}_0,t) \leftarrow$ È QUESTO IL NOSTRO CASO (FLUTTUAZIONE EULERIANE)

NOTA: È VERO PERÒ CHE $\langle \rho'(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \rho'(\underline{x},t) = 0$

AGGIUNGIAMO COME ULTERIORE IPOTESI SEMPLIFICATIVA L'OMOGENEITÀ DI P_0, ρ_0, φ_0 (NON DIPENDONO DALLO SPAZIO). OTTENGO

$$\frac{\partial^2 \underline{u}'}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla^2 \underline{u}' \equiv c_0^2 \nabla^2 \underline{u}'$$

INFATTI,
$\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}') = \nabla^2 \underline{u}' + \underline{\nabla}\wedge\underline{\nabla}\wedge\underline{u}'$
MA PER NOI $\underline{\nabla}\wedge\underline{u}' = 0$.

ORA CONSIDERO NUOVAMENTE LA (II), CHE DIVENTA

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -\underline{\nabla} P' - \rho' \underbrace{\underline{\nabla}\varphi_0}_{\varphi_0 \text{ OMOGENEO}} - \rho_0 \underbrace{\underline{\nabla}\varphi'}_{\varphi'=0}$$

NOTA: SE CONSIDERO LA (III) HO
$\nabla^2\varphi' = 4\pi G \rho' \overset{?}{\Rightarrow} \rho' = 0$
IL DUBBIO SI RISOLVE RICORDANDO CHE ABBIAMO TRONCATO AL PRIMO ORDINE, QUINDI NON È DETTO CHE $\nabla^2\varphi' = 0$.

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -\underline{\nabla} P'$$

DIFFERENZIANDO $\frac{P}{\rho^\alpha} = K$, TRALASCIANDO I TERMINI DEL SECONDO ORDINE

$$\underline{\nabla} P' = \frac{\alpha P_0}{\rho_0} \underline{\nabla} \rho'$$

RIPRENDENDO L'EQUAZIONE (I) DELLA MASSA HO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -\dfrac{\alpha P_0}{\rho_0} \underline{\nabla}\rho' \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \underline{\nabla}\cdot\underline{u}' = 0 \end{cases}$$

INFATTI $\underline{u}'\cdot\underline{\nabla}\rho_0 = 0$.

PRENDO LA DIVERGENZA DELLA PRIMA,

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}') = -\frac{\alpha P_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho'$$

E DERIVO LA SECONDA RISPETTO A t, SOSTITUENDO QUANTO TROVATO:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \left(\frac{\alpha P_0}{\rho_0}\right) \nabla^2 \rho'$$

E HO TROVATO L'EQUAZIONE DELLE ONDE, DI CUI CERCO UNA SOLUZIONE

$$\rho' = A e^{i(\omega t + \underline{k}\cdot\underline{x})}$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \underline{k}\cdot\underline{x})}$$

$$\nabla^2 \rho' = -A|\underline{k}|^2 e^{i(\omega t + \underline{k}\cdot\underline{x})}$$

SOSTITUENDO OTTENGO LA RELAZIONE DI DISPERSIONE

$$\omega^2 = c_0^2 |\underline{k}|^2$$

NEBULOSE

NEL CASO APPENA VISTO (ρ_0 OMOGENEO) NON AVRÒ MAI DEI PUNTI DI AGGREGAZIONE. IPOTIZZIAMO QUINDI DELLE FLUTTUAZIONI LAGRANGIANE: RIMETTIAMO IN CONTO CHE φ' POSSA ESSERE NON NULLO.

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \underline{u}'}{\partial t} = -\underline{\nabla} p' - \rho_0 \underline{\nabla}\varphi' \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \underline{\nabla}\cdot\underline{u}' = 0 \end{cases}$$

NE PRENDO LA DIVERGENZA

LA DERIVO IN ∂t

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}') = -\nabla^2 p' - 4\pi G \rho' \rho_0$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} f = \nabla^2 f$$

$$\nabla^2 \varphi' = 4\pi G \rho'$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 p' + 4\pi G \rho' \rho_0$$

$$\nabla^2 p' = \frac{p_0}{\rho_0}\nabla^2 \rho' \quad \text{(CASO ISOTERMO}$$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{p_0}{\rho_0}\nabla^2 \rho' + 4\pi G \rho_0 \rho'$$

NOTA: È UNA CACCHIO DI ONDA AUTOALIMENTANTE!

SOSTITUENDO ANCORA

$$\rho' = A e^{i(\omega t + \underline{k}\cdot\underline{x})}$$

OTTENGO

$$-\omega^2 A = -\frac{p_0}{\rho_0}|\underline{k}|^2 + 4\pi G \rho_0 A$$

DETTA $c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0}$ (VELOCITÀ DEL SUONO ISOTERMA),

$$\omega^2 = c_0^2 |\underline{k}|^2 - 4\pi G \rho_0$$

ω È REALE O È IMMAGINARIO? SE NON FOSSE REALE,

$$\rho' = A e^{i(\omega t + \underline{k} \cdot \underline{x})}$$

PUÒ DIVERGERE. VERIFICO CHE ω È REALE SE

NOTA: SE ρ' DIVERGE VUOLE DIRE CHE C'È STATA CONDENSAZIONE.

$$c_0^2 |\underline{k}|^2 - 4\pi G \rho_0 \geq 0$$

SI DICE NUMERO D'ONDA DI JEANS

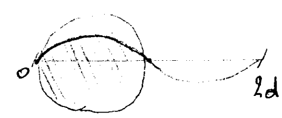
$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{c_0^2}}$$

PER $k > k_J$ HO FLUTTUAZIONI STABILI, MA PER $k < k_J$ SONO INSTABILI.

IN UNO SPAZIO FINITO, HO UN LIMITE SULLE POSSIBILI λ DEL SISTEMA:

$$\lambda_{MAX} = 2 \cdot d$$

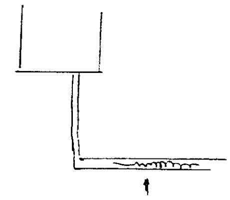
DIMENSIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA.



QUINDI PER SISTEMI ABBASTANZA GRANDI POSSO AVERE $\lambda > \lambda_J$; HO ALLORA SOLUZIONI INSTABILI E SONO QUESTE A PERMETTERE LA FORMAZIONE DI AGGLOMERATI.

QUANDO SI COMINCIA A NUCLEARE IL SISTEMA NON È PIÙ TRASPARENTE ALL'IRRAGGIAMENTO (L'ENERGIA PRODOTTA VI RIMANE IN PARTE) E IL MODELLO CAMBIA (NON PIÙ ISOTERMO, MA ADIABATICO).

<u>TURBOLENZA</u>

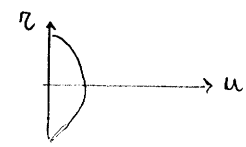


REYNOLDS: ESPERIMENTO DEL LIQUIDO CHE SCORRE IN UN TUBO. INIETTA AL CENTRO DEL TUBO DELL' INCHIOSTRO. REGOLANDO L'ALTEZZA CAMBIA ∇P, QUINDI LA PORTATA, INSOMMA IL NUMERO DI REYNOLDS

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}$$

MAN MANO CHE SI ALZA Re, SI SPOSTA VERSO SINISTRA IL PUNTO IN CUI SI HA TRANSIZIONE TRA FLUSSO LAMINARE E TURBOLENTO.

IL MOTO DIVENTA DISORDINATO (DIFFUSIONE TURBOLENTA, CONTRO LA DIFFUSIONE MOLECOLARE MOLTO PIÙ LENTA).
DI NOTTE LA TRANSIZIONE AVVIENE MOLTO DOPO: PERCHÈ?
L'ANDAMENTO PARABOLICO DI $\underline{v}$ È STABILE PER QUALSIASI Re; LA TRANSIZIONE INIZIA SOLO SE C'È UNA FLUTTUAZIONE DI $\underline{v}$, CHE SI PROPAGA. E REYNOLDS VIVEVA IN UNA ZONA IN CUI PASSAVANO CARROZZE...



IL PASSAGGIO È DOVUTO UNICAMENTE AL <u>TERMINE NON LINEARE</u> DELLE EQUAZIONI DI N-S ($\underline{u} \cdot \nabla \otimes \underline{u}$ NELLA DERIVATA MATERIALE).

SI SONO VISTE PER LE ONDE D'URTO (DISCONTINUITÀ IN UN FLUSSO LAMINARE) LE RELAZIONI DI SALTO, LA CUI VALIDITÀ È PIÙ GENERALE:

$$[\rho u_m] = 0$$
$$[\rho u_m^2 + P] = 0$$
$$[\rho u_m u_\tau] = 0$$
$$[\rho u_m H] = 0$$

SE CONSIDERIAMO UN FLUSSO CON $u_m = 0$, AVREMO PERÒ SOLTANTO

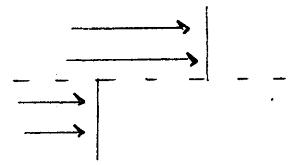
$$[P] = 0$$

A PRODURRE IL SALTO PUÒ ESSERE ALLORA:

1) DISCONTINUITÀ DI CONTATTO (STABILE, FLUSSO STRATIFICATO)

$\rho_1 \neq \rho_2 \qquad u_{\tau_1} = u_{\tau_2}$

2) $u_{\tau_1} \neq u_{\tau_2}$, SITUAZIONE INSTABILE



A Re FISSATO, PRIMA DELLA TRANSIZIONE MISURO SEMPRE LA STESSA u_{τ_1} NELLO STESSO PUNTO; SE RIPETO DOPO LA TRANSIZIONE, SCOPRO CHE QUESTA VARIA MOLTO DI PIÙ. LA TURBOLENZA AMPLIFICA INFATTI OGNI FLUTTUAZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO (DOVUTE AL TERMINE $\underline{f}$, MA ANCHE CONTROLLANDO QUELLA PUÒ VARIARE L'ALTEZZA ENTRO UN CERTO RANGE, PER QUANTO PICCOLO, E COSÌ VIA). UN SOLO ESPERIMENTO NON BASTA: PER DESCRIVERE LA TURBOLENZA MI SERVE UNA DESCRIZIONE STATISTICA. MISURIAMO

$u_i^{(m)} \qquad m = 1, 2, \ldots N$ ESPERIMENTI

$\bar{u}_i = \dfrac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_i^{(m)}$ VALOR MEDIO

$u_i'^{(m)} =: u_i' = u_i^{(m)} - \bar{u}_i$ FLUTTUAZIONE

$\langle u_i' \rangle = 0$

$u_i = \bar{u}_i + u_i'$
DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS.

LE $u_i^{(m)}$ OBBEDISCONO ALLE EQUAZIONI DI N-S. A CHI OBBEDISCE IL CAMPO MEDIO $\bar{u}_i$?

LIMITIAMOCI INNANZITUTTO AL CASO INCOMPRIMIBILE (IL CASO COMPRIMIBILE È ANCORA OGGI IRRISOLTO). RISCRIVIAMO ALLORA

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad \text{(II)}$$

SOSTITUIAMO A u_i LA SUA DECOMPOSIZIONE.

NOTA: POICHÉ IL FLUSSO CONSIDERATO È INCOMPRIMIBILE, PONIAMO PER SEMPLICITÀ $\rho = 1$.

SI HA PER LA PRIMA EQUAZIONE

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_i + u_i') = 0$$

MA

$$\langle \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle = \frac{1}{N}\sum_m^{'} \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_N}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(g_1 + g_2 + \dots + g_N)$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_m^{'} g_m = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle g \rangle$$

NOTA: OVVERO DISCENDE DALLA PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DELL'OPERAZIONE DI DERIVATA.

REGOLA CHE QUI APPLICATA DÀ

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_i + u_i') \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \bar{u}_i + u_i' \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle \bar{u}_i \rangle + \overset{0}{\langle u_i' \rangle}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{u}_i \equiv 0$$

SE IL CAMPO DI PARTENZA È SOLENOIDALE, ALLORA ANCHE LA SUA MEDIA HA DIVERGENZA NULLA.

PER LA SECONDA,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - u_i \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{} = 0 \quad \text{(IL CAMPO È SOLENOIDALE)}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

SOSTITUENDO LA DECOMPOSIZIONE E MEDIANDO,

$$\langle \frac{\partial u_i}{\partial t} \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle \bar{u}_i + u_i' \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_i$$

SIMILMENTE PER P E IL LAPLACIANO. IL TERMINE NON LINEARE DÀ

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j') \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle + \langle u_i' \bar{u}_j \rangle + \langle \bar{u}_i u_j' \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j + \langle u_i' u_j' \rangle)$$

HO OTTENUTO PER L'EVOLUZIONE DEL CAMPO MEDIO $\underline{u}_i$ IL SET

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \bar{u}_j + \langle u_i' u_j' \rangle\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \bar{u}_i \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

CHE SONO ANCORA 4 EQUAZIONI, MA SONO AUMENTATE LE INCOGNITE AVENDO AGGIUNTO IL TERMINE DI CORRELAZIONE

$u_i' u_j'$

DETTO <u>TENSORE DEGLI STRESS DI REYNOLDS</u>.

CERCHEREMO DI SCRIVERE

$$(u_i' u_j') = f(\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{p}, \nu)$$

CHE È UN'ASSUNZIONE FORTE, MA ALTRIMENTI ANDIAMO INCONTRO AL <u>PROBLEMA DELLA CHIUSURA</u> (NUMERO DI INCOGNITE CHE CRESCE).

PER VEDERLO, CERCHIAMO COME SI EVOLVONO LE FLUTTUAZIONI u_i' E u_j'.

$$u_i' = u_i - \bar{u}_i$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

OSSIA ANCHE u_i' È SOLENOIDALE. ANCHE PER LA SECONDA EQUAZIONE MI BASTA SOTTRARRE QUELLE PER u_i E $\bar{u}_i$. ANALIZZIAMO L'UNICO TERMINE NON BANALE (QUELLO NON LINEARE):

NOTA: SCRIVO α PERCHÈ POI RIPETERÒ PER u_j'.

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_\alpha + u_\alpha') - \bar{u}_i \bar{u}_\alpha - \langle u_i' u_\alpha' \rangle\right] \quad \left(= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_i u_\alpha) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_i \bar{u}_\alpha + \langle u_i' u_\alpha' \rangle)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\bar{u}_i \bar{u}_\alpha + u_i' \bar{u}_\alpha + \bar{u}_i u_\alpha' + u_i' u_\alpha' - \bar{u}_i \bar{u}_\alpha - \langle u_i' u_\alpha' \rangle\right]$$

RISCRIVO

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i' + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_i' \bar{u}_\alpha + \bar{u}_i u_\alpha' + u_i' u_\alpha' - \langle u_i' u_\alpha' \rangle\right)}_{\uparrow} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \qquad (I)$$

NOTA: CHIAMALO A_i E PORTATELO DIETRO PER UN PO'.

E SIMILMENTE

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_j'\bar{u}_\alpha + \bar{u}_j u_\alpha' + u_j' u_\alpha' - \langle u_j' u_\alpha' \rangle\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \qquad (\mathrm{II})$$

FACENDO $u_j'\,\mathrm{I} + u_i'\,\mathrm{II}$ OTTENGO

$$u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u_i' u_j')$$

$$u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i} + u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(p' u_j') + \frac{\partial}{\partial x_j}(p' u_i') - p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - p'\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}$$

$$u_j'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + u_i'\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}(u_i' u_j') - 2\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}$$

NOTA: QUESTO PASSAGGIO SI PUO' EVITARE RICORDANDO CHE $(A\cdot B)'' = A''B + 2A'B' + AB''$

MEDIAMO QUESTI TERMINI E DERIVIAMO IL TERMINE NON LINEARE TENENDO CONTO DEL FATTO CHE ANDRA' MEDIATO:

$$\left\langle u_j' \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle u_i' u_\alpha' \rangle \right\rangle = \bar{u}_j' \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle u_i' u_\alpha' \rangle = 0$$

$$u_j'\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_i'\bar{u}_\alpha) + u_i'\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_j'\bar{u}_\alpha) \underset{\uparrow \ \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0}{=} \bar{u}_\alpha\left(u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}\right) = \bar{u}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_i' u_j')$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_\alpha u_i' u_j')$$

$$\left\langle u_j'\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_i'\bar{u}_\alpha) + u_i'\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_j'\bar{u}_\alpha)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{u}_\alpha\langle u_i' u_j'\rangle\right)$$

E SIMILMENTE PER GLI ALTRI 3 PEZZI. RISCRIVO (VEDI DOPO COME)

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u_i' u_j'\rangle + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\bar{u}_\alpha\langle u_i' u_j'\rangle + \bar{u}_i\langle u_\alpha' u_j'\rangle + \bar{u}_j\langle u_\alpha' u_i'\rangle + \langle u_\alpha' u_i' u_j'\rangle\right]$$

$$= -\left\langle u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right\rangle - \left\langle u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j}\right\rangle + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\langle u_i' u_j'\rangle - 2\nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}\right\rangle$$

$$+ \bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle u_\alpha' u_j'\rangle + \bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle u_i' u_\alpha'\rangle \qquad (\mathrm{III})$$

NOTA: QUESTO SERVE A ELIMINARE LE DERIVATE DI $\bar{u}_i, \bar{u}_j$. TUTTAVIA E' SCOMODA PER I CONTI CHE SEGUONO (VEDI NOTA OLTRE).

INFATTI

NOTA: PER OTTENERE LA (III b) (VEDI SOTTO) IL PRIMO DI QUESTI DUE PASSAGGI NON VA BENE. LIMITATI A GIOCARE SUL FATTO CHE u'_α È SOLENOIDALE E OTTIENI I DUE TERMINI $u'_j u'_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}$ E $u'_i u'_\alpha \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha}$, POI COMPATTA IN UNO I TERMINI IN $\bar{u}_\alpha$.

$$u'_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_i u'_\alpha) + u'_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_j u'_\alpha)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_i u'_\alpha u'_j) - \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u'_\alpha u'_j) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\bar{u}_j (u'_\alpha u'_i)\right] - \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u'_i u'_\alpha)$$

$$u'_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u'_i u'_\alpha) + u'_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u'_j u'_\alpha) = u'_\alpha \left[u'_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} u'_i + u'_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} u'_j\right] = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u'_\alpha u'_i u'_j)$$

NOTA: LA (III) PUÒ ESSERE RISCRITTA, IN MODO MENO SIGNIFICATIVO MA QUI COMODO, NELLA FORMA (III b)

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u'_i u'_j\rangle + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\bar{u}_\alpha \langle u'_i u'_j\rangle + \langle u'_\alpha u'_i u'_j\rangle\right] + \langle u'_j u'_\alpha\rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} + \langle u'_i u'_\alpha\rangle \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} = -\langle u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}\rangle - \langle u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}\rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\langle u'_i u'_j\rangle - 2\nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}\rangle$$

SI NOTI CHE ABBIAMO TROVATO UNA CORRELAZIONE TRIPLA $\langle u'_\alpha u'_i u'_j\rangle$

SE CERCASSIMO L'EVOLUZIONE DI QUESTA OTTERREMMO UNA CORRELAZIONE QUARTA E COSÌ VIA.

IL SISTEMA NON SI È CHIUSO E IN QUESTO MODO NON LO CHIUDEREMO MAI: OGNI CORRELAZIONE DI ORDINE m DIPENDE DA UN ALTRA DI ORDINE $m+1$. È QUELLO CHE SI DICE PROBLEMA DELLA CHIUSURA.

★ CERCHIAMO LA TRACCIA DI $\langle u'_i u'_j\rangle$ E DIMEZZIAMOLA:

$$\frac{1}{2}\delta_{ij}\langle u'_i u'_j\rangle = \frac{1}{2}\langle u'_i u'_i\rangle = \frac{1}{2}\langle u_i'^2\rangle = \frac{1}{2}\langle u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2\rangle = \langle K\rangle$$

<u>ENERGIA CINETICA TURBOLENTA</u> (ASSOCIATA ALLE FLUTTUAZIONI DI VELOCITÀ).

ALLORA RISCRIVO LA $\frac{1}{2}\cdot$(III) PRENDENDO LA TRACCIA DI TUTTI I TERMINI:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{K} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\bar{u}_\alpha \bar{K} + \bar{u}_i \langle u'_i u'_\alpha\rangle + \frac{1}{2}\langle u'_i u'_i u'_\alpha\rangle\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\langle p' u'_i\rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\bar{K}$$

$$-\nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\rangle + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle u'_i u'_\alpha\rangle$$

NOTA: USANDO LA FORMA (III b) OTTENGO INVECE SUBITO

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\bar{u}_\alpha \bar{K} + \frac{1}{2}\langle u'_i u'_i u'_\alpha\rangle\right] + \langle u'_i u'_\alpha\rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\langle p' u'_i\rangle + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\bar{K} - \nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\rangle$$

ORA OSSERVO CHE

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i \langle u_i' u_\alpha' \rangle - \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u_i' u_\alpha' \rangle = \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i$$

NOTA: QUESTO PASSAGGIO DISFA QUANTO FATTO PER PASSARE DA (III b) ALLA (III); DI CONSEGUENZA PUÒ EVITARE LAVORANDO FIN DA SUBITO SULLA (III b).

E UNENDO TUTTI I TERMINI SOTTO IL SEGNO DI DIVERGENZA

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha) \qquad \left(= \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \ , \ \text{E} \ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \bar{K} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\alpha}\right) \right)$$

OTTENGO

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Phi_\alpha = P - \varepsilon_T$$

DOVE

$$\Phi_\alpha = \bar{u}_\alpha \bar{K} + \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' u_\alpha' \rangle + \langle p' u_\alpha' \rangle - \nu \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_\alpha}$$

$$P = - \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}$$

$$\varepsilon_T = \nu \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} \right\rangle$$

P SI DICE PRODUZIONE TURBOLENTA, ε_T È LA DISSIPAZIONE, Φ_α È IL FLUSSO SPAZIALE DI ENERGIA.

MEDIANDO E PRENDENDO ORA LA DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS DI K,

$$\left\langle \frac{1}{2} u_i u_i \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} (\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_i + u_i') \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \bar{u}_i + 2 \bar{u}_i u_i' + u_i' u_i' \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i + \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle = K + \langle \bar{K} \rangle$$

SI NOTI CHE L'ULTIMO PEZZO È L'ENERGIA CINETICA ASSOCIATA ALLE FLUTTUAZIONI, NON LA FLUTTUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA.

RIPRENDENDO L'EQUAZIONE PER L'EVOLUZIONE DI $\bar{u}_i$,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i \bar{u}_\alpha = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u_i' u_\alpha' \rangle$$

MOLTIPLICANDOLA SCALARMENTE PER $\bar{u}_i$, CONSIDERO CHE

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{u}_i \bar{u}_i}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t} K$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i \bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha \left(\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i\right) = \bar{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\bar{u}_i \bar{u}_i}{2} = \bar{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} K \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ SOLENOIDALE}}}{=} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{u}_\alpha K)$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p} \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p} \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$$\bar{u}_i \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_\alpha^2} = \nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}\right) - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}\right) - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u_i' u_\alpha' \rangle = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{u}_i \langle u_i' u_\alpha' \rangle\right) - \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i$$

NOTA: ANCHE QUI SOPRA SI PUÒ GIOCARSELA CON (A·B)''.

RISCRIVO

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \bar{p} \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{u}_i \langle u_i' u_\alpha' \rangle + \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}$$

E RIDEFINISCO

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Phi_\alpha^{(M)} = - P - \varepsilon_M$$

CON ε_M LA DISSIPAZIONE DEL CAMPO MEDIO,

$$\varepsilon_M = \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}$$

E P È LO STESSO DI PRIMA (QUI HA SEGNO INVERTITO). INFINE

$$\Phi_\alpha^{(M)} = K \bar{u}_\alpha + \bar{p} \bar{u}_\alpha - \nu \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} + \bar{u}_i \langle u_i' u_\alpha' \rangle$$

SI È OTTENUTO IL SISTEMA DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} \Phi_\alpha = P - \varepsilon_T \\[2ex] \dfrac{\partial K}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} \Phi_\alpha^{(M)} = - P - \varepsilon_M \qquad (+\pi) \end{cases}$$

SE IMMETTO POTENZA ($+\pi$), NELLE CONDIZIONI TIPICHE DELLA TURBOLENZA Re È ALTO, QUINDI ν È BASSO E IL TERMINE ε_M È TRASCURABILE. IL TERMINE $\Phi_\alpha^{(M)}$ SI LIMITA A SPOSTARE ENERGIA. DEVE ESSERE $P > 0$, QUINDI PER IL CAMPO MEDIO IL TERMINE

$$-P$$

RAPPRESENTA UNA DISSIPAZIONE CHE NON FA AUMENTARE L'ENERGIA INTERNA (COME ε_M), MA VA NELLE FLUTTUAZIONI (DA QUI IL NOME "PRODUZIONE"). TUTTA LA POTENZA IMMESSA, SUPPOSTI

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t}, \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$$

(CASO STATISTICAMENTE STAZIONARIO
VEDI AUTOMOBILE A v COSTANTE

È TRASFORMATA NELLE FLUTTUAZIONI (OSSIA P).

MA SE PER LA 2^ EQ. P È UN POZZO DI ENERGIA, PER LA 1^ È UNA SORGENTE; L'ENERGIA È ALLORA DISSIPATA IN CALORE DA ε_T, COSÌ CHE

$$\int \pi \, dV = \int (\varepsilon_T + \underset{\sim}{\varepsilon_M}) \, dV$$

NOTO CHE PIÙ CRESCE Re, PIÙ OSSERVO CRESCERE LE FLUTTUAZIONI (QUESTO È UN RISULTATO SPERIMENTALE)

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}$$

SI PARLA DI <u>ANOMALIA DISSIPATIVA</u>: ε_T E QUINDI L'ENERGIA DISSIPATA NON DECRESCONO CON $Re \sim \frac{1}{\nu}$ E L'UNICA SPIEGAZIONE È CHE LA TURBOLENZA SI SPOSTI A SCALE SEMPRE PIÙ PICCOLE.

NOTA: A SCALE PIÙ PICCOLE CRESCE LA CURVATURA E $\varepsilon_T = -\mu \langle (\nabla u')^2 \rangle$.

IPOTESI DI RICHARDSON

LE STRUTTURE DI GRANDE SCALA TENDONO AD AVERE Re GRANDE:

$$Re \sim \frac{\text{MOTI CONVETTIVI}}{\text{VISCOSITÀ}}$$

PER QUESTO SONO INSTABILI E TENDONO A DIVIDERSI IN STRUTTURE PIÙ PICCOLE ; IL PROCESSO CONTINUA FINO A CHE OTTENGO STRUTTURE CON $Re \sim 1$. DETTO

$$Re(l) = \frac{u(l) \cdot l}{\nu}$$

NOTA: SI RICORDI CHE $Re = \frac{\rho_0 U_0 l_0}{\mu_0}$ E $\nu = \mu_0 / \rho_0$

QUESTO DECRESCE AL DECRESCERE DI l.

KOLMOGOROV SCOPRE CHE SOTTO CERTE IPOTESI FUNZIONA COSÌ;
SI DICE SCALA DI KOLMOGOROV LA GRANDEZZA η. IL MODELLO PRENDE IL NOME DI CASCATA DI RICHARDSON.

* IPOTESI: OMOGENEITÀ E ISOTROPIA STATISTICA.
IL CAMPO MEDIO È NULLO E IL FLUSSO RESTA COMPOSTO DALLE SOLE FLUTTUAZIONI.

OSSERVO ALLORA CHE, AL DI SOPRA DI UN CERTO Re, LE PICCOLE SCALE DIVENTANO UNIVERSALI E ISOTROPE, COSÌ CHE NON RIESCO PIÙ A RISALIRE ALLA FONTE DELLA TURBOLENZA.

RIPARTIAMO DALLE EQUAZIONI

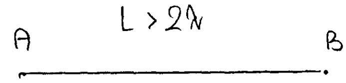
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i$$

$$u_i = \underset{\sim}{\bar{u}_i} + u_i'$$

SE IL FLUSSO È OMOGENEO $\bar{u}_i$ È COSTANTE, QUINDI LO POSSO PRENDERE NULLO.

PRESI DUE PUNTI A, B DISTANTI PIÙ DELLA DISTANZA DI CORRELAZIONE STATISTICA λ (DIPENDENTE DA Re E DALLE CARATTERISTICHE DEL FLUIDO), POSSO CONSIDERARE A E B COMPLETAMENTE SCORRELATI. INVECE DI INTEGRARE IN $r \in [0, \infty]$, SCELGO CONDIZIONI PERIODICHE IN MODO CHE IN B TORNINO LE CONDIZIONI DI A. MI SONO RIDOTTO A INTEGRARE SU UN CUBO $L \times L \times L$ INVECE CHE SU UN VOLUME INFINITO: LE CONDIZIONI PERIODICHE AL CONTORNO MI PERMETTONO PERÒ DI SIMULARE UN VOLUME INFINITO.



POSSIAMO CERCARE SOLUZIONI PERIODICHE. RICORDIAMO CHE

$$u(\underline{x},t) = \int_\Omega \hat{u}(\underline{k},t)\, e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}}\, d^3k$$

NOTA: IN REALTÀ NEL SEGUITO NON USEREMO LA TRASFORMATA DI FOURIER, MA SOLTANTO LA SERIE (IL DOMINIO È LIMITATO).

$$u_i(\underline{x},t) = \sum_{m,m,p} \hat{u}_i(k_m, k_m, k_p, t)\, e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}} := \sum' \hat{u}_i(t)\, e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

NOTA: $\underline{m}$ È UN MULTI-INDICE SUI NATURALI $\mathbb{N}$, $\underline{x}$ UN VETTORE SUI REALI $\mathbb{R}$. ALLORA
$\underline{k} = \frac{2\pi}{L}\underline{m}$

OVVERO SCORRE SUI NATURALI A PARTE UN FATTORE DI SCALA

CON $\underline{k}\cdot\underline{x} = k_m x_i + k_m x_j + k_p x_k$.

INOLTRE LA TRASFORMATA DI $\frac{\partial u_i(\underline{x},t)}{\partial x_j}$ VALE

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^\wedge = j k_j\, \hat{u}_i(t)$$

INDICO PER COMODITÀ

$$h_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

E RISCRIVO

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + h_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i$$

NOTA: SI STA INDICANDO PER BREVITÀ CON k_j^2 LA SOMMA $k_j k_j$.

TRASFORMANDO OGNI TERMINE,

$$\sum' \frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}} + \sum' \hat{h}_i e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}} = -\sum' j k_i \hat{p}\, e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}} - \nu \sum' k_j^2\, \hat{u}_i(t) e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}} + \sum' \hat{f}_i e^{j\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

(HO TRASFORMATO NELLO SPAZIO, MA NON NEL TEMPO).

VALE ALLORA, PER CIASCUN NUMERO D'ONDA,

$$\frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} = -\hat{h}_i - jk_i\hat{p} - \nu k_j^2\hat{u}_i + \hat{f}_i \qquad (I)$$

USANDO

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_i\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}h_i = -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \qquad \underline{\nabla}\cdot(\nabla^2\underline{u}) = \nabla^2(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})$$

TRASFORMANDOLA,

$$jk_i\hat{h}_i = k_i^2\hat{p} + jk_i\hat{f}_i \qquad j\underline{k}\cdot\underline{\hat{h}} = |\underline{k}|^2\hat{p} + j\underline{k}\cdot\underline{\hat{f}}$$

$$\hat{p} = \frac{jk_i\hat{h}_i - jk_i\hat{f}_i}{k_i^2} = \frac{jk_i}{k_i^2}(\hat{h}_i - \hat{f}_i)$$

k_i^2 È UNA SOMMA RIPETUTA, NON SI SEMPLIFICA:
$k_i^2 = k_1k_1 + k_2k_2 + k_3k_3$

CHE SIGNIFICA

$$\hat{p}(k_{1m}, k_{2m}, k_{3p}) = \frac{j\left[k_{1m}h_1(k_{1m},k_{2m},k_{3p}) + k_{2m}h_2(k_{1m},k_{2m},k_{3p}) + k_{3p}h_3(k_{1m},k_{2m},k_{3p})\right]}{k_{1m}\cdot k_{1m} + k_{2m}\cdot k_{2m} + k_{3p}\cdot k_{3p}} - \dots$$

(I COEFFICIENTI DI FOURIER SONO $m_{MAX}\cdot m_{MAX}\cdot p_{MAX}$).

PER NON CONFONDERCI SCRIVIAMO

$$\hat{p} = \frac{jk_\alpha\hat{h}_\alpha - jk_\alpha\hat{f}_\alpha}{k^2}$$

NOTA: È UNA NOTAZIONE UN PO' INFELICE. NON SIGNIFICA CHE k È UN TENSORE DEL SECONDO ORDINE; k_{1m} SI LEGGE "L'ELEMENTO DI INDICE m TRA QUELLI POSSIBILI CHE PUÒ ASSUMERE LA PRIMA COMPONENTE DI k".

E SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE (I) PER OTTENERE

$$\frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} = -\hat{h}_i + k_i\frac{k_\alpha\hat{h}_\alpha}{k^2} - k_i\frac{k_\alpha\hat{f}_\alpha}{k^2} - \nu k^2\hat{u}_i + \hat{f}_i$$

$$= -\left(\delta_{i\alpha} - \frac{k_ik_\alpha}{k^2}\right)\hat{h}_\alpha - \nu k^2\hat{u}_i + \left(\delta_{i\alpha} - \frac{k_ik_\alpha}{k^2}\right)\hat{f}_\alpha \qquad (II)$$

CHE SONO m_{MAX}^3 EQUAZIONI ALLE DERIVATE ORDINARIE (DIVIDO IL CUBO INIZIALE IN $m\cdot m\cdot m$ CUBETTINI, RISOLVO SU OGNI VERTICE).

SONO DA CONFRONTARE CON LE $4 \cdot m_{MAX}^3$ EQUAZIONI DA CUI SONO PARTITO, CHE ERANO ALLE DERIVATE PARZIALI.

L'UNICA COMPLICAZIONE È IL TERMINE NON LINEARE $\hat{h}$, CHE DIPENDE DA TUTTI I NUMERI D'ONDA IN LINEA DI PRINCIPIO (È UN PRODOTTO DI CONVOLUZIONE).

SOMMANDO SUI NUMERI D'ONDA K IN UN INTORNO DI K^* OTTENGO LO SPETTRO DI ENERGIA

$$\tilde{E}(K^*, t) = \sum_K \frac{\hat{u}_i \hat{u}_i^*}{2|\Delta K|} \qquad K^* - \frac{\Delta K}{2} < K < K^* + \frac{\Delta K}{2}$$

CHE È LA DENSITÀ DI ENERGIA CINETICA TURBOLENTA ASSOCIATA A K^*. OVVERO

$$\sum_{\text{TUTTI I } K} \tilde{E}(K, t) = \int_\Omega \tilde{E}\, d\Omega = \text{"ENERGIA CINETICA TURBOLENTA NEL VOLUME } \Omega\text{"}$$

NOTA: $\tilde{E}$ È UNA DISTRIBUZIONE SULLO SPAZIO DEI NUMERI D'ONDA, OVVERO
$dE = \tilde{E}\, dK \simeq \tilde{E}\, \Delta K$

RISCRIVO LA (II) COME

$$\frac{d\hat{u}_i}{dt} = \hat{H}_i - \nu K^2 \hat{u}_i + \hat{F}_i$$

E LA SUA C.C.

$$\frac{d\hat{u}_i^*}{dt} = \hat{H}_i^* - \nu K^2 \hat{u}_i^* + \hat{F}_i^*$$

MOLTIPLICANDO LA PRIMA PER $\hat{u}_i^*$, LA SECONDA PER $\hat{u}_i$ E SOMMANDOLE, OTTENGO PEZZI COME

$$\hat{u}_i^* \frac{d\hat{u}_i}{dt} + \hat{u}_i \frac{d\hat{u}_i^*}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_i \hat{u}_i^*)$$

SOMMANDO SUI K NELL'INTORNO ΔK,

$$\frac{d}{dt} \sum_K \frac{\hat{u}_i \hat{u}_i^*}{2|\Delta K|} \equiv \frac{d\tilde{E}}{dt}$$

RIPETENDO SUGLI ALTRI PEZZI AVRÒ UN'EQUAZIONE CHE DESCRIVE L'EVOLUZIONE DELLA DENSITÀ DI ENERGIA.

SCRIVO (K^2 SUPPOSTO COSTANTE NELL' INTORNO)

$$\frac{d\tilde{E}(k,t)}{dt} = T(k,t) + P(k,t) - 2\nu k^2 \tilde{E}(k,t)$$

NEL CASO STATISTICAMENTE STAZIONARIO (INDIPENDENTE DA t)

$$0 = T(k) + P(k) - 2\nu k^2 \tilde{E}(k)$$

INTEGRANDO SUI NUMERI D'ONDA,

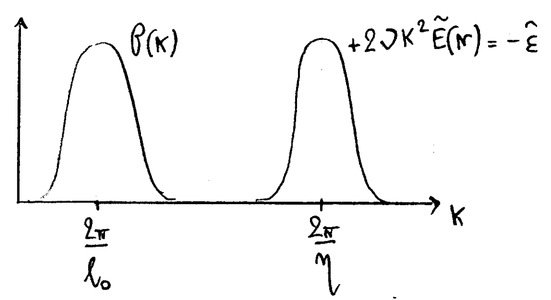
$$0 = \int T(k)\, d^3k + \underbrace{\int P(k)\, d^3k}_{\substack{\text{ENERGIA INTRODOTTA} \\ \text{DA } f \\ (P \equiv \text{PRODUZIONE})}} \underbrace{- 2\nu \int k^2 \tilde{E}(k)\, d^3k}_{\substack{\text{ENERGIA DISSIPATA} \\ (\hat{\varepsilon} \equiv \text{DISSIPAZIONE MEDIA})}}$$

POICHE'

$$\int T(k)\, d^3k = 0$$

CONCLUDIAMO CHE IL TERMINE $T(K)$ SI LIMITA A SPOSTARE ENERGIA.

POICHE' $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, LE PICCOLE SCALE SI TROVANO PER GRANDI K.



L' ENERGIA E' PRINCIPALMENTE DISSIPATA A PICCOLE SCALE (η, DI KOLMOGOROV) E INTRODOTTA A GRANDI SCALE ("INTEGRALE")

QUINDI $T(k)$ E' UN FLUSSO DI ENERGIA DALLE GRANDI ALLE PICCOLE SCALE. PIU' E' ALTO Re, PIU' AUMENTA LA DISTANZA TRA η E LA SCALA INTEGRALE. SI DICE <u>INTERVALLO INERZIALE</u> QUELL' INTERVALLO DI NUMERI D'ONDA IN CUI L' ENERGIA NON E' PRODOTTA, NE' DISSIPATA. SI HA

$$\frac{l_0}{\eta} = Re^{3/4}$$

$$\frac{1}{Re} |\nabla u'|^2 \sim \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta u'}{\eta} \right)^2$$

NEL RANGE INERZIALE SI PUÒ DARE UNA STIMA DI

$$\tilde{E} = f(K, \varepsilon)$$

NE FACCIO L'ANALISI DIMENSIONALE :

$$[\tilde{E}] = U^2 L \qquad\qquad [\varepsilon] = U^3 L^{-1}$$

E TROVO LA "LEGGE DEI $-\frac{5}{3}$" (VEDI SOTTO)

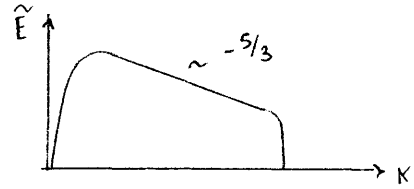
$$E = \varphi_1 K^{-\frac{5}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

POSSO STIMARE LA SCALA DI KOLMOGOROV

$$\eta = f(\varepsilon, \nu) \quad \Rightarrow \quad \eta = \varphi_2 \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{+1/4}$$

NOTA: $\varepsilon = \int \tilde{\varepsilon} \, d\Omega$

PER CAPIRE IL PERCHÈ DI $[\tilde{E}]$ RICORDA CHE AVEVAMO POSTO $\rho \equiv 1$ E GUARDA COM'È DEFINI



NOTA: PER CAPIRE $[\varepsilon]$ NOTA C

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\rho} \right] = \left[\frac{M}{LT} \right] \left[\frac{M}{L^3} \right]^{-}$$

$$[\tilde{\varepsilon}] = [\nu K^2 \tilde{E}] = [U^3]$$

NOTA: NEL GRAFICO A FIANCO È MOSTRATO L'ANDAMENTO DI $\tilde{E}(K)$ UNA VOLTA FISSATO UN VALORE DI ε. SICCOME

$$\varepsilon_T \sim \frac{1}{Re} \langle |\nabla u'|^2 \rangle$$

QUESTO SIGNIFICA MUOVERSI A Re FISSATO E OSSERVARE COSA SUCCEDE ALLE VARIE SCALE.

LA LEGGE SI TROVA CON IL TEOREMA DI BUCKINGHAM PONENDO

$$\varphi_1 = \tilde{E} K^{\alpha} \varepsilon^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{3}, \ \beta = -\frac{2}{3}$$

SIMILMENTE PER η TROVO

$$\varphi_2 = \eta \, \varepsilon^{\alpha} \nu^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1/4, \ \beta = -\frac{3}{4}$$

PERCHÈ $\eta = f(\varepsilon, \nu)$? PERCHÈ $\varepsilon = \nu |\nabla u'|^2 \sim \nu \left| \frac{\Delta u'}{\eta} \right|^2$.