Appunti del corso di

Meccanica Analitica

Davide Venturelli, anno 2015/2016

venturelli.1591191 at studenti.uniroma1.it

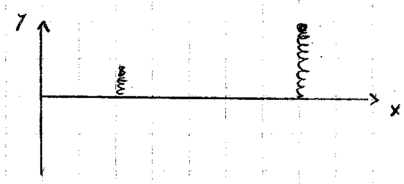
• I VINCOLI

$m\ddot{x} = 0$ $\qquad$ $x(0) = x_0$

$\qquad\qquad\quad$ $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$m\ddot{y} = -Ky$ $\qquad$ $y(0) = y_0$

$\qquad\qquad\quad$ $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$



PALLINA CHE SCORRE LUNGO X E OSCILLA LUNGO Y.

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \qquad\qquad y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos(\omega t) \qquad \text{CON} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

AL CRESCERE DI K, LA PALLINA OSCILLA SEMPRE MENO.
OSSERVIAMO AL LIMITE LA PALLINA MUOVERSI SCORRENDO LUNGO L'ASSE X (VINCOLATA ALL'ASSE): HO CREATO UN VINCOLO.

★ VINCOLO OLONOMO BILATERALE

$\forall t \quad y(t) = 0$ COME IN QUESTO CASO.

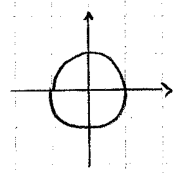
$$\phi(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_N, t) = 0$$

SE HO INVECE ≥ 0, IL VINCOLO È UNILATERALE.

COINVOLGE UNA RELAZIONE TRA LE COORDINATE DEL MIO SISTEMA.

<u>ESEMPIO</u>:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



SE LA GUIDA SI MUOVE VERSO IL BASSO CON v,

$$x^2 + (y - vt)^2 = R^2$$

È UN VINCOLO OLONOMO BILATERALE.

LA PRESENZA DI UN VINCOLO RIDUCE I GRADI DI LIBERTÀ DEL SISTEMA.

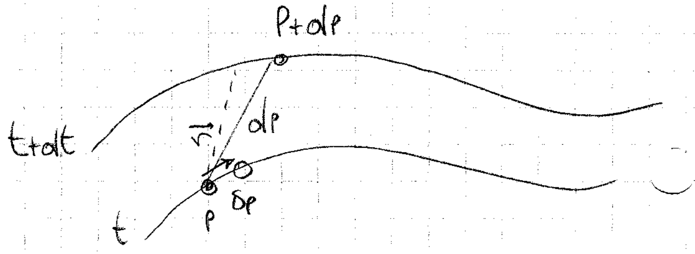
$$\sum_{i=1}^{N} \left(\nabla_{\underline{x}_i}\phi \cdot \dot{\underline{x}}_i\right) + \underbrace{\partial_t \phi}_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = 0 \qquad \text{CON} \qquad \vec{x}_i = (x_{i_x}, x_{i_y}, x_{i_z})$$

CHE È UN LIMITE ALL'ATTO DI MOTO (LA DERIVATA TOTALE DELLA FUNZIONE CHE DESCRIVE IL VINCOLO È NULLA).

IN ALTRI CASI, SI HA

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \cdot \dot{\underline{x}}_i + \partial_t \phi = 0$$

AD ESEMPIO, IL VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO CONSISTE IN UNA CONDIZIONE SULLE VELOCITÀ.
SI PARLA DI VINCOLI ANOLONOMI.

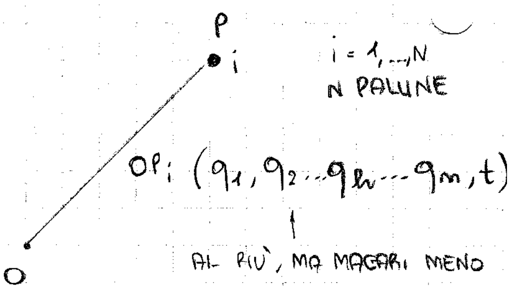


- SPOSTAMENTO VIRTUALE

IMMAGINO DI LANCIARE IN ARIA IL FILO SU CUI UNA PALLINA È VINCOLATA A MUOVERSI.
CHIAMO SPOSTAMENTO VIRTUALE δP QUELLO CHE LA PALLINA FA SOLIDALMENTE AL VINCOLO, COME SE IL VINCOLO FOSSE FERMO.

CONOSCERE I POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALI DÀ INFORMAZIONI SULLA FORMA DEL VINCOLO.

CONSIDERO UN SISTEMA FORMATO DA N PALLINE.



HO

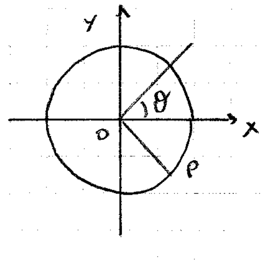
$$3N - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TOLTI DAL VINCOLO}}}{m} = n \quad \text{GRADI DI LIBERTÀ}$$

LE q SONO LE VARIABILI LAGRANGIANE DEL SISTEMA; SONO n E INDIPENDENTI.

NELL' ESEMPIO A DESTRA, SE IL CERCHIO TRASLA LUNGO Y:

$$OP(\vartheta, t) = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta - vt)$$

$$X^2(t) + (Y(t) - vt)^2 = R^2$$



$X^2(t) + Y^2(t) = R^2$ (CERCHIO FERMO)

$q = \vartheta(t)$ È L'UNICA VERA VARIABILE.

IN QUESTO ESEMPIO,

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \Rightarrow d\overrightarrow{OP} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \theta} \delta\theta + \partial_t \overrightarrow{OP} \cdot \delta t$$

$$= (-R\sin\theta, R\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} + (0,-r)$$

$$d\overrightarrow{OP} = (-R\sin\theta, R\cos\theta)\, d\theta + (0,-r)\, dt$$

SE CONGELO IL TEMPO,

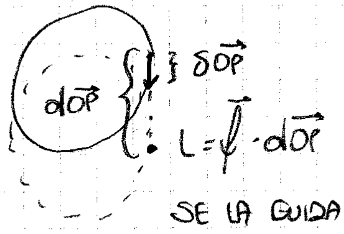
$$\delta \overrightarrow{OP} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \theta} \delta\theta$$

UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE CONSIDERA PER DEFINIZIONE SOLO I CAMBIAMENTI NELLE COORDINATE q_m, NON NEL TEMPO.

$$\delta OP_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h$$

SPOSTAMENTO VIRTUALE DELLA PALLINA i, NON NECESSARIAMENTE DIPENDENTE DA TUTTE LE q_m (ALCUNE DERIVATE SONO NULLE).

- LAVORO VIRTUALE



SE LA GUIDA SI MUOVESSE

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \cdot \delta \overrightarrow{OP}_i$$

TRA LE FORZE, CONSIDERIAMO LA REAZIONE VINCOLARE:

$$\delta L^{(r)} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \cdot \delta \underline{OP}_i = 0$$ PER UNA GUIDA LISCIA.

SI NOTI CHE INVECE

$$dL \neq 0$$

$$= r \cdot dOP$$ CHE NON SONO NECESSARIAMENTE ORTOGONALI!

$\uparrow$ SPOSTAMENTO REALE

CHIAMO VINCOLI PERFETTI BILATERALI QUELLI PER CUI È NULLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE REAZIONI VINCOLARI.

L' EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$m\ddot{\underline{x}}_i = \underline{f}_i + \underline{r}_i \qquad i = 1, \dots, N$$

$\underline{f}_i$: FORZE ESTERNE ("ATTIVE")

$\underline{r}_i$: REAZIONI VINCOLARI, INCOGNITE CHE NON CI INTERESSANO!

SE IL VINCOLO È BILATERALE PERFETTO,

$$\underline{r}_i \cdot \delta OP_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \cdot \delta OP_i = 0$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE PER $\delta \underline{OP}_i$ E APPLICO LA SOMMATORIA:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta OP_i \cdot \left(m\ddot{\underline{x}}_i - \underline{f}_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \delta \underline{OP}_i \cdot \left(\underline{r}_i \right)$$

DA CUI, PER QUANTO DETTO,

$$\sum_{i=1}^{N} \delta \underline{OP}_i \left(m\ddot{\underline{x}}_i - \underline{f}_i \right) = 0$$

EQUAZIONE SIMBOLICA DI D'ALEMBERT

δOP_i CONTIENE TUTTA L'INFORMAZIONE SUI VINCOLI

DESCRIVE COMPLETAMENTE IL MOTO E NON COMPAIONO PIÙ LE REAZIONI VINCOLARI.

VOGLIAMO TRADURRE

$$\begin{matrix} OP_1 & (x_1, y_1, z_1) \\ OP_2 & x_2 \; y_2 \; z_2 \end{matrix} \Rightarrow OP(q_1 \dots q_m)$$ CON q_m VARIABILI LAGRANGIANE

SE LE q_h SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, $\sum_i a_i \delta q_h = 0 \Rightarrow a_i = 0$

VOGLIAMO APPLICARE QUINDI LA TRASFORMAZIONE

$OP_i = OP_i(q_1, \dots, q_m, t)$. CALCOLIAMO $\underline{v}$ E T DEL SISTEMA:

$$\underline{v}_i = \frac{dOP_i}{dt} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \qquad (I)$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i$$

PASSAGGIO QUI NON NECESSARIO. SOSTITUISCO PER $\underline{v}$ USANDO DIVERSI INDICI,

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \dot q_h \dot q_k \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial OP_i}{\partial q_k}\right)}^{a_{hk}} +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m} \dot q_h \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_m}\frac{\partial OP_i}{\partial t}\right)}_{a_{h0}}\cdot 2 + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial OP_i}{\partial t}\right)^2}_{a_{00}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}\dot q_h \dot q_k + \sum_{h=0}^{m} a_{h0}\dot q_h + \frac{1}{2}a_{00} \qquad (\mathrm{II})$$

SE IL VINCOLO È INDIPENDENTE DAL TEMPO ALLORA GLI ULTIMI DUE PEZZI, CHE CONTENGONO $\frac{d}{dt}$, VANNO A ZERO E

$T = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}\dot q_h \dot q_k$ CON a_{hk} INDIPENDENTE DA t.

(È UNA FORMA QUADRATICA)

ESPRIMIAMO IL LAVORO VIRTUALE CON (III)

$$\delta OP_i = \sum_{h=1}^{m}\frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\delta q_h$$

SVILUPPO IN SERIE DEL PRIMO ORDINE: SE $OP(q_1,q_2,t)$

$$\delta OP = \frac{\partial OP}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial OP}{\partial q_2}\delta q_2$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i\cdot\delta \underline{OP}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i \cdot \sum_{h=1}^{m}\frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\delta q_h$$

$$= \sum_{h=1}^{m}\delta q_h \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i\cdot\frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\right)}_{Q_h} = \sum_{h=1}^{m} Q_h \delta q_h \qquad (\mathrm{IV})$$

$Q_h \rightarrow$ SONO LE m COMPONENTI LAGRANGIANE DELLA SOLLECITAZIONE $\underline{f}_i$.

CALCOLO

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial \underline{OP}_i}{\partial q_h} \quad \text{(VEDI I)} \qquad (\mathrm{V})$$

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{d\underline{OP}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{OP}_i}{\partial q_h}. \qquad (\mathrm{VI})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i \qquad (\overline{\underline{VII}})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \cdot \underline{v}_i + \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{v}_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \qquad (\overline{\underline{VIII}})$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \quad (\text{DA } \overline{\underline{VII}} \text{ E } \overline{\underline{VI}}) \qquad (\overline{\underline{IX}})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \, \ddot{\underline{x}}_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} + \underbrace{m_i \, \underline{v}_i \, \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}}_{\text{È UGUALE A } \overline{\underline{IX}}} \right) \qquad (\overline{\underline{X}})$$

SOTTRAENDO LA $\overline{\underline{IX}}$ ALLA $\overline{\underline{X}}$ OTTENGO

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \ddot{\underline{x}}_i \, \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \qquad (\overline{\underline{XI}})$$

RIPRENDO L'EQ. DI D'ALAMBERT, SOSTITUISCO δOP_i CON $\overline{\underline{III}}$:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \, \ddot{\underline{x}}_i - \underline{f}_i) \cdot \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h = 0$$

$$\sum_{h=1}^{m} \delta q_h \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \, \ddot{\underline{x}}_i \, \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right) - \sum_{h=1}^{m} \delta q_h \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i \, \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right) = 0$$

RICONOSCO $\overline{\underline{XI}}$ E $\overline{\underline{IV}}$, SOSTITUENDO OTTENGO

$$\sum_{h=1}^{m} \delta q_h \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} - Q_h \right] = 0 \qquad (\overline{\underline{XII}})$$

SE HO FORZE CONSERVATIVE, POSSO DEFINIRE $U(q_1 \dots q_m)$ t.c.

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = - \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad \left(\text{SI OTTIENE DA } \underline{f}_i = - \frac{\partial U}{\partial OP_i}\right)$$

$$U = U(OP_1 \dots OP_N) \quad \text{CON } OP_i = OP_i(q_1 \dots q_m, t) \qquad (\overline{\underline{XIII}})$$

SOSTITUISCO LA $\overline{\text{XIII}}$ NELLA $\overline{\text{XII}}$ AL POSTO DI Q_h. INOLTRE, ESSENDO U FUNZIONE SOLO DELLA POSIZIONE (q_h) E NON DALLE VELOCITÀ $(\dot{q}_h)$,

$$\sum_{h=1}^{m} \delta q_h \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_h} \right) = 0$$

$L(q,\dot{q},t) \equiv T(q,\dot{q},t) - U(q,t)$ È DETTA FUNZIONE LAGRANGIANA.

$$\sum_{h=1}^{m} \delta q_h \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right) = 0$$

VALIDO PER TUTTE LE δq_h. ESSENDO LE q_h INDIPENDENTI, QUESTO È POSSIBILE SOLTANTO SE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE

PER $h = 1, \dots, m$

. NOTA: COME LEGGERE QUESTA DIMOSTRAZIONE

INIZIARE RICAVANDO LA $\overline{\text{IV}}$, POI SCRIVERE $\sum_{h=1}^{m} Q_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{m} \delta q_h \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right)$.

NON RICAVARE LA $\overline{\text{II}}$.

CALCOLA I, V, VI, QUINDI SI È PRONTI A CALCOLARE $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}, \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}, \frac{\partial T}{\partial q_h}$ $(\overline{\text{VII}}-\overline{\text{X}})$.

RICONOSCERE E RICAVARE SUBITO LA $\overline{\text{XII}}$.

TRAMITE CONSIDERAZIONI SU FORZE DERIVANTI DA POTENZIALE $(\overline{\text{XIII}})$, DEFINIRE L E SCRIVERE LE EQUAZIONI DI LAGRANGE.

- USO DELLA LAGRANGIANA

DALLE COORDINATE x_i,

$$\underline{f}_i + \underline{r}_i = m_i \ddot{\underline{x}}_i$$

SIAMO PASSATI ALLE q_h OTTENENDO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

CON

$$L = T(q|\dot{q}|t) - U(q)$$ (U ENERGIA POTENZIALE)

- ESEMPIO 1

PARTICELLA DI MASSA m SVINCOLATA E SOTTOPOSTA A POTENZIALE $U(x,y,z)$.

SCELGO $q_h = x_i$.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

- ESEMPIO 2

UN PUNTO SI SPOSTA NEL PIANO, $U(r,\theta)$.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

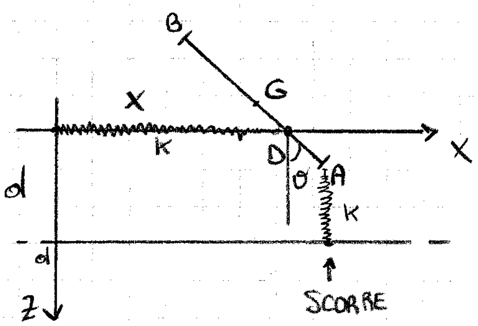
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}r\dot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

PERCIÒ

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\dfrac{\partial U}{\partial r} \\ mr^2\ddot{\theta} + m\dot{\theta}2r\dot{r} = -\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases} \qquad = m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(mr\dot{\theta}\cdot r\right)$$

· ESEMPIO 3

PIANO VERTICALE, ASTA PESANTE $\overline{AB} = L, M$, $\overline{AD} = \frac{L}{4}$, SCORRE SENZA ATTRITO LUNGO X (VINCOLO OLONOMO BILATERALE PERFETTO).



AGISCONO

$F_A = -K\overline{HA}$

$F_D = -K\overline{OD}$ E $\vec{F_g}$.

COORDINATE:

x (ASCISSA DI D) E θ

CALCOLIAMO:

$$T_G^{(MOV)} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2\right) = \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \frac{L^2}{16}\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{L^2}{16}\dot{\theta}^2\sin^2\theta - \frac{L}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]$$

$$x_G = x - \underbrace{\frac{L}{4}\sin\theta}_{GO} \quad ; \quad z_G = -\frac{L}{4}\cos\theta \qquad \Big| = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{16} - \frac{L}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\dot{x}_G = \dot{x} - \frac{L}{4}\cos\theta\,\dot{\theta} \quad ; \quad \dot{z}_G = \frac{L}{4}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$T_G^{(ROT)} = \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$ ATTORNO AL CENTRO DI MASSA! $I_G = \frac{1}{12}ML^2$

PERCIÒ

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{16} - \frac{L}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{24}L^2M\dot{\theta}^2$$

ENERGIA POTENZIALE:

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K\left(d - \frac{L}{4}\cos\theta\right)^2 - Mg\left(-\frac{L}{4}\cos\theta\right)$$

SCRIVO LA LAGRANGIANA

$L = T - U$

E CALCOLO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{E} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

VADO:

$$\frac{d}{dt}\left[M\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\frac{M}{2}\right] = M\ddot{x} - \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2(-\sin\theta)\right)\frac{M}{2}$$

NOTA CHE $\dot{x}$ NON COMPARE (E NON LO FARÀ MAI) IN U.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{M}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2 2\dot{\theta} - \frac{M}{2}\frac{L}{2}\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{24}ML^2\cdot 2\dot{\theta}\right] =$$

$$= M\left(\frac{L}{4}\right)^2\ddot{\theta} - \frac{ML}{4}\ddot{x}\cos\theta + \frac{ML}{4}\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{ML^2}{12}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = +\frac{ML}{4}\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - K\left(d - \frac{L}{4}\cos\theta\right)\left(+\frac{L}{4}\right)\sin\theta + \frac{MgL}{4}\sin\theta$$

GRANDEZZE CONSERVATE

- <u>INTEGRALE PRIMO DEL MOTO</u> (i.e. DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE)

$$\phi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t), t) = \text{COST.}$$

CAMBIA LA COMBINAZIONE, MA NON ϕ.

FUNZIONE IDENTICAMENTE COSTANTE LUNGO LE SOLUZIONI DELLA EQUAZIONE DIFFERENZIALE. PER NOI E' UNA GRANDEZZA CHE SI CONSERVA LUNGO IL MOTO.

- <u>MOMENTO CINETICO</u> CONIUGATO ALLA VARIABILE q_r

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$$

- <u>TEOREMA</u>

$$L(q_1 \dots q_m | \dot{q} | t)$$

SE MANCA q_h, SI DICE COORDINATA CICLICA: $\frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$.

SE L NON CONTIENE ESPLICITAMENTE LA COORDINATA LAGRANGIANA q_h, ALLORA

$$p_h \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \text{COST.}$$

OVVERO IL MOMENTO CINETICO CONIUGATO A UNA COORDINATA CICLICA SI CONSERVA (E' UNA COSTANTE DEL MOTO, O INTEGRALE PRIMO).

DIMOSTRAZIONE:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right)}_{p_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \text{COST.}$$

L NON DIPENDE DA q_h ESPLICITAMENTE.

- ESEMPIO

SISTEMA SOTTOPOSTO A POTENZIALE CENTRALE,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{COST.} \quad \Rightarrow \text{MOMENTO ANGOLARE}$$

LA SIMMETRIA STA NELL' INVARIANZA DI UNA GRANDEZZA RISPETTO A UN'OPERAZIONE CHE POSSO COMPIERE SUL SISTEMA.

- **TEOREMA DI NOETHER**

  SE LA LAGRANGIANA L È INVARIANTE PER UN GRUPPO CONTINUO DI TRASFORMAZIONI, ALLORA ESISTE UNA GRANDEZZA CHE SI CONSERVA.

- **ENERGIA GENERALIZZATA**

$$\mathcal{H} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} \dot q_r - L$$

GRADI DI LIBERTÀ $= m$

SE HO VINCOLI INDIPENDENTI DA t,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{hk} \dot q_h \dot q_k$$

ALLORA

$$\mathcal{H} = \sum_{r=1}^{m} \dot q_r \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \dot q_k a_{rk} + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{m} \dot q_h a_{rh} \right]^{*} - L = \sum_{r=1}^{m} \dot q_r \left[\sum_{k=1}^{m} \dot q_k a_{rk} \right] - L$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{hk} \dot q_h \dot q_k - L$$

$$= 2T - (T-U) = T+U = E$$

OVVERO $\mathcal{H}$ SI RIDUCE ALL'ENERGIA MECCANICA.

(NOTA CHE U NON CONTIENE LE $\dot q_h$).

* NOTA: SAREBBE

$$\frac{1}{2} \sum_{r} \dot q_r \left[\sum_{h} a_{hr} \dot q_h + \sum_{k} a_{rk} \dot q_k \right]$$

, MA PER COME LI AVEVO DEFINITI $a_{hk} = a_{kh}$. (VEDI INDIETRO, a_{hk} È UNA FORMA QUADRATICA).

- TEOREMA: SE L NON CONTIENE ESPLICITAMENTE t, OSSIA

SE $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, ALLORA $\mathcal{H}$ È UNA COSTANTE DEL MOTO.

DIMOSTRAZIONE:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right) \cdot \dot{q}_h + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right) \ddot{q}_h \right] - \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right]$$

(PER IPOTESI, NON HO LA DIPENDENZA DAL TEMPO)

ALLORA

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{h=1}^{m} \dot{q}_h \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right)}_{=0} = 0$$

(È LA LAGRANGIANA)

SI NOTI CHE QUESTO VALE ANCHE SE I VINCOLI DIPENDONO DAL TEMPO (NEL QUAL CASO, INVECE, $E = T + U$ NON SI CONSERVA).

NOTA: IL FATTO DI AVER "USATO" NELLA DIMOSTRAZIONE L'EQUAZIONE DI LAGRANGE SIGNIFICA CHE CI SI STA MUOVENDO LUNGO IL MOTO.

· COMPLEMENTI 06.10.16

DERIVAZIONE DELLA ENERGY FUNCTION (GOLDSTEIN)

DERIVO TOTALMENTE L RISPETTO AL TEMPO,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

DALL' EQUAZIONE DI LAGRANGE,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

SOSTITUISCO E OTTENGO

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

RACCOLGO LA DERIVATA,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

DA CUI SEGUE

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

LA QUANTITÀ TRA PARENTESI È DETTA ENERGIA GENERALIZZATA (ENERGY FUNCTION) E SI DENOTA CON H:

$$H(q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

SI PUÒ SCRIVERE

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

PERCIÒ SE LA LAGRANGIANA NON È FUNZIONE ESPLICITA DEL TEMPO, LA QUANTITÀ H SI CONSERVA (i.e. È UNO DEGLI INTEGRALI PRIMI DEL MOTO).

MECCANICA HAMILTONIANA

IN GENERALE, DATA L'EQ. DIFFERENZIALE DEL II ORDINE

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(\frac{dy}{dt}, y, t\right)$$

POSSO SEMPRE TRASFORMARLA IN UN SISTEMA DI DUE EQ. DEL I ORDINE, COME

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f\big(u(t), y(t), t\big) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = u(t) \end{cases}$$

SE NELLA MECCANICA LAGRANGIANA AVEVAMO

$$q_h \qquad h = 1, \dots, m$$

ORA INTRODUCIAMO ANCHE LE

$$p_h \qquad h = 1, \dots, m$$

TALI CHE

$$p_h = \frac{\partial L(q|\dot{q}|t)}{\partial \dot{q}_h} \equiv f_h^{-1}(q|\dot{q}|t)$$

NOTA: POICHE T È UNA FORMA DEFINITA POSITIVA, ALLORA $\det\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$ $\left(= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right)$ E f_h È INVERTIBILE (RISPETTO ALLE $\dot{q}$).

$$f_h(q|p|t) = \dot{q}_h$$

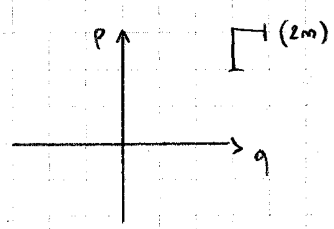
OTTENUTA INVERTENDO LA RELAZIONE PRECEDENTE.

DEFINIAMO

$$\begin{vmatrix} q_h \\ p_h \end{vmatrix} \qquad h = 1, \dots, m$$

LE VARIABILI CANONICHE DEL FORMALISMO HAMILTONIANO.

NELLO SPAZIO DELLE FASI q E p, OGNI PUNTO ESAURISCE LE INFORMAZIONI SULLO STATO DEL SISTEMA. IL MOTO È DESCRITTO DA UNA CURVA.



SI ERA DEFINITA

$$\mathcal{H}(q|\dot{q}|t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L(q|\dot{q}|t)$$

USANDO LE TRASFORMATE DI LEGENDRE, SOSTITUISCO IN $\mathcal{H}($

$$\dot{q}_h = f_h(q|p|t)$$

COSÌ DA OTTENERE

$$H(q|p|t) = \mathcal{H}((q|f(q|p|t)|t)$$

LA QUANTITÀ H È DETTA <u>HAMILTONIANA</u>. SI HA

$$H = \sum_{h=1}^{m} p_h f_h(q|p|t) - L(q|f(q,p,t)|t)$$

CALCOLIAMO

$$\frac{\partial H}{\partial q_\ell} = \sum_{h=1}^{m} p_h \frac{\partial f_h(q|p|t)}{\partial q_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell} - \sum_{h=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}}_{p_h} \cdot \frac{\partial f_h}{\partial q_\ell}$$

$$= - \frac{\partial L}{\partial q_\ell}$$

MA

$$\frac{\partial L}{\partial q_\ell} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}\right) = \frac{d p_\ell}{dt}$$

DA CUI

$$\dot{p}_\ell = - \frac{\partial H}{\partial q_\ell}$$

CALCOLIAMO ORA

$$\frac{\partial H}{\partial p_\ell} = f_\ell + \sum_{h=1}^{m} p_h \frac{\partial f_h}{\partial p_\ell} - \sum_{h=1}^{m} \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}}^{p_h} \cdot \frac{\partial f_h}{\partial p_\ell} = f_\ell = \dot{q}_\ell$$

DA CUI LE DUE EQUAZIONI DI HAMILTON:

$$\dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell}$$

$$\dot{q}_\ell = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

SI DICE CHE LO SPAZIO DELLE FASI HA NATURA SIMPLETTICA (LE DUE EQUAZIONI DIFFERISCONO PER UN SEGNO $-$).

- DIMOSTRAZIONE DI GOLDSTEIN

SCRIVO IL DIFFERENZIALE DI $L(q|\dot{q}|t)$,

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

OSSERVO

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \dot{p}_i \qquad \Rightarrow \qquad dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

L'HAMILTONIANA H È GENERATA DALLA TRASFORMATA DI LEGENDRE,

$$H(q|p|t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q|\dot{q}|t)$$

CHE HA DIFFERENZIALE

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

(NOTA CHE SI È SEMPLIFICATO). POICHÉ È ANCHE

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

SI HANNO PER CONFRONTO

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

· ESEMPIO

$U(x)$ A CUI E' SOTTOPOSTA UNA PARTICELLA.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$H = \frac{p_x^2}{m} - L\left(x, \frac{p_x}{m}\right)$$

$$= \frac{p_x^2}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p_x^2}{m^2} + U(x) = \frac{p_x^2}{2m} + U(x)$$

LE EQUAZIONI DI HAMILTON CI DANNO

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (F = \dot{p})$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad (p = m\dot{x})$$

· ESEMPIO

$U(r, \theta)$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \theta)$$

$$q_1 = r \qquad q_2 = \theta$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$H = \sum_{h=1}^{2} p_h \dot{q}_h - L(q | \dot{q}(p) | \cancel{t})$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \left[\frac{m}{2} \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} \right) \right] + U(r, \theta)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2 m r^2} + U(r, \theta)$$

DA CUI, AD ESEMPIO,

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

· TEOREMA

SE H NON CONTIENE ESPLICITAMENTE UNA q_h,

$$H(q_1, q_2, \ldots, \cancel{q_h}, \ldots, q_m | p_1, \ldots, p_m | t)$$

OVVERO SE q_h È CICLICA, ALLORA IL SUO MOMENTO CONIUGATO SI CONSERVA.

INFATTI, APPLICANDO LE EQUAZIONI DI HAMILTON,

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} = 0$$

· TEOREMA

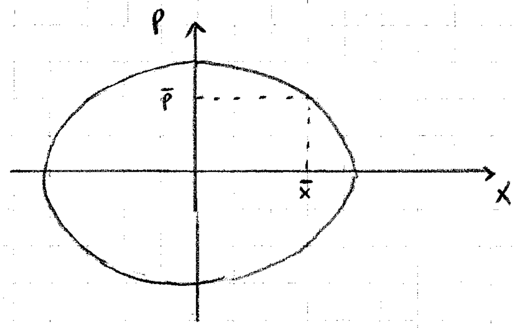
SE H NON CONTIENE ESPLICITAMENTE IL TEMPO, ALLORA H STESSA È UNA COSTANTE DEL MOTO.

INFATTI

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial H}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h \right] + \cancel{\frac{\partial H}{\partial t}}$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \left(\frac{\partial H}{\partial q_h} \right) \right] = 0$$

· OSCILLATORE ARMONICO



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

PASSIAMO ALL' HAMILTONIANA.

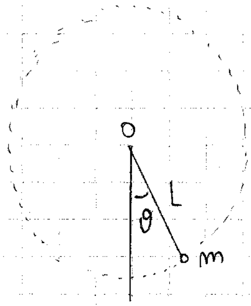
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$p \dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} k x^2 = H$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 = E \quad \text{(ENERGIA)}$$

$$b p^2 + a x^2 = E \quad \text{(ELLISSI)}$$

· PENDOLO

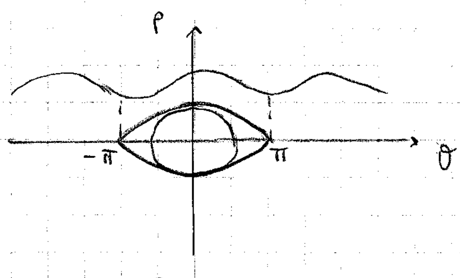


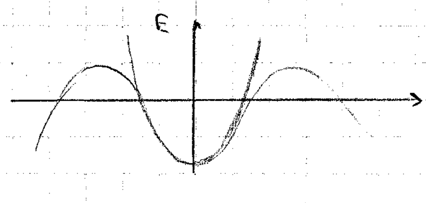
$$L = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - mgL(1-\cos\theta)$$

$$p = m L^2 \dot{\theta}$$

$$H = \frac{p^2}{2mL^2} + mgL(1-\cos\theta) \equiv E \quad \rightarrow$$ PER ANGOLI PICCOLI, $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ E RITROVO H COME L'ESEMPIO PRIMA.

PER ANGOLI PICCOLI HO ANCORA DELLE ELLISSI NELLO SPAZIO DELLE FASI. DOPO UN CERTO ANGOLO, θ AUMENTA INDEFINITAMENTE.



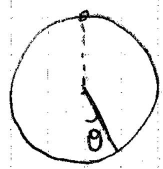


COME FACCIO SE CERCO, AD ESEMPIO, t A CUI ARRIVO A UN CERTO θ?

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2}{mL^2}\left[E - mgL(1-\cos\theta)\right]$$

RISOLVO

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - mgL(1-\cos\vartheta)\right]^{\frac{1}{2}}$$



$$\int_0^{\tau} d\tau' = \int_0^{\pi} \frac{L\, d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - mgL(1-\cos\vartheta)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

SE $\vartheta \to \pi$, $\cos\vartheta \approx -1 + \frac{(\pi-\vartheta)^2}{2}$. $(1-\cos\vartheta) \to 2$

SE HO $E = 2mgL$

$\int^{\pi} d\vartheta \frac{1}{(\pi-\vartheta)}$ OVVERO ARRIVO A π IN UN TEMPO INFINITO. (TRAIETTORIA ISTANTONICA)

SE $E > 2mgL$ L'INTEGRALE CONVERGE A UN TEMPO FINITO.

SE $E < 2mgL$ HO LA RADICE DI UN NUMERO NEGATIVO. IN EFFETTI, A π NON CI ARRIVERÒ MAI.

· PROBLEMA DELLE VOLPI E DEI CONIGLI

ECOSISTEMA CHIUSO IN CUI CI SONO SOLO VOLPI E CONIGLI.

C, V NUMERO DI CONIGLI E VOLPI.

$\dot{C} \propto \alpha C$ (PIÙ CONIGLI CI SONO, PIÙ SI ACCOPPIANO).

LA SOLUZIONE È ESPONENZIALE.

$\dot{V} \propto -\gamma V$ (PIÙ VOLPI CI SONO, PIÙ COMPETONO)

MA ANCHE

$\dot{C} \propto -\beta C V$ (PIÙ VOLPI, MENO CONIGLI; PIÙ CONIGLI SIGNIFICA PIÙ CONIGLI CHE MUOIONO)

$\dot{V} \propto \delta C V$ (PIÙ CONIGLI, PIÙ VOLPI; " ")

DA CUI LE EQUAZIONI DI LOTKA E VOLTERRA:

$$\begin{cases} \dot{C} = \alpha C - \beta C V \\ \dot{V} = -\gamma V + \delta C V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{C}}{C} = \alpha - \beta V \\ \dfrac{\dot{V}}{V} = -\gamma + \delta C \end{cases}$$

$X = \ln C \qquad C = e^X$

$Y = \ln V \qquad V = e^Y$

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha - \beta e^Y \\ \dot{Y} = -\gamma + \delta e^X \end{cases}$$

$\dot{X}$ DIPENDE SOLO DA Y E $\dot{Y}$ DIPENDE SOLO DA X GRAZIE A QUESTA SCELTA DI VARIABILI.

IMMAGINIAMO

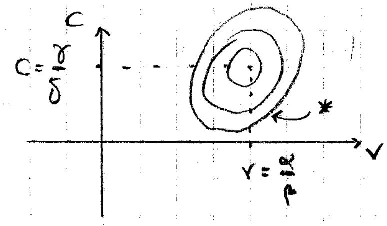
$$H = H(X) + H(Y)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dfrac{\partial H}{\partial Y} \\ \dot{Y} = \dfrac{\partial H}{\partial X} \end{cases}$$

$$H = (\delta e^X - \gamma X) + (\beta e^Y - \alpha Y)$$

HO RIPORTATO IL PROBLEMA A UNA HAMILTONIANA.

H NON DIPENDE DAL TEMPO, PERCIÒ



$$H = \text{cost.} = \delta C - \gamma \ln C + \beta V - \alpha \ln V$$

CON OPPORTUNA SCELTA DI C, V HO PERFETTO EQUILIBRIO.
DISCOSTANDOMI DALL'EQUILIBRIO, HO MOTO LUNGO CERTE CURVE.
NOTA CHE NEL TRATTO (*) DIMINUISCONO SIA LE VOLPI CHE I CONIGLI (PESCI DURANTE LA GUERRA).

POSSO INTEGRARE

$$d \ln C = (\alpha - \beta V)\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{C(t)}{C(t_0)} = \alpha (t - t_0) - \beta \int_{t_0}^{t} V(\tau)\, d\tau$$

SE T È IL PERIODO,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T V(\tau)\, d\tau \qquad \left(\text{INFATTI} \quad \ln \frac{C(t_0 + T)}{C(t_0)} = 0 = \alpha (T) - \beta \int_0^T V(\tau)\, d\tau \right)$$

ALTRE APPLICAZIONI:
- INSETTO, INSETTO PREDATORE E INSETTICIDA (CONTROPRODUCENTE)
- SECONDA SPECIE PREDATRICE, I LUPI:

$$\dot{L} = -\gamma' L + \delta C L$$

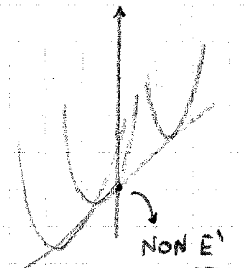
SE $\gamma' > \gamma$, AL LIMITE I LUPI SCOMPAIONO.

· EQUILIBRIO (VEDI P. 117 DISPENSE)

$q_1 \dots q_m \qquad U(q)$

UN PUNTO DI EQUILIBRIO È TALE CHE (CONDIZIONE SUFFICIENTE)

$$\left.\frac{\partial U(q)}{\partial q_h}\right|_{q_h=\bar{q}_h} = 0 \qquad \forall h = 1,\dots,m$$



· TEOREMA DI DIRICHLET

IN UN SISTEMA VINCOLATO INDIPENDENTE DAL TEMPO (NÈ IL VINCOLO, NÈ IL POTENZIALE, NÈ LA LAGRANGIANA), P^* È PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE SE L'ENERGIA POTENZIALE HA UN PUNTO DI MINIMO ISOLATO IN P^*.

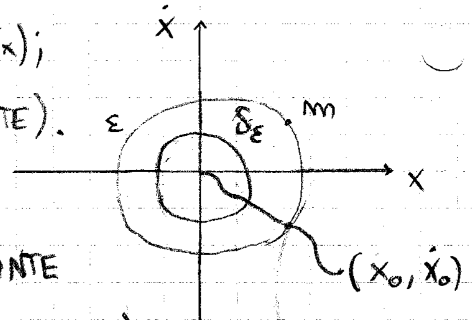
(x^* È PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE SE UNA PICCOLA PERTURBAZIONE NELLO SPAZIO DELLE FASI - POSIZIONE, VELOCITÀ - LASCIA IL SISTEMA VICINO A x^* INDEFINITAMENTE:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta_\varepsilon>0 : \quad |x(0)-x^*|^2 + \alpha|\dot{x}(0)|^2 < \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow \ |x(t)-x^*|^2 + \alpha|\dot{x}(t)|^2 < \varepsilon$ (α È UNA COSTANTE, PER LE DIMENSIONI)

CHE SI GENERALIZZA A $\sum_h |q_h(0) - q_h^*|^2 + \alpha|\dot{q}_h(0)|^2 < \delta_\varepsilon \Rightarrow \sum_h |q_h(t) - q_h^*|^2 + \alpha|\dot{q}_h(t)|^2 < \varepsilon$)

DIMOSTRAZIONE:



SIA L'ORIGINE UN PUNTO DI MINIMO ISOLATO PER $U(x)$;

SIA $U(0)=0$ ($U(x)$ È DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE).

LA FUNZIONE $E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ È CONTINUA, SEMPRE POSITIVA (NULLA SOLO NELL'ORIGINE) E COSTANTE LUNGO IL MOTO (LA LAGRANGIANA NON DIPENDE DAL TEMPO).

PER ASSURDO, IMMAGINO ESISTA UN PUNTO NELLO SPAZIO DELLE FASI $P=(x_0,\dot{x}_0)$

$\exists \ \dot{x}_0, x_0 : \ (x(t), \dot{x}(t)) \notin I(0,\varepsilon)$, OVVERO O NON È DI EQ. STABILE.

LUNGO LA FRONTIERA, $E(x,\dot{x})$ HA UN MINIMO m (WEIERSTRASS SU UN COMPATTO) CON $m>0$ (INFATTI $E>0$). PER USCIRE DALL'INTORNO ε, IL PUNTO P DEVE AVERE $E \geq m > 0$; MA ALLORA LA AVEVA ANCHE PRIMA, QUANDO STAVA IN δ_ε. MI BASTA SCEGLIERE δ_ε TALE CHE $E < \frac{m}{2}$.

↳ INFATTI E SI CONSERVA.

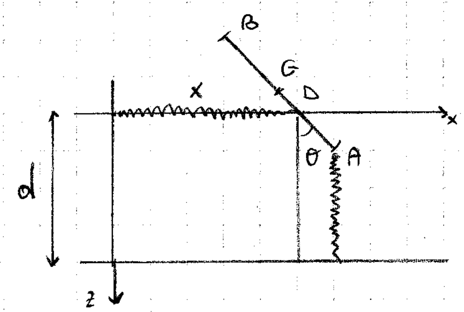
IN PRATICA, CERCO

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1, q_2) = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 0$$

SE LA FUNZIONE SI APPROSSIMA CON UNA FORMA QUADRATICA,

$$U(q_1, q_2) \simeq U_0 + U_{11} q_1^2 + U_{12} q_1 q_2 + U_{21} q_2 q_1 + U_{22} q_2^2$$

E GUARDO L'HESSIANO.



ESEMPIO

PROBLEMA GIÀ VISTO IN PRECEDENZA

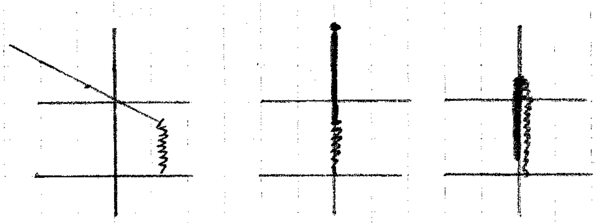
$$U = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k \left(d - \frac{L}{4}\cos\theta\right)^2 + Mg \frac{L}{4}\cos\theta$$

PER $d > \frac{L}{4}$, TROVA LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E LORO STABILITÀ.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = kx \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = k\left(d - \frac{L}{4}\cos\theta\right)\frac{L}{4}\sin\theta - Mg\frac{L}{4}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

LA SOLUZIONE DIPENDERÀ DAL RAPPORTO

$$\lambda = \frac{kL}{Mg}$$



IN EFFETTI, RACCOGLIENDO $\sin\theta$

$$\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \pi$$

ALTRIMENTI

$$\frac{kL}{4}\cos\theta = kd - Mg \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{4(kd - Mg)}{kL}$$

QUESTA SOLUZIONE ESISTE SE

$$\left|\frac{4(kd - Mg)}{kL}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad k\left(d - \frac{L}{4}\right) < Mg < k\left(d + \frac{L}{4}\right)$$

CONDIZIONE DI ESISTENZA DI $\bar{\theta}$.

STUDIAMO LA STABILITÀ CALCOLANDO L'HESSIANO.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = K$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} = 0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \cos\theta \left[\frac{LK}{4}\left(d - \frac{L}{2}\cdot\cos\theta\right) - \frac{MgL}{4} \right] + \sin^2\theta \, \frac{KL^2}{16}$$

OTTENGO

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{KL^2}{16}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) + \cos\theta\left(\frac{KLd}{4} - \frac{MgL}{4}\right) \end{pmatrix}$$

L'ELEMENTO a_{22} DISCRIMINA, IN QUANTO $K > 0$.

1. $\theta = 0 \quad X = 0$

$$-\frac{KL^2}{16} + \left(\frac{KLd}{4} - \frac{MgL}{4}\right) > 0 \;; \qquad -\frac{KL}{4} + Kd - Mg > 0 \;; \qquad Mg < K\left(d - \frac{L}{4}\right)$$

SI NOTI CHE, SE QUESTA POSIZIONE È DI EQUILIBRIO STABILE, ALLORA $\nexists \bar{\theta}$.

2. $\theta = \pi \quad X = 0$

$$-\frac{KL}{4} - \left(Kd - Mg\right) > 0 \;; \qquad Mg > K\left(d + \frac{L}{4}\right)$$

3. $\cos\theta = \dfrac{4(Kd - Mg)}{KL}$

SCRIVO $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ COME $1 - 2\cos^2\theta$ E SOSTITUISCO:

$$\frac{KL}{4}\left[1 - 2\left(\frac{Kd - Mg}{KL/4}\right)^2\right] + \frac{(Kd - Mg)^2}{KL/4} > 0$$

$$\left(\frac{KL}{4}\right)^2 - (Kd - Mg)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{KL}{4}\right| > |Kd - Mg| \quad \Rightarrow \begin{cases} Mg > K\left(d - \frac{L}{4}\right) \\ Mg < K\left(d + \frac{L}{4}\right) \end{cases}$$

- PARENTESI DI POISSON

SIANO f, g DUE FUNZIONI DELLE VARIABILI CANONICHE q E p,

$f(q|p|t)$

$g(q|p|t)$

SI DEFINISCONO PARENTESI DI POISSON

$$[f,g] = \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right)$$

PROPRIETÀ:

① $[f,g] = -[g,f]$ (ANTISIMMETRIA)

② BILINEARITÀ

$[\alpha f, g] = \alpha [f,g]$

$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$

③ IDENTITÀ CICLICA DI JACOBI

$[[f,g],h] + [[h,f],g] + [[g,h],f] = 0$

SI OSSERVA INOLTRE CHE

$[q_h, q_k] = 0$

$[p_h, p_k] = 0$

$[q_h, p_k] = \delta_{hk}$

INFATTI

$k = h = l$

$$[q_h, p_k] = \sum_{l=0}^{m} \left(\underbrace{\frac{\partial q_h}{\partial q_l}}_{1} \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_l}}_{1} - \cancel{\frac{\partial q_h}{\partial p_l} \frac{\partial p_k}{\partial q_l}} \right) = 1$$

(LE q E LE p SONO TUTTE INDIPENDENTI TRA LORO).

DALLE EQUAZIONI DI HAMILTON,

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

$$[q_h, H] = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial q_h}{\partial q_l} \overset{h=l}{\frac{\partial H}{\partial p_l}} - \cancel{} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

PERCIÒ VALE

$$\dot{q}_h = [q_h, H]$$

INOLTRE

$$\dot{p}_h = - \frac{\partial H}{\partial q_h}$$

$$[p_h, H] = \sum_{l=1}^{m} \left(\cancel{\frac{\partial p_h}{\partial q_l}} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \overset{h=l}{\frac{\partial p_h}{\partial p_l}} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = - \frac{\partial H}{\partial q_h}$$

POSSO ALLORA RISCRIVERE LE EQUAZIONI DI HAMILTON COME

$$\dot{q}_h = [q_h, H]$$
$$\dot{p}_h = [p_h, H]$$

SI TROVERÀ, IN MECCANICA QUANTISTICA,

$$\dot{x} = \underbrace{[x, H]}_{\text{COMMUTATORE}} = xH - Hx$$

PERCHÈ "SIMPLETTICA"?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_h \\ p_1 \\ \vdots \\ p_h \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & & & & \end{array} \right)}_{2m} \Big\} 2m \qquad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \\ \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_m \end{pmatrix} \begin{matrix} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ = \frac{\partial H}{\partial p_m} \\ \vdots \end{matrix}$$

UNITÀ SIMPLETTICA

GRUPPO SIMPLETTICO: $S_p^{-1} \cdot S_p = \mathbb{1}^{Sp}$

- DATA

$$x(q|p|t)$$

SCRIVO LA SUA DERIVATA TOTALE COME

$$\dot{x} = [x, H] + \frac{\partial x}{\partial t}$$

INFATTI

$$\dot{x} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial x}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x}{\partial p_h} \dot{p}_h \right] + \frac{\partial x}{\partial t}$$

SOSTITUENDO PER $\dot{q}_h$, $\dot{p}_h$ (HAMILTON) RITROVO LA TESI.

DA QUI RICAVO, AD ESEMPIO, CHE SE X NON DIPENDE DAL TEMPO ESPLICITAMENTE

$$\dot{x} = 0 \iff [x, H] = 0$$

- DATE

$x(q|p|t)$, $y(q|p|t)$ COSTANTI DEL MOTO, $\dot{x} = 0$ E $\dot{y} = 0$,

ALLORA

$[x, y]$ E' CONSERVATA.

INFATTI

$$[x, H] + \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$[y, H] + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE

$$\left[[x, y], H \right] + \frac{\partial [x, y]}{\partial t} \overset{?}{=} 0 \qquad \left(= \dot{[x, y]} \right)$$

$$= \left[[x, y], H \right] + [\partial_t x, y] + [x, \partial_t y] = 0$$

MA

$$\partial_t x = -[x, H]$$
$$\partial_t y = -[y, H]$$

PER IPOTESI.

PERCIÒ

$$[[X,Y],H] + [[H,X],Y] + [[Y,H],X] = 0 .$$

HO USATO L'ANTISIMMETRIA PER LE PERMUTAZIONI E RITROVATO L'IDENTITÀ CICLICA DI JACOBI.

· DUE GRANDEZZE SONO DETTE COMPATIBILI TRA LORO SE

$$[X,Y] = 0$$

IN MECCANICA QUANTISTICA,

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

SONO DIVERSI (OVVERO NON COMMUTANO)

$$p_x X \quad , \quad X p_x$$

$[p, X] \neq 0$ E QUINDI NON LI POSSO MISURARE ENTRAMBI CON PRECISIONE ARBITRARIA.

QUAND'È CHE

$$[X,Y] = 0 \quad ?$$

SE

$$Y = \phi(X) ,$$

$$[X,Y] = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial X}{\partial q_h} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial p_h} \right) - \frac{\partial X}{\partial p_h} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial q_h} \right) \right] = 0$$

(AD ESEMPIO, $[p_x, p_x^3] = 0$. LE MATRICI A E A^3 COMMUTANO).

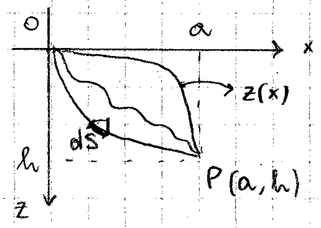
SE

$X(q_1, q_3, q_8, p_2, p_5, p_7)$ OVVERO SE X CONTIENE p_h, Y NON

$Y(q_1, \cancel{q_2}, q_3, q_4, \cancel{q_5}, \cancel{p_1}, \cancel{p_3}, \cancel{p_8}, p_2, p_4, p_7)$ DEVE AVERE IL q_h CORRISPONDENTE.

$$\Rightarrow [X,Y] = 0$$

· PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE



CHE FORMA DEVO DARE ALLO SCIVOLO PER FAR SÌ CHE UN GRAVE CADA DA O A P NEL MINOR TEMPO POSSIBILE? (PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA)

$$T = \int_0^T dt \qquad v = \frac{ds}{dt}, \quad dt = \frac{ds}{v}$$

$$= \int \frac{ds}{v(x)} \qquad \frac{1}{2} m v^2 = mgz \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sqrt{2g\,z(x)}$$

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{2g\,z(x)}} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_0^a dx \, \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g\,z(x)}}$$

POICHÈ È

$$T = T[z(x)]$$

SI DICE CHE T È UN FUNZIONALE DI $z(x)$: DIPENDE DALLA SCELTA DI $z(x)$.

CONSIDERIAMO ORA

$$L(q, q', t) \in C^2$$

$$q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}(t) \qquad \Rightarrow \qquad L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

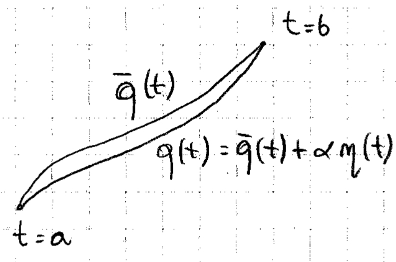
CONDIZIONI INIZIALI:

$$\begin{cases} q(a) = \vec{A} \\ q(b) = \vec{B} \\ \text{TEMPO TOTALE} = T \end{cases}$$

$$I[q(t)] = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

L VIVE NELLO SPAZIO DELLE FASI.

IN BASE A COME SCELGO UNA PARTICOLARE $q(t)$, LA METTO LÀ DENTRO E OTTENGO UN NUMERO.



$\eta(a) = \eta(b) = 0$

PRENDO

$$q(t) = \bar{q}(t) + \underbrace{\alpha\, \eta(t)}_{\delta q(t)} \qquad \text{CON } \eta(t) \in C^2$$

CHE È UN MODO DI FAR VARIARE LE CURVE ATTORNO A $\bar{q}(t)$.

SOSTITUENDO NELL'ESPRESSIONE PER I,

$$I[q(t)] = \int_a^b dt\, L(\bar{q}+\alpha\eta,\ \dot{\bar{q}}+\alpha\dot{\eta},\ t)$$

I È UN FUNZIONALE DELLE q, MA UNA VOLTA FISSATE q E η, I DIVENTA FUNZIONE DI α.

SVILUPPANDO $I(\alpha) = I(\alpha=0) + \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha := I(0) + \delta I$

$$\delta I(\alpha) = \alpha \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \alpha\int_a^b dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right)$$

$L = L(q, \dot{q}, t)$

INTEGRANDO PER PARTI,

$$\delta I = \alpha\left[\eta(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t=a}^{t=b} - \alpha\int dt\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta - \frac{\partial L}{\partial q}\eta(t)\right)$$

$$= \alpha\underbrace{\left[\eta(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t=a}^{t=b}}_{=0} - \alpha\int dt\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\eta(t)$$

$=0$, PERCHÈ $\eta(a) = \eta(b) = 0$

VEDI DOPO, APPROFONDIMENTO.

SI OTTIENE

$$\delta I = \alpha\int_a^b dt\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta(t)$$

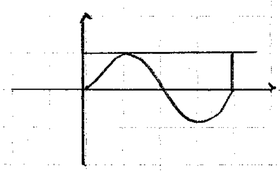
ESISTE UN PUNTO IN CUI LA "VARIAZIONE PRIMA" È NULLA?

$\downarrow$

FUNZIONE $q(t)$

CI SONO DEI PUNTI (TRAIETTORIE!) DI STAZIONARIETÀ PER IL FUNZIONALE?

$\delta I = 0 \quad \forall \eta(t)$ PER OGNI SCELTA DI $\eta(t)$.



UNA FUNZIONE COSTANTE MOLTIPLICATA PER UN SENO HA INTEGRALE ZERO.

DIMOSTREREMO CHE $I[q]$ È STAZIONARIO SSE

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

CHIAMO AZIONE

$$A[q] = \int dt\, L(q, \dot{q}, t)$$

SE UNA CERTA TRAIETTORIA q È TALE DA SODDISFARE

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

ALLORA QUELLA q MINIMIZZA L'AZIONE.

· PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON

OGNI MOTO NATURALE (i.e. SODDISFACENTE L'EQUAZIONE DI LAGRANGE) DI UN SISTEMA OLONOMO A VINCOLI PERFETTI SOGGETTO A FORZE DERIVANTI DA UN POTENZIALE È CARATTERIZZATO, NELLA CLASSE DEI MOTI VARIATI SINCRONI (CIOÈ CHE AVVENGONO FRA GLI STESSI INTERVALLI DI TEMPO) E CHE SI SVOLGONO FRA LE STESSE CONFIGURAZIONI ESTREME, DALLA PROPRIETÀ DI RENDERE STAZIONARIA L'AZIONE HAMILTONIANA

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L \, dt$$

· ESEMPIO

$$F_t = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{F}{m}\Delta t$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

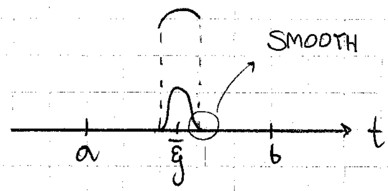
DETERMINISTICO, MA PUNTO PER PUNTO.

L'AZIONE È UNA QUANTITÀ GLOBALE. MAGARI LA TRAIETTORIA SCELTA ALL'INIZIO PARE SFIGATA, MA L'AZIONE SAPEVA GIÀ CHE GLOBALMENTE ERA LA MIGLIORE.

LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

$$\int_a^b dt \; \phi(t)\, \eta(t) = 0 \qquad \begin{matrix} \forall \eta(t) \in C^2 \\ \eta(a)=0,\ \eta(b)=0 \end{matrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi(t) = 0$$

DIMOSTRAZIONE:



PER ASSURDO, $\phi(\bar{\xi}) > 0$.

POICHE' ϕ E' CONTINUA, $\exists (\xi_1, \xi_2)$ IN CUI $\phi(t) > 0$.

MA SE SCELGO

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{SE } a \le t < \xi_1 \\ (t-\xi_1)^m (\xi_2 - t)^m & \text{SE } \xi_1 \le t \le \xi_2 \\ 0 & \text{SE } \xi_2 < t \le b \end{cases}$$

(NOTA CHE NON VALE

PERCHE' NON E' C^2).

NOTO CHE E' DI CLASSE C^2 (SE $m > 2$) MA L'INTEGRALE NON SI ANNULLA.

DERIVAZIONE DI δI (UMANO)

$$\delta I = \alpha \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \alpha \int_a^b \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) dt$$

GUARDANDO SOLO IL SECONDO PEZZO DI OGNI SOMMA,

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial t} dt = \alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \underbrace{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}_{\eta(t)} \right]_{t=a}^{t=b} - \alpha \int_a^b \frac{\partial q}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

IL PRIMO PEZZO SPARISCE $(\eta(a) = \eta(b) = 0)$ E RIMANE

$$\delta I = \alpha \int_a^b \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{\eta_i(t)} dt$$

PRINCIPIO VARIAZIONALE AMPLIATO

$$A = \int_a^b dt \; L(q(t), \dot q(t), t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

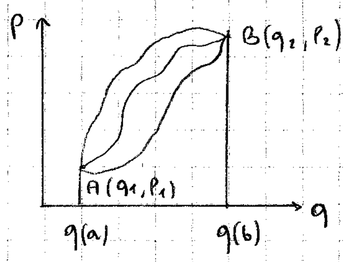
ESISTE UN EQUIVALENTE DELL'AZIONE NELLA MECCANICA HAMILTONIANA DA CUI DERIVARE LE EQUAZIONI DI HAMILTON?

$$L \rightsquigarrow H(q, \dot q, t) \rightsquigarrow H(q, p, t)$$

$$H = \sum_h^1 p_h \dot q_h - L$$

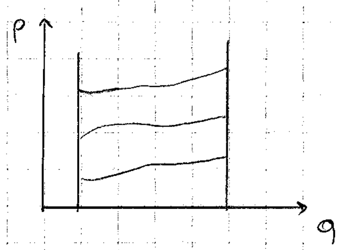
SI HA L'AZIONE AMPLIATA

$$A'[q,p] = \int_a^b dt \left[\sum_{h=1}^{m} \dot q_h p_h - H(q,p,t) \right]$$



IMPONGO LA CONDIZIONE CHE A UN CERTO ISTANTE $q = q(a)$ E DOPO UN CERTO TEMPO $q = q(b)$. (NON HO IMPOSTO CONDIZIONI SU p).

$$\delta A' = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{m} \left(\delta \dot q_h p_h + \dot q_h \delta p_h - \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h \right) \right] dt \; *$$



CON

$$q(t) = \bar q(t) + \underbrace{\alpha \eta(t)}_{\delta q(t)}$$

INTEGRANDO PER PARTI IL PRIMO TERMINE,

$$\delta A' = \left[\sum_h^1 \delta q_h p_h \right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \sum_h^1 \left[-\delta q_h \dot p_h - \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h + \dot q_h \delta p_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h \right] dt$$

NULLO, DATE LE CONDIZIONI INIZIALI FISSATE $(\delta q_h(t) = \delta q_h(t_0) = 0)$

PARTI

LA TRAIETTORIA È UNA CURVA NELLO SPAZIO DELLE FASI E PERTURBARLA SIGNIFICA VARIARE SIA LE p CHE LE q AGGIUNGENDO δp E δq (QUESTE ULTIME NULLE AGLI ESTREMI), INDIPENDENTI TRA LORO.

IMPONGO

$$\delta A' = 0$$

$$\int_{t_0}^{t} dt \, \Sigma_h \left[\left(-\dot{p}_h - \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) \delta q_h + \left(\dot{q}_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} \right) \delta p_h \right] = 0$$

PER IL LEMMA FONDAMENTALE, PERCHÈ CIÒ SIA VERO PER OGNI SCELTA DI δq_h E δp_h DEVE ESSERE

$$\begin{cases} \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases}$$

SI NOTI CHE L'AZIONE AMPLIATA COINCIDE CON QUELLA USUALE SOLO SE

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

INOLTRE, SI NOTI CHE SE SI IMPONESSERO COME CONDIZIONI INIZIALI NON SOLO LE q MA ANCHE LE p, L'AZIONE AMPLIATA NON AVREBBE PUNTI STAZIONARI (IN UN SISTEMA HAMILTONIANO, IL MOTO È PERFETTAMENTE DETERMINATO DALLE CONDIZIONI INIZIALI). * } NO.

NOTA: IN EFFETTI, NELLA DERIVAZIONE CON LA LAGRANGIANA SI IMPONGONO LE CONDIZIONI INIZIALI $q(a) = \vec{A}$, $q(b) = \vec{B}$, $T_{TOTALE} = t$. NESSUN VINCOLO, QUINDI, SULLE VELOCITÀ $\dot{q}$.

NOTA *: QUESTA È UNA STRONZATA. DUE PUNTI $q(t_0)$ E $p(t_0)$ INDIVIDUANO IL MOTO IN UN SISTEMA HAMILTONIANO, MA NON PRIMA DI AVER RICAVATO LE EQUAZIONI CANONICHE. QUELLO CHE È VERO È CHE SE $q(a)$ E $q(b)$ NON CADONO LUNGO UNA TRAIETTORIA NATURALE, A' NON È MAI STAZIONARIA. IN ANALOGIA CON IL CASO LAGRANGIANO, QUI NON SERVE IMPORRE $\delta p(a) = \delta p(b) = 0$; MA RICORDIAMO CHE IL PRINCIPIO QUI È PIÙ AMPIO, E $p \neq \dot{q}$. (VEDI GOLDSTEIN P. 355)

· FUNZIONE PRINCIPALE DI HAMILTON

$$A'[q,p] = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h p_h - H(q(t), p(t), t) \right] dt$$

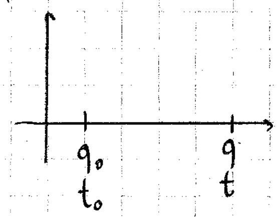
SE IMPONGO CHE LE $q(t)$ E $p(t)$ DEBBANO SODDISFARE

$$q(t) \rightarrow \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad p(t) \rightarrow \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

QUESTO OGGETTO NON È PIÙ UN FUNZIONALE, MA UNA FUNZIONE:

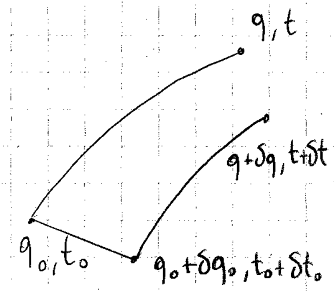
$$S(q, t / q_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_h \dot{q}_h p_h - H(q(\tau), p(\tau), \tau) \right] d\tau$$

DUE PUNTI $q_1(t_1), q_0(t_0)$ INDIVIDUANO COMPLETAMENTE IL MOTO. *

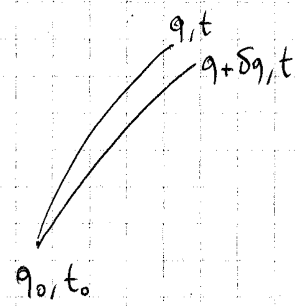


È DETTA FUNZIONE CARATTERISTICA DI HAMILTON.
LA CONOSCO ESPLICITAMENTE SOLO DOPO AVER RISOLTO IL MOTO E TROVATO $q(\tau)$, $p(\tau)$.

COSA SUCCEDE SE SPOSTO GLI ESTREMI DELLA TRAIETTORIA, MANTENENDOMI COMUNQUE SU UNA TRAIETTORIA FISICA (CHE SODDISFA LE EQUAZIONI DI HAMILTON)? DI QUANTO VARIA S?



CAMBIAMO IL PUNTO DI ARRIVO A $q+\delta q$ TENENDO FISSO IL TEMPO DI ARRIVO t. SI HA



$$\delta S = \int_{t_0}^{t} d\tau \left[\delta\dot{q} p + \dot{q}\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p \right]$$

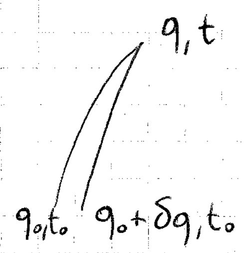
$$= \Big[\delta q \cdot p \Big]_{t_0}^{t} + \int d\tau \left(-\delta q \dot{p} + \dot{p}\,\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p \right)$$

SE LA TRAIETTORIA È FISICA, L'INTEGRALE A DESTRA È NULLO, QUINDI

$$\delta S = \Big[\delta q \cdot p \Big]_{t_0}^{t} = p(t)\,\delta q(t) \qquad (\delta q(t_0) = 0)$$

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q}$$

SI IMMAGINI ORA DI PARTIRE DA UN ALTRO PUNTO.



SIMILMENTE,

$$\delta S = \left[\delta q \cdot p \right]_{t_0}^{t} - \int (\cancel{\;}) \, dt$$

POICHÈ $\delta q(t_0) \neq 0$, $\delta q(t) = 0$,

$$\delta S = -p(t_0)\,\delta q(t_0) \quad \Rightarrow \quad p_0(t_0) = -\frac{\partial S}{\partial q(t_0)}$$

SE CAMBIO IL TEMPO A $t + \delta t$, CAMBIANO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE.

$$\frac{dS}{dt} = L(t) \qquad \text{(TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO)}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_h^{l} \frac{\partial S}{\partial q_h} \dot{q}_h = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_h^{l} p_h \dot{q}_h = L$$

HO OTTENUTO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q} = p \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_h^{l} p_h \dot{q}_h = -H \end{cases}$$

E AL CONTRARIO, PARTENDO A UN TEMPO DIVERSO,

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} + \sum_h^{l} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_{0h}}}_{-p_{0h}} \dot{q}_{0h} = -L(t_0) \;^{**} \qquad \dot{q}_0 = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0}$$

$$-L = \frac{\partial S}{\partial t_0} - \sum_h^{l} p_{0h} \dot{q}_{0h} \qquad ^{**} \int_{t_0}^{t} L(\tau)\,d\tau = -\int_{t}^{t_0} L(\tau)\,d\tau$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = \sum_h^{l} p_{0h} \dot{q}_{0h} - L(t_0) = H(t_0)$$

* NOTA: HO ALTRI MODI PER INDIVIDUARE UN MOTO, MA IN EFFETTI t_0 E t_1 LI AVREI COMUNQUE DOVUTI SPECIFICARE (SONO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE).

OTTENGO IL SET DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI DETTE DI HAMILTON - JACOBI:

$$\frac{\partial S}{\partial q_h} = p_h \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q,p,t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_{0_h}} = -p_{0_h} \qquad \frac{\partial S}{\partial t_0} = H(q_0,p_0,t_0)$$

(LANDAU 1 P. 202)

· <u>DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA</u> (DISPENSE)

PERTURBIAMO INFINITESIMAMENTE LE POSIZIONI INIZIALI E FINALI (q_0, q) E ANCHE I TEMPI INIZIALI E FINALI (t_0, t). SI RICORDA CHE IL MOTO È COMPLETAMENTE DETERMINATO DALLA CONOSCENZA, NELLO SPAZIO DELLE FASI, DI DUE PUNTI (q_0,t_0) E (q_1,t_1). SI HA

$$S(q,t|q_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_h p_h \frac{dq(\tau)}{d\tau} - H(q(\tau),p(\tau),\tau)\right] d\tau$$

APPLICANDO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL C.I.,

$$\delta S = \sum_h p_h \delta q_h - H(q,p,t)\delta t - \sum_h p_{0_h} \delta q_{0_h} + H(q_0,p_0,t)\delta t_0$$

MA VALE ANCHE

$$\delta S = \sum_h \frac{\partial S}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial S}{\partial t}\delta t + \sum_h \frac{\partial S}{\partial q_{0_h}}\delta q_{0_h} + \frac{\partial S}{\partial t_0}\delta t_0$$

PER IDENTIFICAZIONÉ,

$$\frac{\partial S}{\partial q_h} = p_h \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q,p,t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_{0_h}} = -p_{0_h} \qquad \frac{\partial S}{\partial t_0} = H(q_0,p_0,t_0)$$

- FOCUS: TRASFORMATA DI LEGENDRE

VOGLIO PASSARE DA

$F_V(a,t)$

A UNA NUOVA

$F_N(b,t)$ CON $b = \frac{\partial F_V}{\partial a}$

SCRIVO

$F_N(b,t) = F_V(a,t) - ab$ (PRODOTTO TRA VECCHIA E NUOVA)

$$dF_N = \frac{\partial F_N}{\partial b} db + \frac{\partial F_N}{\partial t} dt$$

$$dF_N = d[F_V(a,t) - ab]$$

$$= \frac{\partial F_V}{\partial a} \cancel{da} + \frac{\partial F_V}{\partial t} dt - \cancel{b\,da} - a\,db$$

$$= \frac{\partial F_V}{\partial t} dt - a\,db$$

IDENTIFICANDO,

$$a = -\frac{\partial F_N}{\partial b} \qquad \frac{\partial F_V}{\partial t} = \frac{\partial F_N}{\partial t}$$

QUANDO VOGLIO PASSARE DA

$F_V(a_h, c, t) \longrightarrow F_N(b_h, c, t)$ CON $b_h = \frac{\partial F_V}{\partial a_h}$,

SCRIVO

$$F_N(b_h, c, t) = F_V(a_h, c, t) - \sum_h a_h b_h$$

(VEDI ANCHE FOCUS TERMODINAMICA SULL' INTERPRETAZIONE GEOMETRICA)

TRASFORMAZIONI CANONICHE

$\{q, p\}$ SET DI VARIABILI DESCRITTE DALL' HAMILTONIANA

$$H \ , \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\{q, p\} \rightsquigarrow \{Q, P\}$$

$$Q_r = Q_r(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n, t)$$
$$P_r = P_r(q_1, p_1, \dots, q_m, p_m, t)$$

INVERTIBILE SE

$$\det\left(\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\right) \neq 0$$

(TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE)

LA TRASFORMAZIONE È CANONICA SE $\exists H'$:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

È COMPLETAMENTE CANONICA SE

$$H(q,p,t) \rightsquigarrow H' = H\big(q(Q,P), p(Q,P), t\big)$$

CI METTO LE q ESPRESSE IN FUNZIONE DI Q, P: OTTENGO UNA FUNZIONE DI Q, P.

CONDIZIONE DI LIE

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÈ UNA TRASFORMAZIONE SIA CANONICA È CHE SI TRASFORMI LA FORMA LINEARE

$$\sum_{h=1}^{m} p_h dq_h = \underset{\mathbb{R}}{\lambda} \left(\sum_{l=1}^{m} P_l dQ_l\right) + \Psi dt + dF$$

OVVERO dF DEVE ESSERE UN DIFFERENZIALE ESATTO, CON $F(q,p,t)$, $\Psi(q,p,t)$ FUNZIONI DELLE FASI.

- DIFFERENZIALE TOTALE

$$dQ = A_1(x_1 .. x_m)dx_1 + A_2(x_1 .. x_m)dx_2 + \dots + A_m(x_1 .. x_m)dx_m$$

È DIFFERENZIALE ESATTO SSE $\exists Q(x_1 .. x_m)$ t.c.

$$A_1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad A_2 = \frac{\partial Q}{\partial x_2} \quad \dots \quad A_m = \frac{\partial Q}{\partial x_m}$$

Q È DETTA FUNZIONE POTENZIALE. ALLORA

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial Q}{\partial x_m}dx_m$$

- ESEMPIO

$$\begin{cases} Q = p \\ P = q \end{cases} \quad \text{È CANONICA?}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{Q} = -\frac{\partial H(P,Q)}{\partial P}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{P} = \frac{\partial H(P,Q)}{\partial Q}$$

BASTA SCEGLIERE

$$H'(Q,P) = -H(P,Q)$$

E SI OTTIENE

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

DALLA CONDIZIONE DI LIE,

$$p\,dq \Rightarrow Q\,dP \overset{?}{=} \lambda P\,dQ + dF \qquad (\Psi = 0)$$

SCEGLIENDO $\lambda = -1$,

$$Q\,dP \overset{?}{=} -P\,dQ + df$$

$$Q\,dP + P\,dQ = d(QP)$$

PERCIO' LA CONDIZIONE DI LIE È SODDISFATTA CON $F = QP$.

· DIMOSTRIAMO CHE LA CONDIZIONE DI LIE È SUFFICIENTE. PARTO DA

$$\sum_h' p_h dq_h = \left(\sum_\ell P_\ell\, dQ_\ell\right) + \Psi\,dt + df$$

SO CHE

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

IMPLICATE DAL PRINCIPIO VARIAZIONALE

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_h' \dot q_h p_h - H(q,p,t)\right) = 0$$

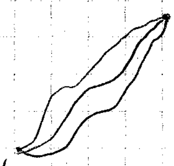
CON VARIAZIONI NULLE AGLI ESTREMI.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_h' \dot Q_h P_h + \Psi + \frac{df}{dt} - H(q(Q,P), p(Q,P), t) \right] = 0$$

$$\delta \left\{ \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum' \dot Q P - H'(Q,P,t) \right] + \left[F\right]_{t_0}^{t_1} \right\}$$

CON

$$\Psi - H(q(Q,P), p(Q,P), t) = -H'(Q,P,t)$$



INOLTRE

$$F = F(q,p,t)$$

$$\delta\left[F(q_1,p_1,t_1) - F(q_0,p_0,t_0)\right] = 0$$

$\downarrow$

A t_0 E A t_1 LA VARIAZIONE È NULLA, QUINDI LO È ANCHE LA VARIAZIONE DELLA DIFFERENZA.

OTTENGO

$$\delta \left\{ \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum' \dot Q P - H'(Q,P) \right] \right\} = 0$$

CHE IMPLICA

$$\dot P = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \qquad \dot Q = \frac{\partial H'}{\partial P} \qquad \underline{H' = H - \Psi}$$

(VEDI P. 370 GOLDSTEIN)

FUNZIONI GENERATRICI DI TRASFORMAZIONI CANONICHE

$F_1(q, Q, t)$

CON LA CONDIZIONE $\det\left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial Q_k}\right) \neq 0$

IMPONGO

$$\sum_h p_h dq_h - P_h dQ_h = \Psi dt + \underbrace{\left[\sum_h \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial F_1}{\partial Q_h} dQ_h\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt\right]}_{dF}$$

IDENTIFICO

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}$$

$$-P_h = \frac{\partial F_1}{\partial Q_h}$$

$$\Psi = -\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

E MI BASTA SCEGLIERE COME HAMILTONIANA

$$H' = H - \Psi = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

ESEMPIO

LA FUNZIONE

$$F_1(q, Q) = \sum_{r=1}^{m} q_r Q_r$$

GENERA

$$\begin{cases} p_h = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_h} = Q_h \\ -P_h = \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_h} = q_h \end{cases}$$

CHE È LA TRASFORMAZIONE CANONICA VISTA IN PRECEDENZA.

LA SECONDA CLASSE DI FUNZIONI GENERATRICI È

$F_2(q, P, t)$

USANDO LA TRASFORMATA DI LEGENDRE

$$dF_1(q,Q,t) = dF_2(q,P,t) - d\left[\sum_h Q_h P_h\right]$$
$$= dF_2 - \sum P dQ - \sum Q dP$$

SOSTITUENDO NELLA CONDIZIONE DI LIE,

$$\sum_h \left[p_h dq_h - \cancel{P_h dQ_h}\right] = \Psi dt + dF_1(q,Q)$$
$$= \Psi dt + dF_2 - \cancel{\sum P dQ} - \sum Q dP$$

$$\sum_h \left[p_h dq_h + Q_h dP_h\right] = \Psi dt + dF_2(q,P)$$
$$= \Psi dt + \sum\left(\frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

EGUAGLIANDO,

$$\begin{cases} p_h = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_h} \\ Q_h = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_h} \\ \Psi = -\dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \quad \text{E} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (\text{INFATTI } H' = H - \Psi)$$

COME TERZA CLASSE HO

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_h p_h q_h$$

$\uparrow$ QUELLA CHE VOGLIO METTERE

$\leftarrow$ QUELLA CHE VOGLIO TOGLIERE

$$dF_3 = dF_1 - p dq - q dp$$

SOSTITUENDO NELLA CONDIZIONE DI LIE,

$$\sum_h p_h dq_h - P_h dQ_h = \psi\, dt + dF_1(q,Q) + \sum (p dq + q dp)$$

$$\sum_h (-q_h dp_h - P_h dQ_h) = \psi\, dt + dF_3(p,Q)$$

$$= \psi\, dt + \sum_h \left[\frac{\partial F_3}{\partial p} dp + \frac{\partial F_3}{\partial Q} dQ \right] + \frac{\partial F_3}{\partial t} dt$$

INFINE, USANDO UNA DOPPIA TRASFORMATA DI LEGENDRE,

$$F_4(p,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum(-pq + PQ)$$

$$dF_4(p,P,t) = dF_1 + \sum(-p dq - q dp + P dQ + Q dP)$$

SOSTITUENDO,

$$\sum_h p_h dq_h - P_h dQ_h = \psi\, dt + dF_1(q,Q)$$

$$= \psi\, dt + dF_4(p,P) + p dq + q dp - P dQ - Q dP$$

$$\sum_h (-q_h dp_h + Q_h dP_h) = \psi\, dt + dF_4(p,P)$$

$$= \psi\, dt + \sum \left(\frac{\partial F_4}{\partial p} dp + \frac{\partial F_4}{\partial P} dP \right) + \frac{\partial F_4}{\partial t} dt$$

DA CUI

$$\begin{cases} -q_h = \dfrac{\partial F_4}{\partial p_h} \\ Q_h = \dfrac{\partial F_4}{\partial P} \\ \psi = \dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$$

- NOTA:

SE UNA TRASFOR. È CANONICA E INDIPENDENTE DAL TEMPO, ALLORA È COMPLETAMENTE CANONICA (A MENO DI UNA COSTANTE, OSSIA $H' = \lambda H$).

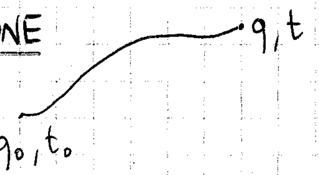
· ESEMPIO

$$F_2(q, P, t) = \sum_{l=1}^{n} f_l(q,t) P_l$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_h} P_l$$

$$Q_h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h} = f_h(q,t)$$

· INTERPRETAZIONE DEL MOTO COME TRASFORMAZIONE



CONSIDERIAMO UN CORPO CHE SI MUOVE CON MOTO NATURALE.

SCRIVIAMO ALLORA LA FUNZIONE PRINCIPALE

$$S(q_0, t_0 = 0; q, t)$$

CHE RIBATTEZZO

$$S(Q, 0, q, t)$$

E LA SCELGO COME

$$F_1 = S(q, Q, t)$$

SO, PER QUANTO VISTO PRIMA, CHE

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \qquad P_h = -\frac{\partial S}{\partial Q_h} \qquad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

RICORDANDO LE EQUAZIONI DI HAMILTON-JACOBI

$$1.\ \frac{\partial S}{\partial q_h} = p_h \qquad 3.\ \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q,p,t)$$

$$2.\ \frac{\partial S}{\partial q_0} = -p_0 \qquad 4.\ \frac{\partial S}{\partial t_0} = H(q_0, p_0, t_0)$$

(SI IDENTIFICHINO q_0, p_0 CON Q, P).

NOTO CHE LE PRIME DUE COINCIDONO. LA TERZA È VERA SCEGLIENDO

$H' \equiv 0$ (SIGNIFICA IN EFFETTI CHE LE NUOVE VARIABILI SONO COSTANTI NEL TEMPO)

POSSO INTERPRETARE LA FUNZIONE S COME UNA TRASFORMAZIONE CANONICA DAL SET DI COORDINATE (q, t) A QUELLE (q_0, t_0).

È UN MODO GEOMETRICO DI VEDERE IL MOTO.

RISOLVERE UN MOTO SIGNIFICA CONOSCERE

$$q(t) = q(q_0, p_0, t)$$
$$p(t) = p(q_0, p_0, t)$$

DATE LE CONDIZIONI INIZIALI, HO DI FATTO UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA q_0, p_0 E q, p.

- PARENTESI DI POISSON: INVARIANZA PER TRASFORMAZIONI CANONICHE

RICORDIAMO CHE SI DEFINISCONO PARENTESI DI POISSON DI

$f(q,p)$, $g(q,p)$

$$[f, g]_{q,p} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right)$$

USANDO UNA TRASFORMAZIONE,

$$q(Q,P),\ p(Q,P) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f'(Q,P) &= f(q(Q,P), p(Q,P)) \\ g'(Q,P) &= g(q(Q,P), p(Q,P)) \end{aligned}$$

SE CALCOLO

$$[f', g']_{Q,P} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f'}{\partial Q} \frac{\partial g'}{\partial P} - \frac{\partial f'}{\partial P} \frac{\partial g'}{\partial Q} \right)$$

SCOPRO CHE

$$[f', g']_{Q,P} = [f, g]_{q,p}$$

LE PARENTESI DI POISSON SONO INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI CANONICHE (SI PUÒ MOSTRARE CHE È VERO ANCHE SE f, g SONO FUNZIONI DEL TEMPO).

PER DIMOSTRARLO, RICORDIAMO CHE

$$\dot{x} = [x, H] + \partial_t x$$

IN CUI IL SECONDO TERMINE SCOMPARE SE x NON DIPENDE DA t.

IMMAGINIAMO UN SISTEMA FISICO CHE HA g COME HAMILTONIANA (POSSO SEMPRE TROVARNE UNO). ALLORA:

$$\dot{f}(q,p) = [f, g]_{q,p}$$

FACCIO IL CAMBIO DI VARIABILI

$$\dot{f}(Q,P) = [f'(Q,P), g'(Q,P)]_{Q,P}$$

FINE DELLA DIMOSTRAZIONE** (NEL CASO DI UNA TRASFORMAZIONE COMPLETAMENTE CANONICA, IN CUI LA NUOVA HAMILTONIANA È LA TRASFORMATA DI QUELLA VECCHIA*).

POSSO USARE LE PARENTESI DI POISSON PER VERIFICARE SE UNA TRASFORMAZIONE È CANONICA. INFATTI SI AVEVANO

$$[q_h, q_l] = 0 \qquad [p_h, p_l] = 0 \qquad [q_h, p_l] = \delta_{h,l}$$

ORA SI HANNO

$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p)$$

DEVE VALERE

$$[Q_h, P_l]_{q,p} = \delta_{h,l}$$

(DISCENDE DALLE PARENTESI FONDAMENTALI $[Q_h, P_l]_{Q,P} = \delta_{h,l}$)

* NOTA: QUESTO È VERO (A MENO DI UNA COSTANTE) OGNI VOLTA CHE LA TRASFORMAZIONE NON DIPENDE DAL TEMPO.

** NOTA: SEGUE DALLA CONSERVAZIONE DI $\frac{d}{dt}$ IN SEGUITO AL CAMBIO DI VARIABILI, CALCOLATA LUNGO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA DI HAMILTONIANA g.

- ESEMPIO

$(q,p) \to (Q,P)$

$$Q = \left(\frac{p}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad P = -3\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\beta}$$

TROVA β PERCHÈ SIA CANONICA. IMPONGO

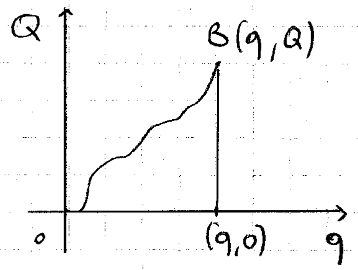
$$[Q,P]_{q,p} \equiv 1 = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}q^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\beta}\frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}\right] - \left[\frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}q^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{2}{3}}\beta q^{\beta-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}q^{-\frac{4}{3}+\beta}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\beta q^{\beta-\frac{4}{3}}$$

$$\beta - \frac{4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{4}{3}$$

TROVA $F(q,Q)$ CHE L'HA GENERATA.



$$p\,dq - P\,dQ = dF$$

$$p = 2qQ^3$$

$$P = -3\left(\frac{2qQ^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} q^{4/3} = -3q^2Q^2$$

SVOLGIAMO L'INTEGRALE DI LINEA (SCEGLIENDO UN PERCORSO FURBO):

$$F(q,Q) = \int p\,dq - \int P\,dQ$$

$$= \int_{(q,0)}^{(q,Q)} p\,dq - \int_{(q,0)}^{(q,Q)} P\,dQ$$

$$= -\int_{(q,0)}^{(q,Q)} P\,dQ = 3q^2\int_0^Q Q^2\,dQ = 3q^2\frac{Q^3}{3} = q^2Q^3$$

CONTROLLIAMO:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2qQ^3 \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -3q^2Q^2$$

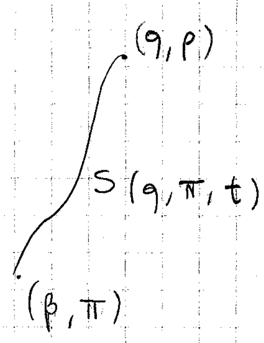
RISOLVERE IL MOTO CON HAMILTON - JACOBI

$$\begin{cases} H' = H + \dfrac{\partial S}{\partial t} \\ p_h = \dfrac{\partial S}{\partial q_h} \end{cases}$$

$(q,p) \rightarrow (\beta, \pi)$

$S = S_2(q, \pi, t)$

$F_2(q, \beta, t)$



IMPONIAMO $H' \equiv 0$, COSÌ CHE

$$\begin{cases} 0 = H + \dfrac{\partial S}{\partial t} \\ p_h = \dfrac{\partial S}{\partial q_h} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\pi}_k = -\dfrac{\partial H'}{\partial \beta_k} = 0 \\ \dot{\beta}_h = +\dfrac{\partial H'}{\partial \pi_h} = 0 \end{cases}$$

TRAMITE S HO UN LEGAME TRA (q,p) E LE CONDIZIONI INIZIALI.

$$H\left(q_h, \frac{\partial S}{\partial q_h}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$ DETTA EQUAZIONE DI HAMILTON - JACOBI.

$$\begin{cases} p_h = \dfrac{\partial S}{\partial q_h} \\ \beta_h = \dfrac{\partial S}{\partial \pi_h} \end{cases}$$

UNA VOLTA RICAVATO S, L'INTEGRALE GENERALE DELLA EQUAZIONE SOPRA, IL SISTEMA A FIANCO MI PERMETTE DI ESPLICITARE LA TRASFORMAZIONE:

$$\begin{cases} q_h = q_h(\pi, \beta, t) \\ p_h = p_h(\pi, \beta, t) \end{cases}$$

IN GENERALE IL PROBLEMA È DIFFICILE. SE PERÒ MI LIMITO A SISTEMI FISICI LA CUI HAMILTONIANA H NON DIPENDE DAL TEMPO,

$$H(q, p, \cancel{t}) = E$$

$$S\left(q \,\middle|\, \frac{\partial S}{\partial q} \,\middle|\, t^*\right) = W\left(q \,\middle|\, \frac{\partial S}{\partial q}\right) - Et$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

HO SPEZZATO LE DIPENDENZE DI S PER SEMPLIFICARE I CONTI. LO POSSO FARE PERCHÉ $H = E$. NON STO CERCANDO LA SOLUZIONE GENERALE: MI BASTA UNA SOLUZIONE.

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

HO SOSTITUITO NELL'EQ. DI H-J.

RISOLVIAMO L'OSCILLATORE ARMONICO

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2} q^2$$

*NOTA CHE INTEGRANDO IN dt L'EQUAZIONE DI H-J OTTENGO LA S IN FUNZIONE DELLE VARIABILI DA CUI DIPENDEVA H.

$$p \rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} \rightarrow \frac{\partial W}{\partial q}$$

ALLORA

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = E$$

$$\left(\frac{dW}{dq}\right) = \sqrt{\left(\frac{2E}{k} - q^2\right)\frac{2\,mk}{2}} \quad \Rightarrow \quad W = \int dq\, \sqrt{mk}\left(\frac{2E}{k} - q^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

HO TROVATO

$$S(q, E, t) = W - Et$$

$$= \sqrt{mk}\int^{q}\left(d\tilde{q}\,\sqrt{\frac{2E}{k} - \tilde{q}^2}\right) - Et$$

SI TRATTA DI UNA FUNZIONE F_2 CHE GENERA UNA TRASFORMAZIONE CANONICA DALLE GENERICHE (q, E_q) ALLE CONDIZIONI INIZIALI (β, E). SI HA

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E}$$

ALLORA

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \sqrt{mk}\int dq\, \frac{2/k}{2\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}}$$

$$= -t + \sqrt{\frac{m}{k}}\int dq\, \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{k}}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2E}\right)q^2}} \qquad x = \sqrt{\frac{k}{2E}}\,q$$

$$= -t + \sqrt{\frac{m}{k}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}}\,\text{ARCCOS}\left(q\sqrt{\frac{k}{2E}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(\beta + t) = \text{ARCCOS}\left(q\sqrt{\frac{k}{2E}}\right)$$

IN REALTA' QUI E' $-\text{ARCCOS}(x) = \text{ARCSIN}(x)$, PERCIO' IMMAGINO LA SOLUZIONE ABBIA UN SIN E NON UN COS.

$$q\sqrt{\frac{k}{2E}} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\beta + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\left(\beta\sqrt{\frac{k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$q(t, E, \varphi) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cos(\omega t + \varphi)$$

JACOBIANO DI UNA TRASFORMAZIONE CANONICA

$$J = \frac{\partial(Q_1 \dots Q_m, P_1 \dots P_m)}{\partial(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m)} \qquad \begin{array}{l} Q(q,p) \\ P(q,p) \end{array}$$

$$= \frac{\partial(Q_1 \dots Q_m, P_1 \dots P_m)}{\partial(q_1 \dots q_m, P_1 \dots P_m)} \cdot \frac{\partial(q_1 \dots q_m, P_1 \dots P_m)}{\partial(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m)}$$

$$= \quad '' \quad '' \quad \cdot \left[\frac{\partial(q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m)}{\partial(q_1 \dots q_m, P_1 \dots P_m)}\right]^{-1}$$

$$= \left.\frac{\partial(Q_1 \dots Q_m)}{\partial(q_1 \dots q_m)}\right|_{P=\text{cost.}} \cdot \left.\left[\frac{\partial(p_1 \dots p_m)}{\partial(P_1 \dots P_m)}\right]^{-1}\right|_{q=\text{cost.}}$$

$$= \det\left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right] \cdot \frac{1}{\det\left[\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right]}$$

POSSO IMMAGINARE CHE LA TRASFORMAZIONE SIA GENERATA DA $F_2(q, P, t)$

ALLORA

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_i} \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}$$

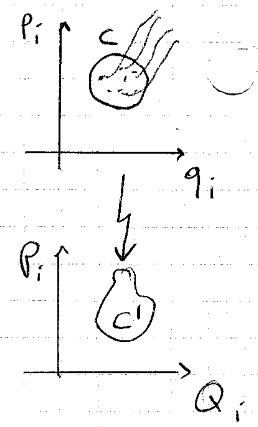
SOSTITUENDO SOPRA, HO

$$\det\left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_i}\right] \cdot \frac{1}{\det\left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_i}\right]} = 1$$

LO JACOBIANO DI UNA TRASFORMAZIONE CANONICA È PARI A 1.

TEOREMA DI LIOUVILLE

DEFINIAMO



$$V(C) = \int_C dq_1 \dots dq_m \, dp_1 \dots dp_m$$

$\downarrow$ VOLUME DELLA REGIONE C

CAMBIANDO A (P_i, Q_i) TRAMITE TRASFORMAZIONI CANONICHE,

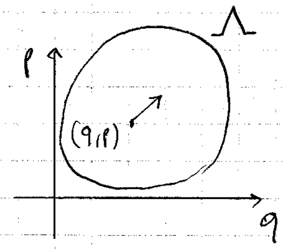
$$V(C) = \int_C dq_m dp_m = \int_{C'} \left| \det\left(\frac{\partial q_m p_m}{\partial Q_m, P_m} \right) \right| dQ_m dP_m = \int_{C'} dQ_m dP_m = V(C')$$

ABBIAMO VISTO CHE ANCHE IL MOTO NATURALE SI PUÒ VEDERE COME TRASFORMAZIONI CANONICHE. ALLORA LUNGO IL MOTO

$$V_t(C) = V_{t_0}(C)$$

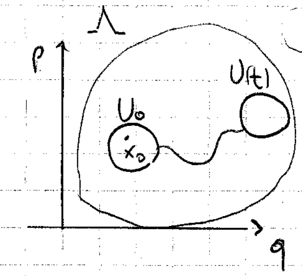
(VEDI ANCHE GOLDSTEIN P. 419: UN SISTEMA INIZIALMENTE ALL'INTERNO NON PUÒ USCIRE - O UNO FUORI ENTRARE - POICHÈ QUANDO INCONTRA LA FRONTIERA I PUNTI EVOLVONO INSIEME).

RICORRENZA DI POINCARÈ



CONSIDERIAMO UN SISTEMA HAMILTONIANO AUTONOMO,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \text{H INDIPENDENTE DAL TEMPO.}$$



SCELGO X_0 E UN SUO INTORNO PICCOLO A PIACERE U NELLO SPAZIO Λ CHIUSO*. DURANTE IL MOTO,

$$U_0 \to U_t$$

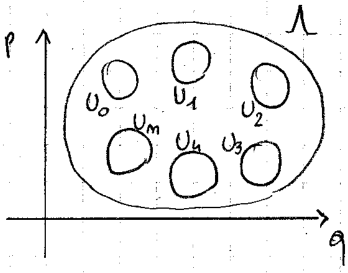
SI HA CHE

$$\forall \tau \quad \exists\, t^* > \tau : \quad U(t^*) \cap U(t_0) \neq 0$$

(NON È DETTO CHE SI RIPASSI NELLO STESSO PUNTO; PERÒ SI PASSA INDEFINITAMENTE VICINO).

*NOTA: Λ È UNA REGIONE LIMITATA DELLO SPAZIO DELLE FASI.

DIMOSTRAZIONE:



MI MUOVO PER INTERVALLI Δt.

$$U_0 \xrightarrow[t_m = m\Delta t]{} U_m$$

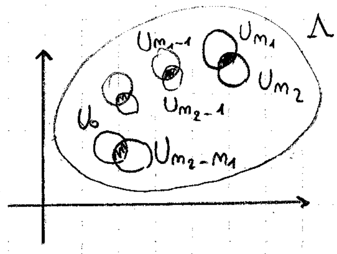
VOGLIO DUE INSIEMI U_{m_1} E U_{m_2} TALI CHE

$$U_{m_1} \cap U_{m_2} \neq \emptyset$$

ESSI DEVONO ESISTERE: SE TUTTI GLI U_m FOSSERO DISGIUNTI,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(U_i) \xrightarrow[N \to \infty]{} \infty \qquad U_i \cap U_j = 0$$

PER IL TEOREMA DI LIOUVILLE, I SINGOLI INTORNI MANTENGONO SEMPRE LO STESSO VOLUME; POICHÉ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right) \leq \mu(\Lambda)$, ABBIAMO UN ASSURDO.
POICHÉ Λ È FINITO, PRIMA O POI SI SOVRAPPORRANNO DUE VOLUMETTI U_{m_2}, U_{m_1}. I PUNTI DELLA INTERSEZIONI APPARTENGONO A ENTRAMBI GLI INTORNI.



INDIETREGGIO DI $m_1 < m_2$ PASSI E QUESTA INTERSEZIONE SI CONSERVA INALTERATA FINO A

$$U_0 \cap U_{m_2-m_1}$$

HO TROVATO UNA INTERSEZIONE AL TEMPO $t^* = (m_2 - m_1)\cdot \Delta t$

INFATTI POSSO INTERPRETARE I PUNTI DELL' INTERSEZIONE COME PROVENIENTI DALL' INTORNO

$$U_{m_1-1}$$

MA ANCHE DA

$$U_{m_2-1}.$$

- PICCOLE OSCILLAZIONI

$$U(q_1 \dots q_m) = U(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_m) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial U}{\partial q_h}\bigg|_{q_h=\bar{q}_h} \eta_h + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\bigg|_{\substack{q_h=\bar{q}_h \\ q_k=\bar{q}_k}} \eta_h \eta_k$$

CON

$$\eta_h = q_h - \bar{q}_h$$

SCEGLIAMO PER SEMPLICITÀ $U(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_m) = 0$ (È UNA COSTANTE).

IN UN MINIMO, SONO NULLE LE DERIVATE PRIME, PERCIÒ APPROSSIMANDO AL SECONDO ORDINE

$$U(q_1 \dots q_m) \simeq \frac{1}{2}\sum_h \sum_k U_{hk}\, \eta_h \eta_k$$

SCRIVIAMO L'ENERGIA CINETICA:

$$T = \frac{1}{2}\sum_h \sum_k a_{hk}\, \dot{q}_h \dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_h \sum_k \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k\, a_{hk}$$

(SI SUPPONGONO VINCOLI INDIPENDENTI DAL TEMPO, SE NO NON HA SENSO CERCARE L'EQUILIBRIO; GLI ALTRI TERMINI SPARISCONO).

SI NOTI CHE

$$\dot{\eta}_h = \dot{q}_h$$

SI RICORDI CHE, IN GENERALE $T = \frac{1}{2}\sum_h \sum_k \dot{q}_h \dot{q}_k \left(\sum_i m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \right)$,

$$a_{hk} = a_{hk}(q_1 \dots q_m)$$

IL CHE COMPLICA IL PROBLEMA. APPROSSIMO ALLORA

$$a_{hk} \simeq a_{hk}(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_m)$$

INFATTI

$$q(t) = \bar{q} + \eta(t)$$

IL PROBLEMA È ORA TROVARE $\eta(t)$.

MA SE NON ELIMINASSI η ALLA FINE (MOLTIPLICO PER $\dot{\eta}_h \dot{\eta}_k$) ARRIVEREI AL TERZO ORDINE. HO OTTENUTO

$$T = \frac{1}{2}\sum_h \sum_k T_{hk}\, \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k$$

CON $T_{hk} = a_{hk}(\bar{q})$.

SCRIVO LA LAGRANGIANA:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_h{}' \sum_k{}' \left(T_{hk}\,\dot\eta_h \dot\eta_k - U_{hk}\,\eta_h \eta_k\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_l} = \frac{1}{2}\left(\sum_k{}' T_{lk}\,\dot\eta_k + \sum_h{}' T_{hl}\,\dot\eta_h\right) = \sum_h{}' T_{hl}\,\dot\eta_h$$

SONO UGUALI

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_l} = -\sum_h{}' U_{hl}\,\eta_h$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_h} = \sum_h{}' T_{hl}\,\ddot\eta_h$$

SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE DI LAGRANGE:

$$\sum_h{}' \left(T_{hl}\,\ddot\eta_h + U_{hl}\,\eta_h\right) = 0 \qquad l = 1 \ldots m$$

CERCO SOLUZIONI DEL TIPO

$$\eta_k = a_k e^{i\omega t} \qquad \ddot\eta_k = i^2\omega^2 a_k e^{i\omega t}$$

$$\sum_h{}' \left[T_{hl}(-\omega^2) + U_{hl}\right] a_h e^{i\omega t} = 0$$

POICHÈ IL SISTEMA È LINEARE, MI BASTA CERCARE m SOLUZIONI INDIPENDENTI (CIASCUNA CHE DIPENDE DA DUE PARAMETRI) E COSTRUISCO TUTTE LE ALTRE PER SOVRAPPOSIZIONE.

DA CUI, ELIDENDO L'ESPONENZIALE,

$$\sum_h{}' \left(-\omega^2 T_{hl} + U_{hl}\right) a_h = 0 \qquad l = 1 \ldots m$$

SISTEMA LINEARE E OMOGENEO NELLE INCOGNITE a_h. SE

$$\det\left[-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}\right] \neq 0$$

HO COME UNICA SOLUZIONE QUELLA NULLA. IMPONGO ALLORA

$$\det\left[-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}\right] = 0$$

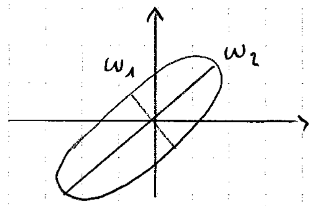
DETTO <u>DETERMINANTE SECOLARE</u>.

QUESTA CONDIZIONE MI PERMETTE DI TROVARE QUEGLI ω PER CUI IL MOTO È POSSIBILE (FREQUENZE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI).

SI NOTI CHE SE

$\omega^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega' + i\omega''$

$\eta_h = a_h e^{i\omega' t + |\omega''|t}$ CHE ESPLODE.



$\omega_1 > \omega_2$

INVECE SE

$\omega^2 > 0$

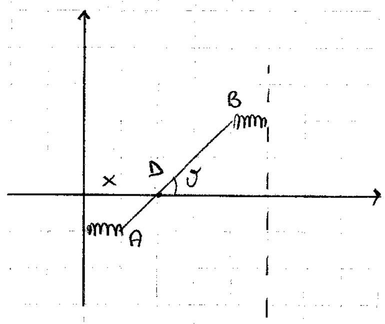
HO DUE MODI PROPRI DI OSCILLAZIONE DATI DA

ω_1, ω_2.

· ESEMPIO

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{ML}{6}\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{18}ML^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K\left(x - \frac{L}{3}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}K\left[d - \left(x + \frac{2}{3}L\cos\theta\right)\right]^2$$



$DA = \frac{L}{3}$ K

POSIZIONI DI EQUILIBRIO:

$\theta_0 = 0$ $\theta_1 = \pi$ θ_2 SE $\cos\theta_2 = \frac{d}{L} \leq 1$

DATE

$M = 1$ $L = 1$ $K = 1$ $d = \frac{1}{2}$

STUDIARE LE PICCOLE OSCILLAZIONI ATTORNO A UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE.

$$T_{hk} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} - \frac{ML}{6}\dot{\theta}\sin\theta \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = M$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{ML}{6}\dot{x}\sin\theta + \frac{1}{9}ML^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = \frac{1}{9}ML^2$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}\partial \dot{\theta}} = -\frac{ML}{6}\sin\theta$$

$$U_{hk} = \begin{pmatrix} 2K & -\frac{1}{3}KL\sin\theta \\ -\frac{1}{3}KL\sin\theta & -\frac{5}{9}KL^2\cos 2\theta - \frac{1}{3}KLx\cos\theta + \frac{2}{3}KdL\cos\theta \end{pmatrix}$$

DA VALUTARE IN $\bar{\theta}$, $\bar{x}$, CON

$$\bar{x} = \frac{L}{3}\frac{d}{L} = \frac{d}{3}$$

$$\cos\bar{\theta} = \frac{d}{L}$$

CALCOLO

$$\det\left[-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}\right]$$

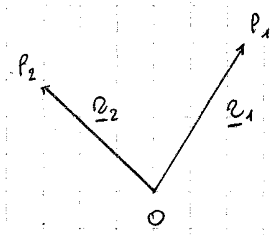
DOPO AVER SOSTITUITO I VALORI DI M, L, K, d.

$$\det\begin{pmatrix} 2-\omega^2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega^2}{6}-\frac{1}{3}\right) \\ +\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega^2}{6}-\frac{1}{3}\right) & -\frac{\omega^2}{9}+\frac{5}{12} \end{pmatrix} \equiv 0$$

RISOLVENDO, OTTENGO

ω_1^2, ω_2^2

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI



$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$$

CAMBIAMO VARIABILI,

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

$$\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

LA LAGRANGIANA SI SCRIVE

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

SI NOTA CHE $\underline{R}$ NON COMPARE NELLA LAGRANGIANA: È CICLICA. SI CONSERVA IL SUO MOMENTO CONIUGATO

$$p_{\underline{R}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{R}}} = (m_1 + m_2) \dot{\underline{R}} = \text{cost.} \qquad \text{PUNTO LIBERO}$$

PERCIÒ LA LAGRANGIANA SI RIDUCE A (MI METTO NEL SISTEMA DEL COM)

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - U(r)$$

NOTO

$$\underline{r} \times \underline{F} = 0$$

$$\underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}} = \underline{K}_0 = \text{cost.}$$

IL MOTO AVVIENE NEL PIANO. TRA L'ALTRO θ È CICLICA, PERCIÒ

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cost.} \qquad \text{(MOMENTO ANGOLARE)}$$

RISCRIVO LA LAGRANGIANA IN COORDINATE POLARI NEL PIANO:

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

SI NOTI CHE

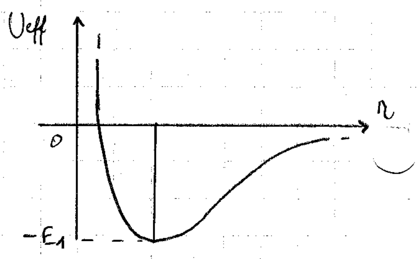
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2 \mu r^2} r^2 = \frac{l}{2\mu} = \text{cost.} \qquad \text{VELOCITÀ AREOLARE (2ª LEGGE DI KEPLERO)}$$

SI CONSERVA $\left(\text{USO } \dot\theta = \frac{\ell}{\mu r^2} \right)$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot r^2 + r^2\frac{\ell^2}{\mu^2 r^4}\right) + U(r) \qquad (\mathrm{I})$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \underbrace{\left[U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right]}_{U_{eff}(r)} \quad \text{POTENZIALE}$$

POSSO VEDERLO COME UN MOTO UNIDIMENSIONALE CON UN POTENZIALE UN PO' PIÙ COMPLICATO.



ALLORA SCRIVO

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 - U_{eff}(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)} \qquad (\text{DA I})$$

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r(t)} ds \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2}$$

$$\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \pm\frac{\mu r^2}{\ell}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)} = \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow r(\theta)$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI

$$U(r) = -\frac{K}{r}$$

$$\theta(r) - \theta_0 = \pm\int_{r_0}^{r} d\rho \, \frac{\ell}{\mu}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} + \frac{K}{\rho}\right)}}$$

$$\frac{1}{r} = b\left[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)\right] \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{E}{E_1}}$$

$\varepsilon < 1$ $\quad -E_1 < E < 0$ ELLISSI

$\varepsilon \geq 1$ $\quad E \geq 0$ ...

1^ LEGGE DI KEPLERO.

HO OTTENUTO UNA CONICA DI ECCENTRICITÀ ε DIPENDENTE DA E.

SOMMARIO PRE-ESONERO

EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_h} \qquad h=1\dots m$$

$$L = T - U$$

POSIZIONI DI EQUILIBRIO E STABILITÀ

$$\nabla U = 0$$

L'EQUILIBRIO È STABILE PER $\det(H) > 0$ (SE IL PRIMO ELEMENTO $a_{11} > 0$).

È UTILE ESPRIMERE TUTTO IN FUNZIONE DI UN PARAMETRO ADIMENSIONALE λ.

PICCOLE OSCILLAZIONI

$$\det\left(-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}\right) = 0 \qquad \text{DETERMINANTE SECOLARE}$$

CON

$$(T_{hk})_{i,j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \qquad (U_{hk})_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$$

ENERGIA GENERALIZZATA

$$H = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L$$

SE I VINCOLI SONO INDIPENDENTI DAL TEMPO, H COINCIDE CON L'ENERGIA MECCANICA.

INTEGRALI PRIMI DEL MOTO

- SE L NON DIPENDE DAL TEMPO (O H), ALLORA H È COSTANTE.
- SE q_h È CICLICA (L NON VI DIPENDE), ALLORA SI CONSERVA

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \qquad \text{(MOMENTO CINETICO CONIUGATO)}$$

HAMILTONIANA

SCRIVERE H IN FUNZIONE DEI MOMENTI p_h.

· PARENTESI DI POISSON

$$[f,g]_{q,p} = \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right)$$

· CONDIZIONE DI LIE

$$\sum_{h=1}^{m} p_h dq_h = \lambda \sum_{h=1}^{m} P_h dQ_h + \Psi dt + dF$$

· FUNZIONI GENERATRICI DI TRASFORMAZIONI CANONICHE

$F_1(q,Q)$

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h} \qquad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_h} \qquad \Psi = -\frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad H' = H - \Psi$$

· VERIFICARE LA CANONICITÀ E TROVARE UNA GENERATRICE

DATE

$$Q = Q(q,p) \qquad P = P(q,p)$$

SI CONSERVA LA PARENTESI DI POISSON $[Q,P]_{q,p} = 1$.

PER TROVARE $F_1(q,Q)$, DALLA CONDIZIONE DI LIE

$$dF_1 = p\,dq - P\,dQ$$

PERCIÒ

$$F_1 = \int (p\,dq - P\,dQ)$$

CHE SI CALCOLA ESPLICITANDO $p(q,Q)$, $P(q,Q)$ E CERCANDO IL PERCORSO PIÙ SEMPLICE (È UN DIFFERENZIALE ESATTO), OVVERO

O → DESTRA → SU , O → SU → DESTRA.

NELLA PARTE LUNGO GLI ASSI PUÒ ANNULLARSI UN CONTRIBUTO.

PER FARE LA PROVA,

$$p = \frac{dF_1}{dq} \qquad P = -\frac{dF_1}{\partial Q}$$

· STATO PRIMA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

UN PO' DI STORIA.

· SECONDA METÀ DELL' '800, MAXWELL

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0$$

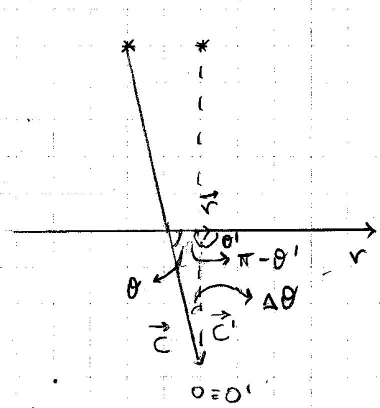
USANDO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO GALILEIANO

$$\begin{cases} x'=x-vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases} \quad \not\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{(c+v)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0$$

L'EQUAZIONE CAMBIA FORMA. MA ALLORA L'EQUAZIONE DI MAXWELL PARE ESSERE LIMITATA AL SOLO SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI

$v_{luce}=c$

· SI IMMAGINA CHE ESISTA UN MEZZO (ETERE) IN CUI SI PROPAGA LA LUCE. VARI MATERIALI DEVONO ESSERE TRASPARENTI ALL'ETERE (SE CREO IL VUOTO IN UNA BOTTIGLIA DI VETRO, LA LUCE AL SUO INTERNO SI PROPAGA LO STESSO); INOLTRE L'ETERE DEVE COMPORTARSI COME UN MEZZO RIGIDO (VI SI PROPAGA UN'ONDA TRASVERSALE). QUEST' IPOTESI È CORROBORATA DAL FENOMENO DELL' ABERRAZIONE STELLARE. DUE OSSERVATORI NELLO STESSO PUNTO CHE SI MUOVONO CON VELOCITÀ DIVERSE VEDONO LA LUCE PROVENIRE DA PUNTI DIVERSI.



$$\frac{v}{c}=\frac{\sin\Delta\theta}{\sin(\pi-\theta')} \qquad \text{(TH. SENI)}$$

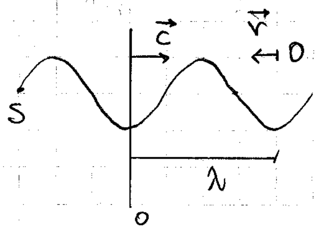
$$\sin\Delta\theta=\frac{v}{c}\sin(\pi-\theta')=\frac{v}{c}\sin\theta' \qquad \Rightarrow \quad \vec{c}=\vec{v}+\vec{c}\,'$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\theta\simeq\left(\frac{v}{c}\right)\sin\theta \qquad \text{(INFATTI } \theta'=\theta+\Delta\theta\text{)} \qquad \text{(VEDI LIBRO)}$$

COME SI OSSERVAVA SPERIMENTALMENTE.

SEMBRAVA FUNZIONARE ANCHE L'EFFETTO DOPPLER.



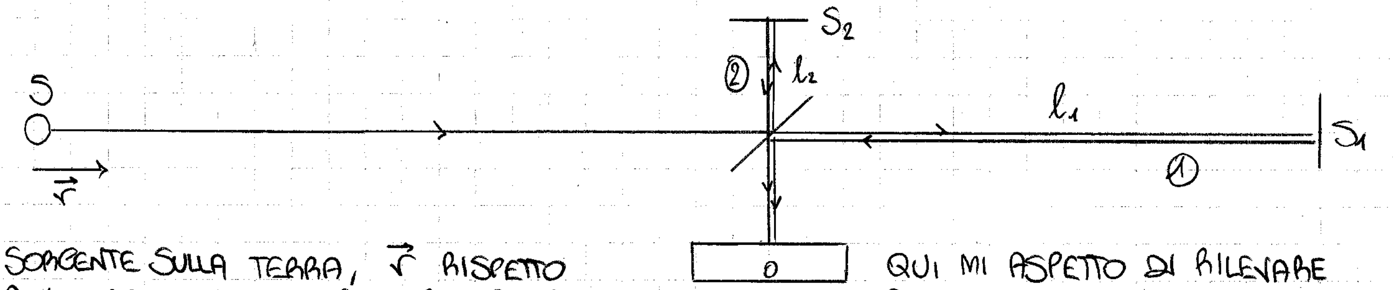
$\lambda \nu = c$

SE MI MUOVO VERSO LA SORGENTE,

$\nu' = \dfrac{c+v}{\lambda}$ E SE MI ALLONTANO, $\nu' = \dfrac{c-v}{\lambda} = \left(1 - \dfrac{v}{c}\right)\nu$

SI ERA NOTATO CHE, IN STAGIONI DIVERSE, LA FREQUENZA DELLA LUCE PROVENIENTE DALLE STELLE CAMBIAVA.

· UN GIORNO MICHELSON E MORLEY PROVANO A MISURARE LA VELOCITÀ DELLA TERRA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DELL'ETERE.



SORGENTE SULLA TERRA, $\vec{v}$ RISPETTO ALL'ETERE TANGENTE ALLA ROTAZIONE TERRESTRE

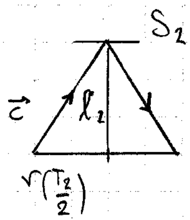
QUI MI ASPETTO DI RILEVARE FRANGE DI INTERFERENZA.

CALCOLO T_1 NEL SISTEMA DELLA TERRA DOVE
$v_{luce} = c \mp v_{terra}$
E T_2 NEL SISTEMA DELL'ETERE IN CUI
$v_{luce} = c$

$\Delta t = T_2 - T_1$

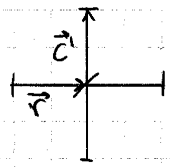
$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2 l_1}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$T_2 = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{v T_2}{2}\right)^2 + l_2^2} \Rightarrow \frac{2 l_2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_2$$

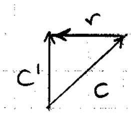


PERCORSO TOT:
$2\sqrt{\left(\frac{v T_2}{2}\right)^2 + l_2^2}$

$$\Delta t = T_2 - T_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$



$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$



LE FRANGE SI OSSERVANO, MA NON SO SE QUESTO È COERENTE CON LA TEORIA: NON CONOSCO l_1 E l_2 CON PRECISIONE SUFFICIENTE.

ALLORA RUOTO TUTTO IL SISTEMA DI 90° IN MODO DA SCAMBIARE IL RUOLO DI l_1 E l_2:

$$\Delta t' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right)$$

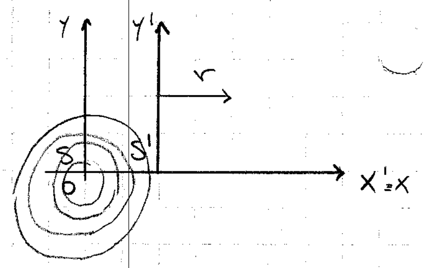
SI FA RUOTARE IL SISTEMA SU UNA TAVOLA DI MARMO SUL MERCURIO (SENZA SCOSSONI)... LE FRANGE DI INTERFERENZA NON SI MODIFICANO MINIMAMENTE. (L'INTERFEROMETRO ERA POTENZIALMENTE SENSIBILE A VELOCITÀ $v \sim 1.5 \frac{Km}{s}$, E LA TERRA VA MOLTO PIÙ VELOCE).

SE NE DEDURREBBE CHE L'ETERE È SOLIDALE ALLA TERRA.

SI IMMAGINA CHE L'ETERE POSSA AVERE UN MOTO LAMINARE (COME UNA PALLINA CHE GIRA NELL'OLIO) E CHE QUINDI LO STRATO A CONTATTO CON LA TERRA SIA AD ESSA SOLIDALE.

· TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

CHE TRASFORMAZIONI DEVO APPLICARE PERCHÈ LE LEGGI DI MAXWELL RESTINO INVARIATE QUANDO CAMBIO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO?



$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

SI POSSONO DEDURRE, ALTERNATIVAMENTE, DALLA COSTANZA DI c. METTIAMO UNA LAMPADINA IN O, CHE ACCENDO ALL'ISTANTE $t=0$ QUANDO O E O' COINCIDONO. ENTRAMBI VEDONO UN FRONTE D'ONDA SFERICO (SE c È INVARIANTE):

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

SE USO LE TRASFORMAZIONI DI GALILEO SULLA PRIMA,

$$x^2 + v^2t^2 - 2xvt + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

CHE NON FUNZIONA. SIANO ALLORA

$$\begin{cases} y' = y \,,\ z' = z \\ x' = x - vt \\ t' = t + fx \end{cases} \Rightarrow \quad \text{SCEGLIENDO } f = -\frac{v}{c^2}, \quad \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 + y^2 + z^2 = c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^2$$

CHE CI RIPORTA AL CASO VOLUTO SE DIVIDO t' PER UN APPOSITO FATTORE E LO STESSO FACCIO PER x':

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- CONSEGUENZE

IDENTIFICO UN EVENTO CON

$E_1(ct, x, y, z)$

IN UN ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO IN MOTO,

$E_1'(ct', x', y', z')$

OVVERO DEVO SPECIFICARE ANCHE IL TEMPO.

SUPPONIAMO DI AVERE IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO GLI EVENTI

$E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$

$E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$

COME UNA PARTICELLA CHE NASCE E DECADE (POICHÈ c È UNA COSTANTE, ct HA LE DIMENSIONI DI UNA LUNGHEZZA).

VISTO NEL SISTEMA DELLA PARTICELLA,

$E_1' = (0, 0, 0, 0)$

$E_2' = (ct', 0, 0, 0)$

- METRICA DI MINKOWSKI

QUANDO COMPIO UNA ROTAZIONE IN $\mathbb{R}^3$, IL MODULO DI OGNI VETTORE RESTA INVARIATO. (METRICA EUCLIDEA)

CHI È CHE SI CONSERVA IN UNO SPAZIO QUADRIDIMENSIONALE?

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

(METRICA DI MINKOWSKI).

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) \Rightarrow A_0^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

NOTA: $\Delta S^2 = c^2 (\text{TIME INTERVAL})^2 - (\text{SPACE INTERVAL})^2$

DATA

$$\frac{dx}{dt} \overset{?}{\Rightarrow} \frac{dx'}{dt}$$

DIFFERENZIANDO LA TRASFORMAZIONE,

$$\begin{cases} dx' = \dfrac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \dfrac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

SIA $u_x = \dfrac{dx}{dt}$,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

v LUNGO L'ASSE X. SE $c=\infty$, RISULTATO CLASSICO. SE $u_x = c$, $u'_x = c$.

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

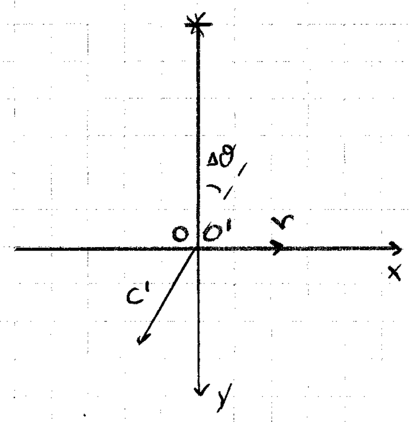
*

. RIPRENDIAMO L'ESEMPIO DELL'ABERRAZIONE STELLARE,

$\vec{u}\,(0, c, 0)$

$$u' = \left(-v, c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, 0\right)$$

$$|u'|^2 = c^2$$



. NOTA *

SCEGLIENDO $u_x = c$, OTTENGO $u'_x = c$ INDIPENDENTEMENTE DA v.

SE IMPONGO

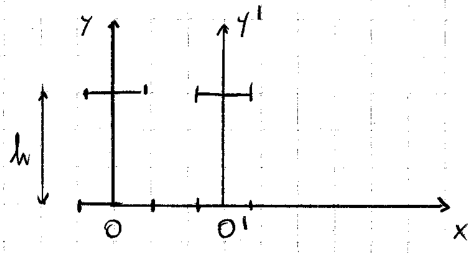
$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$$

ALLORA

$$u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z = c^2$$

$\rightarrow$ ANCHE $\vec{c}$ SI COMPONE VETTORIALMENTE CON LE ALTRE VELOCITÀ, MA LO FA IN MODO TALE CHE IL MODULO RESTI c INDIPENDENTEMENTE DA CHI SIA $\vec{v}$.

- COSTRUISCO UN OROLOGIO CON UN FOTONE CHE RIMBALZA TRA DUE SPECCHI A DISTANZA $h = 1\,m$.



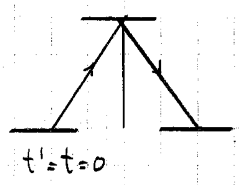
UN ASTRONAUTA HA SUL SUO MEZZO UN OROLOGIO SIMILE. PER LUI, OSSERVANDO IL SUO OROLOGIO

$$\Delta x' = 0 \qquad c\Delta t' = 2m \ (= 2h)$$
$$\Delta y' = 0$$
$$\Delta z' = 0$$

CALCOLIAMO

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = 4h^2$$

PER NOI, IL FOTONE DELL' ASTRONAUTA SEGUE



E SI HANNO

$$\Delta x = v\Delta t \qquad \Delta t = 2\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + h^2} \cdot \frac{1}{c}$$
$$\Delta y = 0$$
$$\Delta z = 0$$

PERCIO'

$$c\Delta t = 2\sqrt{\frac{v^2 \Delta t^2}{4} + h^2}$$

$$c^2\Delta t^2 = v^2 \Delta t^2 + 4h^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 4h^2$$

$$c\Delta t = \frac{2h}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} > 2h \quad \Rightarrow \quad c\Delta t = \frac{c\Delta t'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

PER NOI L'OROLOGIO DELL' ASTRONAUTA STA ANDANDO PIU' LENTO.
(CHIARAMENTE PER L'ASTRONAUTA E' IL NOSTRO OROLOGIO AD ANDARE PIU' PIANO).

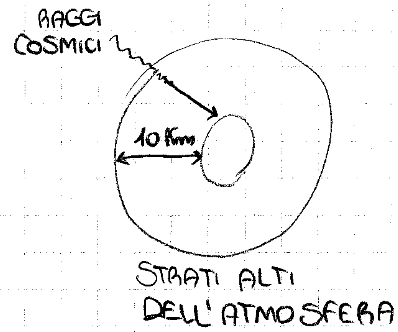
OCCHIO, LA DIREZIONE DI $\vec{c}$ CAMBIA NEI DUE SISTEMI: E' IL SUO MODULO A CONSERVARSI.

NOTA:

DA $$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx \rightarrow = 0}{\gamma}$$

L'OSSERVATORE S VEDE I DUE EVENTI AVVENIRE NELLO STESSO LUOGO.

- ESEMPIO REALE: I MUONI



UN MUONE VIVE PER UN TEMPO CHE NON GLI PERMETTE DI ATTRAVERSARE I 10 Km CHE LO SEPARA DALLA SUPERFICIE TERRESTRE.

$\tau \sim 10^{-7}\,s$

IL FATTO È CHE QUESTA VITA MEDIA È DA INTENDERSI MISURATA NEL SUO SISTEMA DI RIFERIMENTO: NOI MISURIAMO UN TEMPO MOLTO PIÙ LUNGO,

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

PER IL MUONE, È LO SPAZIO A CONTRARSI.

- CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

VOGLIO MISURARE UNA BARRA IN MOTO SU UN'ASTRONAVE.
SISTEMO UN METRO SULLA TERRA E SU ESSO SEGNO, NELLO STESSO ISTANTE, LA POSIZIONE DEI DUE ESTREMI DELLA BARRA.

$$l' = \frac{l - v\underbrace{dt}_{=0}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow l = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

CHI MISURA È CHI VEDE I DUE EVENTI APPARIRE ALLO STESSO TEMPO.

OCCHIO: NELL'ESEMPIO DELLA PAGINA PRECEDENTE, IL SISTEMA "FISSO" STA SULLA ASTRONAVE; INFATTI PER LUI I DUE EVENTI ACCADONO NELLO STESSO POSTO.

- TIME DILATION (GOLDSTEIN)

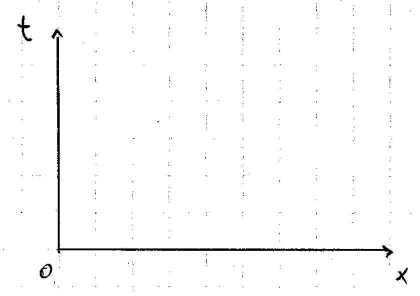
CONSIDERIAMO L'EVENTO $E(\tau, x', y', z')$ VISTO DA $E(t, x, y, z)$. ALLORA

$$dS' = dS$$

$$c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 - v^2(dt)^2 = c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(dt)^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(INFATTI NEL SISTEMA DEL TEMPO PROPRIO LO SPOSTAMENTO È NULLO).

· IL PARADOSSO DEI DUE GEMELLI



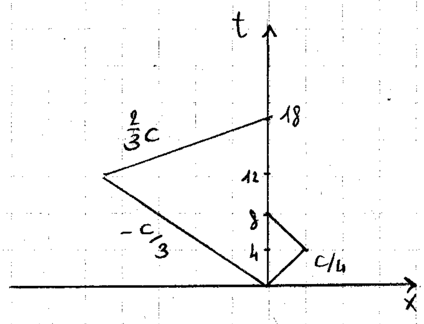
IMMAGINIAMO DUE ASTRONAUTI CHE PARTONO, ACCELERANO, FRENANO E TORNANO ALLO STESSO MODO (STESSE ACCELERAZIONI) MA CHE STANNO IN MRU IN TEMPI DIVERSI. IN QUESTO MODO POSSIAMO IGNORARE GLI EFFETTI DELLA RELATIVITÀ GENERALE.

PARTONO INSIEME AL TEMPO 0 DALL'ORIGINE,

$v_1 = \frac{c}{4}$ $\qquad v_2 = -\frac{c}{3}$

AL TEMPO 4T IL PRIMO INVERTE LA ROTTA E TORNA NELL'ORIGINE DOVE SI FERMA.

IL SECONDO VIAGGIA PER 12T, POI INVERTE LA ROTTA E CON $v = \frac{2}{3}c$ TORNA NELL'ORIGINE.



CONFRONTANO GLI OROLOGI: CHI È PIÙ VECCHIO E DI QUANTO?

$$\Delta t_1 = 8T = \frac{\Delta t'_1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{16}\frac{1}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_1 = 8T\sqrt{\frac{15}{16}} = 2T\sqrt{15} < 8T$$

$$T_1 = 2T\sqrt{15} + 10T \qquad (1° \text{ ASTRONAUTA}) \qquad = 17.7\,T$$

$$\Delta t_2^{(1)} = 12T = \frac{\Delta t_2'}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_2 = 8T\sqrt{2}$$

$$\Delta t_2^{(2)} = 6T = \frac{\Delta t_2''}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t''_2 = 2T\sqrt{5}$$

$$T_2 = 8T\sqrt{2} + 2T\sqrt{5} \qquad (2° \text{ ASTRONAUTA}) \qquad = 15.7\,T$$

PERCIÒ L'ASTRONAUTA 2 È RIMASTO PIÙ GIOVANE.

SPAZIO DI MINKOWSKY

$$E = (ct, x, y, z)$$
$$\downarrow TL$$
$$E' = (ct', x', y', z')$$

CHE TIPO DI METRICA (PRODOTTO SCALARE) DEVO DEFINIRE PERCHÈ RESTI INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI DI LORENTZ?

(AD ESEMPIO, NELLO SPAZIO EUCLIDEO IL PRODOTTO SCALARE STANDARD È INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI ORTONORMALI).

LO SPAZIO DI MINKOWSKI È UNO SPAZIO A 4D CON LA METRICA

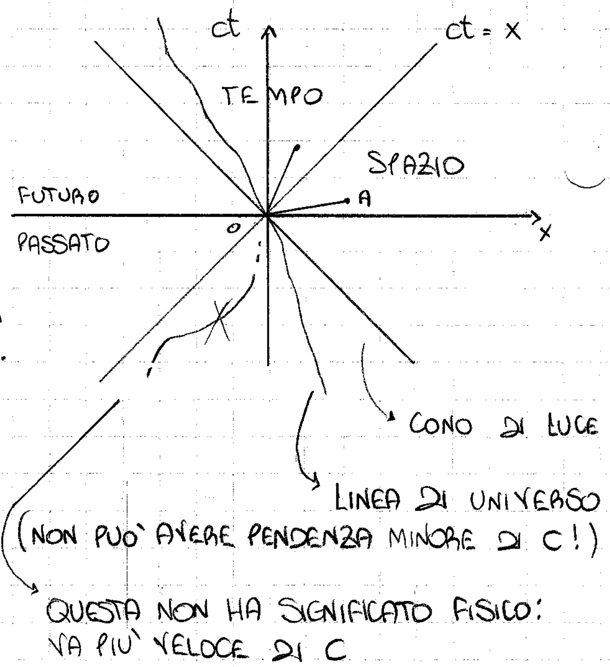
$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$
$$|\underline{A}| = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \qquad \text{LUNGHEZZA}$$

ALLORA

$$\overline{E_1 E_2} := (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) = \left(c(t_2 - t_1), x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right)$$
$$|\overline{E_1 E_2}|^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right)$$
$$\downarrow TL$$
$$|\overline{E_1' E_2'}|^2$$

SI HANNO VETTORI DI TIPO *

$\lvert\overline{E_1 E_2}\rvert^2 > 0$	TEMPO	: POSSONO AVVENIRE NELLO STESSO LUOGO.
$\lvert\overline{E_1 E_2}\rvert^2 < 0$	SPAZIO	: POSSONO ESSERE CONTEMPORANEI.
$\lvert\overline{E_1 E_2}\rvert^2 = 0$	LUCE	: SI COLLEGANO SOLO CON UN SEGNALE LUMINOSO.



GLI EVENTI A E O NON POSSONO ESSERE LEGATI DA UN RAPPORTO DI CAUSA E EFFETTO.

DUE EVENTI DIVISI DA UN VETTORE DI TIPO SPAZIO NON POSSONO ESSERE CORRELATI.

IN PARTICOLARE, L'ORDINE IN CUI ESSI AVVENGONO PUÒ CAMBIARE IN BASE AL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

*SPAZIO NON EUCLIDEO: LA NORMA NON È DEFINITA POSITIVA.

ESERCIZIO

SIA $C=1$. HO GLI EVENTI

$E_1 = (1,3,0,0)$

$E_2 = (6,\alpha,0,0)$

TROVA α PER CUI I DUE EVENTI POSSANO ESSERE CONTEMPORANEI IN QUALCHE SISTEMA DI RIFERIMENTO.

$\overline{E_2E_1} = (5,\alpha-3,0,0)$ DEVE ESSERE DI TIPO SPAZIO.

$|\overline{E_2E_1}| = 25-(\alpha-3)^2 < 0$

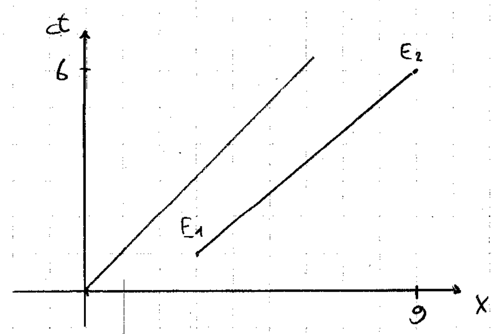
$\Rightarrow \alpha<-2 \vee \alpha>8$

TROVA v A CUI QUESTO ACCADE.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv 0$$

$$\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x = \Delta t - v\Delta x = 5 - v(\alpha-3) \equiv 0$$

$$v = \frac{5}{\alpha-3}$$



AD ESEMPIO, SE $\alpha=9$

$v_{\alpha=9} = \frac{5}{6}c$

$E_2 = (6,9,0,0)$

SIANO

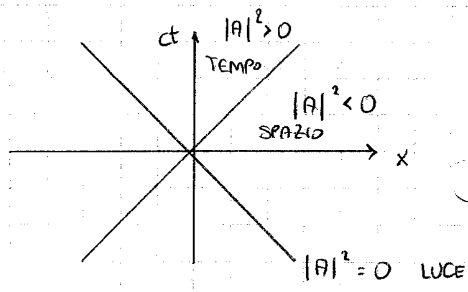
$E_1 = (0,3,2,0)$

$E_2 = (3,-1,\beta,1)$

TROVA β PER CUI AVVENGONO NELLO STESSO LUOGO.

LA DISTANZA DEVE ESSERE DI TIPO TEMPO; MA QUESTO NON AVVIENE PER ALCUN β.

CINEMATICA RELATIVISTICA



$x_i(\lambda)$ $\quad i = \underbrace{0}_{\text{TEMPO}}, \underbrace{1,2,3}_{\text{SPAZIO}}$

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA.

SCEGLIAMO COME PARAMETRO IL TEMPO PROPRIO,

OVVERO QUELLO SEGNATO DA UN OROLOGIO SOLIDALE AL CORPO IN MOTO.

PER QUELL'OROLOGIO, IL CORPO È FERMO IN UN SISTEMA INERZIALE.

ABBIAMO VISTO CHE

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ TEMPO PROPRIO

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} = \frac{c\,dt}{c}\sqrt{1-\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{c^2}}$$ MISURATE DA NOI

DEFINIZIONE DELL'INTERVALLO DI TEMPO PROPRIO

DEFINIAMO LA QUADRIVELOCITÀ

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau}$$ $\qquad \underline{X} = (ct, x, y, z)$

$$\underline{u} = \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}\right)$$

LA NORMA DI MINKOWSKI VALE

$$|u|^2 = \left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{d\tau}\right)^2$$

$$= d\tau^{-2}\left[dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2\right] = c^2$$

(HO SOSTITUITO $dx_0 = c\,dt$ E $d\tau$ DALLA DEFINIZIONE). INOLTRE

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ CON $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ $\quad i \neq 0$

$$\frac{d(x_0)}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ $\quad i = 0$

DEFINIAMO LA QUADRIACCELERAZIONE

$$\vec{A} = \frac{d\vec{u}}{d\tau}$$

SI NOTI CHE $\vec{A}$ È ORTOGONALE A $\vec{u}$:

$$\frac{d(\vec{u}\cdot\vec{u})}{d\tau} = 2\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{d\tau}$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{d\tau}(c^2) = 0$$

NOTA: MENTRE LA QUADRIVELOCITÀ È UN VETTORE DI TIPO TEMPO (TANGENTE ALLA LINEA DI UNIVERSO), LA QUADRIACCELERAZIONE È DI TIPO SPAZIO.

CALCOLIAMO

$$A_x = \frac{du_x}{d\tau} = \frac{du_x}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \qquad \frac{d}{dt}\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{a_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}\frac{v_x\, 2\vec{v}\cdot\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{c^2}\right]$$

· SI DEFINISCE

m_0 MASSA PROPRIA

QUELLA MISURATA IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE AL CORPO (IN CUI IL CORPO È FERMO).

ALLORA LA QUANTITÀ DI MOTO È (QUADRIMPULSO)

$$\vec{P} = m_0\vec{u} = \begin{cases} P_\alpha = m_0 u_\alpha = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v_\alpha = m(v)v_\alpha \\ P_0 = \dfrac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m(v)\,c \end{cases}$$

CHI È COSTEI?

DEFINISCO

$$E := cP_0 = mc^2$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \underset{v \ll c}{\approx} m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\dots\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

È L'ENERGIA CINETICA DEL CORPO.

DINAMICA

$$\vec{A} = \frac{d\vec{u}}{d\tau}$$

DEFINISCO LA QUADRIFORZA $\underline{K}$ COME

$$\underline{A}\, m_0 = \underline{K}$$

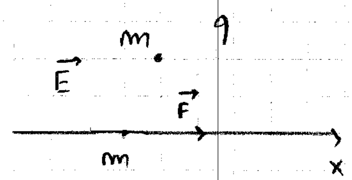
$$m_0 \underline{A} = m_0 \frac{d\underline{u}}{d\tau} = m_0 \frac{d\underline{u}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m_0 \frac{d\underline{u}}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \underline{K}$$

$$m_0 \frac{d\underline{u}}{dt} = \underbrace{\underline{K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{F_\alpha}$$

$$F_\alpha = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow F_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{dP_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}(m(v)\, v_\alpha)$$

ESEMPIO

PARTICELLA IN UN CAMPO ELETTRICO,



$$\vec{F} = q\vec{E}$$

RISOLVO

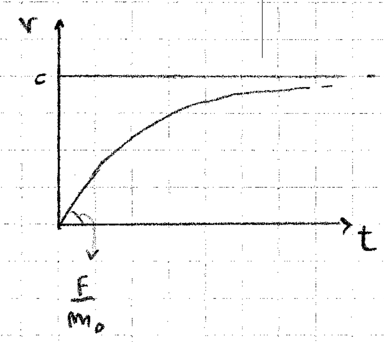
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F_x$$

$$\int_{m(v_0)v_0}^{m(v(t))v(t)} d\,(m(v)\, v_x) = \int_0^t F_x\, dt \Rightarrow \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Ft$$

DA CUI

$$m_0^2 v^2 = F^2 t^2 - \frac{F^2 t^2}{c^2} v^2 \; ; \qquad v^2\left(m_0^2 - \frac{F^2t^2}{c^2}\right) = F^2 t^2$$

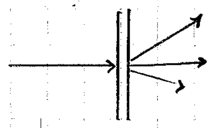
$$v(t) = \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2t^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}}}$$



$$v \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{Ft}{m_0}\frac{c}{\frac{Ft}{m_0}} = c$$ PERCHÈ NON ACCELERA PIÙ?

QUANDO $v \to c$, $m(v) \to \infty$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO



COME RILEVO UNA PARTICELLA NEUTRA?

SE LA GRAVITÀ A LIVELLO ATOMICO È TRASCURABILE, VALE LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO. SE MISURO DIVERSAMENTE, IMMAGINO CI SIA UN'ALTRA PARTICELLA CHE SE NE È PORTATA VIA UN PO'.

$$\sum_i^{INIZ.} m_i(v)\,\vec{v}_i = \sum_l^{FIN.} m_l(v)\,\vec{v}_l$$

$$\sum_{h=1}^{n} m_{o_h}\,\underline{u}_h = \sum_{K=1}^{n'} m'_{o_K}\,\underline{u}_K$$

$$\sum_h^{INIZ.} p_o^h = \sum_h c\,\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sum_K^{FIN} p_o^K$$

ESEMPIO

3 PARTICELLE RELATIVISTICHE SI SCONTRANO SIMULTANEAMENTE E DANNO ORIGINE A M. TROVA M.

$m_1 = 2m \qquad -\frac{c}{2}$

$m_2 = m \qquad \frac{c}{2}$

$m_3 = m \qquad \frac{c}{2}$

$$p_1 = \frac{2m\left(-\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p_2 = p_3 = \frac{m\left(\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4c^2}}} \qquad p_{TOT}^{(i)} = 0$$

DEVE ESSERE

$$p_{TOT}^{(f)} = \frac{M v_M}{\sqrt{1-\frac{v_M^2}{c^2}}} = 0 \quad , \quad \text{PERCIÒ} \quad v_M = 0.$$

PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA,

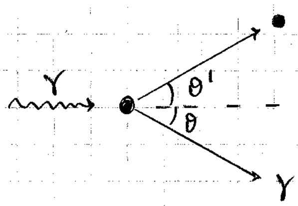
$$E_1 = m_1(v)c^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4c^2}}} \qquad E_2 = E_3 = \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \qquad E_{TOT}^{(i)} = \frac{8}{\sqrt{3}}mc^2 > \frac{8}{2}mc^2$$

$$E_{TOT}^{(i)} = E_{TOT}^{(f)} = Mc^2$$

$$M = \frac{8}{\sqrt{3}}m$$

· EFFETTO COMPTON

UN FOTONE URTA UN ELETTRONE: SI DEVONO CONSERVARE ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO. LA VERIFICA SPERIMENTALE DI QUESTO FATTO HA PROVATO LA NATURA CORPUSCOLARE DEL FOTONE.



ENERGIA DI UN FOTONE ASSOCIATO A UN'ONDA ELETTROMAGNETICA DI FREQUENZA ν:

$$E = h\nu$$

CHI È LA QUANTITÀ DI MOTO PER UN FOTONE?

$$|\underline{v}|^2 = c^2 \qquad v_0^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha^2 = c^2$$

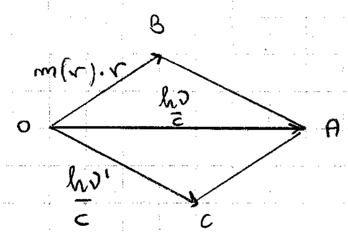
$$\frac{m_0^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} c^4 - \frac{m_0^2 v^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} c^2 = m_0^2 c^4$$ (HO MOLTIPLICATO PER $m_0^2 c^2$)

$$\frac{c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = c^2$$

$$E^2 - p^2c^2 = (m_0 c^2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad E = pc$$

$$E^2 = p^2c^2 + \underbrace{(m_0 c^2)^2}_{\text{ENERGIA A RIPOSO}}$$

$m_0 = 0$ PER UN FOTONE



$$(AC)^2 = (OA)^2 + (OC)^2 - 2(OA)(OC)\cos\theta$$ (TEOREMA DEL COSENO)

DETTA m_0 LA MASSA A RIPOSO DELL'ELETTRONE,

$$\left(\frac{m_0 v}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\theta$$

UNENDOLA ALLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (VEDI DERIVAZIONE A FIANCO),

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

DERIVAZIONE EFFETTO COMPTON (REMAKE)

$$\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\theta \qquad \text{(I) : CONS. MOMENTUM}$$

$$h\nu + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + h\nu' \qquad \text{(II) : CONS. ENERGIA}$$

RICAVO DA (II) IL PRIMO MEMBRO DELLA (I). DIVIDO PER $m_0 c^2$,

$$\frac{h}{m_0 c^2}(\nu-\nu') + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad \frac{h^2}{m_0^2 c^4}(\nu-\nu')^2 + \frac{2h}{m_0 c^2}(\nu-\nu') = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

MOLTIPLICO PER $m_0^2 c^2$,

$$\frac{m_0^2 v^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} = \frac{h^2}{c^2}(\nu-\nu')^2 + 2hm_0(\nu-\nu')$$

PER CONFRONTO CON LA (I), DOPO AVER MOLTIPLICATO PER c^2,

$$h^2(\nu-\nu')^2 + 2hm_0c^2(\nu-\nu') = h^2(\nu^2+\nu'^2) - 2h^2\nu\nu'\cos\theta$$

$$-2h^2\nu\nu' + 2hm_0c^2(\nu-\nu') = -2h^2\nu\nu'\cos\theta$$

$$m_0c^2(\nu-\nu') = h\nu\nu'(1-\cos\theta)$$

$$\frac{c\nu}{\nu\nu'} - \frac{c\nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

USANDO INFINE IL FATTO CHE $\lambda\nu = c$, $\lambda = \frac{c}{\nu}$ E

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

- TEOREMA DELLE FORZE VIVE

$$\underline{K} = m_0 \underline{A} \qquad \underline{A} = \frac{d\underline{U}}{d\tau} \text{ , DIFFICILMENTE MISURABILE (NON È IL MIO SISTEMA)}$$

$$m_0 A = m_0 \frac{dU}{d\tau} = m_0 \frac{dU}{dt} \frac{1}{\sqrt{\dots}} = K$$

$$m_0 \frac{dU}{dt} = K \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = K \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{PER } \alpha = x, y, z$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = K_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{PER } \alpha = 0$$

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = K_0 U_0 - \sum_\alpha{}' K_\alpha U_\alpha = 0 \Rightarrow K_0 = \frac{\sum_1' K_\alpha U_\alpha}{U_0} \qquad (\text{INFATTI } \underline{K} = m_0 \underline{A})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{\dots}} \right) = \sum_\alpha{}' \frac{U_\alpha}{U_0} \underbrace{K_\alpha \sqrt{\dots}}_{F_\alpha} \qquad \text{CON} \quad U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{\dots}}$$

$$\frac{U_\alpha}{U_0} = \frac{v_\alpha}{\sqrt{\dots}} \cdot \frac{\sqrt{\dots}}{c} = \frac{v_\alpha}{c}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \sum_\alpha{}' F_\alpha \cdot v_\alpha \qquad \text{TEOREMA DELLE FORZE VIVE} \quad \left(\frac{dE}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v} \right)$$

- EQUAZIONI DI LAGRANGE RELATIVISTICHE

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} \right) = 0$$

CHI È L'AZIONE CHE VOGLIO MINIMIZZARE? OVVERO CHI È L IN

$$S = \int_0^t L \, dt'$$

SE USO $L = E - U$ SCOPRO CHE NON FUNZIONA. SI DIMOSTRA CHE TUTTO TORNA SCEGLIENDO

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U$$

$$\simeq \frac{1}{2} m_0 v^2 - U$$

DIMOSTRIAMOLO:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overset{P_\alpha}{\frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{\;\;}}}\right) \qquad \left(\text{INFATTI } L = -m_0 c^2\sqrt{1-\frac{\sum_i v_\alpha^2}{c^2}} - U(x_\alpha)\right)$$

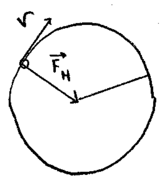
$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$$

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = F_\alpha$$

· ESEMPIO

PARTICELLA IN UN CAMPO MAGNETICO. $\quad \underline{F} = (q\,\underline{E}) + \frac{q}{c}\,\underline{v} \wedge \underline{H}$

IN SENSO CLASSICO,



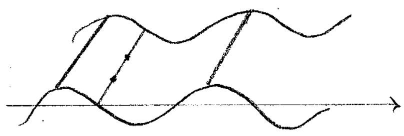
$$m\frac{v^2}{r_c} = \frac{q}{c} v H \quad \Rightarrow \quad r_c = \frac{m c v}{q H}$$

IN SENSO RELATIVISTICO, $m = m(v)$:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v^2}{r_R} = \frac{q}{c} v H \quad \Rightarrow \quad r_R = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{c v}{q H}\right)$$

· ESEMPIO

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ È DETTA VELOCITÀ DI FASE. PUÒ ESSERE INFINITA, AD ESEMPIO TRA DUE PUNTI DEL FRONTE.



$\sin(x - vt)$

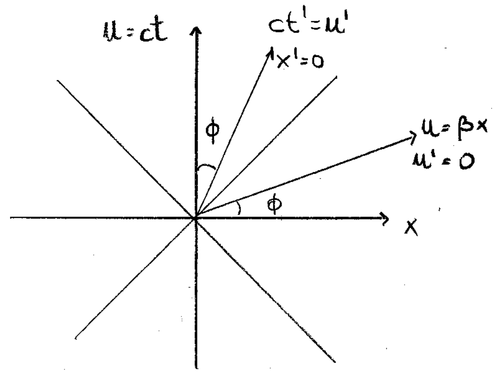
$\frac{d\omega}{dk}$ È LA VELOCITÀ DI GRUPPO. VELOCITÀ CON CUI POSSO TRASMETTERE UNA INFORMAZIONE.

· ESEMPIO

INDICE DI RIFRAZIONE $\quad c' = \frac{c}{n}$. POSSO FAR VIAGGIARE ALLORA UN'ONDA PIÙ VELOCE DI c? SOLO UN'ONDA STAZIONARIA, CHE NON TRASMETTE INFORMAZIONE. SE VARIO QUALCOSA, IL FENOMENO TRANSIENTE PREVALE.

- INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

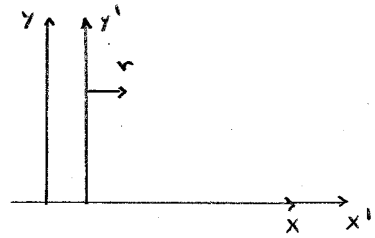
$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



SI È VISTO CHE PASSO DA S A S' CON

$$x' = \frac{x-u}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad u' = \frac{u-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x = \frac{x'+\beta u'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad u = \frac{u'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



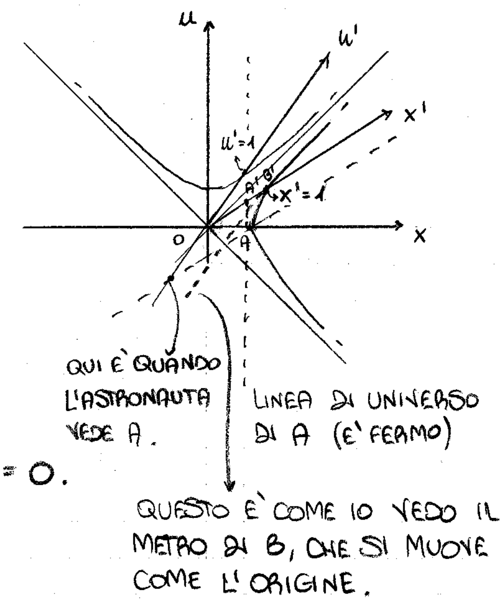
SI OSSERVA CHE

$$\phi = \mathrm{ARCTg}(\beta) \qquad \beta = \mathrm{Tg}(\phi)$$

SI CONSERVANO LE COMBINAZIONI

$$x^2 - u^2 = 1 = x'^2 - u'^2 \qquad \text{(TIPO SPAZIO)}$$

$$u^2 - x^2 = 1 = u'^2 - x'^2 \qquad \text{(TIPO TEMPO)}$$



SIA

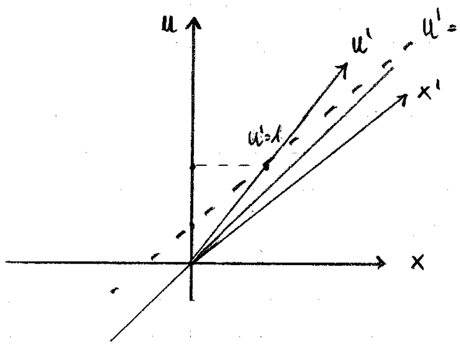
$\overline{OA} = 1$

IL MIO METRO, MISURATI ENTRAMBI AL TEMPO $u = 0$.

INVECE IL METRO DELL'ASTRONAUTA È $\overline{OB'} = 1$.

NOTA:

OTTENGO LE EQUAZIONI DEGLI ASSI u', x', IMPONENDO (AD ESEMPIO):

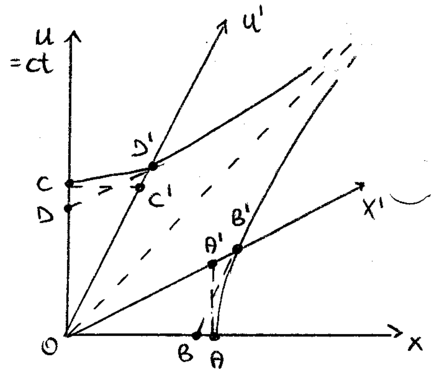


$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{L'ASSE } u' \text{ HA EQUAZIONE}$$

$$x' = 0 \implies x = vt \; ; \quad c\frac{x}{v} = \underbrace{ct}_{u} \; ; \quad \frac{x}{u} = \frac{v}{c}$$

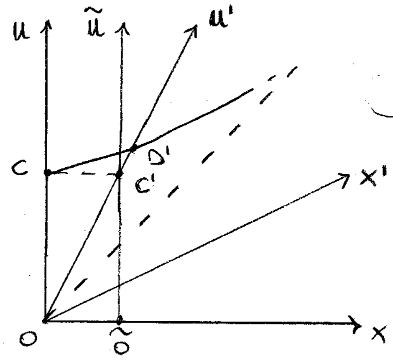
FOCUS: RECIPROCAL SCALE-SHORTENING

COME MISURO LE LUNGHEZZE?

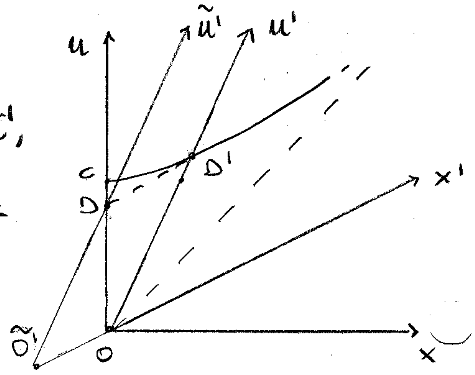


SIA $\overline{OA}$ IL METRO NEL SISTEMA $\underline{S}$: LE LINEE DI UNIVERSO DEI SUOI DUE ESTREMI SONO ODC E AA'. QUANDO GLI ESTREMI INCONTRANO $\underline{S}'$ (EVENTI PER LUI CONTEMPORANEI), L'OSSERVATORE MISURA $\overline{OA'}$, PIÙ CORTO DEL SUO METRO $\overline{OB'}$. L'OSSERVATORE IN $\underline{S}$ MISURA INVECE IL METRO DI $\underline{S}'$ QUANDO IL PUNTO B' SI TROVAVA IN B: RISULTA $\overline{OB} < \overline{OA}$. NOTA CHE LE LINEE DI UNIVERSO DEGLI ESTREMI DEL METRO DI $\underline{S}'$ SONO OC'D', BB'.

COME MISURO GLI INTERVALLI DI TEMPO?

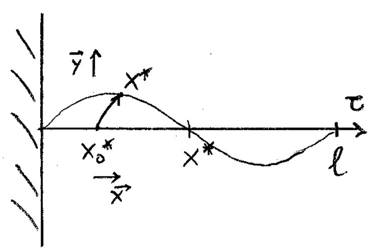


IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO METTO DEGLI OROLOGI SOLIDALI A QUELLI DI $\underline{S}$ O DI $\underline{S}'$ (NOTA CHE NON ESISTE UN ESPEDIENTE EQUIVALENTE PER SPAZI). L'OROLOGIO DI $\underline{S}'$ SI MUOVE LUNGO LA LINEA OC'D' E IN D' HA COMPLETATO UN GIRO; IN C L'OROLOGIO DI $\underline{S}$ HA FATTO UN GIRO, COSÌ COME QUELLO DI $\underline{\tilde{S}}$ IN C', SISTEMA CHE COSTRUISCO IN MODO CHE SIA SOLIDALE A $\underline{S}'$ CON GLI SPAZI E A $\underline{S}$ CON I TEMPI (È IL SISTEMA DELL'OROLOGIO SOLIDALE A $\underline{S}$ CHE HO PIAZZATO NEL PUNTO $\tilde{O}$). L'OSSERVATORE IN $\underline{S}'$ PUÒ ALLORA CONFRONTARE NELLO STESSO POSTO ($x'=0$) IL SUO OROLOGIO E QUELLO DI $\underline{S}$, NOTANDO CHE $\overline{OC'} < \overline{OD'}$: L'OROLOGIO DI $\underline{S}'$ (CHE SI MUOVE) È PIÙ LENTO.



SIMILMENTE UN OROLOGIO A RIPOSO NEL SISTEMA $\underline{S}$ SI MUOVE LUNGO ODC E IN C HA COMPLETATO UN GIRO; MA UN OROLOGIO SOLIDALE A QUELLO DI $\underline{S}'$ E MESSO NELLO STESSO POSTO ($x=0$) AVEVA GIÀ FATTO UN GIRO IN D. STAVOLTA IL TEMPO PROPRIO È QUELLO DI $\underline{S}$, PER IL QUALE GLI EVENTI AVVENGONO NELLO STESSO LUOGO ($x=0$): E INFATTI L'OROLOGIO DI $\underline{S}'$ STA ANDANDO PIÙ VELOCE.

MOTO DI UNA CORDA VIBRANTE



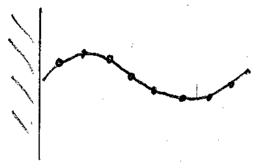
CORDA APPOGGIATA SU UN TAVOLO DI LUNGHEZZA ℓ_0.
LA CONSIDERO ELASTICA; LA TIRO $(\vec{\tau})$ E LEI ARRIVA A ℓ.

AD ESEMPIO, SE ESEGUO LAVORO PROVOCANDO $\delta\ell$, PER LA PERFETTA ELASTICITÀ

$dU = \tau d\ell$ (LAVORO DI DEFORMAZIONE)

FISSIAMO x^* AD IDENTIFICARE UN PUNTO SUL FILO (HO INFINITI PUNTI x^*).
PIZZICO LA CORDA E OGNI PUNTO x^* È DISLOCATO NELLE 3 DIREZIONI,

$$x = x(x^*,t)$$
$$y = y(x^*,t)$$
$$z = z(x^*,t)$$

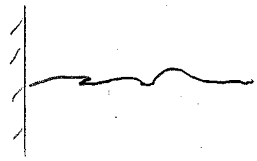


IMMAGINIAMO PRIMA UN FILO DI MASSA NULLA CON PERLINE $(i = 1 \dots m)$.
SUPPONIAMO CHE LE VARIAZIONI DI x, y, z SIANO PICCOLE:

$$\frac{|x - x^*|}{\ell} < \varepsilon \qquad \frac{|y|}{\ell} < \varepsilon \qquad \frac{|z|}{\ell} < \varepsilon$$

INFINITESIMALITÀ DEL MOTO; ε È UN VALORE PREFISSATO. STO LIMITANDO LA DISTANZA DALLE C.I.

NON VOGLIAMO CHE LA CORDA CAMBI TROPPO FORMA;
EVITIAMO DEFORMAZIONI COME QUELLA RAFFIGURATA.

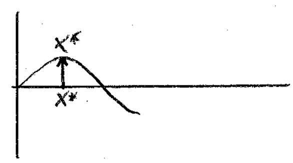


$$\left|\frac{\partial(x - x^*)}{\partial x^*}\right| < \varepsilon \qquad \left|\frac{\partial y}{\partial x^*}\right| < \varepsilon \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x^*}\right| < \varepsilon$$

IN QUESTO MODO CI SI ASSICURA CHE LA FORMA NON SI DISCOSTI TROPPO DA QUELLA INIZIALE.

1. IN SINTESI, DEFORMAZIONI PICCOLE E SMOOTH.
2. RESTRINGO IL MOTO TRIDIMENSIONALE A UN MOTO PIANO $(z = 0)$ MEDIANTE OPPORTUNA SCELTA DELLE CONDIZIONI INIZIALI.
3. IMPONGO LA TRASVERSALITÀ DEL MOTO,

$$x = x(x^*,t) = x^*$$



ALLORA LE CONDIZIONI SI LIMITANO A

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x^*,\ \text{SHORTHAND}}}{y = y(x,t)} \qquad \frac{|y|}{\ell} < \varepsilon \qquad \left|\frac{\partial y}{\partial x^*}\right| < \varepsilon$$

y SI DISCRETIZZA, VOLENDO, CON LE $y_i(t)$.

QUI L'ANALOGIA CON LA MECCANICA LAGRANGIANA È DATA DA

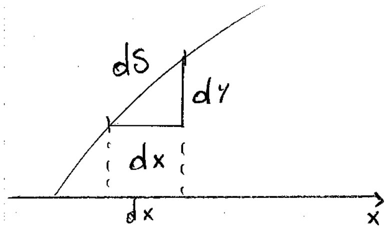
$Y(x) \Leftrightarrow q_h$

IMPONIAMO LE CONDIZIONI AL CONTORNO,

$Y(0,t) = 0$ DA CUI SEGUONO $\dot{Y}(0) = 0$

$Y(\ell,t) = 0$ $\dot{Y}(\ell) = 0$

VOGLIAMO ORA SCRIVERE LA LAGRANGIANA.



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

POICHÈ LE DEFORMAZIONI dy SONO PICCOLE RISPETTO A dx (SMOOTH),

$$ds \simeq dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) = \underbrace{dx}_{\text{LUNGHEZZA A RIPOSO}} + \frac{dx}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$d\ell = ds - dx \simeq \frac{dx}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

ALLORA

$$\underset{dU}{\underset{\shortparallel}{\tau\, d\ell}} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$U = \int_0^\ell \tau\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$ ENERGIA POTENZIALE DELLA CORDA

$$\left(= \sum_i \Delta x \,(\underset{\tau}{k\Delta x})\, \frac{1}{2}\,(y_{i+1} - y_i)^2 \cdot \frac{1}{\Delta x^2} = \sum_i \frac{1}{2} k\,(y_{i+1} - y_i)^2\right)$$

SE LA CORDA HA DENSITÀ COSTANTE,

$dm = \mu\, dx$

$$T = \int_0^\ell \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^\ell \mu\, dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

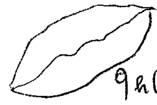
LA LAGRANGIANA SI SCRIVE ALLORA

$$L = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

$L[Y(x,t)]$, È UN FUNZIONALE DELLA $Y(x,t)$.

SCRIVIAMO L'AZIONE :

$$A = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{\ell} dx \; \frac{1}{2}\left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \tau \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right]$$



$q_h(t)$

$$\begin{cases} \delta q_h(t_0) = 0 \\ \delta q_h(t_1) = 0 \end{cases}$$

PER ESEGUIRE LA VARIAZIONE, SOSTITUISCO $y \to y + \delta y$ CON

$$\delta y(x, t_0) = 0 \qquad \delta y(x, t_1) = 0$$

INOLTRE LE CONDIZIONI AL CONTORNO DANNO

$$\delta y(0,t) = 0 \qquad \delta y(\ell, t) = 0$$

VARIO L'AZIONE, ($y \to y + \delta y$ E TAGLIO AL I ORDINE),

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{\ell} dx \left[\mu \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} - \tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]$$

INFATTI

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(y + \delta y)\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \cancel{\left(\frac{\partial (\delta y)}{\partial t}\right)^2} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial (\delta y)}{\partial t}\right)$$

INTEGRANDO PER PARTI,

$$= \underbrace{\int_0^{\ell} dx \, \mu \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{\ell} dx \, \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y - \underbrace{\tau \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \Big|_0^{\ell}}_{=0} + \tau \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{\ell} dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y$$

(VARIAZIONE, $\delta y(t_0) = \delta y(t_1) = 0$ PUNTI FISSI)

(CONDIZIONI AL CONTORNO $\delta y(0) = \delta y(\ell) = 0$)

ALLORA

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{\ell} dx \left[\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \delta y(x,t) = 0$$

PERCHE' QUESTO SIA VERO PER OGNI SCELTA DI $\delta y(x,t)$,

$$\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{CON } v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

DATE DUE SOLUZIONI

$$y_1(x,t) \qquad y_2(x,t)$$

UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE È ANCORA SOLUZIONE (L'EQUAZIONE È LINEARE, VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).

SOSTITUENDO

$$\begin{aligned} \xi &= x - vt \\ \eta &= x + vt \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

TALE EQUAZIONE È SODDISFATTA OGNI VOLTA CHE

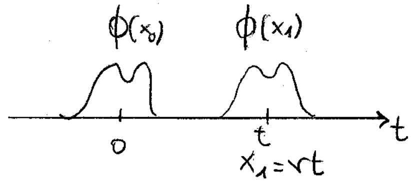
$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \tilde{\phi}(\xi) \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \tilde{\phi}(\eta)$$

PERCIÒ CERCHIAMO UNA SOLUZIONE

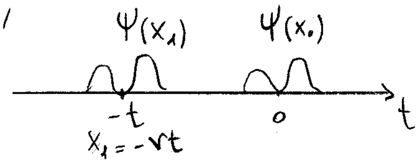
$$y = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

OVVERO

$$y(x,t) = \phi(x - vt) + \psi(x + vt)$$



CHE SI PROPAGANO SENZA CAMBIARE FORMA LUNGO L'ASSE DELLE x (ALMENO FINO AL CONTORNO), UNA IN AVANTI E UNA ALL'INDIETRO (ONDA PROGRESSIVA E RETROGRADA).



CERCHIAMO ORA UNA SOLUZIONE DELLA FORMA (CORDA CON ESTREMI FISSI):

$$y(x,t) = G(x)\,F(t)$$

(METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI).

$$v^2 G''(x) F(t) = G(x) F''(t)$$

$$v^2 \frac{G''(x)}{G(x)} = \frac{F''(t)}{F(t)}$$

MA ALLORA ENTRAMBI I RAPPORTI SONO COSTANTI; SCRIVO

$$\begin{cases} F''(t) - c\,F(t) = 0 \\ G''(x) - \dfrac{c}{v^2} G(x) = 0 \end{cases}$$

LA SECONDA È RISOLTA DA (SUPPONENDO $c>0$)

$$G(x) = a e^{\frac{\sqrt{c}}{v}x} + b e^{-\frac{\sqrt{c}}{v}x}$$

SE IMPONGO

$$\begin{cases} G(0)=0 \\ G(\ell)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=0 \\ ae^{\gamma\ell}+be^{-\gamma\ell}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ ae^{2\gamma\ell}-a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ a(\underbrace{e^{2\frac{\sqrt{c}}{v}\ell}-1}_{\neq 0})=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$ BANALE.

INVECE SE $c<0$, $c=-\omega^2$,

$$F(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$G(x) = c_0\cos\frac{\omega}{v}x + d\sin\frac{\omega}{v}x$$

SE ANCORA IMPONGO $G(0)=0 \Rightarrow c_0=0$ $\quad G(\ell)=0 \Rightarrow \frac{\omega\ell}{v}=m\pi$

LEGGO

$$\omega_m = \frac{\pi v}{\ell}m \qquad \text{CON} \qquad v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

SI È TROVATA

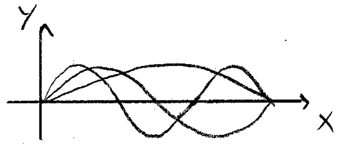
$$y_m(x,t) = \sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\left[a_m\cos\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right)+b_m\sin\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right)\right]$$

OVVERO UNA COMBINAZIONE DI ONDE STAZIONARIE

$$\sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right)$$

SOLUZIONI SEMPLICI DI INDICE m (LINEARMENTE INDIPENDENTI)



CON AMPIEZZA DATA DALLE COSTANTI a_m, b_m.

LA LUNGHEZZA D'ONDA DELLE OSCILLAZIONI È $\lambda = \frac{2\ell}{m}$

OGNI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE È DATA DALLA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE ONDE RIGIDE PROPAGANTISI IN SENSO OPPOSTO, IN QUESTO CASO,

$$y_1(x,t) = \frac{1}{2}\sin\left[(x-vt)\frac{m\pi}{\ell}\right] \quad \text{PROGRESSIVA}$$

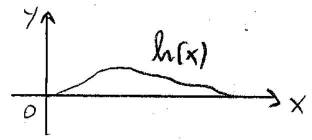
$$y_2(x,t) = \frac{1}{2}\sin\left[(x+vt)\frac{m\pi}{\ell}\right] \quad \text{RETROGRADA}$$

SOMMANDOLE, E USANDO PROSTAFERESI,

$$y = y_1 + y_2$$

$$= \sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}vt\right)$$

NOTI CONFIGURAZIONE E ATTO DI MOTO INIZIALI,



$$h(x) \quad , \quad K(x) = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}$$

$h(x)$ ↑ FORMA; $K(x)$ ↑ VELOCITA' INIZIALE IN OGNI PUNTO

DIMOSTRIAMO CHE POSSO SEMPRE SCRIVERE IL MOTO RISULTANTE COME

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right)\right]$$

· <u>ANALISI DI FOURIER</u>

CONSIDERIAMO LE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$$\sin \frac{K\pi}{\ell}x \quad , \quad \cos \frac{K\pi}{\ell}x \qquad K = 0, 1, 2 \ldots$$

$C^\infty \in [-\infty, +\infty]$, PERIODO 2ℓ $\left(f(x+2\ell) = f(x)\right)$ (PERIODO MASSIMO)

NOTIAMO CHE, INTEGRANDO SU UN QUALSIASI INTERVALLO PARI A UN PERIODO 2ℓ,

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{K\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{K'\pi}{\ell}x\right)dx = \begin{cases} 0 & K \neq K' \\ \ell & K = K' \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin^2\left(\frac{K\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\ell}{2K\pi}\sin\left(\frac{2K\pi}{\ell}x\right)\right]_{-\ell}^{\ell} = \ell$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos(m+m) - \cos(m-m)\right]$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{K\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{K'\pi}{\ell}x\right)dx = \begin{cases} 0 & K \neq K' \\ \ell & K = K' \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(K+K')\pi}{\ell}x\right) + \cos\left(\frac{(K-K')\pi}{\ell}x\right)\right]$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{K\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{K'\pi}{\ell}x\right)dx = 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(K+K')\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{(K-K')\pi}{\ell}x\right)\right]$$

IL CHE USANDO IL PRODOTTO SCALARE

$$\int_a^b g(x)\, f(x)\, dx = g \cdot f$$

$$\sum_i g_i f_i$$

LO SONO SE MOLTIPLICO PER $\frac{1}{\ell}$.

MI DICE CHE LE FUNZIONI SOPRA SONO UNA BASE ORTONORMALE.

ALLORA POSSO SCRIVERE OGNI $f(x) \in C^1$ PERIODICA CON PERIODO 2ℓ COME COMBINAZIONE

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)$$

COME SCRIVO

$$\vec{r} = \sum_i a_i \vec{r}_i \quad ? \qquad \vec{r}_i \text{ VETTORI DELLA BASE.}$$

MOLTIPLICO

$$\vec{r}_m \cdot \vec{r} = \sum_i a_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_m$$

E OTTENGO a_m, POICHÉ $\vec{r}_m \cdot \vec{r}_i = \delta_{mi}$

ALLORA

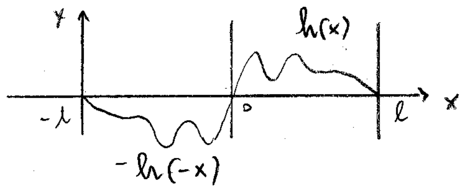
$$a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx$$

PER IL PRIMO, USO LA MEDIA INTEGRALE

$$a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

$$b_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx$$

HO RISOLTO IL PROBLEMA DI COME RAPPRESENTARE FUNZIONI PERIODICHE.
MA SE NON È PERIODICA? LA RADDOPPIO AGGIUNGENDO $-h(-x)$, POI LA RIPETO.



SI NOTI CHE SE $f(x)$ È PARI, USO SOLO COSENI; SE $f(x)$ È DISPARI, OTTENGO SOLTANTO SENI.

ALLORA RISOLVO IL PROBLEMA DI PRIMA (PAGINA ADDIETRO, IN CIMA)

$$Y(x,0) = h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)$$

VALIDO IN PARTICOLARE IN $[0,\ell]$.

$$a_m = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} h(x)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\left[b_m \frac{m\pi v}{\ell}\cos\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right) - a_m\frac{m\pi v}{\ell}\sin\left(\frac{m\pi v}{\ell}t\right)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi m}{\ell}x\right)\underbrace{\left[b_m\frac{m\pi v}{\ell}\right]}_{B_m} \equiv K(x)$$

QUINDI

$$K(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \qquad B_m = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} K(x)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx$$

SE $h(x)$ È DISPARI (LO È SEMPRE UNA VOLTA RIBALTATA COME SOPRA), IL SUO PRODOTTO CON SIN DÀ UNA FUNZIONE PARI.

CONFRONTANDO SOPRA,

$$b_m = \frac{\ell}{m\pi v}B_m$$

HO PERCIÒ DETERMINATO, A $t=0$, LA FORMA E LA VELOCITÀ DELLA MIA ONDA.