Appunti del corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Davide Venturelli, anno 2016/2017

Per info, segnalazioni o quant'altro:
venturelli.1591191 at studenti.uniroma1.it

SOMMARIO - MECCANICA QUANTISTICA

CRISI DELLA FISICA CLASSICA

- MODELLI ATOMICI CLASSICI
- EFFETTO FOTOELETTRICO
- EFFETTO COMPTON
- SPETTRO DI EMISSIONE E ASSORBIMENTO
- MODELLO DI BOHR
- SCATTERING BRAGG
- LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE
- INTERFERENZA ONDULATORIA
- ESPERIMENTO DI YOUNG
- ESPERIMENTI CON FILTRI POLAROID

POSTULATI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

- OPERATORI HERMITIANI, PROPRIETÀ
- TEOREMA SPETTRALE
- MATRICE DEL CDB
- COMMUTATORE, OPERATORI CHE COMMUTANO
- SPAZIO DEGLI STATI, OSSERVABILI
- PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE
- INTERPRETAZIONE ESPERIMENTI POLAROID
- GLI AUTOSTATI DI UN'OSSERVABILE SONO SOG.
- POSTULATO DI VON NEUMANN
- INDETERMINAZIONE CLASSICA
- OPERATORE ASSOCIATO A UN'OSSERVABILE
- VALORE ATTESO, VARIANZA
- TEOREMA DI INDETERMINAZIONE
- PROPRIETÀ DEI COMMUTATORI (VAR. CONIUGATE)

OSCILLATORE ARMONICO

- SISTEMI HAMILTONIANI UNIDIMENSIONALI
- TEOREMA DEL VIRIALE (CLASSICO)
- OSCILLATORE (SOLUZIONE ALGEBRICA)
- PROPRIETÀ E AUTOVALORI DEGLI OPERATORI A SCALA
- DISTRIBUZIONE $f(q)$

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI

- ESPONENZIALE DI UN OPERATORE, PROPRIETÀ
- SVILUPPO DI $e^A B e^{-A}$
- OPERATORE DI TRASLAZIONE
- SVILUPPO DI $e^A e^B$
- TRASFORMAZIONI CANONICHE
- RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER
- EQUAZIONE DI SCHRÖEDINGER
- OPERATORE POSIZIONE
- NORMALIZZAZIONE A $\delta(x-x_0)$, COMPLETEZZA
- OPERATORE IMPULSO
- RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI

SISTEMI UNIDIMENSIONALI

- POTENZIALI UNIDIMENSIONALI
- BUCA INFINITA
- OPERATORE DI INVERSIONE SPAZIALE
- TEOREMA DI NON DEGENERAZIONE
- TEOREMA DEI NODI E ALTRE PROPRIETÀ
- OSCILLATORE (AUTOFUNZIONI)
- SOLUZIONE DELLA S.E. PER $V(x)$ GENERICO
- PARTICELLA LIBERA
- BUCA FINITA
- BUCA INFINITAMENTE PROFONDA ($\delta(x)$)
- EFFETTO TUNNEL E BARRIERA INFINITA

EVOLUZIONE TEMPORALE

- TEOREMA DI EHRENFEST
- TIME DIPENDENT S.E.
- OPERATORE DI EVOLUZIONE TEMPORALE
- DENSITÀ E CORRENTE DI PROBABILITÀ
- STATI STAZIONARI
- SCHEMA DI HEISENBERG
- ESEMPI: OSCILLATORE, F COSTANTE

MOMENTO ANGOLARE

- COMMUTATORI IN PIÙ DIMENSIONI
- RELAZIONI DI COMMUTAZIONE PER $\underline{L}$
- AUTOSTATI E AUTOVALORI DI L^2, L_z
- ROTAZIONI
- $\underline{L}$ COME GENERATORE DELLE ROTAZIONI
- ELEMENTI DI MATRICE DI L_+ E L_-
- GRADIENTE IN COORDINATE SFERICHE
- DIVERGENZA IN C.S., LAPLACIANO
- $\underline{L}, L^2, p^2, L_+, L_-$ IN C.S.
- ARMONICHE SFERICHE
- COSTRUZIONE DEI POLINOMI OMOGENEI
- OPERATORE DI PARITÀ IN C.S.

PARTICELLE IN CAMPO CENTRALE

- HAMILTONIANE SEPARABILI
- OSCILLATORE ANISOTROPO
- $\underline{L}, \underline{\nabla}, p^2$ IN COORDINATE CILINDRICHE
- MOTI CENTRALI
- SCATOLA CON CONDIZIONI PERIODICHE
- OSCILLATORE ISOTROPO TRIDIMENSIONALE
- ATOMO DI IDROGENO
- DISTRIBUZIONE DEL LIVELLO FONDAMENTALE
- TEOREMA DEL VIRIALE
- PRINCIPIO VARIAZIONALE
- BUCA SFERICA

SISTEMI COMPOSTI

- MOMENTO DI SPIN
- RELAZIONI DI COMMUTAZIONE PER $S=\frac{1}{2}$
- MATRICI DI PAULI
- COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI
- COSTRUZIONE DELLA BASE $|S^2, S_z\rangle$
- SOMMA DI SPIN DIVERSI
- ESEMPIO: $1 \oplus \frac{1}{2}$
- PROBLEMA DEI DUE CORPI

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

- CASO NON DEGENERE
- CASO DEGENERE
- PERTURBAZIONI DIPENDENTI DAL TEMPO

PRINCIPIO DI PAULI

- OPERATORE DI SCAMBIO
- SISTEMI DI PARTICELLE IDENTICHE
- LA BASE "GIUSTA" PER GLI SPINORI
- HAMILTONIANE DI PARTICELLE IDENTICHE
- PARITÀ NEL SISTEMA DEL CDM
- IL PRINCIPIO DI ESCLUSIONE
- L'INTEGRALE DI SCAMBIO

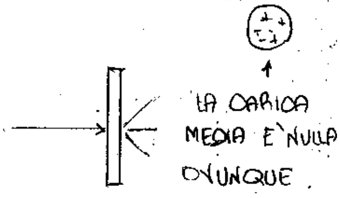
ELETTROMAGNETISMO

- LA LAGRANGIANA ELETTROMAGNETICA
- TRASFORMAZIONI DI GAUGE
- CAMPO COSTANTE (GAUGE DI LANDAU)

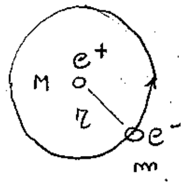
LA CRISI DELLA FISICA CLASSICA

MQ → MONDO MICROSCOPICO. FINE '800 CON LA SCOPERTA DELL' ELETTRONE; MA LA MATERIA E' NEUTRA. RISOLVO IL PROBLEMA CON IL "MODELLO A PANETTONE" DI THOMSON.

AI PRIMI DEL '900 SI FANNO I PRIMI ESPERIMENTI DI SCATTERING PER TESTARE L'IPOTESI: RUTHERFORD SI ASPETTA PICCOLE DEVIAZIONI, MENTRE OSSERVA UN GRAN NUMERO DI ELETTRONI CHE TORNANO INDIETRO.



SI INTRODUCE IL MODELLO PLANETARIO. PER MISURARE r CERCO QUANTO VALE L'ENERGIA DI IONIZZAZIONE (LAVORO PER ESTRARRE UN ELETTRONE). POICHE' $M >> m$,



$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$m\underline{a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\hat{u}_r \qquad \underline{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r$$

$$-\frac{mv^2}{r}\hat{u}_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\hat{u}_r \qquad E = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

L'ENERGIA DI IONIZZAZIONE E' QUELLA CHE DEVO DARE ALL' ELETTRONE PER PORTARLO ALL' INFINITO CON VELOCITA' NULLA:

$$E_{ION} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E} \simeq 0.5 \cdot 10^{-10}\,m$$

ESSENDO

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$

$1\,eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\,J$ ELETTRONVOLT: ENERGIA POSSEDUTA DA UN e^- ACCELERATO ATTRAVERSANDO LA ddp DI 1 V.

$\mathring{A} = 0.1\,nm = 0.1 \cdot 10^{-9}\,m = 10^{-10}\,m$

$E_{ION} = 13\,eV$ SEMPRE LA STESSA (IDROGENO NON SCALDATO)

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\,Nm^2C^{-2}$

PERCHÉ E_{ion} È SEMPRE LA STESSA? E DI CONSEGUENZA PERCHÉ È SEMPRE LO STESSO r? NON POTREBBE GIRARE PIÙ VELOCEMENTE E SU UN'ORBITA DIVERSA?

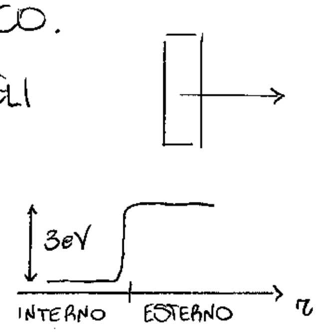
INOLTRE L'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO PREVEDE CHE UNA CARICA ACCELERATA EMETTA ONDE ELETTROMAGNETICHE. SE LA FREQUENZA DI ROTAZIONE È ν, LA RADIAZIONE EMESSA HA PULSAZIONE ν (E SUOI MULTIPLI). MA COSÌ FACENDO L'ELETTRONE PERDE ENERGIA E SPIRALEGGIA SUL NUCLEO: IN ELETTROMAGNETISMO CLASSICO LA MATERIA È INSTABILE. QUESTO AVVIENE SU UNA SCALA DI TEMPO $\tau \simeq 10^{-10}$ s.

SE SCALDO UN ATOMO DI IDROGENO QUESTO EMETTE RADIAZIONI. SI OSSERVA CHE SONO PRODOTTE SOLO ALCUNE FREQUENZE (UN INSIEME DISCRETO).

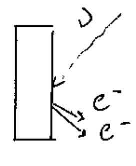
QUESTI SONO SOLO TRE DEI PROBLEMI CHE FANNO CAPIRE QUANTO L'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO SIA INADATTO A DESCRIVERE IL MONDO MICROSCOPICO.

· <u>EFFETTO FOTOELETTRICO</u>

ERA GIÀ STATO OSSERVATO L'EFFETTO TERMOIONICO. UN CAMPO ELETTRICO ABBASTANZA INTENSO STRAPPA GLI ELETTRONI DA UN METALLO; SI SCHEMATIZZA IL FENOMENO CON UNA BARRIERA DI POTENZIALE.



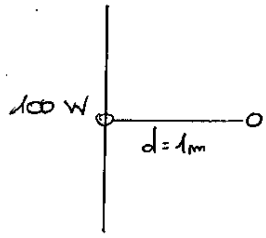
SUCCEDE QUALCOSA DI SIMILE IRRAGGIANDO UN METALLO: MA GLI ELETTRONI SONO EMESSI CON ENERGIA PROPORZIONALE ALLA FREQUENZA DELLA LUCE E NON ALLA SUA INTENSITÀ.



SI PUÒ MISURARE UNA VERA E PROPRIA SOGLIA ν_{min} SOPRA LA QUALE BASTA $I \simeq 100$ W PER SCATENARE L'EFFETTO.

QUANTA ENERGIA ARRIVA SULL' ATOMO IN $1\,s$?

SE LA SORGENTE È ISOTROPA,



$$E_{/s} = 100\,J \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi d^2} \simeq 2.5 \cdot 10^{-19}\,J \simeq 1.5\,eV$$

PERCIÒ SERVIREBBERO $t = 2s$ PER RAGGIUNGERE I 3eV DELLA BARRIERA CLASSICA: SU SCALA ATOMICA È UN TEMPO ENORME E IN 2s L'ATOMO HA TUTTO IL TEMPO PER DISSIPARE L'ENERGIA APPENA RICEVUTA PASSANDOLA AGLI ALTRI ATOMI TRAMITE VIBRAZIONI. SERVIREBBERO NON 100 W, MA 100 MW PER VEDERE QUALCOSA.

POSSO INOLTRE MISURARE L'ENERGIA CON CUI SONO EMESSI GLI ELETTRONI. OSSERVO CHE

$$E^{CIN}_{MAX} = h(\nu - \nu_{min})$$

INDIPENDENTE DALL' INTENSITÀ LUMINOSA.

LA COSTANTE h NON DIPENDE DAL MATERIALE ED È LA STESSA CHE PLANCK AVEVA TROVATO STUDIANDO IL CORPO NERO (RADIAZIONE CONTENUTA IN UNA CAVITÀ).

$h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,Js$ COSTANTE DI PLANCK

L'UNICO RISULTATO INTUITIVO È CHE

$N_{el} \propto$ INTENSITÀ

EINSTEIN INTRODUCE L'IDEA CHE LA RADIAZIONE SIA FORMATA DA QUANTI (FOTONI), CIASCUNO DI ENERGIA

$$E = h\nu$$

SE L'ENERGIA TRASMESSA IN UN URTO TRA ELETTRONE E FOTONE È INSUFFICIENTE, ESSA È SEMPLICEMENTE DISSIPATA. SI HA INVECE ESTRAZIONE SE

$$h\nu > E_{ESTR} \qquad \nu > \frac{E_{ESTR}}{h} = \nu_{min}$$

NOTO ν_{min} POSSO MISURARE h. INOLTRE

$$E_{MAX}^{CIN} = h\nu - E_{ESTR} = h\nu - h\nu_{min} = h(\nu - \nu_{min})$$

INFINE

$$N_{PH} = \frac{I}{h\nu} \qquad \text{NUMERO DI FOTONI}$$

ED È INTUITIVO CHE $N_{el} \propto N_{PH}$ (NUMERO DI ELETTRONI PRODOTTI).

PIÙ TARDI LA QUANTIZZAZIONE DELL'ENERGIA DEGLI ELETTRONI FU CONFERMATA DALL'ESPERIMENTO INVERSO ("BREMSSTRAHLUNG", ELETTRONI FRENATI CHE PRODUCONO FOTONI).

· INTERPRETAZIONE RELATIVISTICA

DAL TEOREMA DI POYNTING,

$$\frac{E}{c} = |p|$$

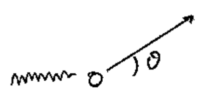
LA RELATIVITÀ RISTRETTA DÀ INVECE

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \qquad \text{(m MASSA A RIPOSO)}$$

COME RENDO CONSISTENTI I DUE RISULTATI? DEVE ESSERE, PER UN FOTONE, $m = 0$.

· EFFETTO COMPTON

CONSIDERO DEI FOTONI (RAGGI X) CHE INCIDONO SU UN MATERIALE (VOGLIO λ PICCOLA PER AVERE UN URTO PRECISO). QUANTO VALE L'ENERGIA DEL FOTONE DEVIATO? SPERIMENTALMENTE, OSSERVO CHE È DIMINUITA (OSSIA λ' È AUMENTATO). PERCHÉ?



USIAMO RAGGI X "DURI", OSSIA CON λ COMPARABILE ALLE DIMENSIONI ATOMICHE

$$\lambda \lesssim 1 \mathring{A}$$

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6.6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^{8}}{6600 \cdot 10^{-10}} = 3 \cdot 10^{-19}\ J \sim eV$$

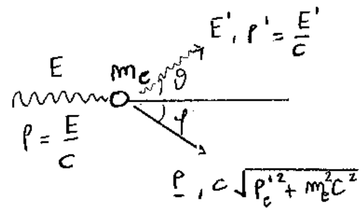
PER IL VISIBILE ; PER NOI $E \sim keV$.

SPERIMENTALMENTE

$$\lambda'(\theta) = \lambda + 0.024\ \mathring{A}\ (1 - \cos\theta)$$

CHE IN EFFETTI E' UNA CORREZIONE PICCOLISSIMA NEL VISIBILE (NON CON I RAGGI X).

IMPONENDO LA CONSERVAZIONE DI p ED E :



$$E + m_e c^2 = E' + c\sqrt{p_e'^2 + m_e^2 c^2} \qquad (E)$$

$$\frac{E}{c} + 0 = \frac{E'}{c}\cos\theta + p_e'\cos\varphi \qquad (p_x)$$

$$0 = \frac{E'}{c}\sin\theta - p_e'\sin\varphi \qquad (p_y)$$

ELIMINIAMO p_e' E φ, CHE NON MISURIAMO:

$$E - E'\cos\theta = p_e' c \cos\varphi$$

$$E'\sin\theta = p_e' c \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad (E - E'\cos\theta)^2 + E'^2\sin^2\theta = p_e'^2 c^2 \cos^2\varphi + p_e'^2 c^2 \sin^2\varphi$$

$$p_e'^2 c^2 = E^2 + E'^2\cos^2\theta - 2EE'\cos\theta + E'^2\sin^2\theta$$

$$= E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\theta$$

USIAMO INFINE

$$E - E' + m_e c^2 = c\sqrt{p_e'^2 + m_e^2 c^2}$$

$$(E - E' + m_e c^2)^2 = p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

$$E^2 + E'^2 + m_e^2 c^4 - 2EE' - 2E' m_e c^2 + 2E m_e c^2 = E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\theta + m_e^2 c^4$$

$$-EE' + E m_e c^2 - E' m_e c^2 = -EE'\cos\theta$$

$$(E - E') m_e c^2 = EE'(1 - \cos\theta)$$

PASSANDO ALLE LUNGHEZZE D'ONDA,

$$E-E' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda\lambda'}(\lambda'-\lambda)$$

$$EE' = \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}$$

SOSTITUENDO NELL' EQUAZIONE SOPRA,

$$\frac{hc}{\lambda\lambda'}(\lambda'-\lambda)\, m_e c^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda'-\lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

DAL CONFRONTO CON IL RISULTATO SPERIMENTALE

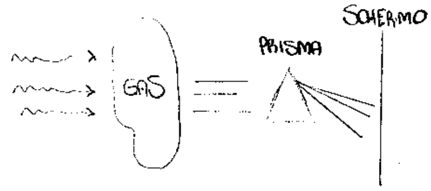
$$\lambda'-\lambda = 0.024\ \mathring{A}\,(1-\cos\theta)$$

$$\underset{\uparrow}{\frac{h}{m_e c}} = \frac{6.6\cdot 10^{-34}}{9\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^{8}} \simeq 0.2\cdot 10^{-11}\ m = 0.02\ \mathring{A}$$

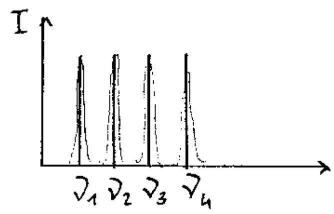
LUNGHEZZA D'ONDA COMPTON

- SPETTRO DI ASSORBIMENTO E DI EMISSIONE

OSSERVO SPERIMENTALMENTE DELLE LINEE NERE: UNO SPETTRO DISCRETO DI FREQUENZE.



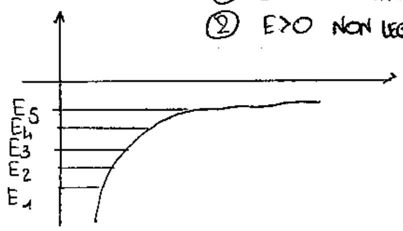
SCALDANDO UN GAS, QUELLO EMETTE RADIAZIONI; ANCHE LO SPETTRO DI EMISSIONE E' DISCRETO E VALGONO (LEGGE DI RITZ)



$$\begin{cases} \nu_{mn}^{EM} = |\nu_m^{ASS} - \nu_n^{ASS}| \\ \nu_{m0}^{EM} = \nu_m^{ASS} \end{cases}$$

(LO SPETTRO DI EMISSIONE E' PIU' RICCO DI QUELLO DI ASSORBIMENTO E LO CONTIENE: HA IN PIU' TUTTI I SALTI TRA DUE FREQUENZE DI ASSORBIMENTO).

① E<0 LEGATI
② E>0 NON LEGATI



• IL MODELLO DI BOHR

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

(TEORIA CLASSICA, NON OSSERVATO).

POSTULIAMO ALLORA CHE SOLO ALCUNI VALORI DISCRETI DI ENERGIA (NEGATIVA) SIANO AMMESSI (NON PONGO LIMITAZIONI SUI VALORI POSITIVI).

A BASSE TEMPERATURE, TUTTI GLI ATOMI SI TROVANO AL LIVELLO $-E_1 = -13\,eV$.

DOPO UN URTO CON UN FOTONE ν, L'ATOMO ASSUMEREBBE

$$E_f = E_1 + h\nu$$

MA IL PASSAGGIO NON AVVIENE SE $E_f < E_2$. ALLORA

$$E_2 - E_1 = h\nu_2$$

$$E_3 - E_1 = h\nu_3$$

$$\nu_n = \frac{1}{h}(E_n - E_1)$$

IN UN GAS RISCALDATO, INVECE, GLI ATOMI SI DISTRIBUISCONO SU LIVELLI DIVERSI DI ENERGIA; NEL DECADERE EMETTONO UN FOTONE DI FREQUENZA TALE CHE

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m$$

$$\nu_{nm} = \frac{1}{h}(E_n - E_1) - \frac{1}{h}(E_m - E_1)$$

$$= \nu_n^{ASS} - \nu_m^{ASS}$$

SI È COSÌ PREDETTA LA LEGGE DI RITZ CHE SI ERA OSSERVATA SPERIMENTALMENTE.

SI MISURA ANCHE CHE L'ANDAMENTO DI E È DEL TIPO

$$E \sim \frac{1}{n^2}$$

- ORBITE SECONDO BOHR

BOHR POSTULA CHE:

- LE ORBITE DELL' ELETTRONE SONO CIRCOLARI
- IL LORO MOMENTO ANGOLARE VALE

$$L = \frac{n h}{2\pi} = n \hbar$$

SI NOTI CHE LA STESSA COSTANTE CHE DESCRIVEVA FOTONE E CORPO NERO È QUI APPLICATA ALL' ATOMO.

LA MATERIA È QUINDI STABILE "PER COSTRUZIONE".

FATTA QUESTA IPOTESI,

$$m\underline{a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\hat{u}_r$$

$$-m\frac{v^2}{r}\hat{u}_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\hat{u}_r \quad \Rightarrow \quad v = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{mr}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$L = mvr = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q^2 m r\right]^{\frac{1}{2}} \equiv n\hbar$$

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{q^2 m}n^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RAGGIO DI BOHR}}}{a_0}\, n^2 \qquad a_0 = 0.55\ \mathring{A}$$

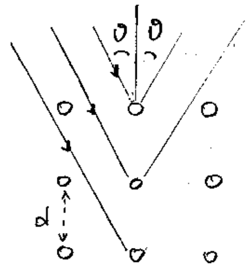
IN EFFETTI a_0 COINCIDE IN VALORE CON r RICAVATO DALL' ENERGIA DI IONIZZAZIONE DELL' IDROGENO (SI SCOPRÌ IN SEGUITO CHE LO RIPRODUCE ALL' 1‰).

IL MODELLO PREVEDE QUINDI SIA L'ANDAMENTO $\frac{1}{n^2}$ CHE IL VALORE E_{ION}:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a_0}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_{ION}}{n^2} \quad \left(= -\frac{m}{2\hbar^2 n^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 := -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}\right)$$

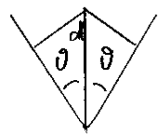
È PREDETTA INOLTRE, COME SI È VISTO, LA LEGGE DI RITZ.

- SCATTERING BRAGG



SI PRENDA UN CRISTALLO E LO SI INVESTA CON RADIAZIONE X (COSÌ CHE, DI NUOVO, λ SIA COMPARABILE CON LE DIMENSIONI ATOMICHE).
LA RADIAZIONE È RIFLESSA (LEGGE DI SNELL) E SUBISCE INTERFERENZA A CAUSA DELLA DIVERSA LUNGHEZZA DEI CAMMINI OTTICI. IN GENERE L'INTERFERENZA È DISTRUTTIVA; MA SE I CAMMINI DIFFERISCONO PER UN MULTIPLO DI λ, I RAGGI SONO IN FASE E INTERFERISCONO COSTRUTTIVAMENTE.

$$2d\cos\theta = m\lambda$$ (CONDIZIONE DI BRAGG)



$$\theta = \arccos \frac{m\lambda}{2d}$$

OSSERVO m PICCHI BRAGG QUANDO

$$\frac{\lambda}{2d} < \frac{1}{m} \qquad \left(\frac{\lambda}{2d} \ll 1\right)$$

QUESTO EFFETTO È USATO PER INDAGARE LA STRUTTURA RETICOLARE DI UN CRISTALLO.

NEL 1927 SI PROVA A FARLO CON FASCI DI ELETTRONI.
IN GENERE QUESTI SONO ASSORBITI, TRANNE PER ALCUNI VALORI DI θ:

$$\theta_m = \arccos(ma)$$

PER SPIEGARLO SI DEVE SUPPORRE LA NATURA ONDULATORIA DEGLI ELETTRONI.

LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE

$E = h\nu$

$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

MA LA PRIMA SI ERA VISTA VALIDA SOLO PER PARTICELLE CON MASSA NULLA. POSTULIAMO QUINDI

$\lambda = \frac{h}{p}$ FORMULA DI DE BROGLIE

LA CUI VALIDITÀ SI VERIFICA PROPRIO CON L'ESPERIMENTO BRAGG: SI MISURA λ_e CON RISULTATI IN ACCORDO CON QUESTA LEGGE.

RICAPITOLANDO

1. QUANTIZZAZIONE DELLA RADIAZIONE
   $E = h\nu$
2. INTERPRETAZIONE IN TERMINI DI FOTONI
   $m = 0 \qquad p = \frac{E}{c}$
3. INTERPRETAZIONE SPETTROSCOPICA: LE ENERGIE POSSIBILI SONO QUANTIZZATE
4. SCATTERING BRAGG, DE BROGLIE
   ONDA ASSOCIATA A OGNI PARTICELLA: $\lambda = \frac{h}{p}$

· INTERFERENZA

SIANO

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_0 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$$

$$= \underline{E}_0 \left[\cos\left(\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2} - \frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\right]$$

$$= \underline{E}_0 \left[\cos(\omega t + \bar{\phi}) \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) - \sin(\omega t + \bar{\phi}) \sin\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \right.$$

$$\left. + \cos(\omega t + \bar{\phi}) \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) + \sin(\omega t + \bar{\phi}) \sin\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \right]$$

$$= 2\underline{E}_0 \cos(\omega t + \bar{\phi}) \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

L' INTENSITÀ

$$\underline{I} = \underline{E} \wedge \underline{H}$$

$$I = EB\frac{1}{\mu_0} = E^2 \frac{1}{v\mu_0} = \frac{E^2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} =: \frac{E^2}{Z}$$

$$I \propto |E|^2$$

$$|E|^2 = 4 E_0^2 \cos^2(\omega t + \bar{\phi}) \cos^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c}$$

PER LA LUCE VISIBILE ($\lambda = 400 - 700$ mm),

$$T \sim \frac{500 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^8} \simeq 1.7 \cdot 10^{-15}\ \text{s}$$

PERCIÒ NOI NON OSSERVIAMO LE OSCILLAZIONI DI $|E|^2$; HA PIÙ SENSO STIMARNE IL VALOR MEDIO

$$\overline{|E|^2} = 4 E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{T}\int_0^T dt \cos^2(\omega t + \bar{\phi})$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos^2(x + \bar{\phi}) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i(x+\bar{\phi})} + e^{-i(x+\bar{\phi})}}{2}\right)^2 dx$$

MA

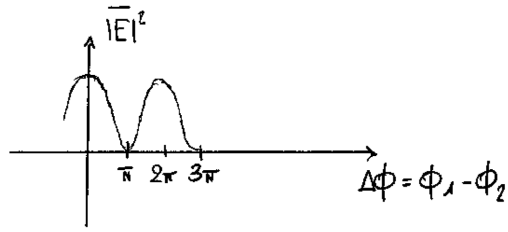
$$\int_0^{2\pi} dx\, e^{imx} = \frac{1}{im}\left[e^{im2\pi}-1\right] = 0$$

PERCIO'

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x+\bar{\phi})dx = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}dx\left[e^{2i(x+\bar{\phi})}+e^{-2i(x+\bar{\phi})}+2\right] = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}dx = \frac{1}{2}$$

DA CUI

$$\overline{|E|^2} = 2E_0^2\cos^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$



IN NOTAZIONE COMPLESSA, TUTTO QUESTO SI PUO' RISCRIVERE COME

$$E_1 = \frac{E_0}{2}e^{i(\omega t+\phi_1)} + cc = Be^{i\omega t} + B^* e^{-i\omega t} \qquad \left(\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z+z^*)\right)$$

$$B = \frac{E_0}{2}e^{i\phi_1}$$

$$|E_1|^2 = E_0^2\cos^2(\omega t+\phi_1) \qquad \overline{|E_1|^2} = \frac{E_0^2}{2} = 2|B|^2 = 2BB^*$$

$$|B|^2 = BB^* = \frac{E_0}{2}e^{i\phi_1}\frac{E_0}{2}e^{-i\phi_1} = \frac{E_0^2}{4}$$

ALLORA

$$E_1 = \frac{E_0}{2}e^{i(\omega t+\phi_1)} + cc \qquad E_2 = \frac{E_0}{2}e^{i(\omega t+\phi_2)} + cc$$

$$E = \frac{E_0}{2}\left(e^{i\omega t+i\phi_1} + e^{i\omega t+i\phi_2}\right) + cc$$

LA SOMMA DEI DUE CC MI DA' IL CC DELLA SOMMA B.

$$= \frac{E_0}{2}e^{i\omega t}\left(e^{i\phi_1}+e^{i\phi_2}\right) + cc \qquad B = \frac{E_0}{2}\left(e^{i\phi_1}+e^{i\phi_2}\right)$$

IN EFFETTI

$$\overline{|E|^2} = 2BB^* = 2\frac{E_0}{2}\left(e^{i\phi_1}+e^{i\phi_2}\right)\frac{E_0}{2}\left(e^{-i\phi_1}+e^{-i\phi_2}\right)$$

$$= \frac{E_0^2}{2}\left(1+e^{i(\phi_1-\phi_2)}+e^{i(\phi_2-\phi_1)}+1\right) = \frac{E_0^2}{2}\left(2+2\cos(\phi_1-\phi_2)\right)$$

$$= E_0^2\left(1+\cos(\phi_1-\phi_2)\right) = E_0^2\left[1+2\cos^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)-1\right] = 2E_0^2\cos^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

USIAMO QUESTO METODO PER STUDIARE L'INTERFERENZA TRA ONDE CON AMPIEZZE DIVERSE:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\left(E_{01}e^{i\phi_1} + E_{02}e^{i\phi_2}\right)e^{i\omega t}}_{B} + cc$$

$$\overline{|E|^2} = 2BB^*$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\left(E_{01}e^{i\phi_1}+E_{02}e^{i\phi_2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(E_{01}e^{-i\phi_1}+E_{02}e^{-i\phi_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E_{01}^2 + E_{01}E_{02}e^{i(\phi_1-\phi_2)} + E_{01}E_{02}e^{-i(\phi_1-\phi_2)} + E_{02}^2\right)$$

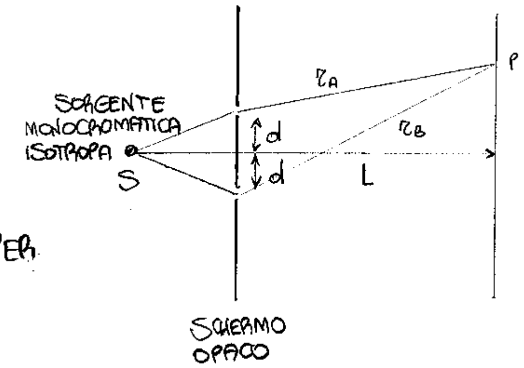
$$= \frac{1}{2}\left(E_{01}^2+E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\phi_1-\phi_2)\right)$$

POICHÈ $E_{01}, E_{02} > 0$, HO LA MASSIMA INTENSITÀ PER $\phi_1 = \phi_2$:

$$\overline{|E|^2}_{MAX\,(\phi_1=\phi_2)} = \frac{1}{2}\left(E_{01}+E_{02}\right)^2$$

$$\overline{|E|^2}_{MIN\,(\phi_1-\phi_2=\pi)} = \frac{1}{2}\left(E_{01}-E_{02}\right)^2$$

· INTERFERENZA DI YOUNG



IPOTESI:

① DIMENSIONI FORO $\ll \lambda$

(SE È VIOLATA, COME ERA ORIGINARIAMENTE PER MOTIVI COSTRUTTIVI, SI DEVE CONSIDERARE ANCHE LA DIFFRAZIONE)

② $d \sim \lambda$

③ $L \sim$ METRO

PER IL PRINCIPIO DI FRESNEL, OGNI FORO SI COMPORTA A SUA VOLTA COME UNA SORGENTE ISOTROPA: HO OTTENUTO DUE NUOVE SORGENTI LUMINOSE IN FASE.

IN UN QUALSIASI PUNTO P SI OSSERVANO $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$.

(SE S NON È CENTRATA NON È GRAVE, SI SPOSTA SOLO IL MASSIMO).

$$\underline{E}_A = \frac{E_0}{r_A}\,\hat{\varepsilon}\, e^{i(kr_A-\omega t)} + cc$$

$$\underline{E}_B = \frac{E_0}{r_B}\,\hat{\varepsilon}\, e^{i(kr_B-\omega t)} + cc$$

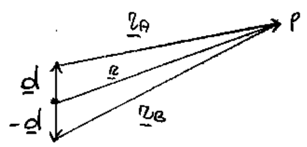
PER IPOTESI LA RADIAZIONE È POLARIZZATA SECONDO LA STESSA $\hat{\varepsilon}$ ENTRANTE NEL PIANO DEL FOGLIO.

$$\underline{E} = E_0\,\hat{\varepsilon}\left[\frac{e^{ikr_A}}{r_A} + \frac{e^{ikr_B}}{r_B}\right] e^{-i\omega t}$$

$$B = E_0\left[\frac{e^{ikr_A}}{r_A} + \frac{e^{ikr_B}}{r_B}\right] \simeq \frac{E_0}{r}\left(e^{ikr_A} + e^{ikr_B}\right)$$

DOVE HO INTRODOTTO $r_A \sim r_B \sim r$ PER LE AMPIEZZE (NON LO POSSO FARE PER LE PARTI OSCILLANTI, ALTRIMENTI PERDO L'INTERFERENZA).

$$\begin{cases} \underline{r} = \underline{d} + \underline{r}_A \\ \underline{r} = -\underline{d} + \underline{r}_B \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{r}_A = \underline{r} - \underline{d} \\ \underline{r}_B = \underline{r} + \underline{d} \end{cases}$$



$$r_A^2 = r^2 + d^2 - 2\,\underline{r}\cdot\underline{d} = r^2\left(1 - 2\,\frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r^2} + \underset{\sim}{\frac{d^2}{r^2}}\right)$$

$$r_B^2 = r^2 + d^2 + 2\,\underline{r}\cdot\underline{d} = r^2\left(1 + 2\,\frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r^2} + \underset{\sim}{\frac{d}{r^2}}\right)$$

$$r_A = r\left(1 - \frac{2\,\underline{r}\cdot\underline{d}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq r\left(1 - \frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r^2}\right) \qquad (1+x)^a \simeq 1 + ax$$

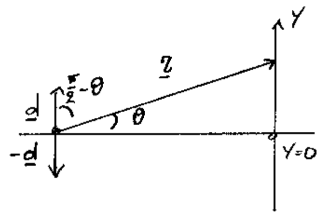
$$r_B \simeq r\left(1 + \frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r^2}\right)$$

SOSTITUENDO SOPRA,

$$B \simeq \frac{E_0}{r}\left[e^{ik\left(r - \frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r}\right)} + e^{ik\left(r + \frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r}\right)}\right] = \frac{2E_0}{r} e^{ikr} \cos\left(\frac{k\,\underline{r}\cdot\underline{d}}{r}\right)$$

$$\overline{|E|^2} = 2BB^* = \frac{8E_0^2}{r^2}\cos^2\left[k\,\frac{\underline{r}\cdot\underline{d}}{r}\right]$$

NOTO CHE



$$Y = r \sin\theta$$

$$\underline{r} \cdot \underline{d} = r d \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

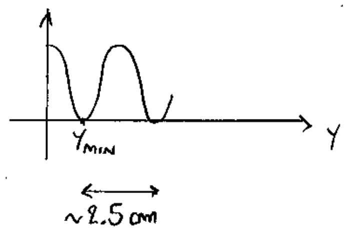
$$= r d \sin\theta$$

$$= Y d$$

SCRIVO INFINE, RICORDANDO $K = \frac{2\pi}{\lambda}$,

$$|\bar{E}|^2 = \frac{8E_0^2}{r^2} \cos^2\left(\frac{2\pi Y d}{\lambda r}\right)$$

SE SI HANNO, AD ESEMPIO,



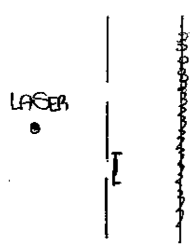
$$\begin{cases} \lambda = 5000\ \mathring{A} \quad (= 500\ \text{mm}) \\ d = 100\ \mu\text{m} \\ L = 10\ \text{m} \end{cases}$$

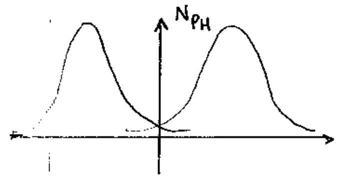
SI HA Y_{MIN} DOVE

$$\frac{2\pi Y d}{\lambda r} = \frac{\pi}{2} \qquad Y_{MIN} = \frac{\lambda r}{4d} \simeq \frac{\lambda L}{4d} \simeq 1.25\ \text{cm}$$

SUPPONIAMO DI RIPETERE L'ESPERIMENTO USANDO UN LASER COME SORGENTE DI POTENZA BASSISSIMA ($h\nu \sim 10^{-9}\ eV/s$): IN PRATICA È COME SPARARE UN FOTONE AL SECONDO. (O BASTA CHE L'INTERVALLO TRA I SINGOLI FOTONI SIA PIÙ GRANDE DEL TEMPO DI RIVELAZIONE DEI NOSTRI STRUMENTI).

CHIUDIAMO UN FORO E METTIAMO UN FOTOMOLTIPLICATORE SULLO SCHERMO, POI RIPETIAMO CON L'ALTRO FORO. OTTENGO DUE GAUSSIANE SINGOLARMENTE, MA SE APRO INSIEME I FORI E ASPETTO UN PO', PIAN PIANO SI FORMA LA FIGURA DI INTERFERENZA (E NON LA SOMMA DI DUE GAUSSIANE).



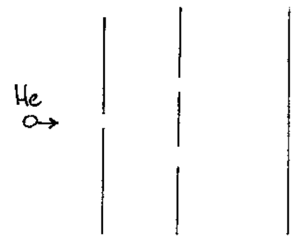


E' POSSIBILE CHE IL FOTONE PASSI PER I DUE BUCHI ALLO STESSO TEMPO? METTO DEI RIVELATORI E APPURO CHE NON SUCCEDE MAI. E ALLORA DA DOVE VIENE L'INTERFERENZA, SE PASSANO UNO ALLA VOLTA?

SI NOTI CHE IL COMPORTAMENTO "A PARTICELLE" E' CONFERMATO DAL FATTO CHE RIESCO A OSSERVARE IN QUALE DEI DUE FORI PASSA IL FOTONE.

L'ESPERIMENTO E' QUINDI RIPETUTO CON VERE E PROPRIE PARTICELLE, AD ESEMPIO NUCLEI DI He (COLLIMATI E CON LA STESSA VELOCITA', OVVERO LO STESSO IMPULSO E LUNGHEZZA D'ONDA).

IL FASCIO MONOCROMATICO DI ELIO PRODUCE LO STESSO FENOMENO DI INTERFERENZA SPIEGABILE ASSUMENDO $\lambda = \frac{h}{p}$.

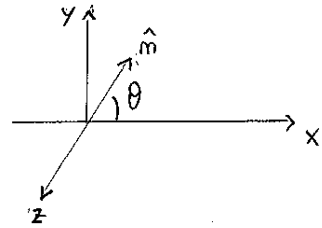


FOTONI E PARTICELLE MASSIVE SI COMPORTANO ALLO STESSO MODO (SE NON PER IL FATTO CHE PER DESCRIVERE I FOTONI DEVO INTRODURRE LA RELATIVITA').

· ESPERIMENTI CON FILTRO POLAROID

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

CAMPO CHE OSCILLA IN DIREZIONE $\hat{m}$ E SI PROPAGA IN DIREZIONE $\hat{z}$.



$$E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$$

$$\begin{cases} E_{0x} = E_0\cos\theta \\ E_{0y} = E_0\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = E_0\cos\theta\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0\sin\theta\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$I \propto E_0^2\cos^2\theta + E_0^2\sin^2\theta = E_0^2$$

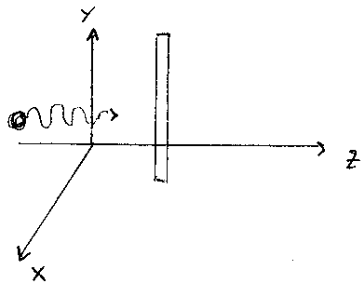
QUESTO È UN CAMPO POLARIZZATO LINEARMENTE (NON C'È FASE COMPLESSA) E OSCILLA SUL PIANO INDIVIDUATO DA θ.
UN FILTRO POLAROID AMMAZZA UNA DELLE COMPONENTI DEL CAMPO. DOPO IL FILTRO,

$$\begin{cases} E_x = E_0\cos\theta\cos(\omega t - kz) \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$I' \propto E_0^2\cos^2\theta$$

DA CUI LA LEGGE DI MAWS

$$\frac{I'}{I} = \cos^2\theta$$



POSSO VERIFICARLO CON UN ESPERIMENTO CON I FOTONI IN CUI CONTO QUELLI CHE ATTRAVERSANO IL FILTRO E CALCOLO

$$\frac{I'}{I} = \frac{N_{PH\ DOPO}}{N_{PH\ PRIMA}}$$

DATO UN SINGOLO FOTONE, TUTTAVIA, POSSO SOLO AFFERMARE CON CHE PROBABILITÀ ATTRAVERSERÀ IL FILTRO. ESEMPIO: HO FOTONI TUTTI POLARIZZATI A 45°; ALLORA SO CHE OGNI FOTONE HA PROBABILITÀ $\frac{1}{2}$ DI ATTRAVERSARE IL FILTRO.

NOTA: I FOTONI ERANO GIÀ INIZIALMENTE POLARIZZATI, MA IN DIREZIONE DIVERSA DA QUELLA DEL FILTRO.

· OPERATORI HERMITIANI

$A = a_{mn}$ (RIGA m, COLONNA n)

* DATA UNA MATRICE, DEFINISCO IL SUO AGGIUNTO

$A^\dagger = a^*_{nm}$

AD ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$$

* UNA MATRICE SI DICE HERMITIANA SSE

$A = A^\dagger$

$a^*_{nm} = a_{mn}$

QUESTO CI DICE CHE GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE SONO REALI E QUELLI CORRISPONDENTI (SIMMETRICI) SONO COMPLESSI CONIUGATI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+6i \\ 1-6i & 3 \end{pmatrix}$$ È HERMITIANA.

* DEFINIAMO IL PRODOTTO SCALARE

$$(v, w) = v^\dagger w = \sum_i v_i^* w_i$$

PENSACI, IN EFFETTI PER FARE (v, w) DEVO RUOTARE v.

DATA UNA MATRICE A E SCELTI DUE VETTORI v E w,

$$\langle v | A | w \rangle = v^\dagger A w = \sum_{ij} v_i^* A_{ij} w_j$$

SI DICE ELEMENTO DI MATRICE DI A TRA v E w.
(v: BRA, w: KET)

SI HA, PER QUALSIASI MATRICE,

$$\langle v | A | w \rangle^* = \Big(\sum_{ij} v_i^* A_{ij} w_j \Big)^* = \sum_{ij} v_i A^*_{ij} w_j^*$$

$$= \sum_{ij} w_j^* (A^\dagger)_{ji} v_i = \langle w | A^\dagger | v \rangle$$

(IN MATEMATICA, $\langle v, Aw \rangle^* = \langle Aw, v \rangle = \langle w, A^\dagger v \rangle$)

* SE A È HERMITIANA

$$\langle v|A|w\rangle^* = \langle w|A|v\rangle$$

MA È VERO ANCHE CHE

$$\langle v|A|w\rangle^* = \langle w|A|v\rangle \quad \forall v,w \quad \Rightarrow \quad A \text{ È HERMITIANA.}$$

INFATTI SE PER IPOTESI VALE $\forall v,w$

$$\Big(\sum_{ij} v_i^* A_{ij} w_j\Big)^* = \sum w_j^* A_{ji} v_i$$

SCELTI I VETTORI

$$v_n = (0, 0 \dots, 1, \overset{n}{\dots}, 0)$$

$$w_m = (0, \dots, \underset{m}{1}, \dots, 0)$$

TROVO AL VARIARE DI n, m CHE

$$A^*_{nm} = A_{mn}$$

* LO SPETTRO DI UNA MATRICE HERMITIANA È REALE.

SE λ È AUTOVALORE E v UN AUTOVETTORE,

$$Av = \lambda v$$

$$v^\dagger A v = \lambda v^\dagger v$$

$$\langle v|A|v\rangle = \lambda \sum_i v_i^* v_i = \lambda \sum_i |v_i|^2 = \lambda |v|^2$$

MA SE A È HERMITIANA IN PARTICOLARE

$$\langle v|A|v\rangle^* = \langle v|A|v\rangle \equiv \text{NUMERO REALE}$$

NE DEDUCO CHE λ È REALE.

* LA BASE DI AUTOVETTORI DI A HERMITIANA PUÒ ESSERE PRESA ORTONORMALE.

SIANO $v^{(1)}, v^{(2)}$ AUTOVETTORI CON $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ E

$$w = v^{(1)} + v^{(2)}$$

SI HANNO

NOTA: DICO "SI PUO' PRENDERE ORTOGONALE" IN QUANTO L'ORTOGONALITA' E' ASSICURATA SOLO SE NON C'E' DEGENERAZIONE.

$$A v^{(1)} = \lambda^{(1)} v^{(1)}$$
$$A v^{(2)} = \lambda^{(2)} v^{(2)}$$

$$\langle v^{(2)} | A | v^{(1)} \rangle = \lambda^{(1)} \langle v^{(2)} | v^{(1)} \rangle$$
$$\langle v^{(1)} | A | v^{(2)} \rangle = \lambda^{(2)} \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle$$

$$\langle v^{(2)} | A | v^{(1)} \rangle^* = \langle v^{(1)} | A | v^{(2)} \rangle = \lambda^{(1)} \langle v^{(2)} | v^{(1)} \rangle^*$$

$$\langle v^{(2)} | v^{(1)} \rangle^* = \left(\sum_i v_i^{(2)*} v_i^{(1)} \right)^* = \sum_i v_i^{(1)*} v_i^{(2)} = \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle$$

$$\langle v^{(2)} | A | v^{(1)} \rangle^* = \lambda^{(1)} \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle$$
$$\langle v^{(1)} | A | v^{(2)} \rangle = \lambda^{(2)} \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle$$

$$\lambda^{(1)} \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle = \lambda^{(2)} \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle$$
$$(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle = 0$$

SE $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ NE CONSEGUE

$$\langle v^{(1)} | v^{(2)} \rangle = 0$$

* SUPPONIAMO DI AVERE UNA BASE DEI $v^{(\alpha)}$ ORTONORMALI.

$$V = \left(v^{(1)} \, v^{(2)} \, v^{(3)} \, \dots \right)$$
$$V_{ij} = v_i^{(j)}$$

MOSTRIAMO CHE V COSI' COSTRUITA E' UNITARIA, OVVERO

$V^+ V = \mathbb{1}$ ($V^+ = V^{-1}$, IN REALTA' DEVE VALERE ANCHE $VV^+ = \mathbb{1}$)

CALCOLIAMO

$$(V^+ V)_{ij} = \sum_K (V^+)_{iK} V_{Kj} = \sum_K V^*_{Ki} V_{Kj}$$
$$= \sum_K v_K^{(i)*} v_K^{(j)} = \langle v^{(i)} | v^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$$

NOTA: UNA MATRICE NORMALE E' INVECE t.c. $A^+ A = A A^+$. INVECE UNA MATRICE E' ORTOGONALE SE $A^t A = A A^t = \mathbb{1}$ (OSSIA E' "UNITARIA SUI REALI").

* DATA A HERMITIANA,

$$(AV)_{ij} = \sum_k A_{ik} V_{kj} = \sum_n A_{in} v_n^{(j)}$$

$$= (A v^{(j)})_i = \lambda^{(j)} v_i^{(j)}$$

DETTA A_D LA MATRICE DIAGONALE

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & & \\ & & \lambda^{(3)} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (A_D)_{ij} = \delta_{ij} \lambda^{(j)}$$

$$(VA_D)_{ij} = \sum_k V_{in} A_{Dnj} = V_{ij} \lambda^{(j)}$$

$$= \lambda^{(j)} v_i^{(j)}$$

CONFRONTANDO SOPRA OTTENGO

$$AV = VA_D$$

$$V^+ A V = V^+ V A_D = A_D$$

NOTA CHE IN GENERE ERA $A_D = V^{-1} A V$, MA $V^+ = V^{-1}$.

HO COME SI DICE DIAGONALIZZATO A.

OGNI MATRICE HERMITIANA SI DIAGONALIZZA CON UNA MATRICE UNITARIA.

* DEFINIAMO IL <u>COMMUTATORE</u>

$$[A, B] = AB - BA$$

SE A E B COMMUTANO, OSSIA

$$[A, B] = 0$$

ALLORA A, B SONO DIAGONALIZZABILI SIMULTANEAMENTE, CIOE' $\exists V$ t.c.

$$\begin{cases} V^+ A V = A_D \\ V^+ B V = B_D \end{cases}$$

COSTRUIAMO INFATTI UNA BASE IN CUI

$$V^{+}AV = A_D$$
$$V^{+}BV = \tilde{B}$$

$$[A_D, \tilde{B}] = V^{+}AVV^{+}BV - V^{+}BVV^{+}AV$$
$$= V^{+}ABV - V^{+}BAV$$

POICHE'

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA$$

ALLORA

$$[A_D, \tilde{B}] = V^{+}ABV - V^{+}ABV = 0$$
$$(A_D\tilde{B} - \tilde{B}A_D)_{ij} = 0$$
$$\sum_k A_{D\,ik}\tilde{B}_{kj} - \tilde{B}_{ik}A_{D\,kj} = 0$$

POICHE' A_D E' DIAGONALE, $(A_D)_{ik} = \delta_{ik}\lambda^{(k)}$ E OTTENGO

$$A_{D\,ii}\tilde{B}_{ij} - \tilde{B}_{ij}A_{D\,jj} = 0 \qquad \lambda^{(k)}\tilde{B}_{ij} - \tilde{B}_{ij}\lambda^{(j)} = 0$$
$$(A_{D\,ii} - A_{D\,jj})\tilde{B}_{ij} = 0 \qquad (\lambda^{(k)} - \lambda^{(j)})\tilde{B}_{ij} = 0$$

QUESTE ULTIME IN NOTAZIONE INDICIALE. SI NOTI CHE $\lambda^{(k)} \neq \lambda^{(j)}$ $\forall k, j$ SOLO SE NON C'E' DEGENERAZIONE, QUINDI QUANTO OTTENUTO NON IMPLICA IN GENERALE $\tilde{B}_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$.

AD ESEMPIO

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & 0 \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{33} \end{pmatrix}$$

$$(A_{D11} - A_{D22})\tilde{B}_{12} = 0$$

PERCIO' LA CONDIZIONE SOPRA NON IMPLICA CHE $\tilde{B}$ SIA DIAGONALE, MA SOLO DIAGONALE A BLOCCHI (SE IN A_D AUTOVALORI IDENTICI SONO VICINI):

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1\lambda_1 \,|\, 3 & & & \\ & \lambda_2\lambda_2\lambda_2 \,|\, 3 & & \\ & & \lambda_3\lambda_3 \,|\, 2 & \\ & & & \lambda_4 \,|\, 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{3\times 3} & & & \\ & \boxed{3\times 3} & & \\ & & \boxed{2\times 2} & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

SE A NON HA AUTOVALORI DEGENERI, ALLORA $\tilde{B}$ E' DIAGONALE.

IN CASO CONTRARIO ESISTE UNA SCELTA NON UNIVOCA DELLA BASE CHE DIAGONALIZZA A E DEVO RAGIONARE SUI SINGOLI BLOCCHI PER RENDERE DIAGONALE B (OGNI BLOCCO DI A È PROPORZIONALE A I E NON CAMBIA PIÙ).

* VOGLIAMO DIMOSTRARE

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

SI NOTI CHE, ANCHE SE A, B FOSSERO HERMITIANE,

$$(AB)^+ = BA \neq AB$$

OSSIA IL PRODOTTO DI MATRICI HERMITIANE NON È IN GENERALE HERMITIANO.

DIMOSTRAZIONE:

$$[(AB)^+]_{mn} = [(AB)]^*_{nm} = \Big(\sum_k A_{nk} B_{km}\Big)^* = \sum_k A^*_{nk} B^*_{km}$$

$$(B^+A^+)_{mn} = \sum_k (B^+)_{mk} (A^+)_{kn} = \sum_k B^*_{km} A^*_{nk}$$

· <u>ESEMPIO</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A, B SONO HERMITIANE.

A, B COMMUTANO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AB$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CERCO GLI AUTOVETTORI DI A

$v_1 = (1,0,0) \qquad \lambda_1 = 1$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$

$\lambda = \pm 1$

CERCO UN SECONDO AUTOVETTORE:

$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = (0, a, b)$ (DEVE ESSERE $\perp$ AL PRIMO!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b$$

NON È NECESSARIO IMPORLO. SE RISOLVI IN GENERALE TROVI (POSTO $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

VETTORI DELLA BASE

$$v_2 = (0, a, a)$$

$$v_2^* v_2 = 2a^2 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

E UN TERZO,

$\lambda_3 = -1 \qquad v_3 = (0, a, b)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

$$v_3 = (0, a, -a)$$

$$v_3^* v_3 = 2a^2 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

IN SINTESI

$$\begin{cases} v_1 = (1, 0, 0) & \lambda = 1 \\ v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \lambda = 1 \\ v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \lambda = -1 \end{cases}$$

È UNA BASE ORTONORMALE (MA NON È UNICA: HO UN SOTTOSPAZIO DEGENERE DI DIMENSIONE 2).

COSTRUISCO LA MATRICE

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

DEVONO ESSERE NORMALIZZATI!

SO CHE

$$V^+ A V = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = A_D$$

E VOGLIO CALCOLARE

$$V^+ B V = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X & X \\ X & X \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & X \end{pmatrix} = \tilde{B}$$

OVVERO MI ASPETTO DI OTTENERE UNA MATRICE A BLOCCHI.

$$V^+ B V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \tilde{B}$$

(CHECK: È HERMITIANA, HO SOLO CAMBIATO LA BASE E QUESTA È UNA PROPRIETÀ INTRINSECA DI B).

DIAGONALIZZIAMO $\tilde{B}$.

$$\det(\tilde{B}-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} \lambda & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

CERCHIAMO GLI AUTOVETTORI.

$\lambda = 2 \quad w_1 = (a, b, 0)$ (STO DIAGONALIZZANDO SOLO IL BLOCCO SOPRA)

$\tilde{B} w_1 = 2 w_1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\, b = 2a$

$\Rightarrow \quad w_1 = (a, \sqrt{2}a, 0) \quad \Rightarrow \quad w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$

$\lambda = -1 \quad w_2 = (a, b, 0)$

$\tilde{B} w_2 = -w_2 \quad \Rightarrow \quad a = -\sqrt{2}\, b$

$\Rightarrow \quad w_2 = \left(a, -\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0\right) \quad \Rightarrow \quad w_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$

CHECK: $\langle w_1 | w_2 \rangle = 0$ (INFATTI $\tilde{B}$ E' HERMITIANA → SIMMETRICA, QUINDI I SUOI AUTOVETTORI SONO ⊥ - TEOREMA SPETTRALE)

OTTENGO

$$W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ANCHE QUESTA È A BLOCCHI - I VARI BLOCCHI NON SI PARLANO. NOTA CHE HO RIMESSO AL TERZO POSTO L'AUTOVETTORE DI $\lambda = -1$.

$$W^+ B W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NOTA ANCHE CHE FIN DALL'INIZIO POTEVO LAVORARE SOLO SUL BLOCCO 2x2, AGGIUNGENDO GLI OPPORTUNI "0" QUANDO COSTRUISCO W (E SI OSSERVI CHE QUESTI NON CAMBIANO LA NORMALIZZAZIONE DEGLI AUTOVETTORI IN 2D) E DEGLI "1" IN CORRISPONDENZA DEGLI ALTRI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE.

NOTO CHE

$$W^+ A_D W = A_D$$

INFATTI NEL BLOCCO IN ALTO A_D E' ∝ IDENTITÀ. LA MATRICE W DIAGONALIZZA ANCHE A_D. VERIFICHIAMOLO:

$$W^+ A_D W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} W$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

VALE IN EFFETTI

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AC & 0 \\ \hline 0 & BD \end{array}\right)$$

ABBIAMO TROVATO

$$W^+ A_D W = A_D$$
$$W^+ \tilde{B} W = B_D$$
$$V^+ A V = A_D$$
$$V^+ B V = \tilde{B}$$

$$W^+ V^+ A V W = W^+ A_D W = A_D$$
$$W^+ V^+ B V W = W^+ \tilde{B} W = B_D$$

INFATTI NEI BLOCCHI SU CUI LAVORA W (OVVERO SU CUI E' $\neq \mathbb{1}$) LA MATRICE A_D E' PROPORZIONALE A $\mathbb{1}$ SECONDO UN CERTO $\lambda^{(j)}$.

$$W^+ V^+ = (VW)^+ \qquad R := VW \qquad \Rightarrow \begin{cases} R^+ A R = A_D \\ R^+ B R = B_D \end{cases}$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} r_1 & \quad r_2 & \quad r_3 \end{array} \end{array}$$

LE COLONNE SONO AUTOVETTORI ORTONORMALI.

PER LA MATRICE A ESSI CORRISPONDONO A $\lambda = 1 \quad 1 \quad -1$

IN EFFETTI $r_3 = v_3$. INVECE r_1 E r_2 SONO COMBINAZIONI LINEARI DEI VECCHI v_1, v_2 (CHE ABBIAMO SEMPLICEMENTE RUOTATO ALL' INTERNO DEL LORO AUTOSPAZIO).

PER QUANTO RIGUARDA B SI HANNO $\lambda = 2 \quad -1 \quad -1$.

TRA TUTTI I POSSIBILI AUTOVETTORI ORTONORMALI DI A NELLO SPAZIO GENERATO DA v_1 E v_2, CE NE SONO SOLO DUE CHE SONO ANCHE AUTOVETTORI DI B E SONO r_1 E r_2.

· I POSTULATI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

FISSIAMO DEI POSTULATI CERCANDO DI MANTENERE INNANZITUTTO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, TIPICO DELLE ONDE.

* DEFINIAMO LO STATO

$|A\rangle$

LA SOMMA DI STATI È ANCORA UNO STATO.

GLI STATI APPARTENGONO A UNO SPAZIO DI HILBERT INFINITO DIMENSIONALE (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).

(NEL MONDO CLASSICO CARATTERIZZO UNO STATO TRAMITE $\underline{v}, \underline{x}$).

SIA ξ UNA GENERICA OSSERVABILE (QUALCOSA CHE POSSO MISURARE) E SIANO

$\{\xi_i\}$

I POSSIBILI VALORI CHE TALE MISURA PUÒ ASSUMERE.

AD ESEMPIO PER L'ATOMO DI BOHR SI HANNO

$E_0, E_1, \ldots, 0,$ {TUTTI I NUMERI POSITIVI}

INSOMMA $\{\xi_i\}$ È UN INSIEME NON BANALE DI NUMERI <u>REALI</u>.

CI SONO STATI t.c. SE MISURO ξ OTTENGO SEMPRE LO STESSO NUMERO ξ_i. LI CHIAMIAMO AUTOSTATI DI ξ E ξ_i È IL LORO AUTOVALORE.

* POSTULATO: PER OGNI ξ_i ESISTE UNO STATO $|\xi_i\rangle$ DI CUI ξ_i È AUTOVALORE.

$|\xi_i\rangle \xrightarrow[\xi]{\text{MISURA}} \xi_i$ SEMPRE.

PRESO TUTTAVIA UNO STATO GENERICO,

$|A\rangle \xrightarrow[\xi]{\text{MISURA}} \{\xi_i\}$ UNO QUALSIASI. CON CHE PROBABILITÀ?

* POSTULATO:

$$P(\xi_i \text{ SULLO STATO } |A\rangle) = \frac{|\langle \xi_i | A\rangle|^2}{\langle \xi_i|\xi_i\rangle\langle A|A\rangle}$$

NOTA CHE È $= \cos^2\theta$, DOVE θ È L'ANGOLO TRA $|\xi_i\rangle$ E $|A\rangle$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \xi_i|A\rangle}{\|\xi_i\|\cdot\|A\|}\right)$$

* DATO LO STATO $|A\rangle$, CHI È

$\alpha|A\rangle$?

LO STATO È LO STESSO, CAMBIA SOLAMENTE L'INTENSITÀ (AD ESEMPIO IL NUMERO DI FOTONI).

LA DEFINIZIONE SOPRA DI PROBABILITÀ È DATA TENENDO CONTO CHE LO SPAZIO DEGLI STATI È UNO SPAZIO DI HILBERT MODULO QUALSIASI COSTANTE.

OSSERVIAMO CHE LA DEFINIZIONE SOPRA DI PROBABILITÀ È CONSISTENTE CON QUANTO APPENA AFFERMATO. INFATTI

$|A\rangle' = \alpha|A\rangle$

$|\xi_i\rangle' = \beta|\xi_i\rangle$

$$P(|A\rangle' \to \xi_i') = \frac{|{}'\langle A|\xi_i\rangle'|^2}{{}'\langle A|A\rangle'\,{}'\langle \xi_i|\xi_i\rangle'}$$

MA

$${}'\langle A|\xi_i\rangle' = \sum_r (a')^*_r (\xi_i')_r = \sum_r (\alpha a)^*_r (\beta\xi_i)_r = \sum_r \alpha^*\beta a_r \xi_{ir}$$

$$= \alpha^*\beta\langle A|\xi_i\rangle$$

PERCIÒ

${}'\langle A|A\rangle' = |\alpha|^2\langle A|A\rangle$

${}'\langle \xi_i|\xi_i\rangle' = |\beta|^2\langle \xi_i|\xi_i\rangle$

$$P(|A\rangle' \to \xi_i') = \frac{|\alpha|^2|\beta|^2|\langle A|\xi_i\rangle|^2}{|\alpha|^2\langle A|A\rangle|\beta|^2\langle \xi_i|\xi_i\rangle} = P(|A\rangle \to \xi_i)$$

ABBIAMO MOSTRATO CHE $P(|A\rangle \to \xi_i)$ NON DIPENDE DALLE NORMALIZZAZIONI. È TUTTAVIA BUONA COSA USARE STATI NORMALIZZATI.

SE È QUESTO IL CASO,

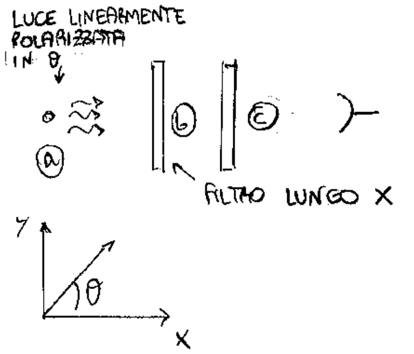
$$P(|A\rangle, \text{misura } \xi_i) = |\langle A|\xi_i\rangle|^2$$

SI NOTI CHE

$$|A\rangle, \quad e^{i\phi}|A\rangle$$

SONO ENTRAMBI NORMALIZZATI E SONO EQUIVALENTI (DIFFERISCONO SOLO PER LA FASE).

<u>ESEMPIO</u>: FILTRO POLAROID



SI ERA OSSERVATO (LEGGE DI MALUS)

$$P(\text{PASSI}) = \cos^2\theta$$

METTIAMO ANCHE UN SECONDO FILTRO.

IN a,

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\theta \, e^{i(kz-wt)} \\ E_y = E_0 \sin\theta \, e^{i(kz-wt)} \end{cases}$$

IN b,

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\theta \, e^{i(kz-wt)} \\ E_y = 0 \end{cases}$$

IN c,

$$\rightarrow E_b.$$

DEFINISCO

$\xi = 1$ SE MISURO

$\xi = 0$ SE NON MISURO

ALLORA

$$|A\rangle \rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \cos\theta \, e^{i(kz-wt)} \\ E_y = E_0 \sin \, e^{i(kz-wt)} \end{cases}$$

$$|\xi_1\rangle \rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \cos\theta \, e^{i(kz-wt)} \\ E_y = 0 \end{cases} \quad \text{È AUTOSTATO DI } \xi = 1$$

$$|\xi_0\rangle \rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \sin\theta \, e^{i(kz-wt)} \end{cases} \quad \text{È AUTOSTATO DI } \xi = 0$$

(INFATTI IL RISULTATO DI UNA MISURA SU $|\xi_1\rangle$ O $|\xi_0\rangle$ È NOTO A PRIORI).

POSSO CALCOLARE

$$\langle A | \xi_1 \rangle = E_{Ax}^* E_{1x} + E_{Ay}^* E_{1y} = E_0^2 \cos^2\theta$$

$$\langle A | A \rangle = E_{Ax}^* E_{Ax} + E_{Ay}^* E_{Ay} = E_0^2 \cos^2\theta + E_0^2 \sin^2\theta = E_0^2$$

$$\langle \xi_1 | \xi_1 \rangle = E_{1x}^* E_{1x} + E_{1y}^* E_{1y} = E_0^2 \cos^2\theta$$

$$P(|A\rangle, \xi_1) = \frac{E_0^4 \cos^4\theta}{E_0^4 \cos^2\theta} = \cos^2\theta$$

★ GLI $|\xi_i\rangle$ SONO UNA BASE ORTOGONALE.

QUESTO E' VERO SE L'OSSERVABILE NON E' DEGENERE, ALTRIMENTI E' SEMPRE POSSIBILE ESTRARRE UNA BASE.

INNANZITUTTO

$$\langle \xi_i | \xi_j \rangle = 0 \qquad i \neq j$$

INFATTI

$$P(|\xi_i\rangle, \text{MISURA } \xi_j) = 0 = \frac{|\langle \xi_i | \xi_j \rangle|^2}{\langle \xi_i | \xi_i \rangle \langle \xi_j | \xi_j \rangle}$$

SE POI NON FOSSERO UNA BASE,

$\exists$ $|A\rangle$ CHE NON POSSO SCRIVERE COME COMBINAZIONE DEGLI $|\xi_i\rangle$.

OVVERO *

$$\langle A | \xi_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

ALLORA

$$P(|A\rangle, \xi_i) = 0 \quad \forall i$$

MA QUESTO E' ANTIFISICO (DEVE ESSERE $\sum_i P_i = 1$).

* NOTA:

A VOLER FARE I PRECISI, QUESTO E' VERO SE LO SPAZIO E' COMPLETO.

INFATTI IN TAL CASO: $U = (u_m)_{m=1}^{\infty}$ SISTEMA DI VETTORI,

U E' UNA BASE $\Leftrightarrow$ U E' TOTALE

DOVE PER TOTALE INTENDO

$$\nexists\, v \in V,\ v \neq 0 \text{ t.c. } \langle v | u_m \rangle = 0 \quad \forall m$$

O ANCHE $U^{\perp} = \{0\}$.

· COLLASSO (POSTULATO DI VON NEUMANN)

NEL PROCESSO DI MISURA LO STATO CAMBIA: SE MISURO ξ_i, DOPO LA MISURA IL SISTEMA SI TROVA IN UN AUTOSTATO $|\xi_i\rangle$ DELL' AUTOVALORE ξ_i (NELL' IPOTESI IN CUI L' AUTOVALORE SIA NON DEGENERE).

POICHÈ GLI $|\xi_i\rangle$ FORMANO UNA BASE, POSSO SCRIVERE

$$|A\rangle = \sum_{i,\alpha} a_{i\alpha} |\xi_i^{(\alpha)}\rangle$$

DOVE

$|\xi_1^{(1)}\rangle$, $|\xi_1^{(2)}\rangle$ ... SONO TUTTI AUTOSTATI DI ξ_1

OVVERO α È LA MOLTEPLICITÀ DELL' AUTOVALORE i-ESIMO.

SUPPONIAMO ORA DI MISURARE ξ_j. PER IL POSTULATO DI VON NEUMANN, FINISCO IN

$$\sum_{\alpha} a_{j\alpha} |\xi_j^{(\alpha)}\rangle$$

NOTA: IN GENERALE QUESTO STATO NON È PIÙ NORMALIZZATO.

CHE È DI FATTO, TRA QUELLI POSSIBILI, IL PIÙ VICINO A QUELLO DI PARTENZA (HO SOLO TOLTO GLI ECCESSI).

È ANCHE QUELLO PER CUI LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE È MASSIMA.

AD ESEMPIO,

$$|A\rangle = a|\xi_1^{(1)}\rangle + b|\xi_2^{(1)}\rangle + c|\xi_2^{(2)}\rangle$$

$$\xrightarrow{\xi_1} |\xi_1\rangle$$

$$\xrightarrow{\xi_2} b|\xi_2^{(1)}\rangle + c|\xi_2^{(2)}\rangle$$

CHE È, SE VOGLIAMO, LA PROIEZIONE SUL SOTTOSPAZIO GENERATO DA $\xi_2^{(1)}$ E $\xi_2^{(2)}$.

CON CHE PROBABILITÀ?

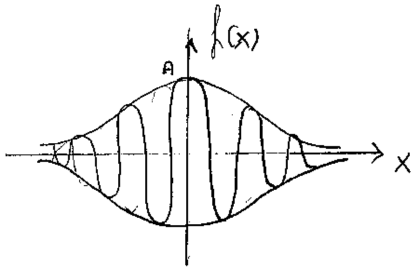
$$P(|A\rangle \text{ PROB } \xi_2) = \frac{|\langle A|\xi_2\rangle|^2}{\langle\xi_2|\xi_2\rangle\langle A|A\rangle}$$

QUALE ξ_2? QUELLO CALCOLATO QUI SOPRA CON VON NEUMANN.

- INDETERMINAZIONE (CLASSICA)

UN' ONDA MONOCROMATICA NON PUO' ESSERE LOCALIZZATA NELLO SPAZIO E VICEVERSA.

PRENDIAMO



$$f(x) = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(k_0 x)$$

k_0 MI DA' λ_0 E σ LA LARGHEZZA (HO L'ONDA PIANA SE $\sigma \to \infty$).

SE VOGLIO CHE SI SPOSTI NEL TEMPO (CHE SODDISFI L'EQ. DELLE ONDE)

$$f(x - vt) = \psi(x,t)$$

$$\psi(x,t) = A \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{2\sigma^2}\right] \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

LA VOGLIO SCRIVERE COME UNA SOMMA DI ONDE PIANE

$$\sum_k A(k) \cos(kx)$$

PER FARLO, CONSIDERO LA SUA TRASFORMATA DI FOURIER $A(k)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} A(k)$$

$$f(x - vt) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-vt)} A(k) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} A(k)$$

INVERTENDO,

$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} A \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{2}\left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right)$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} + i(k_0 - k)x\right] + (k_0 \to -k_0)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\alpha)^2 + \beta = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2\right) + \beta$$

RICAVO α E β:

$$i(k_0 - k) = -\frac{1}{2\sigma^2} 2\alpha \qquad \rightarrow \qquad \alpha = -i\sigma^2 (k_0 - k)$$

$$0 = -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2} + \beta \qquad \rightarrow \qquad \beta = -\frac{\sigma^2}{2}(k_0 - k)^2$$

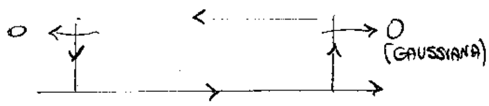
E RISCRIVO

$$\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\alpha)^2 + \beta\right] + (k_0 \to -k_0)$$

$y = x + \alpha$

IN GENERE DOVREI DIMOSTRARE CHE IL CAMMINO SI SPOSTA SENZA PROBLEMI

$$= \frac{A}{2} e^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + (k_0 \to -k_0)$$



$$= \frac{A}{2}\sigma\sqrt{2\pi}\, e^{\beta} + (k_0 \to -k_0)$$

$$= \frac{A}{2}\sigma\sqrt{2\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(k-k_0)^2\right] + \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(k+k_0)^2\right] \right\}$$

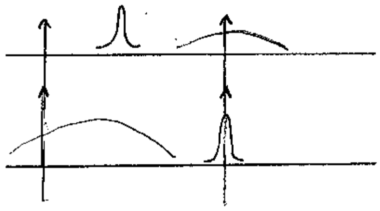
$$\equiv A(k)$$

NOTO QUINDI CHE

$$\Delta k = \frac{1}{\sigma}$$

σ GRANDE

σ PICCOLO



$$\Delta k \, \Delta x = 1 \; *$$

(PER UN SEGNALE GAUSSIANO; ALTRIMENTI HO UN $\geq$).

APPLICHIAMO QUESTO RISULTATO CLASSICO ALLE PARTICELLE.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = h\frac{k}{2\pi} = \hbar k$$

$$\Delta p \, \Delta x = \hbar \, \Delta k \, \Delta x = \hbar$$

DETTA RELAZIONE DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG.

* INTERESSANTE NOTARE CHE $\delta(x)$ $(\Delta x = 0)$ SI TRASFORMA IN $A(k) = 1$ $(\Delta k = \infty)$. RICORDA ANCHE CHE PER FARE UN'ONDA QUADRA DI PERIODO NOTO SERVE UN NUMERO DISCRETO MA INFINITO DI ν DIVERSE: NON DEVE STUPIRE CHE QUI NON BASTI UN SEGNALE A k_0.

· OPERATORI ASSOCIATI ALLE OSSERVABILI

$\xi \quad \{\xi_i\}$

$\downarrow$

$|\xi_i\rangle$ E AL VARIARE DI i HO UNA BASE ORTONORMALE.

DEFINIAMO L'OPERATORE $\hat{\xi}$:

$$|A\rangle = \sum_i a_i |\xi_i\rangle$$

$$\hat{\xi}|A\rangle := \sum_i a_i \xi_i |\xi_i\rangle$$

$$\hat{\xi}|\xi_i\rangle = \xi_i |\xi_i\rangle \qquad \xi_i \text{ NUMERI REALI}$$

MOSTRIAMO CHE $\hat{\xi}$ È HERMITIANO, OVVERO CHE

$$\langle A|\hat{\xi}|B\rangle^* = \langle B|\hat{\xi}|A\rangle \qquad \forall A,B$$

$$|A\rangle = \sum_i a_i |\xi_i\rangle$$

$$|B\rangle = \sum_i b_i |\xi_i\rangle \qquad \hat{\xi}|B\rangle = \sum_i b_i \xi_i |\xi_i\rangle$$

$$\langle A|\hat{\xi}|B\rangle = \left(\sum_j \langle \xi_j | a_j^*\right)\left(\sum_i b_i \xi_i |\xi_i\rangle\right)$$

$$= \sum_{ij} a_j^* b_i \xi_i \langle \xi_j|\xi_i\rangle$$

$$= \sum_i a_i^* b_i \xi_i$$

$$\langle B|\hat{\xi}|A\rangle = \sum_i b_i^* a_i \xi_i$$

$$\langle A|\hat{\xi}|B\rangle^* = \left(\sum_i a_i^* b_i \xi_i\right)^* = \sum_i a_i b_i^* \xi_i \qquad (\xi_i \text{ È REALE})$$

RESTA PERCIÒ DIMOSTRATA L'HERMITICITÀ. SI POTREBBE MOSTRARE CHE $\hat{\xi}$ È ANCHE AUTOAGGIUNTO.

(OVVIAMENTE PER DIMOSTRARE CHE $\hat{\xi}$ È HERMITIANO HO DOVUTO IMPORRE, IN MODO DEL TUTTO ARBITRARIO, CHE I SUOI AUTOVALORI FOSSERO REALI: IN QUESTO MODO ESSI SONO ADATTI A RAPPRESENTARE QUANTITÀ FISICAMENTE MISURABILI.)

DEFINIAMO IL <u>VALORE DI ASPETTAZIONE</u> DELL' OPERATORE $\hat{\xi}$ SULLO STATO $|A\rangle$ COME

$$\bar{\xi} = \langle A|\hat{\xi}|A\rangle = \sum_i |a_i|^2 \xi_i \qquad \left(= \frac{\langle A|\hat{\xi}|A\rangle}{\langle A|A\rangle} \right)$$

SI NOTI CHE SE $|A\rangle$ È NORMALIZZATO

$$\langle A|A\rangle = \langle A|I|A\rangle = \sum_i |a_i|^2 = 1$$

NOTIAMO CHE, TORNANDO ALLA DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ

$$P(|A\rangle, \xi_i) = \frac{|\langle A|\xi_i\rangle|^2}{\langle A|A\rangle\langle \xi_i|\xi_i\rangle} = |a_i|^2$$

$$\langle A|A\rangle = 1$$

$$\langle \xi_i|\xi_i\rangle = 1$$

$$\langle A|\xi_i\rangle = \left(\sum_j a_j^* \langle \xi_j|\right)|\xi_i\rangle = \sum_j a_j^* \langle \xi_j|\xi_i\rangle = a_i^*$$

PERCIÒ

$$\bar{\xi} = \sum_i \xi_i \cdot P(\text{TROVARE } \xi_i)$$

CHE CORRISPONDE ALLA DEFINIZIONE INTUITIVA

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_\alpha \xi_\alpha$$

SIMILMENTE SI DEFINISCE <u>VARIANZA</u>

$$\Delta\xi^2 = \langle A|(\hat{\xi}-\bar{\xi})^2|A\rangle = \langle A|\hat{\xi}^2 - 2\bar{\xi}\hat{\xi} + \bar{\xi}^2|A\rangle$$

$$= \langle A|\hat{\xi}^2|A\rangle - 2\bar{\xi}\langle A|\hat{\xi}|A\rangle + \bar{\xi}^2\langle A|A\rangle$$

$$= \overline{\xi^2} - 2\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}^2 = \overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2$$

SI DEFINISCE <u>COMMUTATORE</u>

$$[A,B] = AB - BA$$

$$[A,B] = 0 \quad \Rightarrow \quad AB = BA$$

SE A, B SONO HERMITIANI,

$$([A,B])^{\dagger} = (AB - BA)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} - A^{\dagger}B^{\dagger} = BA - AB$$
$$= -[A,B]$$

IL COMMUTATORE È ANTIHERMITIANO. NOTIAMO PERÒ CHE

$$(i[A,B])^{\dagger} = (i)^{*}[A,B]^{\dagger} = -i(-[A,B]) = i[A,B]$$

VALGONO LE PROPRIETÀ

$$\begin{aligned}
[AB, C] &= ABC - CAB \\
&= ABC - ACB + ACB - CAB \\
&= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\
&= A[B,C] + [A,C]B
\end{aligned}$$

$$[A, BC] = B[A,C] + [A,B]C$$

TEOREMA DI INDETERMINAZIONE

$|A\rangle$ STATO NORMALIZZATO

ξ, η OPERATORI HERMITIANI

$R = i[\xi, \eta]$ (HERMITIANO)

SUL LIBRO SI DEFINISCE $R = [\xi, \eta]$: SI STA STIMANDO LA RELAZIONE TRA LE INCERTEZZE DI ξ, η E IL VALORE MEDIO DEL LORO COMMUTATORE.

ALLORA

$$\Delta\xi \Delta\eta \geq \frac{1}{2}|\bar{R}|$$

DIMOSTRAZIONE

DEFINIAMO

$$\alpha = \xi + ix\eta \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha^+ = \xi - ix\eta$$

$$\begin{aligned}
\alpha^+\alpha &= (\xi - ix\eta)(\xi + ix\eta) \\
&= (\xi^2 + ix\xi\eta - ix\eta\xi + x^2\eta^2) \\
&= \xi^2 + x^2\eta^2 + ix(\xi\eta - \eta\xi) \\
&= \xi^2 + x^2\eta^2 + ix[\xi, \eta] \\
&= \xi^2 + x^2\eta^2 + xR
\end{aligned}$$

IL VALOR MEDIO DI $\alpha^+\alpha$ SULLO STATO $|A\rangle$ VALE

$$\langle A|\alpha^+\alpha|A\rangle = \overline{\xi^2} + x^2\overline{\eta^2} + x\bar{R}$$

SIANO $|e_m\rangle$ VETTORI DI UNA BASE ORTONORMALE IN $|A\rangle^\perp$.

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE DECOMPOSIZIONE DELL'IDENTITÀ:

$$\sigma = |A\rangle\langle A| + \sum_m{}' |e_m\rangle\langle e_m| = I$$

MOSTRIAMO INFATTI CHE

$$\sigma|A\rangle = |A\rangle$$

E CHE

$$\sigma|e_i\rangle = |e_i\rangle$$

NOTA: $|A\rangle\langle A|$ È IL PROIETTORE SULLO SPAZIO GENERATO DA $|A\rangle$. VALE IN EFFETTI, DETTI $|\xi_i\rangle$ I VETTORI DI UNA BASE ORTONORMALE,

$$I = \sum_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i| \quad \text{(IN TUTTO } H\text{)}$$

(RELAZIONE DI COMPLETEZZA)

SI HA

$$\left(|A\rangle\langle A| + \sum_m{}' |e_m\rangle\langle e_m|\right)|B\rangle$$

$$= |A\rangle\langle A|B\rangle + \sum_m{}' |e_m\rangle\langle e_m|B\rangle = \sigma|B\rangle$$

$$\sigma|A\rangle = |A\rangle\underbrace{\langle A|A\rangle}_{1} = |A\rangle$$

$$\sigma|e_i\rangle = |A\rangle\underbrace{\langle A|e_i\rangle}_{0} + \sum_m{}' |e_m\rangle\underbrace{\langle e_m|e_i\rangle}_{\delta_{mi}} = |e_i\rangle$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$\langle A|\alpha^+\alpha|A\rangle$$

$$= \langle A|\alpha^+ I\alpha|A\rangle$$

$$= \langle A|\alpha^+\left(|A\rangle\langle A| + \sum_m{}' |e_m\rangle\langle e_m|\right)\alpha|A\rangle$$

$$= \left(\langle A|\alpha^+|A\rangle\langle A| + \sum_m{}' \langle A|\alpha^+|e_m\rangle\langle e_m|\right)\alpha|A\rangle$$

$$= \langle A|\alpha^+|A\rangle\langle A|\alpha|A\rangle + \sum_m{}' \langle A|\alpha^+|e_m\rangle\langle e_m|\alpha|A\rangle$$

$$= \langle A|\alpha|A\rangle^*\langle A|\alpha|A\rangle + \sum_m{}' \langle e_m|\alpha|A\rangle^*\langle e_m|\alpha|A\rangle$$

$$= |\langle A|\alpha|A\rangle|^2 + \sum_m{}' |\langle e_m|\alpha|A\rangle|^2$$

$$\geq |\langle A|\alpha|A\rangle|^2$$

(VALIDA IN GENERALE CHIUNQUE SIANO $|A\rangle$ E $\hat{\alpha}$). OTTENIAMO

$$\overline{\xi^2} + x^2\overline{\eta^2} + x\overline{R} \geq |\langle A|\alpha|A\rangle|^2$$

MA

$$\langle A|\alpha|A\rangle = \langle A|\xi|A\rangle + ix\langle A|\eta|A\rangle$$

$$= \bar{\xi} + ix\bar{\eta}$$

E SI NOTI CHE $\bar{\xi}$ E $\bar{\eta}$ SONO NUMERI REALI IN QUANTO

$$\bar{\xi} = \sum_i \xi_i |a_i|^2$$

REALI, PERCHE' ξ E' HERMITIANO (HA AUTOVALORI REALI)

DA CUI

$$|\langle A|\alpha|A\rangle| = (\bar{\xi} + ix\bar{\eta})(\bar{\xi} - ix\bar{\eta}) = \bar{\xi}^2 + x^2\bar{\eta}^2$$

PERCIÒ

$$\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 + x^2\overline{\eta^2} - x^2(\bar{\eta})^2 + x\bar{R} \geq 0$$

$$\Delta\xi^2 + x^2\Delta\eta^2 + x\bar{R} \geq 0 \qquad \forall x$$

POICHÈ QUESTA È UNA PARABOLA IN X, NON DEVE INTERSECARE L'ASSE DELLE X IN DUE PUNTI, IMPONGO

$$\bar{R}^2 - 4\Delta\xi^2\Delta\eta^2 \leq 0$$

$$4\Delta\xi^2\Delta\eta^2 - \bar{R}^2 \geq 0$$

$$\Delta\xi^2\Delta\eta^2 \geq \frac{\bar{R}^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta\xi\Delta\eta \geq \frac{|\bar{R}|}{2} \quad \therefore$$

NOTA: CHIAMARE $R = i[\xi,\eta]$ NON È UNO SMAGHEGGIO PER NASCONDERE IL FATTO CHE QUI A SINISTRA $i^2 = -1$ E QUINDI $\bar{R}^2$ CAMBIA SEGNO. DI FATTO $[\xi,\eta] \in \mathbb{C}$ E QUELLA A SINISTRA È UNA RELAZIONE TRA MODULI.

APPLICHIAMO IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO A

$$\Delta p \Delta q \sim \hbar$$

DETTI

$$q = \xi \qquad p = \eta$$

VOGLIAMO RICHIEDERE

$$|\bar{R}| \sim \hbar \quad \Rightarrow \quad |[q,p]| \sim \hbar$$

POICHÈ IL COMMUTATORE $[q,p]$ È ANTIHERMITIANO, SE VOGLIAMO CHE SIA PROPORZIONALE A $\mathbb{1}$ IL FATTORE DEVE ESSERE IMMAGINARIO: SE NO

$$[q,p] \sim \hbar \quad \Rightarrow \quad [q,p]^\dagger \sim \hbar^* \quad \Rightarrow \quad -[q,p] \sim \hbar$$

SCRIVIAMO (IPOTIZZIAMO, È UN POSTULATO)

$$[q,p] = i\hbar$$

COSÌ CHE

$$[q,p]^\dagger = (i\hbar)^* \qquad\qquad -[q,p] = -i\hbar$$

E ABBIAMO OTTENUTO

$$\underline{\Delta p \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}}$$

VEDIAMO ALCUNE PROPRIETÀ DEI COMMUTATORI, POSTO $[q,p]=i\hbar$:

$$[q,p^2] = [q,pp] = p[q,p]+[q,p]p$$
$$= p\,i\hbar + i\hbar\,p$$
$$= i\hbar\,(2p)$$
$$[q,p^3] = [q,p^2p] = p^2[q,p]+[q,p^2]p$$
$$= p^2 i\hbar + 2i\hbar\,pp$$
$$= i\hbar\,(3p^2)$$

$$[q,p^m] = i\hbar\left(m p^{m-1}\right)$$

COME SI DIMOSTRA FACILMENTE PER INDUZIONE. INOLTRE

$$[q,f(p)] = i\hbar\,\frac{df}{dp}$$

INFATTI, SOTTO OPPORTUNE IPOTESI, POSSO SVILUPPARE IN SERIE

$$f(p) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m p^m$$

$$[q,f(p)] = [q,\sum_m a_m p^m] = \sum_m a_m [q,p^m]$$
$$= \sum_m i\hbar\, a_m m p^{m-1} = i\hbar \sum_m m p^{m-1} a_m$$
$$= i\hbar \frac{d}{dp}\sum_m a_m p^m = i\hbar\,\frac{df}{dp}$$

SIMILMENTE

$$[q^2,p] = [qq,p] = q[q,p]+[q,p]q$$
$$= q\,i\hbar + i\hbar\,q$$
$$= i\hbar\,(2q)$$
$$[q^3,p] = [qq^2,p] = q[q^2,p]+[q,p]q^2$$
$$= q\,i\hbar(2q) + i\hbar\,q^2 = i\hbar\,(3q^2)$$

$$[f(q),p] = i\hbar\,\frac{df}{dq}$$

SI NOTI PERÒ CHE

$$[f(q), p^2] = [f(q), pp] = p[f(q), p] + [f(q), p]p$$
$$= i\hbar p \frac{df}{dq} + i\hbar \frac{df}{dq} p$$

MA IN GENERALE

$$[p, \frac{df}{dq}] \neq 0$$

OSSIA NON COMMUTANO. NON ESISTE QUINDI UN MODO SEMPLICE PER CALCOLARE

$$[f(p), g(q)]$$

· FOCUS: DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DEL TH. INDETERMINAZIONE (PRINCIPLES OF QUANTUM COMPUTATION AND INFORMATION)

SIANO $P = \xi - \langle\xi\rangle$, $Q = \eta - \langle\eta\rangle$. SCRIVIAMO IL NUMERO COMPLESSO

$$\langle\psi|PQ|\psi\rangle = a + ib$$

POICHÈ ξ, η SONO HERMITIANI, $\langle\xi\rangle, \langle\eta\rangle$ SONO REALI E P, Q SONO HERMITIANI:

$$\langle\psi|[P,Q]|\psi\rangle = \langle\psi|PQ|\psi\rangle - \langle\psi|QP|\psi\rangle = a+ib - \langle\psi|(QP)^\dagger|\psi\rangle^*$$
$$= a+ib - \langle\psi|PQ|\psi\rangle^* = a+ib-(a-ib) = 2ib$$
$$\langle\psi|\{P,Q\}|\psi\rangle = \langle\psi|PQ|\psi\rangle + \langle\psi|QP|\psi\rangle = 2a$$

POSSIAMO SCRIVERE

$$|\langle\psi|[P,Q]|\psi\rangle|^2 \leq |\langle\psi|[P,Q]|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|\{P,Q\}|\psi\rangle|^2 = 4(a^2+b^2)$$
$$= 4|\langle\psi|PQ|\psi\rangle|^2 \leq 4\langle\psi|P^2|\psi\rangle\langle\psi|Q^2|\psi\rangle$$

DOVE SI È USATA CAUCHY-SCHWARTZ *

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$$

RICONOSCO ALLORA

$$[P,Q] = [\xi - \langle\xi\rangle, \eta - \langle\eta\rangle] = [\xi, \eta]$$
$$|\langle\psi|[\xi,\eta]|\psi\rangle|^2 \leq 4\Delta\xi^2\Delta\eta^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\xi\Delta\eta \leq \frac{|\langle\psi|[\xi,\eta]|\psi\rangle|}{2}$$

*NOTA: SI DIMOSTRA CHIAMANDO $\langle\alpha|\beta\rangle = ae^{i\theta}$; $b = te^{-i\theta}$ E IMPONENDO $f(t) = \|\alpha + b\beta\|^2 \geq 0 \quad \forall t$

SISTEMI HAMILTONIANI

STUDIAMO IL PROBLEMA MONODIMENSIONALE DI TROVARE LO SPETTRO (GLI AUTOSTATI) DI H :

$$[q, p] = i\hbar$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$ (H STESSO E' OPERATORE HERMITIANO)

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

MOSTRIAMO INNANZITUTTO CHE IL VALORE MEDIO DI $[H, A]$

$$\langle E|[H, A]|E\rangle = 0$$

E' NULLO PER OGNI OPERATORE A.

CHIARIAMO COSA VUOL DIRE

$$\langle E|HA|E\rangle \text{ "=" } (E, HA(E)) = (H^+(E), A(E))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ H \text{ HERMITIANO}}}{=} (H(E), A(E)) = \langle E|\underset{\substack{\uparrow \\ \text{AUTOVALORE}}}{E}A|E\rangle = E\langle E|A|E\rangle$$

L'AMBIGUITA' PERCIO' SI RISOLVE CONSIDERANDO CHE IN GENERE IN MECCANICA QUANTISTICA USIAMO OPERATORI HERMITIANI.

ALLORA

$$\langle E|(HA - AH)|E\rangle = \langle E|HA|E\rangle - \langle E|AH|E\rangle$$

$$= E\langle E|A|E\rangle - E\langle E|A|E\rangle = 0$$

CALCOLIAMOCI

$$[H, q] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(q), q\right] = \left[\frac{p^2}{2m}, q\right] + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{[V(q), q]}}$$

$$= \frac{1}{2m}(-1)[q, p^2] = -\frac{1}{2m} i\hbar 2p = -\frac{i\hbar}{m} p$$

$$[H, p] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(q), p\right] = [V(q), p] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$[H, pq] = p[H, q] + [H, p]q = p\left(-\frac{i\hbar}{m}p\right) + i\hbar \frac{\partial V}{\partial q} q = -i\hbar\left(\frac{p^2}{m} - q\frac{\partial V}{\partial q}\right)$$

ALLORA

$$\langle E | \left(-\frac{i\hbar}{m} p\right) | E \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle E | p | E \rangle = 0$$

SU UN AUTOSTATO DELL'ENERGIA È NULLO IL VALOR MEDIO DELL'IMPULSO. SIMILMENTE PER LA FORZA

$$\langle E | i\hbar \frac{\partial V}{\partial q} | E \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle E | \frac{\partial V}{\partial q} | E \rangle = 0$$

INFINE

$$\langle E | (-i\hbar)\left(\frac{p^2}{m} - q\frac{\partial V}{\partial q}\right) | E \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle E | \left(2\frac{p^2}{2m} - q\frac{\partial V}{\partial q}\right) | E \rangle = 0$$

MA C'È UN PROBLEMA. CONSIDERIAMO IL CASO

$F = cost.$

$V(q) = -qF$

SI HA

$$\langle E | (-F) | E \rangle = 0$$

$$\langle E | E \rangle = 0$$

L'HAMILTONIANA NON HA AUTOSTATI. IN EFFETTI

$$H = \frac{p^2}{2m} - qF$$

SI NOTI CHE NON ESISTONO TRAIETTORIE LIMITATE COMUNQUE SCELGO IL VALORE DI E.

NON È AUTOAGGIUNTA, QUINDI NON HA UNA BASE DI AUTOVETTORI.

DISTINGUEREMO NELLO SPETTRO:

1) STATI L_2 (DISCRETI)

2) STATI DELLO SPETTRO CONTINUO. NON CORRISPONDONO A NESSUNO STATO DELLO SPAZIO DI HILBERT.

I VALORI MEDI NON SONO DEFINIBILI SULLO SPETTRO CONTINUO.

CONFRONTIAMO:

MQ		MC
SPETTRO DISCRETO	$\longleftrightarrow$	TRAIETTORIA LIMITATA
(AUTOSTATI NELLO SPAZIO DI HILBERT)		a) ATOMO CON $E<0$
		b) OSCILLATORE ARMONICO
ESISTE $\langle E \| \; \| E\rangle$		
SPETTRO CONTINUO	$\longleftrightarrow$	TRAIETTORIE ILLIMITATE
NON ESISTE $\langle E \| \; \| E\rangle$		
$\langle E \| p \| E \rangle = 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$
		$\left(\frac{m}{T}\int_0^T \frac{dr}{dt}\,dt = \frac{m}{T}\left(r(T)-r(0)\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0\right)$
$\langle E \| \left(2\frac{p^2}{2m} - q\frac{\partial V}{\partial q}\right) \| E\rangle = 0$	$\longleftrightarrow$	TEOREMA DEL VIRIALE

- TEOREMA DEL VIRIALE

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{p^2}{2m}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{p}{2m}\overbrace{m\frac{dq}{dt}}^{p} = \frac{1}{2T}\int_0^T dt\left[\frac{d}{dt}(pq) - q\frac{dp}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{2T}\Big[\underbrace{p(T)q(T) - p(0)q(0)}_{<\infty \text{ PER ORBITE LIMITATE.}}\Big] - \frac{1}{2T}\int_0^T dt\, q\left(-\frac{\partial V}{\partial q}\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{p^2}{m} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, q\,\frac{\partial V}{\partial q}$$ NEL LIMITE PER $T\to\infty$ E PER ORBITE LIMITATE.

OSCILLATORE ARMONICO

DATO

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

CHI SONO I VALORI DI E POSSIBILI?

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$E \geq 0$$

IN MECCANICA CLASSICA TUTTI I VALORI DI E SONO POSSIBILI. QUI

$$\langle E|E\rangle = 1$$

$$\langle E|H|E\rangle \underset{\uparrow\ \text{AUTOSTATO}}{=} \langle E|E|E\rangle = E\langle E|E\rangle = E$$

$$\langle E|\frac{p^2}{2m}|E\rangle + \langle E|\frac{m\omega^2}{2}q^2|E\rangle = E$$

SI NOTI CHE IN GENERALE

$$\langle A|B^2|A\rangle$$

NON È POSITIVO. LO È DI CERTO SOLO SE B È HERMITIANO, POICHÈ

$$\langle A|B^+B|A\rangle \geq 0.$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$(A, B^+BA) = (BA, BA) = \|BA\|^2$$

POICHÈ I NOSTRI SONO OPERATORI HERMITIANI DEVE ESSERE

$E \geq 0$.

PUÒ ESSERE $E=0$? AVREI UN $|E_0\rangle$ t.c. $p|E_0\rangle = 0$ E $q|E_0\rangle = 0$, CIOÈ

$\langle E_0|p|E_0\rangle = \langle E_0|q|E_0\rangle = 0$ $\quad$ $|E_0\rangle$ AUTOSTATO SIMULTANEO DI p, q.

MA QUESTO È IMPOSSIBILE PERCHÈ $\quad$ $\Delta q^2 = \langle E_0|(q-\bar{q})^2|E_0\rangle = \langle E_0|q^2|E_0\rangle = 0$,

$\Delta p^2 = 0$

$\langle E|[q,p]|E\rangle = i\hbar\langle E|E\rangle = i\hbar$ $\quad$ E DOVEVA ESSERE $\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2}|\overline{i[q,p]}|$.

SI NOTI CHE PER L'OSCILLATORE TUTTE LE ORBITE SONO LIMITATE, QUINDI POSSIAMO USARE I RISULTATI DERIVATI POCO FA.

POICHE' E' NULLA LA MEDIA DI $\frac{\partial V}{\partial q}$, OTTENGO

$$\langle E | m\omega^2 q | E \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle E | q | E \rangle = 0$$

IL VALOR MEDIO DELLA COORDINATA E' NULLO. LA SUA VARIANZA VALE

$$\Delta q^2 = \langle E | q^2 | E \rangle - \underbrace{\langle E | q | E \rangle^2}_{0} = \langle E | q^2 | E \rangle$$

ESSENDO NULLO $\bar{p}$,

$$\langle E | p | E \rangle = 0$$

$$\Delta p^2 = \langle E | p^2 | E \rangle$$

ALLORA

$$E = \langle E | H | E \rangle = \frac{1}{2m} \langle E | p^2 | E \rangle + \frac{m\omega^2}{2} \langle E | q^2 | E \rangle$$

$$= \frac{1}{2m} \Delta p^2 + \frac{m\omega^2}{2} \Delta q^2$$ (DA QUI E' MEGLIO USARE $a^2+b^2 \geq 2ab$)

$$= \frac{1}{2m} \left(\Delta p^2 + m^2\omega^2 \Delta q^2 - 2m\omega \Delta p \Delta q + 2m\omega \Delta p \Delta q \right)$$

$$= \frac{1}{2m} (\Delta p - m\omega \Delta q)^2 + \omega \Delta p \Delta q \geq \omega \Delta p \Delta q \underset{\uparrow \text{HEISENBERG}}{\geq} \frac{\hbar\omega}{2}$$

ABBIAMO TROVATO UN'ULTERIORE LIMITAZIONE AI VALORI PERMESSI DI E:

$$E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

SE VALE L'UGUAGLIANZA SI PARLA DI ENERGIA DI PUNTO ZERO.

RISCRIVIAMO L'HAMILTONIANA (CLASSICA!) COME

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2\omega^2 q^2) = \frac{1}{\sqrt{2m}} (p + im\omega q) \cdot \frac{1}{\sqrt{2m}} (p - im\omega q)$$

E INTRODUCIAMO L'OPERATORE (NON HERMITIANO)

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - im\omega q)$$

$$\eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p + im\omega q)$$

CALCOLIAMO

$$[\eta, \eta^+] = \left[\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - im\omega q) , \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p + im\omega q) \right]$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega} [p - im\omega q , p + im\omega q]$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega} \left\{ [-im\omega q, p] + [p, im\omega q] \right\}$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega} \left\{ -im\omega [q,p] + im\omega [p,q] \right\}$$

$$= \frac{i}{2\hbar} \left\{ -(i\hbar) + (-i\hbar) \right\} = 1$$

(ECCO IL SENSO DELLA COSTANTE MOLTIPLICATIVA).

$$\eta^+\eta = \frac{1}{2m\hbar\omega} (p + im\omega q)(p - im\omega q)$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega} (p^2 - im\omega pq + im\omega qp + m^2\omega^2 q^2)$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega} (p^2 + m^2\omega^2 q^2 + im\omega [q,p])$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \right) + \frac{i}{2\hbar} i\hbar$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}$$

ALLORA

$$H = \left(\eta^+\eta + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

INFATTI $(\eta^+\eta)^+ = \eta^+\eta$, QUINDI IL SUO VALOR MEDIO È POSITIVO.

DA CUI SI VEDE CHIARAMENTE CHE DEVE ESSERE

$$\langle E | H | E \rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

(CHE NON VUOL DIRE CHE SI PUÒ MOSTRARLO SENZA METTERE IN MEZZO L'INDETERMINAZIONE, PERCHÉ ABBIAMO USATO $[q,p] = i\hbar$).

SI MOSTRA FACILMENTE CHE

$$[\eta, f(\eta^+)] = \frac{df}{d\eta^+}(\eta^+)$$

AD ESEMPIO

$$[\eta, \eta^{+2}] = [\eta, \eta^+\eta^+] = \eta^+[\eta, \eta^+] + [\eta, \eta^+]\eta^+ = \eta^+ + \eta^+ = 2\eta^+$$

$$[\eta, \eta^{+3}] = [\eta, \eta^{+2}\eta^+] = \eta^{+2}[\eta, \eta^+] + [\eta, \eta^{+2}]\eta^+ = \eta^{+2} + 2\eta^+\eta^+ = 3\eta^{+2}$$

INOLTRE

$$[f(\eta), \eta^+] = \frac{df}{d\eta}(\eta)$$

CHIARAMENTE QUESTO FUNZIONA CON η^+ A DESTRA; ALTRIMENTI

$$[f(\eta^+), \eta] = -[\eta, f(\eta^+)] = -\frac{df}{d\eta^+}$$

CALCOLIAMO INVECE

$$[H, \eta] = [\hbar\omega\eta^+\eta + \frac{\hbar\omega}{2}, \eta] = \hbar\omega[\eta^+\eta, \eta]$$

$$= \hbar\omega\{\eta^+[\eta, \eta] + [\eta^+, \eta]\eta\} = -\hbar\omega\eta$$

$$[H, \eta^+] = \hbar\omega[\eta^+\eta, \eta^+] = \hbar\omega\{\eta^+[\eta, \eta^+] + [\eta^+, \eta^+]\eta\}$$

$$= \hbar\omega\eta^+$$

OVVERO

$$[H, \eta] = -\hbar\omega\eta$$

$$[H, \eta^+] = \hbar\omega\eta^+$$

PRENDIAMO ALLORA UN AUTOSTATO DELL' HAMILTONIANA, $|E\rangle$,

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$[H, \eta]|E\rangle = -\hbar\omega\eta|E\rangle$$

$$[H, \eta]|E\rangle = (H\eta|E\rangle - \eta H|E\rangle) = H\eta|E\rangle - E\eta|E\rangle$$

DA CUI

$$H\eta|E\rangle = E\eta|E\rangle - \hbar\omega\eta|E\rangle$$

$$H(\eta|E\rangle) = (E - \hbar\omega)(\eta|E\rangle)$$

SI E' QUINDI MOSTRATO CHE

$$\eta |E\rangle$$

E' UN AUTOSTATO DI H DI AUTOVALORE $E-\hbar\omega$.

SIMILMENTE

$$[H,\eta^+]|E\rangle = \hbar\omega\eta^+|E\rangle$$

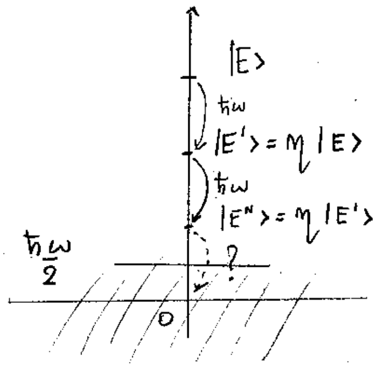
$$H\eta^+|E\rangle - E\eta^+|E\rangle = \hbar\omega\eta^+|E\rangle$$

$$H(\eta^+|E\rangle) = E\eta^+|E\rangle + \hbar\omega\eta^+|E\rangle = (E+\hbar\omega)(\eta^+|E\rangle)$$

DA CUI SI VEDE CHE

$$\eta^+|E\rangle$$

E' UN AUTOSTATO DI AUTOVALORE $E+\hbar\omega$.



APPLICANDO SUCCESSIVAMENTE η CONTINUO A OTTENERE AUTOSTATI? E' VERO SOLO SE

$$\eta|E\rangle \neq 0$$

QUESTO IMPLICA NEL DISEGNO A FIANCO CHE DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE (0 E' IL VETTORE NULLO)

$$\eta|E''\rangle = 0$$

IN ALTRE PAROLE DEVE ESISTERE (ALMENO) UNO STATO $|E_0\rangle$ t.c.

$$\eta|E_0\rangle = 0$$

MA ALLORA

$$H|E_0\rangle = \left(\hbar\omega\eta^+\eta + \frac{\hbar\omega}{2}\right)|E_0\rangle = \hbar\omega\eta^+\underbrace{\eta|E_0\rangle}_{0} + \frac{\hbar\omega}{2}|E_0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|E_0\rangle$$

PERCIO' IL DISEGNO SOPRA E' IMPRECISO: DEVE ESISTERE UNO <u>STATO FONDAMENTALE</u> (DIMOSTREREMO CHE E' UNICO)

$$|E_0\rangle = |0\rangle$$

NOTA: IN 1D H E' SEMPRE NON DEGENERE..

DI ENERGIA MINIMA $\frac{\hbar\omega}{2}$ E ANNICHILATO DA η $(\eta|0\rangle = 0)$.

MOSTREREMO CHE, PARTENDO DA UN QUALSIASI AUTOSTATO, RAGGIUNGO $|0\rangle$ DOPO n APPLICAZIONI DI η.

SE $|0\rangle$ È NON DEGENERE, GLI ALTRI AUTOSTATI SONO TUTTI NON DEGENERI. INFATTI, PRESO UNO STATO A ENERGIA $\frac{3}{2}\hbar\omega$ $(|E\rangle = \alpha|1\rangle)$,

$$\eta|E\rangle = \alpha|0\rangle$$

MA POSSO TORNARE INDIETRO APPLICANDO

$$\eta^+\eta|E\rangle = \alpha\eta^+|0\rangle$$

$$\left(\frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2}\right)|E\rangle = \alpha\eta^+|0\rangle$$

$$\left(\frac{1}{\hbar\omega}\frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}\right)|E\rangle = \alpha\eta^+|0\rangle$$

$$|E\rangle = \alpha\eta^+|0\rangle$$

SIMILMENTE POSSO DIMOSTRARE CHE

$$|2\rangle = \eta^+|1\rangle = \eta^{+2}|0\rangle$$

A MENO DI NORMALIZZAZIONI E COSÌ VIA PER TUTTO LO SPETTRO:

$\|0\rangle$	$E = \frac{\hbar\omega}{2}$
$\|1\rangle \sim \eta^+\|0\rangle$	$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$
$\|2\rangle \sim \eta^{+2}\|0\rangle$	$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$
$\|m\rangle \sim (\eta^+)^m\|0\rangle$	$E = \hbar\omega\left(m + \frac{1}{2}\right)$

HO PERCIÒ UNO SPETTRO DISCRETO DI ENERGIE POSSIBILI.

SUPPONENDO $|0\rangle$ NORMALIZZATO,

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

COME NORMALIZZO GLI ALTRI STATI?

$$|m\rangle = A(\eta^+)^m|0\rangle$$

$$\langle m|m\rangle = A^*A\langle 0|[(\eta^+)^m]^+(\eta^+)^m|0\rangle$$

$$= |A|^2\langle 0|\eta^m\eta^{+m}|0\rangle$$

NOTA: È MOLTO PIÙ RAPIDO MOSTRARE PRIMA CHE

$$\eta^+|m\rangle = \sqrt{m+1}\,|m+1\rangle$$
$$\eta|m\rangle = \sqrt{m}\,|m-1\rangle$$

INFATTI (FISSERÒ $C_m \in \mathbb{R}$ PER CONVENZIONE)

$$\eta|m\rangle = C_m|m-1\rangle$$
$$\langle m|\eta^+ = C_m^*\langle m-1|$$

$$\langle m|\eta^+\eta|m\rangle = |C_m|^2$$
$$\langle m|\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}|m\rangle = m\langle m|m\rangle = m$$

PER L'ALTRO,

$$\langle m|\eta\eta^+|m\rangle = \langle m|[\eta,\eta^+] + \eta^+\eta|m\rangle$$

CALCOLIAMO

$$\eta^m \eta^{+m} = \eta^{m-1}(\eta\eta^{+m} - \eta^{+m}\eta + \eta^{+m}\eta)$$

$$= \eta^{m-1}([\eta, \eta^{+m}] + \eta^{+m}\eta)$$

$$= \eta^{m-1}(m\,\eta^{+(m-1)} + \eta^{+m}\eta)$$

$$\langle m|m\rangle = |A|^2 \{ m\langle 0|\eta^{m-1}\eta^{+(m-1)}|0\rangle + \langle 0|\eta^{m-1}\eta^{+m}\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\eta|0\rangle} \}$$

$$= |A|^2 m \langle 0|\eta^{m-1}\eta^{+(m-1)}|0\rangle$$

$$= |A|^2 m \langle 0|\eta^{m}\eta^{+m}|0\rangle \qquad m := m-1$$

$$= |A|^2 m\,m \langle 0|\eta^{m-1}\eta^{+(m-1)}|0\rangle$$

$$= |A|^2 m(m-1) \langle 0|\eta^{m-2}\eta^{+(m-2)}|0\rangle$$

$$= |A|^2 m(m-1)(m-2) \langle 0|\eta^{m-3}\eta^{+(m-3)}|0\rangle$$

$$\vdots$$

$$= |A|^2 m! \langle 0|0\rangle = |A|^2 m!$$

PERCIÒ PER NORMALIZZARE SCELGO

$$|A|^2 = \frac{1}{m!}$$

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}(\eta^+)^m |0\rangle$$

(POSSO SEMPRE METTERE UNA FASE $e^{i\varphi}$ A MOLTIPLICARE).

IMMAGINIAMO DI MOLTIPLICARE η PER UNA FASE,

$$a = e^{i\varphi}\eta$$

MOSTRIAMO CHE ANCHE LUI SODDISFA

$$\begin{cases} H = \hbar\omega\eta^+\eta + \frac{\hbar\omega}{2} \\ [\eta, \eta^+] = 1 \end{cases}$$

INFATTI

$$\begin{cases} a = e^{i\varphi}\eta \\ a^+ = e^{-i\varphi}\eta^+ \end{cases}$$

$$a^+a = (e^{-i\varphi}\eta^+)(e^{i\varphi}\eta) = \eta^+\eta$$

$$1 = [\eta, \eta^+] = \eta\eta^+ - \eta^+\eta = (e^{i\varphi}a)(e^{-i\varphi}a^+) - (e^{-i\varphi}a^+)(e^{i\varphi}a) = [a, a^+]$$

TUTTAVIA IL VETTORE

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$$

DIFFERISCE DA QUELLO DI PRIMA PER UNA FASE.

CERCHIAMO CHI SONO GLI AUTOSTATI DI η^+, OVVERO QUEGLI STATI $|\lambda\rangle$ t.c.

$$\eta^+|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

NOTA: CONVIENE DIMOSTRARSI CHE VALGONO

$$\eta^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\eta|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

SI POSSONO SCRIVERE COME

$$|\lambda\rangle = \sum_n a_n|n\rangle$$

$$= \sum_n \frac{a_n}{\sqrt{n!}}(\eta^+)^n|0\rangle := \sum_n b_n(\eta^+)^n|0\rangle$$

DETERMINIAMO b_n:

$$\eta^+|\lambda\rangle = \sum_n b_n(\eta^+)^{(n+1)}|0\rangle = b_0\eta^+|0\rangle + b_1\eta^{+2}|0\rangle + \dots$$

$$\parallel$$

$$\lambda|\lambda\rangle = \sum_n b_n(\eta^+)^n|0\rangle = \lambda(b_0|0\rangle + b_1\eta^+|0\rangle + b_2\eta^{+2}|0\rangle + \dots)$$

SI LEGGE

$\lambda b_0 = 0$ $\quad |0\rangle$

$\lambda b_1 = b_0$ $\quad \eta^+|0\rangle$

$\lambda b_2 = b_1$ $\quad \eta^{+2}|0\rangle$

ESCLUDIAMO $\lambda = 0$ (MI DÀ IL VETTORE NULLO). ALLORA OTTENGO

$$0 = b_0 = b_1 = b_2 = \dots$$

DA CUI SI VEDE CHE η^+ NON HA AUTOVALORI.

CERCHIAMO QUELLI DI η.

$$\eta|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$$|\lambda\rangle = \sum_m b_m (\eta^+)^m |0\rangle$$

$$\eta|\lambda\rangle = \sum_m b_m (\eta\eta^{+m})|0\rangle$$

$$\eta\eta^{+m} = \eta\eta^{+m} - \eta^{+m}\eta + \eta^{+m}\eta$$

$$= [\eta, \eta^{+m}] + \eta^{+m}\eta \quad = m\eta^{+(m-1)} + \eta^{+m}\eta$$

$$\eta\eta^{+m}|0\rangle = m\eta^{+(m-1)}|0\rangle + \eta^{+(m-1)}\underbrace{\eta|0\rangle}_{0} = m\,\eta^{+(m-1)}|0\rangle$$

DA CUI

$$\eta|\lambda\rangle = \sum_m b_m m\eta^{+(m-1)}|0\rangle = b_1|0\rangle + b_2 2\eta^+|0\rangle + b_3 3(\eta^{+2})|0\rangle + \dots$$

$$\lambda|\lambda\rangle = \sum_m b_m \eta^{+m}|0\rangle = \lambda[b_0|0\rangle + b_1\eta^+|0\rangle + b_2(\eta^+)^2|0\rangle + \dots]$$

E LEGGO

$$b_1 = \lambda b_0$$

$$2b_2 = \lambda b_1 \qquad b_2 = \frac{\lambda}{2}b_1 = \frac{\lambda^2}{2}b_0$$

$$3b_3 = \lambda b_2 \qquad b_3 = \frac{\lambda}{3}b_2 = \frac{\lambda^3}{3!}b_0$$

$$\vdots$$

$$b_m = \frac{\lambda^m}{m!}b_0$$

NOTA: A MIO AVVISO COSÌ FACENDO SI È NASCOSTA NEI b_m PARTE DELLA DIPENDENZA DA m. USANDO INVECE

$$\eta|m\rangle = \sqrt{m}|m-1\rangle$$

SI OTTIENE LA RELAZIONE $a_m = \frac{\lambda^k}{\sqrt{k!}}a_0$.
PER COMINCIARE NOTO CHE $a \in \ell_2$, QUINDI

$$|\lambda\rangle = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle$$

E PROCEDO COME QUA SOTTO. TRA L'ALTRO LA NORMALIZZAZIONE È IMMEDIATA.

PERCIÒ

$$|\lambda\rangle = \sum_m \frac{b_0\lambda^m}{m!}(\eta^+)^m|0\rangle = b_0\left(\sum_m \frac{(\lambda\eta^+)^m}{m!}\right)|0\rangle$$

$$= b_0 e^{\lambda\eta^+}|0\rangle$$

ABBIAMO UN AUTOVETTORE $\forall\lambda\in\mathbb{C}$: LO SPETTRO È CONTINUO.
(CE LO DICE IL FATTO CHE LA SERIE CONVERGE $\forall\lambda$).

CALCOLIAMO

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = |b_0|^2 \left(\sum_n \frac{\lambda^{*n}}{n!} \langle 0 | \eta^n \right) \left(\sum_m \frac{\lambda^m}{m!} (\eta^+)^m | 0 \rangle \right)$$

RICORDIAMO CHE LE AUTOFUNZIONI (CHE FORMANO UNA BASE) SONO

$$| m \rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} (\eta^+)^m | 0 \rangle \qquad \langle n | = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \eta^n$$

PERCIO' RISCRIVO TUTTO IN TERMINI DEGLI $|m\rangle$ E OTTENGO

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = |b_0|^2 \left(\sum_n \frac{\lambda^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | \right) \left(\sum_m \frac{\lambda^m}{\sqrt{m!}} | m \rangle \right)$$

$$= |b_0|^2 \sum_{n,m} \frac{\lambda^{*n} \lambda^m}{\sqrt{n! m!}} \langle n | m \rangle$$

$$= |b_0|^2 \sum_m \frac{\lambda^{*m} \lambda^m}{m!} = |b_0|^2 \sum_m \frac{|\lambda|^{2m}}{m!} = |b_0|^2 e^{|\lambda|^2}$$

IMPONGO PER NORMALIZZARE

$$|b_0|^2 = e^{-|\lambda|^2} \qquad \Rightarrow \qquad b_0 = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}$$

PERCIO' $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ HO UN AUTOVETTORE DI η DATO DA

$$|\lambda\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} e^{\lambda \eta^+} | 0 \rangle$$

· FOCUS: OCCHIO ALLE COSE CHE NON COMMUTANO

PARLANDO DI OSCILLATORE ARMONICO, SI ERA MOSTRATO CHE

$$\langle n | n \rangle = A^*A \langle 0 | \eta^n \eta^{+n} | 0 \rangle = |A|^2 n!$$

MOSTRIAMO A PERENNE MONITO COSA SUCCEDE SE CONFONDO

$\eta^n \eta^{+n}$ CON $(\eta\eta^+)^n$

ERANO

$$\eta = c(p - im\omega q) \qquad \eta^+ = c(p + im\omega q)$$

SI VEDE CHE

$$\eta\eta^+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2}$$

DA CUI

$$(\eta\eta^+)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{H}{\hbar\omega}\right)^k \frac{1}{2^{n-k}}$$

$$\langle n | n \rangle = |A|^2 \sum_{k=0}^{n} \langle 0 | \binom{n}{k} \left(\frac{2}{\hbar\omega}\right)^k \frac{1}{2^n} H^k | 0 \rangle$$

$$= \frac{|A|^2}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle 0 | \left(\frac{2}{\hbar\omega}\right)^k \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^k | 0 \rangle$$

$$= |A|^2 \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |A|^2$$

D'OH!

· FOCUS: PRODOTTO ESTERNO (WIKIPEDIA)

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} \langle e_1|\alpha\rangle\langle e_1|\beta\rangle^* & \langle e_1|\alpha\rangle\langle e_2|\beta\rangle^* \\ \langle e_2|\alpha\rangle\langle e_1|\beta\rangle^* & \vdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j^* |e_i\rangle\langle e_j|$$

DOVE

$$\begin{array}{cc} & j \\ |e_i\rangle\langle e_j| = i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

SCRIVO UNA QUALSIASI MATRICE $A = a_{ij}$ COME

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$

· FOCUS: ISOMETRIE E MATRICI HERMITIANE (FIORENZA)

UN'ISOMETRIA È UN'APPLICAZIONE LINEARE f t.c. $\langle f(x_1), f(x_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$.

VI È ASSOCIATA UNA MATRICE UNITARIA IN QUANTO

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle U^+ U x_1, x_2\rangle \qquad \Rightarrow \quad UU^+ = U^+U = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad U^+ = U^{-1}$$
$$\parallel$$
$$\langle x_1, UU^+ x_2\rangle$$

SIA ORA A HERMITIANA. PER IL TEOREMA SPETTRALE A AMMETTE UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI; SCRIVO

$$D = U^{-1} A U$$

$$\begin{tikzcd} v, \mathcal{B} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "U"] & f(v), \mathcal{B} \\ v, \mathcal{B}_{CAN} \arrow[r, "A"'] & f(v), \mathcal{B}_{CAN} \arrow[u, "U^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

DOVE U È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DA $\mathcal{B}$ A $\mathcal{B}_{CAN}$, OVVERO $Id(\mathcal{B}\to\mathcal{B}_{CAN})$:

$$U = \begin{pmatrix} (\;) & \ldots \end{pmatrix}$$

$f(v_1)$ SCRITTA IN $\mathcal{B}_{CAN}$, CIOÈ L'AUTOVETTORE v_1.
$\equiv$
$Id(v_1)$

SE LA BASE DI ARRIVO È $\mathcal{B}_{CAN}$, ALLORA U È UNITARIA ($\to$ È UN'ISOMETRIA) PERCHÉ MANDA UNA BASE ORTONORMALE ($\mathcal{B}$) IN UN'ALTRA BASE ORTONORMALE ($\mathcal{B}_{CAN}$):

$$U^{-1} = U^+ \quad \Rightarrow \quad D = U^+ A U$$

SI NOTI CHE IN $\mathbb{R}^m$ LE ISOMETRIE SONO SOLTANTO LE ROTAZIONI E LE RIFLESSIONI ATTORNO A UN ASSE (LE TRASLAZIONI CONSERVANO IL PS MA NON SONO LINEARI).

· FOCUS: MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE (SAKURAI)

RICORDO CHE, DATA UNA BASE DEGLI $|e_i\rangle$, GLI ELEMENTI DI MATRICE TRA $|e_i\rangle$ E $|e_j\rangle$ (COMPONENTI DEL TENSORE) DI A SI SCRIVONO

$$a_{ij} = \langle e_i | A | e_j\rangle \qquad |v\rangle = A|w\rangle \quad \Rightarrow \quad v_i|e_i\rangle = A(w_j|e_j\rangle); \quad \langle e_i|v_i|e_i\rangle = \langle e_i|A w_j|e_j\rangle$$

$$v_i = \langle e_i|A|e_j\rangle w_j = a_{ij} w_j$$

SIA ORA U IL CAMBIO DI BASE

$$|b^{(i)}\rangle = U|a^{(i)}\rangle \quad \forall i$$

ALLORA

$$U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|$$

$$\langle a^{(k)}|U|a^{(l)}\rangle = \langle a^{(k)}|b^{(l)}\rangle$$

- ## ESPONENZIALE DI UN OPERATORE

SI DEFINISCE

$$e^A := \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{1}{m!} A^m$$

CHE CONVERGE CHIUNQUE SIA A. POSSO DIAGONALIZZARE

$$A = V A_D V^{-1}$$

SE A E' HERMITIANA, V E' UNITARIA:

$$V^{-1} = V^{+}$$

$$A = V A_D V^{+}$$

POSSO QUINDI CALCOLARE

$$A^2 = V A_D V^{-1} V A_D V^{-1} = V A_D^2 V^{-1}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = V A_D V^{-1} V A_D^2 V^{-1} = V A_D^3 V^{-1}$$

$$A^m = V A_D^m V^{-1}$$

$$e^A = \sum_m{}' \frac{1}{m!} V A_D^m V^{-1}$$

$$= V \left(\sum_m{}' \frac{1}{m!} A_D^m \right) V^{-1}$$

MA ORA

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A_D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \qquad A_D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix}$$

$$\sum_m{}' \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^m = \sum_m \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_m{}' \frac{1}{m!} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \sum_m \frac{1}{m!} \lambda_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

IN GENERALE QUINDI

$$e^A = V e^{A_D} V^{-1} = V e^{A_D} V^{+}$$

NOTA: COME SEMPRE $V : \mathcal{B}_D \to \mathcal{B}_A$ E HA COME COLONNE GLI AUTOVETTORI DI A.

· ESEMPIO

H DI HILBERT BIDIMENSIONALE

$|1\rangle$, $|2\rangle$ SONO UNA BASE ORTONORMALE.

CALCOLARE

$$\exp\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right)$$

RICORDIAMO CHE

$$I = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

INFATTI

$$I|1\rangle = |1\rangle\langle 1|1\rangle + |2\rangle\langle 2|1\rangle = |1\rangle$$

$$I|2\rangle = |2\rangle$$

SIA INVECE

$$A = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$$

SCRIVIAMOLO COME MATRICE.

$$A|1\rangle = |1\rangle\langle 2|1\rangle + |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle$$

$$A|2\rangle = |1\rangle$$

(LE COLONNE SONO I VETTORI OTTENUTI APPLICANDO A AI VETTORI DELLA BASE).

SIANO

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ALLORA DEVO CALCOLARE

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \equiv 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = b \Rightarrow v_1 = (a, a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|v_1|^2 = a^2 + a^2 \equiv 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

SIMILMENTE PER

$\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} , -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

COSTRUISCO

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A_D = V^{+} A V$$

QUINDI

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = V (\exp A_D) V^{+} = V \begin{pmatrix} e^{1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} V^{+}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} & \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \\ \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} & \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \right) |1\rangle\langle 1| + \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \right) |2\rangle\langle 2|$$

$$+ \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \right) |1\rangle\langle 2| + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \right) |2\rangle\langle 1|$$

- QUEST' ULTIMA RAPPRESENTAZIONE NON DIPENDE DALLA SCELTA PARTICOLARE DELLA BASE.

- AGGIUNTO DELL' ESPONENZIALE

$$(e^{A})^{+} = \left(\sum_{m} \frac{1}{m!} A^{m} \right)^{+} = \sum_{m} \frac{1}{m!} (A^{m})^{+} = \sum_{m} \frac{1}{m!} A^{+m} = \exp(A^{+})$$

SE A È HERMITIANA,

$$(e^{A})^{+} = e^{A^{+}} = e^{A}$$

OSSIA ANCHE $\exp(A)$ È HERMITIANA.

* VALE LA RELAZIONE

$$e^{A} e^{-A} = I$$

INFATTI

$$e^{A} = V e^{A_D} V^{-1}$$

$$e^{-A} = V e^{-A_D} V^{-1} \qquad \text{PERCHE'} \quad (-A) = V(-A_D)V^{-1}$$

$$e^{A_D} e^{-A_D} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* SE A E' HERMITIANO, CONSIDERIAMO

$$U = e^{iA}$$

ALLORA U E' UNITARIO. INFATTI

$$U^{+}U = (e^{iA})^{+} e^{iA} = e^{(iA)^{+}} e^{iA} = e^{-iA} e^{iA} = I$$

$$UU^{+} = I$$

$$\Rightarrow \quad U^{+}U = UU^{+} = I$$

* SI NOTI CHE INVECE NON E' VERO A PRIORI CHE

$$e^{X} e^{Y} = e^{X+Y}$$

$$e^{X} e^{Y} = e^{Y} e^{X}$$

PERCHE' e^{A}, e^{B} SONO OPERATORI E IN GENERALE NON COMMUTANO.

VOGLIAMO ORA DIMOSTRARE

$$e^{A} B e^{-A}$$

$$= B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \frac{1}{4!}[\ldots$$

RITROVIAMO IL RISULTATO CHE CI ASPETTIAMO CON I NUMERI SOLO SE A E B COMMUTANO (QUESTO E' VERO PER TUTTE LE RELAZIONI CON GLI ESPONENZIALI).

SIA $\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda A})$ LA MATRICE IN CUI HO DERIVATO TUTTI GLI ELEMENTI RISPETTO A λ.

ALLORA

$$\frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda A}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}A^m\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}A^m$$

$$= A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}A^m = Ae^{\lambda A} \underset{\text{COMMUTANO}}{=} e^{\lambda A}A$$

SIA ORA

$$f(\lambda) = e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}$$

$$f'(\lambda) = e^{\lambda A}ABe^{-\lambda A} + e^{\lambda A}B(-A)e^{-\lambda A}$$

$$= e^{\lambda A}(AB - BA)e^{-\lambda A}$$

$$= e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A}$$

$$f''(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A}\right) = e^{\lambda A}\left([A,[A,B]]\right)e^{-\lambda A}$$

$$f'''(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda A}[A,[A,B]]e^{-\lambda A}\right) = e^{\lambda A}\left([A,[A,[A,B]]]\right)e^{-\lambda A}$$

POICHÈ

$$f(\lambda) = \sum_m \frac{1}{m!}\lambda^m f^{(m)}(0) = B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \dots$$

OTTENGO LA RELAZIONE PRECEDENTE CONSIDERANDO CHE

$$e^{\lambda A}\Big|_{\lambda=0} = e^{-\lambda A}\Big|_{\lambda=0} = I$$

$$f(\lambda=0) = B$$

E CALCOLANDO LO SVILUPPO PER $\lambda = 1$.

- OPERATORE DI TRASLAZIONE

CALCOLARE

$$e^{i\alpha p}q\,e^{-i\alpha p} \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$B = q \qquad A = i\alpha p$$

NOTIAMO CHE $e^{i\alpha p}$ È UNITARIO. CALCOLIAMOCI

$$[A,B] = [i\alpha p, q] = i\alpha[p,q] = i\alpha(-i\hbar) = \alpha\hbar$$

$$[A,[A,B]] = [i\alpha p, \alpha\hbar] = 0$$

PERCIÒ SONO NULLI TUTTI I TERMINI SUCCESSIVI.

DETTO

$$a = \alpha \hbar$$

POSSO SCRIVERE

$$e^{i \frac{a}{\hbar} p} \, q \, e^{-i \frac{a}{\hbar} p} = q + a$$

CHE È DETTO OPERATORE DI TRASLAZIONE.

NOTA: L'OPERATORE IMPULSO SI DICE GENERATORE DELLE TRASLAZIONI SPAZIALI.

* VOGLIAMO CALCOLARE

$$e^A e^B$$

SOTTO L'IPOTESI CHE

$$[A, [A,B]] = 0$$

$$[B, [A,B]] = 0$$

VALE ALLORA

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

INTRODUCIAMO INFATTI

$$f(\lambda) = e^{-\lambda A} e^{\lambda(A+B)}$$

NOTA: SE È PIÙ SEMPLICE RICORDARLA, $f(\lambda) = e^{\lambda A} e^{-\lambda(A+B)}$ FUNZIONA ALTRETTANTO BENE; BASTA ALLA FINE CALCOLARLA PER $\lambda = -1$.

$$f'(\lambda) = e^{-\lambda A}(-A) e^{\lambda(A+B)} + e^{-\lambda A}(A+B) e^{\lambda(A+B)} = e^{-\lambda A} B e^{\lambda(A+B)}$$

$$= e^{-\lambda A} B e^{\lambda A} \underbrace{e^{-\lambda A} e^{\lambda(A+B)}}_{f(\lambda)}$$

RICORDANDO CHE SE $g(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ SI HA

$$g(\lambda) = B + \lambda [A,B] + \frac{\lambda^2}{2!} [A, [A,B]] + \dots$$

QUI HO, GRAZIE ALL'IPOTESI SUL SECONDO COMMUTATORE,

$$e^{-\lambda A} B e^{\lambda A} = B + [-\lambda A, B] = B - \lambda [A,B]$$

SOSTITUENDO SOPRA,

$$f'(\lambda) = (B - \lambda [A,B]) f(\lambda)$$

SE FOSSERO NUMERI,

$$\frac{df}{d\lambda} = \left(B - \lambda [A,B]\right) f$$

$$\frac{df}{f} = \left(B - \lambda [A,B]\right) d\lambda \quad \Rightarrow \quad \ln f = \left(B\lambda - \frac{\lambda^2}{2} [A,B]\right) + c$$

$$f = \exp\left(B\lambda - \frac{\lambda^2}{2}[A,B]\right) \qquad \left(f(0) = I \ , \ c = 0\right)$$

MA È VERO CHE, IN GENERALE,

$$\frac{d}{d\lambda} e^{R(\lambda)} = R'(\lambda)\, e^{R(\lambda)} \qquad ?$$

NO: SOLO SE LA RELAZIONE È LINEARE. SI HA INFATTI

$$e^{R(\lambda)} = 1 + R(\lambda) + \frac{1}{2} R(\lambda)R(\lambda) + \dots$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{R(\lambda)} = R'(\lambda) + \frac{1}{2} R'(\lambda)R(\lambda) + \frac{1}{2} R(\lambda)R'(\lambda) + \dots$$

E IN GENERALE

$$\left[R(\lambda), R'(\lambda)\right] \neq 0$$

SE R COMMUTA CON R', ALLORA

$$\frac{d}{d\lambda} e^{R(\lambda)} = R'(\lambda)\, e^{R(\lambda)}$$

ALLORA NEL NOSTRO CASO

$$R(\lambda) = B\lambda - \frac{\lambda^2}{2}[A,B]$$

$$R'(\lambda) = B - \lambda [A,B]$$

E LA SOLUZIONE TROVATA SOPRA È VALIDA SOTTO L'IPOTESI

$$\left[B, [A,B]\right] = 0$$

(FATTA QUESTA RICHIESTA, È FACILE VERIFICARE CHE SONO NULLI ANCHE TUTTI I COMMUTATORI SUCCESSIVI, COME $[R'', R']$, $[R'', R]$ ...).

TORNANDO A NOI,

$$e^{-\lambda A}\, e^{\lambda(A+B)} = \exp\left(B\lambda - \frac{\lambda^2}{2}[A,B] \right)$$

PER $\lambda = 1$,

$$e^{A} e^{-A} e^{(A+B)} = e^{A} e^{B - \frac{1}{2}[A,B]}$$

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B - \frac{1}{2}[A,B]} \underset{\uparrow}{=} e^{A} e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

COMMUTANO B E $[A,B]$:

$$e^{B-\frac{1}{2}[A,B]} = e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B] - \frac{1}{2}[B, -\frac{1}{2}[A,B]]}$$

$$= e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

LO STATO FONDAMENTALE DELL' OSCILLATORE

$\langle 0 | f(\hat{q}) | 0 \rangle$

$\langle 0 | \hat{q}^m | 0 \rangle$

DOVE $|0\rangle$ È LO STATO FONDAMENTALE DELL' OSCILLATORE ARMONICO.

COSA RAPPRESENTANO QUESTI VALORI MEDI?

PRENDIAMO UNA BASE DI AUTOVETTORI DI q,

$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$

SUPPOSTO CHE I $|q\rangle$ FORMINO UN INSIEME CONTINUO,

$$I = \int dq \, |q\rangle\langle q|$$

ALLORA

$$\langle 0 | f(\hat{q}) I | 0 \rangle = \langle 0 | f(\hat{q}) \int dq \, |q\rangle \langle q | 0 \rangle$$

$$= \int dq \, \langle 0 | f(\hat{q}) | q \rangle \langle q | 0 \rangle \qquad f(\hat{q})|q\rangle = f(q)|q\rangle$$

$$= \int dq \, \langle 0 | f(q) | q \rangle \langle q | 0 \rangle$$

$$= \int dq \, \langle 0 | q \rangle \langle q | 0 \rangle f(q) = \int dq \, |\langle 0 | q \rangle|^2 f(q)$$

$$= \int dq \, \rho(mis = q) \, f(q)$$

DOVE ABBIAMO RICONOSCIUTO LA (DENSITÀ DI) PROBABILITÀ DI MISURARE q SULLO STATO FONDAMENTALE. QUINDI

$\langle 0 | f(\hat{q}) | 0 \rangle$

È LA MEDIA DI INFINITE MISURE DI $f(q)$.

CALCOLIAMO

$\langle 0 | \hat{q}^m | 0 \rangle \qquad m = 1 .. 6$

RICORDIAMO LE DEFINIZIONI

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q) \qquad \eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q)$$

IN TERMINI DI η E η^+, POSSO RISCRIVERE q COME

$$\eta^+ - \eta = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(2im\omega q) = iq\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, i(\eta - \eta^+) \quad := ia(\eta - \eta^+)$$

SI NOTI CHE η E η^+ SONO ADIMENSIONALI (INFATTI $[\eta, \eta^+] = 1 \sim \eta\eta^+$), QUINDI LA COSTANTE a HA LE DIMENSIONI DI UNA LUNGHEZZA.

INOLTRE RICONOSCIAMO

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 A^2_{CLASSICA} \quad \Rightarrow \quad A_a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{2}\, a$$

PERCIO'

$$a = \frac{A_a}{\sqrt{2}}$$

POSSO ORA CALCOLARE

$$q|0\rangle = ia(\eta - \eta^+)|0\rangle = \overset{0}{ia\eta|0\rangle} - ia\eta^+|0\rangle = -ia|1\rangle$$

INFATTI ERA

$$\eta|0\rangle = 0 \qquad\qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\eta^+)^n|0\rangle$$

QUINDI

$$\langle 0|q|0\rangle = \langle 0|(-ia|1\rangle) = -ia\langle 0|1\rangle = 0$$

COME GIA' SAPEVAMO. POI

$$\langle 0|q^2|0\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ q \text{ HERMITIANO}}}{=} \langle 0|q^+q|0\rangle = \left|q|0\rangle\right|^2 = (ia\langle 1|)(-ia|1\rangle) = a^2$$

NOTIAMO CHE COINCIDE CON LA MEDIA TEMPORALE CLASSICA:

$$x = A_a \cos(\omega t + \phi)$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A_a^2 \cos^2(\omega t + \phi) = A_a^2\langle \cos^2(\omega t+\phi)\rangle_T = \frac{A_a^2}{2} = a^2$$

MA CONTINUIAMO.

$$\langle 0|q^3|0\rangle = \langle 0|qq^2|0\rangle = \langle 0|q^+q^2|0\rangle) = (-ia)^*\langle 1|q^2|0\rangle$$

$$= ia\langle 1|q^2|0\rangle$$

CERCO QUINDI

$$q^2|0\rangle = -a^2(\eta-\eta^+)(\eta-\eta^+)|0\rangle$$
$$= -a^2(\eta^2-\eta^+\eta-\eta\eta^+ +\eta^{+2})|0\rangle$$
$$= a^2\eta\eta^+|0\rangle - a^2\eta^{+2}|0\rangle$$

IL PRIMO TERMINE È PROBLEMATICO: DEVO ELIMINARE η.

$$\eta\eta^+|0\rangle = (\eta\eta^+-\eta^+\eta+\eta^+\eta)|0\rangle$$
$$= [\eta,\eta^+]|0\rangle + \eta^+\eta|0\rangle = |0\rangle$$

$$q^2|0\rangle = a^2|0\rangle - a^2\sqrt{2}\,|2\rangle$$

APPLICANDO POTENZE PARI DI q OTTENGO SOLO STATI PARI E LO STESSO ACCADE CON I DISPARI. ORA CERCO

$$\langle 0|q^3|0\rangle = \langle 0|q^+q^2|0\rangle = (ia\langle 1|)(a^2|0\rangle - a^2\sqrt{2}\,|2\rangle) = 0$$

TUTTE LE POTENZE DISPARI DI q HANNO MEDIA NULLA. INVECE

$$\langle 0|q^4|0\rangle = \langle 0|(q^+)^2q^2|0\rangle$$
$$= (a^2\langle 0| - a^2\sqrt{2}\langle 2|)(a^2|0\rangle - a^2\sqrt{2}\,|2\rangle)$$
$$= a^4\langle 0|0\rangle + 2a^4\langle 2|2\rangle = 3a^4 \qquad (= |q^2|0\rangle|^2)$$

$$q^3|0\rangle = q\,q^2|0\rangle = ia(\eta-\eta^+)(a^2|0\rangle - a^2\sqrt{2}\,|2\rangle)$$
$$= ia^3\eta|0\rangle - ia^3\eta^+|0\rangle - ia^3\sqrt{2}\,\eta|2\rangle + ia^3\sqrt{2}\,\eta^+|2\rangle$$

$$\eta|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\eta^{+2}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left([\eta,\eta^{+2}]+\eta^{+2}\eta\right)|0\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}2\eta^+|0\rangle = \sqrt{2}\,|1\rangle$$

$$\eta^+|2\rangle = \eta^+\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^+)^2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^{+3}|0\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\eta^{+3}|0\rangle = \sqrt{3}\,|3\rangle$$

(NOTA CHE GIÀ SAPEVAMO, AD ESEMPIO, CHE $\eta|2\rangle = \dots|1\rangle$: IL CALCOLO SERVE A DETERMINARE IL COEFFICIENTE).

NOTA: GIÀ $\langle q^4\rangle$ È CLASSICAMENTE INAMMISSIBILE.

SOSTITUENDO,

$$q^3|0\rangle = qq^2|0\rangle = -ia^3|1\rangle - ia^3\sqrt{2}\sqrt{2}|1\rangle + ia^3\sqrt{2}\sqrt{3}|3\rangle$$

$$\langle 0|q^6|0\rangle = \langle 0|(q^+)^3 q^3|0\rangle$$
$$= \left(3ia^3\langle 1| - ia^3\sqrt{6}\langle 3|\right)\left(-3ia^3|1\rangle + ia^3\sqrt{6}|3\rangle\right)$$
$$= 9a^6 + 6a^6 = 15a^6$$
$$= \frac{15}{8}A_a^6$$

QUESTA COSA LA POSSO FARE SOLTANTO PERCHÈ È $q = q^+$; $\langle 0|q^6|0\rangle = (\langle 0|q^{+3})\cdot q^3|0\rangle = \left| q^3|0\rangle\right|^2$

DOVE SI È USATO (E QUESTO È VERO CHIUNQUE SIA ξ): $\xi|u\rangle = |v\rangle \Rightarrow \langle u|\xi^+ = \langle v|$

MA QUESTO NON È POSSIBILE DAL PUNTO DI VISTA CLASSICO $\left(\frac{15}{8} > 1\right)$; SE FOSSE

$$P(q) = 0 \quad \text{PER} \quad |q| > A_a$$

ALLORA

$$\langle 0|q^6|0\rangle = \int_{-A_a}^{A_a} dq\; q^6 P(q) \le \int_{-A_a}^{A_a} dq\, P(q)\, A_a^6 \underset{\uparrow}{=} A_a^6$$

P È NORMALIZZATA

DAL PUNTO DI VISTA QUANTISTICO C'È UNA PROBABILITÀ FINITA DI TROVARE LA "PARTICELLA" IN UNA ZONA CHE NON È ACCESSIBILE CLASSICAMENTE.
(NOTARE CHE STIAMO PARLANDO DI AUTOSTATI DI ENERGIA $\frac{\hbar\omega}{2}$: IN QUESTA ZONA CI VADO CONSERVANDO L'ENERGIA).

* PER DETERMINARE $P(q)$ CERCHIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

$$\langle 0|e^{\lambda q}|0\rangle = \langle 0|e^{i\lambda a(\eta - \eta^+)}|0\rangle$$

NOTA CHE PUÒ ESSERE $\lambda \in \mathbb{C}$; INOLTRE SE DUE FUNZIONI ANALITICHE COINCIDONO SU UN INSIEME DENSO (COME L'ASSE REALE) ALLORA SONO UGUALI.

SIANO

$$\begin{cases} A = -i\lambda a\,\eta^+ \\ B = i\lambda a\,\eta \end{cases}$$

OCCHIO CHE SE LI SI DEFINISCE AL CONTRARIO NON FUNZIONANO PIÙ LE PROSSIME SEMPLIFICAZIONI.

VALGONO

$$[A,[A,B]] = 0$$
$$[B,[A,B]] = 0$$

INFATTI

$$[A,B] = [-i\lambda a\eta^+, i\lambda a\eta] = \lambda^2 a^2 [\eta^+,\eta] = -\lambda^2 a^2$$

CHE COMMUTA SIA CON A CHE CON B. PER QUANTO VISTO,

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

PERCIO' CALCOLO

$$\langle 0|e^{\lambda q}|0\rangle = e^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}}\langle 0|e^A e^B|0\rangle = e^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}}\langle 0|0\rangle = e^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}}$$

INFATTI

$$e^B|0\rangle = \left(1+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{3!}+\dots\right)|0\rangle = |0\rangle$$

INOLTRE, OSSERVANDO CHE $A = B^+$,

$$\eta|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle 0|\eta^+ = 0$$

$$\langle 0|e^A = \langle 0|\left(1+A+\frac{A^2}{2}+\dots\right) = \langle 0|$$

MOSTRIAMO CHE LA FUNZIONE TROVATA SOPRA GENERA LA GAUSSIANA

$$P(x) = Ne^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \left(= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) \qquad \text{CON } \sigma = a.$$

$$\langle e^{\lambda x}\rangle = \int N\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\lambda x\right)dx \quad \left(= \int dx\, P(x)e^{\lambda x}dx\right)$$

IMPONGO

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\lambda x \equiv -\frac{1}{2\sigma^2}(x-A)^2+B = -\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2Ax+A^2)+B$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{A}{\sigma^2} \\ -\frac{A^2}{2\sigma^2}+B = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= \lambda\sigma^2 \\ B &= \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

$$\langle e^{\lambda x}\rangle = N\int dx\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-A)^2}e^B \qquad y = x-A$$

(POICHE' $A\in\mathbb{C}$, CI SAREBBE DA STARE ATTENTI)

$$= Ne^B\int dy\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = e^B = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$$

RICAVO ALLORA

$$P(q) = N\exp\left(-\frac{q^2}{2a^2}\right) = N\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right)$$

(NOTA CHE QUELLO ASSOCIATO A $|0\rangle$ E' UN PACCHETTO D'ONDA MINIMO).

- ESERCIZIO

$|A\rangle = a|2\rangle + b|4\rangle$

a) $\langle A|H|A\rangle = 4\hbar\omega$

b) $\langle A|pq+qp|A\rangle = \frac{3}{2}\hbar$

c) $|A\rangle$ NORMALIZZATO

TROVA a, b PER L'OSCILLATORE ARMONICO.

POSSO SEMPRE SCEGLIERE $a \in \mathbb{R}^+$ (BASTA ALTRIMENTI DIVIDERE TUTTO PER LA SUA FASE); NON È DETTO CHE ANCHE GLI ALTRI (QUI b) LO SIANO.

$$\langle A|A\rangle = |a|^2 + |b|^2 = a^2 + |b|^2 \equiv 1$$

$$H|A\rangle = a\hbar\omega\left(2+\frac{1}{2}\right)|2\rangle + b\hbar\omega\left(4+\frac{1}{2}\right)|4\rangle$$

$$= \frac{5}{2}\hbar\omega a|2\rangle + \frac{9}{2}\hbar\omega b|4\rangle$$

$$\langle A|H|A\rangle = \left(a\langle 2| + b^*\langle 4|\right)\left(\frac{5}{2}\hbar\omega a|2\rangle + \frac{9}{2}\hbar\omega b|4\rangle\right)$$

$$= \frac{5}{2}\hbar\omega a^2 + \frac{9}{2}\hbar\omega|b|^2 \equiv 4\hbar\omega$$

RISOLVENDO PER a^2 E $|b|^2$,

$$a^2 = \frac{1}{4} \qquad |b|^2 = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi}$$

$$|A\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi}|4\rangle$$

φ È LA FASE RELATIVA TRA GLI STATI $|2\rangle$ E $|4\rangle$.

OCCHIO CHE PER NOI

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}(\eta^+)^2|0\rangle \qquad |4\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}}(\eta^+)^4|0\rangle$$

MENTRE IL LIBRO LI DEFINISCE TRAMITE (a, a^+) INVECE DI (η, η^+).

PER L'ULTIMA PARTE,

$$q = i\tilde{a}(\eta - \eta^+) \qquad \tilde{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$p = \tilde{b}(\eta + \eta^+) \qquad \tilde{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\hbar m\omega}$$

$$\langle A | \underline{(qp + pq)} | A \rangle = ?$$

$$= i\tilde{a}\tilde{b}\left[(\eta - \eta^+)(\eta^+ + \eta) + (\eta^+ + \eta)(\eta - \eta^+)\right]$$

$$= i\tilde{a}\tilde{b}\left[\eta\eta^+ - \eta^{+2} + \eta^2 - \eta^+\eta + \eta^+\eta + \eta^2 - \eta^{+2} - \eta\eta^+\right]$$

$$= 2i\tilde{a}\tilde{b}\left(\eta^2 - \eta^{+2}\right)$$

$$\langle A | (\eta^2 - \eta^{+2}) | A \rangle = ?$$

$$\eta^{+2}|A\rangle = \eta^{+2}\left(a|2\rangle + b|4\rangle\right)$$

$$= \eta^{+2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\eta^{+2}|0\rangle + \frac{b}{\sqrt{4!}}\eta^{+4}|0\rangle\right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\eta^{+4}|0\rangle + \frac{b}{\sqrt{4!}}\eta^{+6}|0\rangle$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{4!}\,|4\rangle + \frac{b}{\sqrt{4!}}\sqrt{6!}\,|6\rangle$$

INOLTRE

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\eta^+)^n|0\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|\eta^n$$

QUINDI

$$\langle A|\eta^2 = \langle 4|\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{4!} + \frac{b^*}{\sqrt{4!}}\sqrt{6!}\langle 6|$$

CONCLUDO:

$$\langle A|\eta^2|A\rangle - \langle A|\eta^{+2}|A\rangle = ab\sqrt{12} - ab^*\sqrt{12}$$

$$2i\tilde{a}\tilde{b}\,a\sqrt{12}\left(b - b^*\right) \equiv \frac{3}{2}\hbar$$

$$i\,\mathrm{Im}\,b = \frac{3}{8}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\,\frac{\hbar}{i\tilde{a}\tilde{b}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}(-i\hbar)\cdot\frac{2}{\hbar} = -i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- ## TRASFORMAZIONI CANONICHE

p, q OPERATORI

$[q, p] = i\hbar$

DEFINIAMO

$Q = f_1(q, p)$

$P = f_2(q, p)$

LA TRASFORMAZIONE COSÌ DEFINITA È CANONICA SE

$[Q, P] = i\hbar$

NOTA: È UNA TRASFORMAZIONE PASSIVA PERCHÉ MODIFICA GLI OPERATORI; È ATTIVA UNA CHE MODIFICA I VETTORI.

COME GENERO TRASFORMAZIONI CANONICHE?

SIA

$U(p, q)$ UNITARIO $(UU^+ = U^+U = \mathbb{1})$

(AD ESEMPIO $e^{iA(p,q)}$ CON A HERMITIANO)

ALLORA È CANONICA

$Q = UqU^+$

$P = UpU^+$

U È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DALLE q, p ALLE Q, P. IN QUANTO UNITARIA, QUESTA È UN'ISOMETRIA.

INFATTI

$$[Q, P] = QP - PQ = UqU^+UpU^+ - UpU^+UqU^+$$
$$= UqpU^+ - UpqU^+$$
$$= U[q, p]U^+ = i\hbar\, UU^+ = i\hbar$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE PER OGNI TRASFORMAZIONE CANONICA ESISTE UN OPERATORE UNITARIO U CHE LA IMPLEMENTA.

CERCHIAMO QUANTO VALGONO:

$$UqpU^+ = UqU^+UpU^+ = QP$$

$$Uq^np^mU^+ = Uq\underbrace{U^+U}_{Id}qU^+Uq \dots qU^+UpU^+Up \dots = Q^nP^m$$

SE f È ANALITICA,

$$Uf(q, p)U^+ = U\left(\sum_{nm} a_{nm} q^n p^m\right)U^+ = \sum_{nm} a_{nm} Uq^np^mU^+ = f(Q, P)$$

DEDUCIAMO CHE LE QUANTITÀ MISURABILI SONO INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI CANONICHE, INOLTRE MOSTRIAMO CHE LA SCELTA DEI q E p NON È UNIVOCA E FINCHÈ NON LA COMPIO NON È UNIVOCAMENTE DEFINITO NEMMENO LO STATO.

① SI SCELGONO GLI OPERATORI q, p t.c. $[q, p] = i\hbar$
② AD OGNI STATO FISICO ASSOCIO UN VETTORE

AD ESEMPIO,

Q, P $\qquad\qquad$ q, p

$A(Q, P)$ $\qquad\qquad$ $A(q, p)$

CON

$$U A(q, p) U^+ = A(Q, P)$$

MOSTRIAMO CHE TRA GLI AUTOSTATI C'È CORRISPONDENZA BIUNIVOCA:

$$A(Q, P)|a\rangle = a|a\rangle$$
$$U A(q, p) U^+ |a\rangle = a|a\rangle$$
$$U^+ U A(q, p) U^+ |a\rangle = a U^+ |a\rangle$$
$$A(q, p) U^+ |a\rangle = a U^+ |a\rangle$$
$$A(q, p) |a'\rangle = a |a'\rangle \qquad |a'\rangle = U^+ |a\rangle$$

DATE DUE DIVERSE RAPPRESENTAZIONI DEGLI OPERATORI TROVO AUTOSTATI DIVERSI (PER TRASFORMAZIONE CANONICA), MA LO SPETTRO NON CAMBIA.

QUESTO CI DÀ LIBERTÀ NELLA SCELTA DELLA RAPPRESENTAZIONE DA UTILIZZARE: LA FISICA NON CAMBIA.

- RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER

$H = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

STATO $\rightarrow$ $\Psi(x)$ COMPLESSA

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \Psi_1^*(x)\, \Psi_2(x)$$

DEFINISCO

$$\hat{q}\, \Psi(x) = x\, \Psi(x) \qquad \hat{p}\, \Psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \Psi(x)$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

LE TRASLAZIONI, CHE AVEVAMO DEFINITO COME

$$e^{i\hat{p}\frac{a}{\hbar}}\, \hat{q}\, e^{-i\hat{p}\frac{a}{\hbar}} = \hat{q} + a \qquad \begin{cases} \hat{Q} = e^{i\hat{p}a/\hbar}\, \hat{q}\, e^{-i\hat{p}a/\hbar} \\ \hat{P} = p \end{cases}$$

SONO TRASFORMAZIONI CANONICHE :

$$\hat{Q} = U \hat{q} U^+$$

$$\hat{P} = U \hat{p} U^+ = U U^+ \hat{p} = \hat{p} \qquad \left(e^{ia\frac{\hat{p}}{\hbar}} \text{ COMMUTA CON } \hat{p} \right)$$

COME LE IMPLEMENTO ?

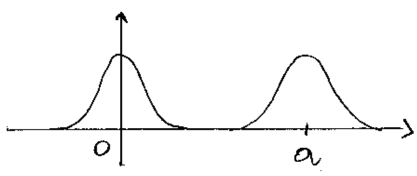
$$\Psi(x+a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \Psi^{(m)}(x) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \right) \Psi(x) = \exp\left(a \frac{d}{dx} \right) \Psi(x)$$

QUINDI SE CAMBIO ORIGINE $\quad (|a\rangle = \Psi(x))$

$$|a\rangle \rightarrow e^{-ipa/\hbar}\, |a\rangle = \Psi(x+a)$$

ESEMPIO

$$e^{-x^2} \rightarrow e^{-(x+a)^2}$$



NOTA:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k$$

MOSTRIAMO CHE È RISPETTATA LA REGOLA DI COMMUTAZIONE.

$$(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q})\,\psi(x) = -i\hbar\, x \frac{d\psi}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx}(x\psi)$$

$$= +i\hbar\left(-x\frac{d\psi}{dx} + \psi + x\frac{d\psi}{dx}\right) = i\hbar\,\psi(x) = [\hat{q},\hat{p}]\,\psi(x)$$

SONO OPERATORI HERMITIANI? NOTA CHE NON VUOL DIRE

$$(\hat{p}\psi)^* = (\hat{p}\psi)$$

MA

$$\langle A|p|B\rangle^* = \langle B|p|A\rangle$$

SIANO ALLORA

$$|A\rangle = \psi_A$$

$$|B\rangle = \psi_B$$

$$\langle A|p|B\rangle = \int dx\, \psi_A^* \left(\hat{p}|B\rangle\right) = \int dx\, \psi_A^* \left(-i\hbar \frac{d\psi_B}{dx}\right)$$

$$\langle A|p|B\rangle^* = i\hbar \int dx\, \psi_A \frac{d}{dx}\psi_B^*$$

$$\langle B|p|A\rangle = \int dx\, \psi_B^* \left(-i\hbar\frac{d\psi_A}{dx}\right) = -i\hbar \int dx\, \psi_B^* \frac{d\psi_A}{dx}$$

MA INTEGRANDO PER PARTI

$$\langle A|p|B\rangle^* = i\hbar \int dx \left[\underbrace{\frac{d}{dx}(\psi_A\psi_B^*)}_{\overset{N}{0}} - \frac{d\psi_A}{dx}\psi_B^*\right] = -i\hbar\int dx\, \frac{d\psi_A}{dx}\psi_B^*$$

(DEVONO ESSERE $|\,|^2$ INTEGRABILI E $S(\mathbb{R};\mathbb{C})$ È DENSO IN L_2, DOVE S È LO SPAZIO DI SCHWARTZ DELLE FUNZIONI RAPIDAMENTE DECRESCENTI)

ANCHE $\hat{q}$ È HERMITIANO:

$$\langle A|q|B\rangle = \int dx\, \psi_A^*\, x\, \psi_B$$

$$\langle B|q|A\rangle = \int dx\, \psi_B^*\, x\, \psi_A$$

$$\Rightarrow \langle A|q|B\rangle^* = \langle B|q|A\rangle$$

* CONSIDERIAMO LA TRASFORMAZIONE

$$\begin{cases} \hat{Q} = \hat{q} \\ \hat{P} = \hat{p} + f(\hat{q}) \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE È CANONICA (QUINDI CHE È UNA "BUONA" SCELTA):

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = [\hat{q}, \hat{p} + f(\hat{q})] = [\hat{q}, \hat{p}] + [\hat{q}, f(\hat{q})] = i\hbar$$

CHI È L'OPERATORE CHE LA IMPLEMENTA? DEVONO VALERE

$$U \hat{q} U^+ = Q = \hat{q}$$

$$U \hat{p} U^+ = P$$

SCELTA $U = U(q)$, È AUTOMATICA

$$U q U^+ = U U^+ \hat{q} = \hat{q}$$

SCEGLIAMO ALLORA (ABBIAMO MOSTRATO CHE È UNITARIA)

$$U(q) = e^{iA(q)}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ESISTE SEMPRE A HERMITIANA CON CUI RAPPRESENTARE U IN QUESTO MODO. QUI AD ESEMPIO

$$e^{iA(q)} \hat{p} e^{-iA(q)} \equiv \hat{p} + f(\hat{q})$$

$$[iA, p] = i(i\hbar) A'(q) = -\hbar A'(q)$$

$$[iA, [iA, p]] = [-A, -\hbar A'] = 0$$

QUINDI SONO NULLI TUTTI I SUCCESSIVI.

$$\hat{p} - \hbar A'(q) = \hat{p} + f(\hat{q})$$

$$\frac{dA}{dq} = -\frac{1}{\hbar} f(\hat{q}) \qquad \Rightarrow \qquad A(q) = -\frac{1}{\hbar} \int^q dq \, f(q)$$

OCCHIO CHE UNA FASE DEL TIPO

$$U^+ \psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} A(x)} \psi(x)$$

NON SI PUÒ BUTTARE VIA.

EQUAZIONE DI SCHRÖEDINGER

LA PRIMA STORICAMENTE: ALL' INIZIO ERA POSTULATA PERCHÈ NON SI SAPEVA CHE TUTTE LE RAPPRESENTAZIONI SONO EQUIVALENTI.

SI ERA VISTO PER L'OSCILLATORE

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{RAPP.} \\ \text{SCHROEDINGER}}}{=} \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) + V(x)$$

CHE È L'OPERATORE HAMILTONIANO IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER. OTTENGO

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E}{dx^2} + V(x)\,\psi_E(x) = E\,\psi_E(x)$$

DA QUI NON SI CAPISCE PERCHÈ ESISTANO VALORI DI E NON AMMESSI. TUTTAVIA LE SOLUZIONI DEVONO STARE IN L_2:

$$\begin{cases} \psi_E(\infty) = 0 \\ \psi_E(-\infty) = 0 \end{cases}$$

SI SCOPRE CHE PER $E \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ CON $V(x) = \frac{1}{2}m^2\omega^2x^2$

LE SOLUZIONI CI SONO, MA NON IN L_2.

RITROVIAMO QUINDI IL NOSTRO SPETTRO DISCRETO.

OPERATORE POSIZIONE

$$H = L^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$$

$$\hat{q}\, \Psi(x) = x\, \Psi(x)$$

NOTA: QUESTO È UN MODO SIMBOLICO PER DIRE
$\langle x | A \rangle = \Psi(x)$
$\langle x | \hat{q} | A \rangle = (\langle x | \hat{q}) | A \rangle = x \langle x | A \rangle = x\, \Psi(x)$
DOVE $\langle x | C \rangle$ MI DÀ LA RAPPRESENTAZIONE DI $|C\rangle$ NELLA BASE DEGLI $|x\rangle$, COME $a_m = \langle m | C \rangle$ SE ERA $|C\rangle = \sum_m a_m |m\rangle$. QUINDI STO SCRIVENDO TRAMITE I RAPPRESENTATIVI LA SOLITA
$\hat{q}\, |A\rangle = \lambda\, |A\rangle$

CHI SONO LE AUTOFUNZIONI DI $\hat{q}$?

$$\hat{q}\, \Psi_\lambda(x) = \lambda\, \Psi_\lambda(x)$$

$$x\, \Psi_\lambda(x) = \lambda\, \Psi_\lambda(x)$$

$$(x - \lambda)\, \Psi_\lambda(x) = 0$$

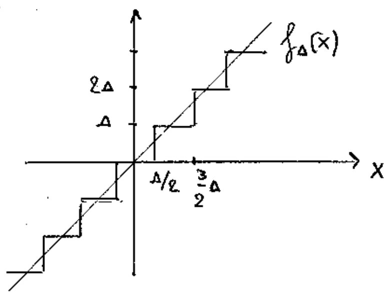
$$\forall\, x \neq \lambda \quad \Psi_\lambda(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_\lambda(x) = 0$$

L'OPERATORE $\hat{q}$ NON HA AUTOFUNZIONI IL L^2: NON È UN'OSSERVABILE.

SIAMO IN GRADO DI MISURARE CON PRECISIONE INFINITA UNA POSIZIONE?

CHIARAMENTE NO. INTRODUCIAMO IL NUOVO OPERATORE

$$\hat{q}_\Delta\, \Psi(x) = f_\Delta(x)\, \Psi(x)$$



$$\hat{q} \to f(x) = x$$

SCELGO INVECE LA f_Δ IN FIGURA, CON CUI MISURO CON ERRORI DI ORDINE $\pm \frac{\Delta}{2}$.

$$\| f(x) - x \| \xrightarrow[\Delta \to 0]{} 0$$

I DUE OPERATORI SONO EQUIVALENTI ENTRO IL MARGINE DI PRECISIONE FISICA; MA IL SECONDO HA AUTOVALORI. CERCHIAMOLI:

$$q_\Delta\, \Psi_\lambda(x) = \lambda\, \Psi_\lambda(x)$$

$$f_\Delta(x)\, \Psi_\lambda(x) - \lambda\, \Psi_\lambda(x) = 0$$

$$(f_\Delta(x) - \lambda)\, \Psi_\lambda(x) = 0$$

$$\lambda \neq m\Delta \quad \Rightarrow \quad \Psi_\lambda(x) = 0$$

SE ESISTONO AUTOVALORI, ESSI DEVONO ESSERE

$$\lambda = m\Delta \quad m \in \mathbb{Z} \qquad \text{SPETTRO DISCRETO.}$$

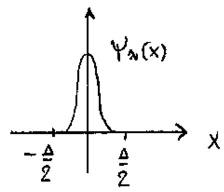
PRENDIAMO

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad f_\Delta(x)\, \Psi_\lambda(x) = 0$$

$$\begin{cases} \vdots \\ \frac{\Delta}{2} \le x \le \frac{3}{2}\Delta & \Delta\, \Psi_\lambda(x) = 0 \Rightarrow \Psi_\lambda(x) = 0 \\ -\frac{\Delta}{2} \le x \le \frac{\Delta}{2} & \text{GIÀ SODDISFATTA} \\ -\frac{3}{2}\Delta \le x \le -\frac{\Delta}{2} & -\Delta\, \Psi_\lambda(x) = 0 \Rightarrow \Psi_\lambda(x) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

PERCIÒ LE AUTOFUNZIONI HANNO SUPPORTO IN $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$.

COME È FATTA ψ_λ È POCO INTERESSANTE: SAPPIAMO DOVE È LOCALIZZATA.



SIMILMENTE STUDIO GLI ALTRI INTERVALLI E SCOPRO CHE IN OGNI INTERVALLO HO INFINITE POSSIBILI AUTOFUNZIONI (AUTOVALORI INFINITAMENTE DEGENERI).

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE DALLA LORO UNIONE È POSSIBILE ESTRARRE UNA BASE DI L^2.

GLI OPERATORI CHE NON HANNO UNO SPETTRO DISCRETO SONO QUINDI IL LIMITE DI OPERATORI REGOLARIZZATI. TUTTAVIA LAVORARE SU QUESTI (CAT) È DIFFICILE: ESTENDIAMO ALLORA LO SPAZIO PER CONTENERE GLI OPERATORI "CATTIVI".

ASSOCIAMO

$$|A\rangle \rightarrow \psi(x) \qquad (\psi(x) = \langle x|A\rangle)$$

$$|A\rangle \stackrel{DEF}{=} \int dx\, \psi_A(x)\, |x\rangle \qquad (\text{CONFRONTA CON } |A\rangle = \sum_m a_m |m\rangle)$$

È CONSISTENTE CON IL PS?

$$|B\rangle = \int dx\, \psi_B(x)\, |x\rangle$$

$$\langle A|B\rangle \stackrel{?}{=} \int dx\, \psi_A^* \psi_B$$

(LA DIMOSTRAZIONE È IMMEDIATA USANDO LA RELAZIONE DI COMPLETEZZA DEGLI $|x\rangle$, MA ESSENDO AUTOVETTORI IMPROPRI LA VALENZA DELLA STESSA È SOLO SIMBOLICA. VEDI ANCHE P. 112 PICASSO).

$$\langle A| = \int dx\, \psi_A^*(x) \langle x|$$

$$\langle A|B\rangle = \left(\int dx\, \psi_A^*(x) \langle x|\right) \cdot \left(\int dy\, \psi_B(y)\, |y\rangle\right)$$

$$= \int dx\,dy\, \psi_A^*(x) \psi_B(y) \langle x|y\rangle$$

DEVO QUINDI RICHIEDERE

$$\langle x|y\rangle = \delta(x-y) \qquad (\text{CONFRONTA CON } \langle n|m\rangle = \delta_{nm})$$

SI NOTI CHE QUESTA SOSTITUISCE LA CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE (PER $x = y$ LA δ DIVERGE).

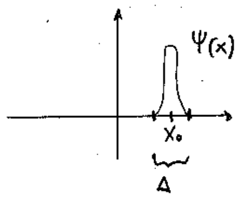
POSSO CALCOLARE

NOTA: DI PER SÈ UN AUTOVETTORE IMPROPRIO $|x'\rangle$ HA COME FUNZIONE D'ONDA $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$.

$$\langle x | f(\hat{q}) | x \rangle = \, ?$$
$$\parallel$$
$$\langle x | f(x) | x \rangle = f(x) \langle x | x \rangle$$

HO SCOPERTO CHE SU QUESTI STATI NON POSSO CALCOLARE I VALORI MEDI. FISICAMENTE QUESTO DERIVA DALL' IMPOSSIBILITÀ DI PREPARARE LO STATO $|x\rangle$.

IL PROBLEMA NON SI PONE USANDO STATI "FISICI":



$$\langle A | q | A \rangle = \int dx \, |\psi(x)|^2 x \simeq \int dx \, |\psi(x)|^2 x_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NORMALIZZATO}}}{\simeq} x_0$$

$|A\rangle \longrightarrow \psi(x)$

$|A\rangle = \int dx \, \psi(x) |x\rangle$

GLI STATI $|x\rangle$ NON SONO FISICI (NON APPARTENGONO AD H): LI USIAMO SOLO PER FARCI I CONTI.

AVEVAMO VISTO, INFINE,

$$\sum_m |e_m\rangle\langle e_m| = \underline{Id}.$$

VEDIAMO CHI È

$$K = \int dx \, |x\rangle\langle x|$$

$$|A\rangle = \int dx \, \psi(x) \, |x\rangle$$

$$K|A\rangle = \int dx \, |x\rangle\langle x| \int dy \, \psi(y) \, dy = \int dx dy \, \psi(y) \, |x\rangle\langle x|y\rangle$$
$$= \int dx dy \, \psi(y) \, |x\rangle \, \delta(x-y) = \int dx \, \psi(x) \, |x\rangle = |A\rangle$$

PERCIÒ, CHIUNQUE SIA $|A\rangle$,

$$K|A\rangle = |A\rangle \quad \Rightarrow \quad K \equiv \underline{Id}.$$

(MA SOLO NEL SENSO CHE AGISCE COME L'IDENTITÀ SE APPLICATO A UN GENERICO VETTORE; È SOLO UNA SCRITTURA SIMBOLICA).

OPERATORE IMPULSO

$$\hat{p}\,\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi}{dx} = p\,\psi$$

$\uparrow$ AUTOVALORE

$$-i\hbar \frac{d\psi}{dx} = p\,\psi$$

$$-\int i\hbar \frac{d\psi}{\psi} = \int p\,dx\ ; \qquad -i\hbar \ln\psi = px + C\ ;$$

$$\ln\psi = \frac{i}{\hbar}(px + C)\ ; \qquad \psi = e^{i\frac{C}{\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} = A e^{ip\frac{x}{\hbar}}$$

NOTIAMO CHE $\psi \notin L^2$ (INFATTI $|\psi|^2 = 1 \cdot A^2$). INOLTRE HO DI NUOVO UNO SPETTRO CONTINUO (OGNI p È AUTOVALORE).

DATA

$$|p\rangle \rightarrow A e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

SCEGLIAMO A IN MODO CHE SIA, SE POSSIBILE,

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p-p')$$

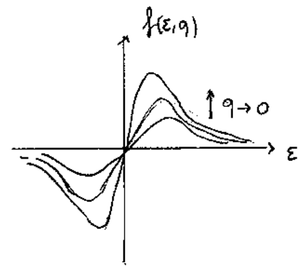
$$\langle p'|p\rangle = \int dx\, A^* e^{-i\frac{p'x}{\hbar}} A e^{i\frac{px}{\hbar}} = |A|^2 \int dx\, e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}} \qquad y = \frac{x}{\hbar},\quad x = y\hbar$$

$$= |A|^2 \hbar \int dy\, e^{i(p-p')y}$$

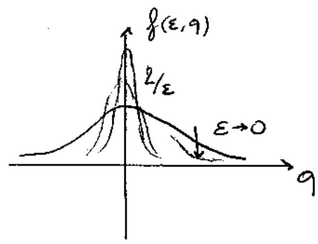
QUESTO INTEGRALE NON ESISTE SE NON NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI, DOVE EQUIVALE A $\quad (q = p - p')$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int dy\, e^{iqy} e^{-\varepsilon|y|}$$

$$\hookrightarrow = \int_{-\infty}^{0} dy\, e^{iqy} e^{\varepsilon y} + \int_{0}^{+\infty} dy\, e^{iqy - \varepsilon y}$$



$$= \left[\frac{1}{iq+\varepsilon} e^{(iq+\varepsilon)y}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{iq-\varepsilon} e^{iqy-\varepsilon y}\right]_{0}^{+\infty}$$



$$= \frac{1}{iq+\varepsilon} - \frac{1}{iq-\varepsilon} = \frac{iq-\varepsilon-iq-\varepsilon}{-q^2-\varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon}{q^2+\varepsilon^2}$$

NOTO CHE

$$f(0) = \frac{2}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$$

$$f(q) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{PER } q \neq 0$$

PERCIO' MI ASPETTO CHE POSSA VALERE

$$\frac{2\varepsilon}{q^2+\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} B\delta(q)$$

QUANTO VALE B?

NOTA: SI RICORDI CHE SE $f(x)$ E' t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ALLORA OTTENGO $\delta(x) = \lim_{m\to\infty} m f(mx)$.

SIMILMENTE, $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE

$$\frac{2\varepsilon}{q^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{q}{\varepsilon}\right) \quad \text{CON } f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\int \delta(q)\, dq = 1$$

$$\int dq \frac{2\varepsilon}{q^2+\varepsilon^2} = \int B\,\delta(q)\, dq = B \qquad x = \frac{q}{\varepsilon},\quad dq = \varepsilon dx$$

$$\parallel$$

$$\int \varepsilon dx \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 x^2+\varepsilon^2} = \int dx \frac{2\cancel{\varepsilon^2}}{\cancel{\varepsilon^2}(1+x^2)} \underset{\uparrow}{=} 2\,\mathrm{ARCTG}\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$$

ε SI E' SEMPLIFICATA

(NOTA CHE SE AL LIMITE LA MIA FUNZIONE NON FOSSE STATA DAVVERO UNA δ, QUI NON AVREI AVUTO QUESTA SEMPLIFICAZIONE).

ABBIAMO RITROVATO

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int dy\, e^{iqy} e^{-\varepsilon|y|} = 2\pi\,\delta(q)$$

NOTA: AL POSTO DEL CAMBIO QUI SOTTO, SI USI $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

TORNANDO A NOI, QUINDI,

$$|A|^2 \hbar \int dy\, e^{i(p-p')y} = |A|^2 \hbar\, 2\pi\,\delta(p-p') \equiv 1 \cdot \delta(p-p')$$

IMPONGO (SCELGO $A \in \mathbb{R}^+$, MA IN REALTA' E' DEFINITO A MENO DI UN FATTORE DI FASE)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad \Rightarrow \quad |p\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

(QUELLA TROVATA E' LA FUNZIONE D'ONDA CHE RAPPRESENTA L'AUTOVETTORE IMPROPRIO $|p\rangle$ NELLA BASE DEGLI $|x\rangle$).

RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI

POICHÈ LE

$$|p\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} = \langle x|p\rangle$$

p È CONTINUO; SO CHE È UNA BASE DALLA TEORIA DELLE TRASFORMATE DI FOURIER.

FORMANO UNA BASE DI L^2, POSSO SCRIVERE

$$|A\rangle = \int dp\, \tilde{\Psi}(p)\,|p\rangle$$

NOTA: DATE LE DUE ESPRESSIONI DI $|A\rangle$ QUI A SINISTRA, CALCOLATI $\langle x|A\rangle$ E $\langle p|A\rangle$ USANDOLE ENTRAMBE E HAI LE RELAZIONI TRA $\tilde{\Psi}(p)$ E $\Psi(x)$.

CHE RELAZIONE C'È TRA QUESTA E

$$|A\rangle = \int dx\, \Psi(x)\,|x\rangle \qquad ?$$

CALCOLO (RICORDO $|A\rangle = \sum_i a_m |e_m\rangle$, $a_m = \langle e_m|A\rangle$):

$$\langle x|A\rangle = \langle x|\int dy\, \Psi(y)|y\rangle = \int dy\, \Psi(y) \underbrace{\langle x|y\rangle}_{\delta(x-y)} = \Psi(x)$$

$$\Psi(x) = \langle x|\int dp\, \tilde{\Psi}(p)|p\rangle$$

$$= \int dp\, \tilde{\Psi}(p)\langle x|p\rangle = \int dp\, \tilde{\Psi}(p) \underbrace{\frac{e^{i\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}$$

FUNZIONE D'ONDA ASSOCIATA A $|p\rangle$ IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER.

(NOTA CHE È UNA TRASFORMATA DI FOURIER).

LA RELAZIONE INVERSA È

$$\int dx\, \frac{e^{-ip\frac{x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\Psi(x) = \int dx\, \frac{e^{-ip\frac{x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \underbrace{\int dp'\, \tilde{\Psi}(p')\frac{e^{ip'x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}$$

HO SOSTITUITO QUANTO RICAVATO QUI SOPRA.

$$= \int dp'\, \tilde{\Psi}(p') \underbrace{\int dx\, \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{e^{ip'x/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}} = \langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$$

$$= \tilde{\Psi}(p)$$

COME AGISCE L'OPERATORE IMPULSO NELLA RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI? MI ASPETTO

$$|A\rangle \to \tilde{\Psi}(p)$$

$$\hat{p}|A\rangle \to p\,\tilde{\Psi}(p)$$

VERIFICHIAMOLO.

$$\tilde{\Psi}(p) = \int dx \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

$$\Psi(x) = \int dp \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{\Psi}(p) e^{i\frac{p}{\hbar}x} dp$$

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar \frac{d\Psi(x)}{dx} = -i\hbar \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\Psi}(p) \frac{d}{dx} e^{ipx/\hbar}$$

$$= -i\hbar \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\Psi}(p) \frac{ip}{\hbar} e^{ipx/\hbar}$$

$$= \int dp \left(p\tilde{\Psi}(p)\right) \underbrace{\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}_{\to \langle x|p\rangle}$$

NOTA: LO SPAZIO DI SCHWARTZ $S(\mathbb{R};\mathbb{C})$ È L'INSIEME DELLE $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ TALI CHE $\|f\|_{m,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(k)}(x)| < \infty \quad \forall m,k \in \mathbb{N}$

È COMODO USARE LA RAPPRESENTAZIONE NELLO SPAZIO $S(\mathbb{R};\mathbb{C})$ PERCHÈ ESSO È AUTO-FOURIER, QUINDI GLI INTEGRALI QUA SOPRA ESISTONO SEMPRE: ESISTE LA TRASFORMATA SE $f \in L_1$; MA $S \subset L_1$ E SE $f \in S \Rightarrow F[f] \in S$ (INVARIANZA).

OVVERO $\left(\Psi(x) = \langle x|A\rangle\right)$

$$\hat{p}|A\rangle = \int dp\, p\tilde{\Psi}(p)|p\rangle$$

PER TROVARE COME AGISCE $\hat{q}$, APPLICHIAMO LE CCR:

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$$

MOSTRIAMO CHE È SODDISFATTA DEFINENDO

$$\hat{q} = +i\hbar \frac{d}{dp}$$

INFATTI

$$(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q})\tilde{\Psi}(p) = i\hbar\tilde{\Psi} + i\hbar p\tilde{\Psi}' - i\hbar p\tilde{\Psi}' = i\hbar\tilde{\Psi}(p)$$

$$\hat{q}\hat{p}\tilde{\Psi}(p) = i\hbar\frac{d}{dp}\left(p\tilde{\Psi}(p)\right) = i\hbar\tilde{\Psi} + i\hbar p\tilde{\Psi}'$$

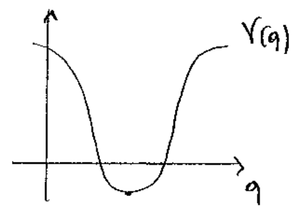
PERCHÈ È UNA RAPPRESENTAZIONE SCOMODA? (SE NON CON PARTICELLE LIBERE O CON OSCILLATORI)

$$H = \left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right)\Psi \equiv E\Psi$$

METTERE LE DERIVATE AL POSTO DI p^2 MI DÀ $\frac{d^2}{dx^2}$. SE LE METTO AL POSTO DI $V(q)$ (AD ESEMPIO $V = \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\frac{d}{dp}}$) È IN GENERE DIFFICILE.

- MOTO UNIDIMENSIONALE DI UNA PARTICELLA

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$



$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

NEL CASO CLASSICO, $E_{min} = \min_q V(q)$

E ANCHE QUI

$$E \geq E_{min,cl}$$

RICORDIAMO INFATTI

$$\langle E|H|E\rangle = E\langle E|E\rangle = E$$

$$E = \int dx\ \psi_E^*(x)\, H\, \psi_E(x)$$

$$\langle E|H|E\rangle = \frac{1}{2m}\langle E|p^2|E\rangle + \langle E|V(q)|E\rangle$$

$$\geq \langle E|V(q)|E\rangle = \int dx\ \psi_E^*(x)\, V(x)\, \psi_E(x)$$

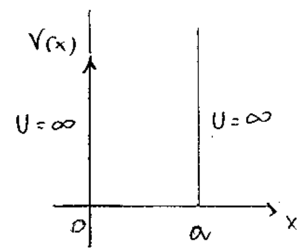
p È HERMITIANO

$$\geq \int dx\ \psi_E^*\, V_{min}\, \psi_E = V_{min}\int dx\, |\psi_E|^2 = V_{min}$$

TRA L'ALTRO LA DISUGUAGLIANZA È STRETTA A CAUSA DEL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE.

- BUCA INFINITA

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x > a \vee x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$



SCRIVO L'EQUAZIONE DI SCHRÖEDINGER

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar)^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi = E\psi$$

DOVE $V(x) = \infty$, DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE

$$\psi(x) = 0 \qquad x < 0 \vee x > a$$

PER POTER DARE UN VALORE FINITO DI E.

TRA 0 E a,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$$ CON $E>0$ PER QUANTO VISTO SOPRA.

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' + K^2\psi = 0$$

$$\psi = Ae^{iKx} + Be^{-iKx}$$

È POSSIBILE DIMOSTRARE CHE $\psi(x)$ VIENE IN GENERALE CONTINUA (ANCHE SE NON SEMPRE DIFFERENZIABILE). ALLORA DEVONO VALERE

$$\begin{cases} \psi_{INT}(0) = 0 = A+B \quad \Rightarrow \quad B=-A \\ \psi_{INT}(a) = 0 \end{cases}$$

$$\psi_{INT}(x) = Ae^{iKx} - Ae^{-iKx} = A2i\,\frac{e^{iKx}-e^{-iKx}}{2i} := C\sin Kx$$

LA COSTANTE C È DETERMINATA SOLO DALLA NORMALIZZAZIONE. COSA CI DICE ALLORA LA SECONDA CONDIZIONE?

$$\psi_{INT}(a) = C\sin Ka = 0$$

È IN REALTÀ UNA CONDIZIONE SU K (DI QUANTIZZAZIONE):

$$Ka = \pi m$$

NOTA CHE $e^{im\frac{\pi}{\ell}x}$ ERA UNA BASE DI $L_2[-\ell,\ell]$ ...

$$E = \frac{\hbar^2K^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2m^2}{a^2}$$

SI NOTI CHE, RISPETTO ALL'OSCILLATORE ARMONICO, QUI I VALORI DI "E" NON SONO EQUISPAZIATI.

LO SPETTRO CONTINUO È VUOTO (INFATTI TUTTE LE ORBITE CLASSICHE SONO LIMITATE).

NORMALIZZIAMO $\psi(x)$:

$$\psi_{INT}(x) = C\sin Kx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi_{INT}|^2 = 1 = \int_0^a dx\,|C|^2\sin^2 Kx = |C|^2\int_0^a dx\left(-\frac{1}{4}\right)\left(e^{iKx}-e^{-iKx}\right)^2$$

$$\| \psi(x) \|^2 = -\frac{1}{4}|c|^2 \int_0^a dx \left(e^{2ikx} + e^{-2ikx} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2ik} e^{2ikx} \Big|_0^a + (cc) - 2x \Big|_0^a \right) \left(-\frac{1}{4}|c|^2 \right)$$

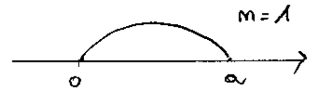
$$= \left(\frac{1}{2ik} \left(e^{2i\pi m} - 1 \right) + (cc) - 2a \right) \left(-\frac{1}{4}|c|^2 \right) = \frac{a}{2}|c|^2 \equiv 1$$

SCELTO $c \in \mathbb{R}^+$, $c = \sqrt{\frac{2}{a}}$. (NOTA CHE $cc = 0$ PERCHÈ $\int \psi^* dx = \left(\int \psi dx \right)^*$).

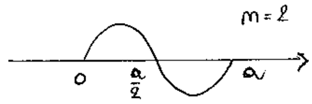
CHI SONO LE AUTOFUNZIONI ?

NON ACCETTO $m=0$, QUINDI HO LO STATO FONDAMENTALE PER $m=1$.

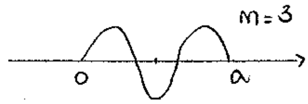
$\psi_{INT} = C \sin \frac{\pi x}{a}$ FONDAMENTALE



$\psi_{INT} = C \sin \frac{2\pi x}{a}$ 1° ECCITATO

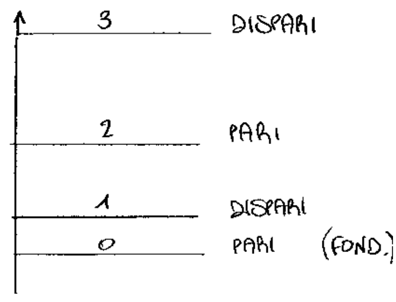


$\psi_{INT} = C \sin \frac{(m+1)\pi x}{a}$ m-ESIMO ECCITATO



NOTIAMO CHE LE SOLUZIONI SONO QUELLE DELLA CORDA VIBRANTE E CHE $x = \frac{a}{2}$ È UN ASSE DI SIMMETRIA DEL SISTEMA. IN PARTICOLARE CI SONO STATI PARI O DISPARI RISPETTO ALLA SIMMETRIA E SI ALTERNANO.

L' m-ESIMO STATO ECCITATO HA m ZERI (NODI) SE NON CONTO GLI ESTREMI.



★ INTRODUCIAMO L' OPERATORE I. DETTO DI <u>INVERSIONE SPAZIALE</u>

$$I\,\psi(x) = \psi(-x)$$

MOSTRIAMO CHE $I^2 = \mathbb{1}$ E CHE I È HERMITIANO E UNITARIO.

$$I^2 \psi(x) = I\,I\,\psi(x) = I\,\psi(-x) = \psi(x) = \mathbb{1}\,\psi(x)$$

$$\langle A | I | B \rangle = \int dx\, \psi_A^*(x)\, I\, \psi_B(x)\, dx = \int dx\, \psi_A^*(x)\, \psi_B(-x) \qquad y = -x$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} (-dy)\, \psi_A^*(-y)\, \psi_B(y) = \int dy\, \psi_A^*(-y)\, \psi_B(y)$$

QUEST'ULTIMO PASSAGGIO SI POTEVA EVITARE METTENDO IL MODULO DELLO JACOBIANO INVECE DI "$-dy$", SENZA PERO' CAMBIARE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE (ANALOGAMENTE A QUANTO FACCIO IN 2D-3D).

$$\langle A|I|B\rangle^* = \int dy\, \psi_B^*(y)\, \psi_A(-y) = \int dy\, \psi_B^*(y)\, I\, \psi_A(y) = \langle B|I|A\rangle$$

INFINE OVVIAMENTE

$$II^\dagger = II = I^2 = 1 = I^\dagger I$$

MOSTRIAMO CHE I ANTICOMMUTA CON $\hat{q}$ E $\hat{p}$:

$$I\hat{q}I = -\hat{q} \qquad (= I\hat{q}I^\dagger) \qquad \Rightarrow \qquad I\hat{q} = -\hat{q}I$$

$$I\hat{q}I\psi(x) = I\hat{q}\psi(-x) = I(x\psi(-x)) = (-x\psi(x)) = -\hat{q}\,\psi(x)$$

(IN GENERALE LE SIMMETRIE IMPLEMENTATE SU UN OPERATORE HANNO BISOGNO DI DUE OPERATORI, NON DI UNO COME SUGLI STATI: $A\hat{q}A^\dagger$).

SIMILMENTE

$$I\hat{p}I = -\hat{p}$$

CERCO QUANTO VALE

$$IHI = I\left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right)I = \frac{p^2}{2m} + V(-q)$$

SCELTO UN SISTEMA CON POTENZIALE PARI, $V(q) = V(-q)$,

$$IHI = H$$

OSSIA L'HAMILTONIANA È INVARIANTE SOTTO INVERSIONE SPAZIALE.

INOLTRE, SEMPRE SOTTO L'IPOTESI $V(q) = V(-q)$,

$$IHII = HI \qquad \Rightarrow \qquad IH = HI \qquad \Rightarrow \qquad [H, I] = 0$$

OVVERO I COMMUTA CON H. SE LO SPETTRO DI H È NON DEGENERE I SUOI AUTOSTATI SONO ANCHE AUTOSTATI DI I (SE HO DEGENERAZIONE ESISTE UNA SCELTA CHE ME LO GARANTISCE); QUESTI SONO DATI DA

$$I\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

$$I^2\psi(x) = \lambda I\psi(x)$$

$$\psi(x) = \lambda^2\psi(x) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 1$$

GLI AUTOVALORI SONO $\lambda = \pm 1$, CORRISPONDENTI A AUTOFUNZIONI PARI O DISPARI:

$$I\,\Psi(x) = \Psi(-x) = +\Psi(x)$$

$$I\,\Psi(x) = \Psi(-x) = -\Psi(x)$$

NOTA: FUNZIONI PARI E DISPARI FORMANO UNA BASE DI L_2. INFATTI, DATA $f(x)$ GENERICA, HO $f = f_p + f_d$ DOVE

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \qquad f_d(x) = \frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$$

★ TEOREMA DI NON DEGENERAZIONE

IN UNA DIMENSIONE LO SPETTRO DI H È NON DEGENERE.

PER ASSURDO, $\exists\ \Psi_1(x), \Psi_2(x)$ AUTOFUNZIONI DELLO STESSO E:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_1'' + V\Psi_1 = E\Psi_1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_2'' + V\Psi_2 = E\Psi_2$$

MOLTIPLICO LA PRIMA PER Ψ_2 E LA SECONDA PER Ψ_1:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_2\Psi_1'' + V\Psi_2\Psi_1 = E\Psi_2\Psi_1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_1\Psi_2'' + V\Psi_1\Psi_2 = E\Psi_1\Psi_2$$

SOTTRAENDOLE,

$$-\Psi_2\Psi_1'' + \Psi_1\Psi_2'' = 0$$

MA

$$\frac{d}{dx}(\Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2) = \Psi_1'\Psi_2' + \Psi_1\Psi_2'' - \Psi_1''\Psi_2 - \Psi_1'\Psi_2'$$

PERCIÒ

$$\frac{d}{dx}(\Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2 = C$$

MANDANDO X ALL'INFINITO, ESSENDO Ψ_1 E $\Psi_2 \in L_2$, SCOPRO CHE DEVE ESSERE $C = 0$ (SE LO SPETTRO È DISCRETO).

↳ SE NON LO È SI È VISTO CHE LE AUTOFUNZIONI NON APPARTENGONO A L_2. NOTA CHE IL PELLI CONFONDE L_2 CON S (NEL PRIMO NON È NECESSARIO CHE $\lim_{x\to\infty}\Psi(x) = 0$).

OTTENGO

$$\Psi_1\Psi_2' = \Psi_1'\Psi_2$$

DIVIDO QUINDI TUTTO PER $\Psi_1\Psi_2$.

$$\frac{1}{\psi_2}\frac{d\psi_2}{dx} = \frac{1}{\psi_1}\frac{d\psi_1}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln\psi_2 = \frac{d}{dx}\ln\psi_1 \quad \Rightarrow \quad \ln\psi_2 = \ln\psi_1 + c = \ln(e^c\psi_1)$$

$\psi_2 = e^c\psi_1$, OVVERO SONO LO STESSO STATO.

★ <u>TEOREMA</u>

ψ E' REALE.

SIA $\psi = \psi_R + i\psi_I$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi''_R + i\psi''_I\right) + V\left(\psi_R + i\psi_I\right) = E\left(\psi_R + i\psi_I\right)$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi''_R + V\psi_R = E\psi_R$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi''_I + V\psi_I = E\psi_I$$

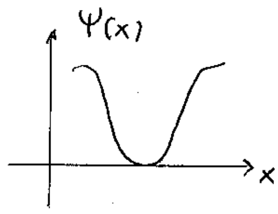
SOMMO E SOTTRAGGO QUESTA E LA CC. QUESTE DUE VANNO SODDISFATTE CONTEMPORANEAMENTE. INOLTRE SE ψ E' SOLUZIONE LO E' ANCHE ψ^* PERCHE' L'EQUAZIONE E' A COEFFICIENTI REALI.

SONO LA STESSA AUTOFUNZIONE, QUINDI TANTO VALE SCEGLIERLA REALE (NON POSSONO ESSERE DIVERSE PERCHE' LO SPETTRO E' NON DEGENERE).

★ <u>TEOREMA DEI NODI</u>

IN 1D CON SPETTRO DISCRETO E CON QUALSIASI $V(q)$, L' m-ESIMO STATO ECCITATO HA m NODI.

★ <u>TEOREMA</u>



NON E' POSSIBILE CHE NELLO STESSO PUNTO x_0

$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$$

INFATTI L'EQ. DI SCHRÖEDINGER E' DIFFERENZIALE DEL II ORDINE: DATE $\psi(x_0), \psi'(x_0)$, LA SOLUZIONE (CHE E' UNICA) E' UNIVOCAMENTE DETERMINATA. SI VERIFICA FACILMENTE CHE CON LE IPOTESI SOPRA $\psi(x) = 0$ E' SOLUZIONE.

· OSSERVAZIONE: POTENZIALI SIMMETRICI

$V(q) = V(-q)$

HO UNO SPETTRO DISCRETO NON DEGENERE; INOLTRE LE AUTOFUNZIONI DI H SONO PARI O DISPARI PERCHÈ $[H, I] = 0$. IN PARTICOLARE

\# NODI PARI => ψ PARI

\# NODI DISPARI => ψ DISPARI

(LO STATO FONDAMENTALE È PER FORZA PARI PERCHÈ UNA FUNZIONE CONTINUA E DISPARI HA UN NODO NELL'ORIGINE)

NEL CASO PARI,

$\psi(x) = \psi(-x)$

CHE NON SI ANNULLA IN $x = 0$, ALTRIMENTI AVREI ANCHE

$\psi'(x) = -\psi'(-x)$

$\psi'(0) = -\psi'(0) \Rightarrow \psi'(0) = 0$

NOTA: LA DERIVATA DI f PARI È DISPARI, QUINDI SE $f(0)=0$ ANCHE $f'(0)=0$. NON POSSO QUINDI MAI ACCETTARE UNA $\psi(x)$ PARI CON $\psi(0)=0$: PER m DISPARI, $\psi(x)$ È DISPARI.

DOVE SI ANNULLA? SI NOTA CHE I SUOI ZERI x_0

$\psi(x_0) = 0 = \psi(-x_0)$ SONO A COPPIE SIMMETRICHE.

NEL CASO DISPARI,

$\psi(x) = -\psi(-x)$

$\psi(0) = -\psi(0) \Rightarrow \psi(0) = 0$

ANCHE QUI HO COPPIE SIMMETRICHE DI ZERI, CON IN PIÙ LO ZERO.

SI È COSÌ GIUSTIFICATA L'ALTERNANZA TRA AUTOFUNZIONI PARI E DISPARI.

OSCILLATORE ARMONICO

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$$

CERCHIAMO LE FUNZIONI L^2 CHE RISOLVONO L'EQUAZIONE; VEDREMO CHE NE ESISTONO SOLO SE

$$E = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega$$

COMINCIAMO CON CERCARE LO STATO FONDAMENTALE $|0\rangle \to \psi_0$.

SAPPIAMO CHE $\eta|0\rangle = 0$, CON

$$\eta = \frac{1}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}(p - im\omega q) \quad \to \quad \frac{1}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - im\omega x\right)$$

ALLORA $\eta|0\rangle = 0$ SI RAPPRESENTA CON

$$\frac{1}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - im\omega x\right)\psi_0(x) = 0$$

$$\hbar\frac{d\psi_0}{dx} + m\omega x\psi_0 = 0$$

$$\int\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\int\frac{m\omega}{\hbar}x\,dx\,; \qquad \ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad \psi_0(x) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + c} = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

A MENO DI UNA COSTANTE, COME CI ASPETTIAMO, CHE SI CALCOLA IMPONENDO

$$1 \equiv \int dx\,|\psi_0(x)|^2 = A^2\int dx\,e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \qquad y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$$

$$= A^2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int dy\,e^{-y^2} = A^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \qquad \Rightarrow \quad A = \left[\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right]^{\frac{1}{4}}$$

SI NOTI CHE $|\psi_0|^2$ COINCIDE CON $\langle A|q|A\rangle$ CALCOLATO TEMPO ADDIETRO IN NOTAZIONE ASTRATTA (SI ERA CHIAMATA $P(q)$).

SIMILMENTE,

$$\eta^+ = \frac{1}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}(p + im\omega q) \rightarrow \frac{i}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)$$

SAPPIAMO CHE PER $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$$|1\rangle = \eta^+|0\rangle$$

$$\psi_1(x) = \eta^+\psi_0(x)$$

SI NOTI PERÒ CHE COSÌ $\psi_1(x)$ È IMMAGINARIA PURA, MENTRE PER CONVENZIONE LE SCELGO REALI. CIÒ SI OTTIENE USANDO COME OPERATORI DI SALITA E DISCESA a E a^+, LEGATI A η E η^+ DALLA RELAZIONE

$$\eta^+ = i a^+$$

ALLORA USIAMO $a = \frac{i}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}(p - im\omega q) = i\eta$ E ABBIAMO

$$|1\rangle = a^+|0\rangle$$

$$\psi_1(x) = \frac{A}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)e^{-\frac{m\omega}{2m}x^2}$$

$$= A\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

E SAPPIAMO DAL CALCOLO ALGEBRICO CHE È GIÀ NORMALIZZATO. INOLTRE RITROVIAMO CHE È DISPARI (ψ_0 ERA PARI) E CHE HA UN SOLO NODO ($x=0$). IL SECONDO STATO ECCITATO È

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+)^2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^+|1\rangle$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{[2m\hbar\omega]^{1/2}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)2xe^{-} \longrightarrow (e^{-} + x^2e^{-} + x^2e^{-})$$

MI ASPETTO QUINDI

$$\psi_2(x) = (ax^2 + b)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

CHE È PARI. IN GENERALE

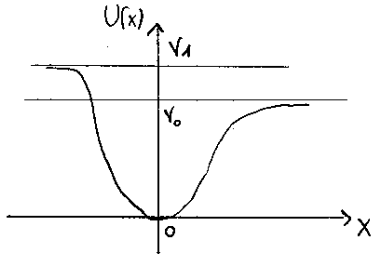
$$\psi_m(x) = \underset{\uparrow}{P_m(x)}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

POLINOMIO DI GRADO m, PARI O DISPARI

$$\psi_3 = (ax^3 + bx)e^{-}$$

$$\psi_4 = (a'x^4 + b'x^2 + c)e^{-}$$

· **POTENZIALE UNIDIMENSIONALE GENERICO**



STUDIAMO PER CASI.

$0 < E < V_0$

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi'' + U(x)\psi = E\psi$$

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U(x)\right)\psi$$

QUAL È IL SUO COMPORTAMENTO ASINTOTICO?

PER $x \to \infty$,

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi =: \lambda^2\psi$$

$$\psi'' = \lambda^2\psi$$

$$\psi = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$$

IN GENERALE DIVERGE, QUINDI FISSIAMO UNA CONDIZIONE INIZIALE COSÌ CHE

$$\psi = be^{-\lambda x} \qquad a = 0$$

LA SECONDA COSTANTE È FISSATA DALLA NORMALIZZAZIONE.

PER $x \to -\infty$,

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\psi = \mu^2\psi$$

$$\psi = ce^{\mu x} + de^{-\mu x}$$

HO FINITO LE CONDIZIONI INIZIALI: NON POSSO FARE IN MODO CHE ψ NON DIVERGA A $-\infty$. ESSENDO PERÒ

$$c = c(E), \quad d = d(E)$$

PUÒ DARSI CHE ESISTANO PARTICOLARI VALORI DI E PER CUI $\psi(x)$ VADA A ZERO DI PER SÈ: SONO PROPRIO GLI AUTOVALORI.

DEVONO ESSERE DISCRETI, SE NO $c(E)$, $d(E)$ SAREBBERO NULLE OVUNQUE IN QUANTO ANALITICHE (CFR TEOREMA D'IDENTITÀ, f ANALITICA IN $D \subseteq \mathbb{C}$ AP., CONN.,

$\{z \in D \text{ t.c. } f(z) = 0\}$ HA UN PUNTO LIMITE IN D $\Leftrightarrow$ $f(z)$ IDENTICAMENTE NULLA IN D.

$\{z \in D \text{ t.c. } f(z) = g(z)\}$ HA UN PUNTO LIMITE IN D $\Leftrightarrow$ $f = g$ IN TUTTO D)

$V_0 < E < V_1$

COME PRIMA, FISSO

$$\psi(x\to-\infty) = c e^{\mu x} \qquad d = 0$$

E L'ALTRA COSTANTE È FISSATA DALLA NORMALIZZAZIONE.

PER $x \to \infty$

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi =: -K^2\psi$$

$$\psi'' + K^2\psi = 0$$

$$\psi = a e^{iKx} + b e^{-iKx}$$

NOTA: AVENDO IMPOSTO $\psi(-\infty)=0$, È ANCORA POSSIBILE APPLICARE IL TEOREMA DI NON DEGENERAZIONE. QUINDI IN REALTÀ a E b NON SONO COSTANTI LIBERE E OGNI "E" È NON DEGENERE.

CHE SONO FUNZIONI LIMITATE (AUTOFUNZIONI DELL'IMPULSO) MA NON VANNO A ZERO (NON SONO L_2). LE POSSO NORMALIZZARE SOLO NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI (VEDI $\hat{p}$): È LO SPETTRO CONTINUO.

$E > V_1$

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\psi = -\mu^2\psi$$

PER $x \to -\infty$ (A $+\infty$ LA SITUAZIONE È ANALOGA)

$$\psi = c e^{i\mu x} + d e^{-i\mu x}$$

NOTA: ESSENDO UNA ODE DEL II ORDINE, LE COSTANTI LIBERE SONO 2 E NON 4.

HO 2 SOLUZIONI INDIPENDENTI CONTINUE (LO SPETTRO CONTINUO È DOPPIAMENTE DEGENERE).

RITROVIAMO IN MECCANICA CLASSICA LA CORRISPONDENZA TRA ORBITE LIMITATE E SPETTRO DISCRETO.

NOTA: LA CORRISPONDENZA TRA ($A, B \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$)

$$\psi = A\cos Kx + B\sin Kx \qquad \text{E} \qquad \psi = a e^{iKx} + b e^{-iKx}$$

SI OTTIENE SCEGLIENDO LE COSTANTI COMPLESSE

$$a = \frac{1}{2}(A - iB) \qquad b = \frac{1}{2}(A + iB)$$

- PARTICELLA LIBERA

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi \ ; \qquad \psi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\psi = 0$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0$$

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

NOTIAMO CHE

$$[H, p] = 0$$

E RICORDIAMO CHE LE AUTOFUNZIONI DI $\hat{p}$ ERANO

$$\psi_p = \frac{e^{i\frac{p}{\hbar}x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

QUESTE TUTTAVIA NON SONO TUTTE LE AUTOFUNZIONI DI H, CHE SONO DATE INVECE DALLA COMBINAZIONE SOPRA. INOLTRE LO SPETTRO È DOPPIAMENTE DEGENERE.

PER E FISSATO, LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI HA dim = 2 E UNA BASE È

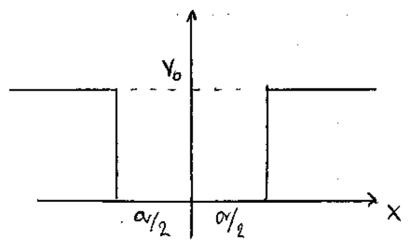
$$\begin{cases} \psi_1 = a e^{ikx} & \rightarrow \\ \psi_2 = b e^{-ikx} & \leftarrow \end{cases}$$

VERSO DESTRA

VERSO SINISTRA

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, ESISTONO PARTICELLE QUANTISTICHE CHE SI MUOVONO IN ENTRAMBE LE DIREZIONI (HO UNA CERTA PROBABILITÀ DI TROVARE L'UNA O L'ALTRA).

- BUCA FINITA DI POTENZIALE



SE $E > V_0$ SONO NEL CASO DOPPIAMENTE DEGENERE E CONTINUO.

PER $0 < E < V_0$ CERCO LO SPETTRO DISCRETO.

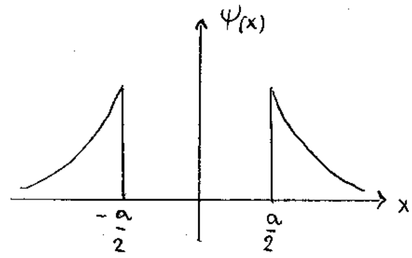
CERCHIAMO SE ESISTE UNO STATO FONDAMENTALE E_{FOND}.

POICHÉ $V(x) = V(-x)$, GLI STATI SONO ALTERNATIVAMENTE PARI O DISPARI. CERCHIAMO INNANZITUTTO GLI AUTOSTATI PARI:

$$\psi(x) = \psi(-x)$$

PER $x > \frac{a}{2}$,

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\psi =: \lambda^2\psi$$



$$\psi = Be^{\lambda x} + Ae^{-\lambda x} \Rightarrow Ae^{-\lambda x}$$

PER PARITÀ, PER $x < -\frac{a}{2}$ HO $\psi(x) = Ae^{\lambda x}$.

PUÒ ANCHE ESSERE $A = e^{\lambda a/2}$, IL CHE SPIEGA LA TRASLAZIONE.

$$\lambda = \left[\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\right]^{\frac{1}{2}}$$

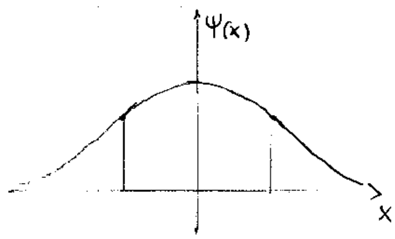
PER $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$,

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi$$

$$K = \left[\frac{2mE}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi'' = -K^2\psi$$

$$\psi = ae^{iKx} + be^{-iKx}$$



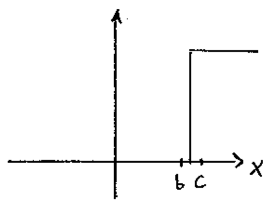
MA $\psi(x) = \psi(-x)$,

$$\psi(-x) = ae^{-iKx} + be^{iKx} \Rightarrow a = b$$

$$\psi(x) = B\cos Kx$$

MANCA IL RACCORDO. RISOLVIAMO TRA b, c GENERICI

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(x))\psi$$



$$\int_b^c \psi''\,dx = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_b^c (E-U(x))\psi\,dx$$

$$\psi'(c) - \psi'(b) = -\frac{2m}{\hbar}\int_b^c (E-U(x))\psi\,dx$$

SCELGO b, c ATTORNO A UNA SINGOLARITÀ E LI AVVICINO: ALLORA L'INTEGRALE (DI FUNZIONI LIMITATE) VA A ZERO. QUESTO MI DICE CHE SULLA SINGOLARITÀ ψ' È CONTINUA.

RIPETENDO L'INTEGRAZIONE SCOPRO CHE È CONTINUA PURE ψ: È VERO IN GENERALE PER $U(x)$ CON DISCONTINUITÀ FINITE; SE FOSSERO INFINITE È CONTINUA ψ MA NON ψ' (INFATTI AVREI $\psi(x) = \int_b^c \psi'(x)\,dx$).

CONTINUA, E L'INTEGRALE "ADDOLCISCE".

IMPONIAMO QUINDI LA CONTINUITÀ DI $\psi(x)$ E $\psi'(x)$.

$$\begin{cases} Ae^{-\lambda\frac{a}{2}} = B\cos\frac{Ka}{2} \\ -A\lambda e^{-\lambda\frac{a}{2}} = -BK\sin\frac{Ka}{2} \end{cases}$$

NON SERVE IMPORRE LA CONTINUITÀ IN $-a/2$ POICHÉ HO IMPOSTO LA PARITÀ DI ψ.

DIVIDO UN'EQUAZIONE PER L'ALTRA,

$$-\lambda = -K \tan\frac{Ka}{2}$$

NOTA: OTTENGO LA STESSA COSA IMPONENDO NULLO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA.

(L'INCOGNITA E' "E" CHE STA IN K E λ). POSTI

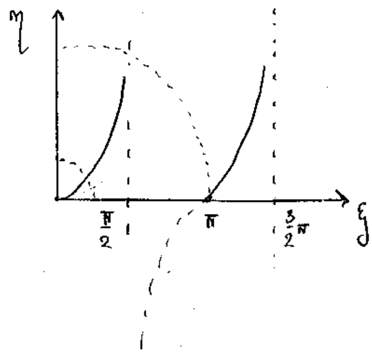
$$\xi = \frac{Ka}{2} \qquad \eta = \frac{\lambda a}{2}$$

$$\frac{Ka}{2}\tan\frac{Ka}{2} = \frac{\lambda a}{2}$$

$$\xi^2+\eta^2 = \frac{a^2}{4}(\lambda^2+K^2) = \frac{a^2}{4}\left[\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)+\frac{2mE}{\hbar^2}\right] = \frac{a^2}{4}\frac{2mV_0}{\hbar^2} =: R^2$$

PERCIO' CERCO GRAFICAMENTE L'INTERSEZIONE

$$\begin{cases} \xi\tan\xi = \eta \\ \xi^2+\eta^2 = R^2 \end{cases} \qquad \xi,\eta \geq 0$$

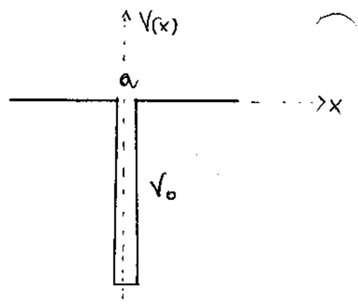


COMINCIO A AVERE DUE STATI LEGATI PARI QUANDO

$$R > \pi$$

$$\frac{a^2\, 2mV_0}{4\hbar^2} > \pi^2 \qquad V_0 \geq \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

MA IN REALTA' CI DEVE ESSERE ANCHE QUELLO DISPARI IN MEZZO (COME SI VEDE RIFACENDO IL CONTO PER GLI STATI DISPARI).



· DEEP WELL

LO APPROSSIMO CON

$$V(x) = -K\,\delta(x)$$

DOVE LA $\delta(x)$ HA LE DIMENSIONI DI $[\ell]^{-1}$, QUINDI $[K] = [E]\cdot[\ell]$.

POSSO SCRIVERE

$$K = V_0 a$$

PERCIO' IL PROBLEMA È ANALOGO A SUPPORRE $V_0 \to \infty$, $a \to 0$ TENENDO FISSO IL PRODOTTO $V_0 a$.

PERCIÒ

$$V(x) = -V_0 a \delta(x)$$

POICHÉ $V(x) = V(-x)$, SAPPIAMO CHE LO STATO FONDAMENTALE È PARI.

PER $x>0$, $V(x)=0$ (DEVO STUDIARE SEPARATAMENTE I DUE LATI DELLA BUCA) E

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi = -|E|\psi \qquad \text{CERCO LO SPETTRO DISCRETO } (E<0)$$

$$\psi'' = \frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi = \lambda^2\psi \qquad \Rightarrow \qquad \psi = be^{\lambda x} + ae^{-\lambda x}$$

IMPONIAMO CHE SIA $b=0$ E OTTENIAMO PER $x>0$

$$\psi(x) = Ae^{-\lambda x} \qquad x>0$$

PER $x<0$, SFRUTTANDO LA PARITÀ HO

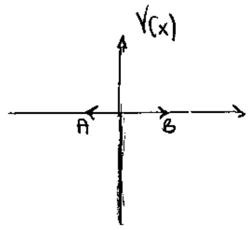
$$\psi(x) = Ae^{\lambda x} \qquad x<0$$

COSA SUCCEDE IN $x=0$? RISCRIVO IN GENERALE

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0 a\delta(x)\psi(x) = |E|\psi(x)$$

$$\psi'' + \frac{2mV_0 a}{\hbar^2}\delta(x)\psi(x) = \lambda^2\psi(x)$$

INTEGRANDO TRA A, B CON $A<0$, $B>0$,



$$\int_A^B \psi'' dx + \frac{2mV_0 a}{\hbar^2}\int_A^B \delta(x)\psi(x)\,dx = \lambda^2\int_A^B \psi(x)\,dx$$

$$\psi'(B) - \psi'(A) + \frac{2mV_0 a}{\hbar^2}\psi(0) = \lambda^2\int_A^B \psi(x)\,dx$$

SI NOTI CHE L'EQUAZIONE HA SENSO SE ψ È CONTINUA ($\exists\, \psi(0)$).
AL TENDERE DI $A, B \to 0$, L'INTEGRALE DELLA ψ VA ALLORA A ZERO.
D'ALTRA PARTE LA DERIVATA È DISCONTINUA:

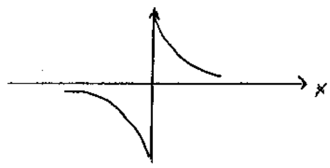
$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) + \frac{2mV_0 a}{\hbar^2}\psi(0) = 0$$

LA ψ DI CUI SOPRA È GIÀ CONTINUA.

IMPONIAMO ALLORA

$$-A\lambda - (A\lambda) + \frac{2mV_0 a}{\hbar^2} A = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{mV_0 a}{\hbar^2} \equiv \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

QUESTO È L'UNICO STATO PARI. CE N'È UNO DISPARI?



NO, PERCHÈ VIOLEREBBE LA CONTINUITÀ (INFATTI LA CONDIZIONE SULLE DERIVATE DA' $\psi(0)=0$, PERCHÈ SE ψ È DISPARI ψ' È PARI).

→ STUDIA IL CASO DI DOPPIA BUCA

$$V(x) = -V_0 a\left[\delta(x+b)+\delta(x-b)\right]$$

→ RICAVA IL RISULTATO DELLA BUCA PROFONDA COME LIMITE DELLA BUCA FINITA ($a \to 0$, $V_0 \to \infty$, $V_0 a = \text{cost.}$)

EVOLUZIONE TEMPORALE

$$|A,t\rangle \qquad\qquad |B,t\rangle$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$|A,t'\rangle \qquad t'>t \qquad |B,t'\rangle$$

UN PRIMO REQUISITO È CHE SIA PRESERVATA LA LINEARITÀ:

$$a|A,t\rangle + b|B,t\rangle \to a|A,t'\rangle + b|B,t'\rangle$$

GARANTITO SE SCELGO

$$|A,t'\rangle = U(t,t')|A,t\rangle$$

CON $U(t,t')$ OPERATORE LINEARE.

CHIEDO INOLTRE CHE U PRESERVI LA NORMA:

$$\langle A,t|A,t\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle A,t'|A,t'\rangle = 1$$

$$\langle A,t|U^+(t,t') \times U(t,t')|A,t\rangle = 1 = \langle A,t|A,t\rangle$$

$$U^+(t,t')U(t,t') = \mathbb{1}$$

INFINE AGGIUNGO L'IPOTESI DI TIME REVERSAL

$$|A,t'\rangle = U(t,t')|A,t\rangle$$

$$U(-t,-t')|A,t'\rangle = |A,t\rangle$$

$$U(-t,-t')\,U(t,t')|A,t\rangle = |A,t\rangle$$

OVVERO

$$U(-t,-t')U(t,t') = \mathbb{1}$$

QUESTO VUOL DIRE CHE U È INVERTIBILE: SE INFATTI AVESSE UN AUTOVALORE NULLO (OVVERO UN NUCLEO NON NULLO),

$$U(t,t')|A\rangle = 0$$

NOTA: INFATTI $\lambda=0$ IMPLICA $\det(U)=0$, CHE SIGNIFICA $\ker U \neq 0$.

APPLICANDO $U(-t,-t')$ AVREI

$$|A\rangle = 0$$

CHE È UN ASSURDO. INOLTRE

$$U^+U = \mathbb{1}$$

$$U^+UU^{-1} = U^{-1}$$

$$U^+ = U^{-1}$$

$$UU^+ = UU^{-1} = \mathbb{1}$$

OVVERO U È UNITARIO.

NOTA: CERCHERÒ DI SCRIVERE $U = e^{K\Delta t}$ PER QUALCHE K E PER LA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA DI Δt. SO CHE SI PUÒ FARE PER IL TEOREMA DI STONE.

ESPANDIAMO AL PRIMO ORDINE ($K=K(t,q,p)$, ESPANDO IN t)

$$|A,t+\Delta t\rangle = U(t,t+\Delta t)|A,t\rangle \simeq (\mathbb{1}+K\Delta t)|A,t\rangle$$

$$U^+U = \mathbb{1}$$

$$\overset{\shortparallel}{(\mathbb{1}+K^+\Delta t)(\mathbb{1}+K\Delta t) + \sigma(\Delta t^2)} = (\mathbb{1}+K^+\Delta t+K\Delta t) + \sigma(\Delta t^2)$$

$$K^+ + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K^+ = -K$$

NOTA: SE H NON DIPENDE ESPLICITAMENTE DAL TEMPO SI HA $K=K(q,p)$, OVVERO LA DIPENDENZA DI U È SOLO DALL'INTERVALLO Δt E NON DA t INIZIALE. IN ALTRI TERMINI $U(t,t') = U(t-t')$.

POSTO ALLORA

$$K = iL$$

$$K^+ = -iL^+ \equiv -iL \quad \Rightarrow \quad L^+ = L$$

PERCIÒ $U(t,t+\Delta t)$ SI SVILUPPA COME

$$U = \mathbb{1} + iL\Delta t + \sigma(\Delta t^2) \qquad L \text{ HERMITIANO}$$

CALCOLIAMO LA MEDIA DI UN QUALSIASI OPERATORE N:

$$\langle A,t+\Delta t|N|A,t+\Delta t\rangle$$

$$= \langle A,t|U^+NU|A,t\rangle \simeq \langle A,t|(\mathbb{1}-iL\Delta t)N(\mathbb{1}+iL\Delta t)|A,t\rangle$$

$$\simeq \langle A,t|(N-iLN\Delta t+iNL\Delta t)|A,t\rangle = \langle A,t|N|A,t\rangle + i\Delta t\langle A,t|[N,L]|A,t\rangle$$

(SI È TAGLIATO TUTTO AL PRIMO ORDINE). ALLORA

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(\langle A,t+\Delta t | N | A,t+\Delta t\rangle - \langle A,t | N | A,t\rangle \Big) = i \langle A,t | [N,L] | A,t\rangle$$

CHE AL LIMITE PER $\Delta t \to 0$ MI DICE CHE

$$\frac{d}{dt}\langle A,t | N | A,t\rangle = i \langle A,t | [N,L] | A,t\rangle$$

FACCIO ORA L'IPOTESI CHE SIA POSSIBILE, NEL LIMITE DI MOLTE MISURE, RITROVARE I VALORI CLASSICAMENTE ATTESI:

$$\frac{d}{dt}\langle A,t | p | A,t\rangle = \langle A,t | -\frac{\partial V}{\partial q} | A,t\rangle \equiv i\langle A,t | [p,L] | A,t\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle A,t | q | A,t\rangle = \frac{1}{m}\langle A,t | p | A,t\rangle \equiv i\langle A,t | [q,L] | A,t\rangle$$

POICHÉ DEVONO VALERE CHIUNQUE SIA LO STATO $|A,t\rangle$, LA UGUAGLIANZA DEVE VALERE TRA GLI OPERATORI:

$$-\frac{\partial V}{\partial q} = i[p,L]$$

$$\frac{1}{m}p = i[q,L]$$

COME DEVE ESSERE FATTO L?

NOTA: MNEMONICAMENTE, PRIMA ESPANDO IN POTENZE DI p E POI LO COMMUTO CON q (SE COMMUTASSI CON p AVREI DERIVATE DELLE f INVECE DI POLINOMI). LO SVILUPPO È IN $f(q)$ COSÌ DA NON INTEGRARE $\frac{\partial V}{\partial q}$.

$$L = f(q,p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(q)$$

$$\begin{aligned} i[q,L] &= i\Big[q, \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(q)\Big] = i\sum_{k=0}^{\infty}\big[q, p^k f_k(q)\big] \\ &= i\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{ p^k [q, f_k(q)] + [q,p^k] f_k(q)\Big\} \\ &= -\hbar \sum_{k=0}^{\infty} k\, p^{k-1} f_k(q) \\ &= -\hbar\big\{ f_1 + 2p f_2 + 3p^2 f_3 + \dots \big\} \qquad \equiv \frac{1}{m}p \end{aligned}$$

LEGGO

$$f_2 = -\frac{1}{2m\hbar} \qquad f_K = 0 \quad \forall K \neq 0, K \neq 2$$

$$L = f(p,q) = f_0(q) + p^2\left(-\frac{1}{2m\hbar}\right)$$

ALLORA SOSTITUISCO NELLA SECONDA E HO

$$[p, L] = \left[p, f_0(q) - \frac{p^2}{2m\hbar}\right] = -[f_0(q), p] = -i\hbar \frac{\partial f_0}{\partial q}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q} = i\left(-i\hbar \frac{\partial f_0}{\partial q}\right) = \hbar \frac{\partial f_0}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad -V = \hbar f_0 + C$$

DA CUI

$$f_0 = -\frac{V}{\hbar} - \frac{C}{\hbar}$$

$$L = -\frac{V}{\hbar} - \frac{C}{\hbar} - \frac{p^2}{2m\hbar} = -\frac{1}{\hbar}\left(V + \frac{p^2}{2m}\right) - \frac{C}{\hbar} = -\frac{H}{\hbar} - \frac{C}{\hbar}$$

CON C NUMERO REALE, PERCHE' DEVE ESSERE $L = L^+$. SCRIVO

$$U = \left\{ 1 + i\Delta t\left(-\frac{H}{\hbar} - \frac{C}{\hbar}\right)\right\} + \sigma(\Delta t^2)$$

RICORDIAMO CHE H (L'ENERGIA) E' DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE REALE ED E' QUESTO IL SIGNIFICATO DI C. E' PERO' IRRILEVANTE:

$$U = e^{-i\frac{C\Delta t}{\hbar}}\left[1 - \frac{iH\Delta t}{\hbar}\right] + \sigma(\Delta t^2) \simeq \left(1 - \frac{iC\Delta t}{\hbar}\right)\left(1 - i\frac{H\Delta t}{\hbar}\right) + \sigma(\Delta t^2)$$

E PER C REALE HO SEMPLICEMENTE MOLTIPLICATO PER UNA FASE.

SCRIVO ALLORA

$$|A, t+\Delta t\rangle = \left(1 - \frac{iH\Delta t}{\hbar}\right)|A, t\rangle$$

$$\Psi(x, t+\Delta t) = \Psi(x,t) - \frac{i}{\hbar}\Delta t\, H\, \Psi(x,t)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\Psi(x,t+\Delta t) - \Psi(x,t)\right) = -\frac{i}{\hbar} H\, \Psi(x,t)$$

AL LIMITE PER $\Delta t \to 0$ TROVO

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi(x,t)$$

NOTA: IN REALTÀ LA TDSE È IN GENERALE

$$i\hbar \frac{d}{dt}|A,t\rangle = H|A,t\rangle$$

DETTA EQUAZIONE DI SCHRÖEDINGER DIPENDENTE DAL TEMPO.

LA SOLUZIONE È SEMPLICE SE L'HAMILTONIANA NON DIPENDE DA t:

$$\psi(x,t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(t=0)$$

INFATTI

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\frac{H}{\hbar}e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(t=0) = -i\frac{H}{\hbar}\psi(t)$$

NOTA: IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER LA DERIVATA TEMPORALE È PARZIALE, PERCHÈ NON DERIVO $x(t)$. IN RAPPRESENTAZIONE ASTRATTA IL VETTORE $|A,t\rangle$ È FUNZIONE DI t E IL PROBLEMA NON SI PONE (NON È CERTO FUNZIONE DI x).

IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER LA TDSE ASSUME LA FORMA

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

POSSIAMO SCRIVERE (PER H INDIPENDENTE DAL TEMPO)

$$\psi(t,x) = e^{-iH\frac{t}{\hbar}}\psi(0,x)$$

E ESPANDERE

$$\psi(0,x) = \sum_m c_m \psi_{m,E_m}(x)$$

COSÌ CHE

$$\psi(t,x) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\sum_m c_m\psi_{m,E_m}(x) = \sum_m c_m e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi_{m,E_m}(x) = \sum_m e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}\psi_{m,E_m}(x)$$

- <u>EQUAZIONE DI CONTINUITÀ</u>

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \\ -i\hbar \dfrac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V\psi^* \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA PRIMA PER ψ^* E LA SECONDA PER ψ.

$$i\hbar\,\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V|\psi|^2$$

$$-i\hbar\,\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V|\psi|^2$$

SOTTRAENDOLE HO

$$i\hbar\,\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\hbar\,\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{i\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = 0$$

RICORDIAMO ORA CHE

$|A\rangle = \sum a_m |\xi_m\rangle$ $\qquad |a_m|^2$ SONO LE PROB. DI MISURARE ξ_m

$|A\rangle = \int dx\, \psi(x)\,|x\rangle$ $\qquad |\psi|^2$ È LA DENSITÀ DI PROB. DI MISURARE x

DEFINISCO LE DENSITÀ DI PROBABILITÀ E DI CORRENTE DI PROBABILITÀ

$$|\psi|^2 = \rho(x,t)$$

$$J(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$$

E OTTENGO L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

IN PIÙ DIMENSIONI $\frac{\partial}{\partial x}$ È UNA DIVERGENZA ED HO

$$\underline{J}(\underline{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \underline{\nabla}\psi - \psi \underline{\nabla}\psi^*\right)$$

$$\frac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot \underline{J}(\underline{x},t) = 0$$

STATI STAZIONARI

CERCHIAMO GLI STATI STAZIONARI (NON DIPENDONO DAL TEMPO).

SI NOTI CHE

$$\psi(x,t) = e^{i\alpha t}\psi(x)$$

È STAZIONARIO, PERCHÉ LA DIPENDENZA DA t INTERESSA SOLO LA FASE.

PRENDIAMO AD ESEMPIO LE AUTOFUNZIONI ψ DI ENERGIA E:

$$\psi(x,t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(x) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x)$$

SE ψ È AUTOFUNZIONE DI H, ρ È INDIPENDENTE DAL TEMPO:

$$\rho = |\psi|^2$$

INFATTI LA FASE NON CONTA PIÙ. PER GLI STATI STAZIONARI,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{cost.}$$

NOTA: IN REALTÀ QUESTO È VERO NON SOLO PER GLI AUTOSTATI DI H, MA IN TUTTI I CASI IN CUI L'EVOLUZIONE TEMPORALE È GOVERNATA DA U(t) UNITARIO.

SE INOLTRE $\psi \in L_2$ (AUTOSTATO DISCRETO), DEVE ESSERE $J = 0$ (PER QUANTO DISCUSSO, VEDI TEOREMA DI NON DEGENERAZIONE):

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) = 0$$

CIÒ NON È PIÙ VERO PER LO SPETTRO CONTINUO.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE GLI STATI STAZIONARI SONO TUTTI E SOLI GLI AUTOSTATI DI H.

NOTA: $[H,U]=0$, QUINDI H STESSA È UNA COSTANTE DEL MOTO.

SE ξ È UN'OSSERVABILE t.c. $\bar{\xi}$ NON DIPENDE DA t, ALLORA $\forall |A\rangle, \forall t$

$$\langle A,t|\xi|A,t\rangle = \langle A,0|U^+\xi U|A,0\rangle \equiv \langle A,0|\xi|A,0\rangle$$

$$U^+\xi U = \xi \quad \Rightarrow \quad [H,\xi]=0 \qquad \text{(BASTA DERIVARE)}$$

VICEVERSA SE $[H,\xi]=0$ ALLORA $[\xi,U]=0$. ξ È ALLORA UNA COSTANTE DEL MOTO:

$$\frac{d}{dt}f(q,p) = [f,H]_{PB} \qquad \text{ED È} \qquad [f,H] = i\hbar[f,H]_{PB}.$$

· ESERCIZIO

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

CALCOLARE $\langle A,t|q|A,t\rangle$, $\langle A,t|p|A,t\rangle$ PER L'OSCILLATORE.

$$|A,t\rangle' = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}|0\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle$$

DEFINISCO

$$|A,t\rangle = e^{i\gamma}|A,t\rangle'$$

CAMBIANO I VALORI MEDI?

$$\langle A,t|q|A,t\rangle = {}'\langle A,t|e^{-i\gamma}q\,e^{i\gamma}|A,t\rangle' = {}'\langle A,t|q|A,t\rangle'$$

QUINDI POSSO TRANQUILLAMENTE USARE

$$|A,t\rangle = e^{i\frac{E_0 t}{\hbar}}|A,t\rangle'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}e^{i(E_0-E_1)\frac{t}{\hbar}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi-i\omega t}|1\rangle$$

INFATTI

$$E_0 - E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{3}{2}\hbar\omega = -\hbar\omega$$

CALCOLIAMO

$$\langle A,t|q|A,t\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi+i\omega t}\langle 1|\right)q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi-i\omega t}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\langle 0|q|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 1|q|1\rangle + \frac{1}{2}e^{i(\phi-\omega t)}\langle 0|q|1\rangle + \frac{1}{2}e^{i(-\phi+\omega t)}\langle 1|q|0\rangle$$

SI NOTI CHE, POICHÈ q È HERMITIANO,

$$\langle 0|q|1\rangle^* = \langle 1|q|0\rangle$$

SFRUTTIAMO IL FATTO CHE SUGLI STATI A ENERGIA FISSATA

$$\langle 0|q|0\rangle = \langle 1|q|1\rangle = 0 \quad (\text{INFATTI } \forall\hat{O}\ \langle A|[H,\hat{O}]|A\rangle = 0 \text{ E } [H,p] = i\hbar m\omega^2 q)$$

DEFINIAMO ORA η, TENENDO CONTO CHE LA DIFFERENZA DI FASE QUESTA VOLTA INFLUENZA $\bar{q}$ PERCHÈ η È MISTO.

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q)$$

$$\eta^+ - \eta = i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,q \quad \Rightarrow \quad q = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\eta^+ - \eta)$$

FA SALIRE $|1\rangle \to |2\rangle$ E $\langle 0|2\rangle = 0$

ALLORA

$$\langle 0|q|1\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|\eta^+ - \eta|1\rangle = +i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|\eta|1\rangle$$

INOLTRE

$$\eta^+|0\rangle = |1\rangle \qquad \langle 1| = \langle 0|\eta \qquad \Rightarrow \qquad \langle 0|\eta|1\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$$

INFINE

$$\langle A,t|q|A,t\rangle = \frac{1}{2}e^{i\phi - i\omega t}\, i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} + \frac{1}{2}e^{-i\phi+i\omega t}\left(-i\sqrt{\frac{\hbar}{2m}}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{i\phi-i\omega t} - e^{-i\phi+i\omega t}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\phi-\omega t)$$

(CHECK: DEVE ESSERE REALE! INFATTI LO DEVONO ESSERE TUTTI GLI ELEMENTI DI MATRICE DIAGONALE).

PER CALCOLARE p IN MANIERA ALTERNATIVA, RICORDO CHE

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q \qquad \left(H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)$$

LO STESSO DEVE VALERE PER I VALORI MEDI:

$$\frac{d}{dt}\langle A,t|p|A,t\rangle = \langle A,t|(-m\omega^2 q)|A,t\rangle$$

$$= -m\omega^2\left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(\phi-\omega t)\right) = +\omega\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin(\phi-\omega t)$$

INTEGRANDO,

$$\langle A,t|p|A,t\rangle = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cos(\phi-\omega t) + K$$

PER CONOSCERE K DOVREI CALCOLARMI $\bar{p}$ AL TEMPO $t=0$.

SCHEMA DI HEISENBERG

SI È VISTO

$$|A,t\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|A,0\rangle$$

$U|A,0\rangle$ CON $U = e^{iL}$ HERMITIANO, UNITARIO

NOTA: U È IL CAMBIO DI BASE DA QUELLA DI $\tilde{\xi}(t)$ A QUELLA DI ξ, CIOÈ DA $|A,0\rangle$ A $|A,t\rangle$. TORNA TUTTO SE SI CONSIDERA CHE $\tilde{\xi}(t)$ AGISCE IN EFFETTI SUGLI $|A,0\rangle$.

INVECE DI FAR EVOLVERE LO STATO, EVOLVO GLI OPERATORI (E GLI STATI SONO INVARIANTI, TRASFORMAZIONE PASSIVA):

$$\tilde{\xi}(t) = U^+ \xi U$$

$$\langle A,t|\xi|A,t\rangle = \langle A,0|U^+\xi U|A,0\rangle = \langle A,0|\tilde{\xi}(t)|A,0\rangle$$

PRESA LA TRASFORMAZIONE CANONICA

$$\begin{cases} \tilde{q}(t) = U^+ q U \\ \tilde{p}(t) = U^+ p U \end{cases} \Rightarrow [\tilde{q},\tilde{p}] = i\hbar$$

$$U^+\xi(p,q)U = \xi(\tilde{p},\tilde{q})$$

ALLORA

$$\tilde{\xi} = U^+\xi(p,q)U = \xi(\tilde{p},\tilde{q})$$

OVVERO IL PROBLEMA SI RIDUCE A EVOLVERE p E q.

$$\tilde{q} = e^{i\frac{H}{\hbar}t} q\, e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$$

POICHÈ LA DIPENDENZA A ESPONENZIALE È LINEARE, CALCOLO TRANQUILLAMENTE

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{iH}{\hbar} e^{i\frac{H}{\hbar}t} q\, e^{-i\frac{H}{\hbar}t} + e^{i\frac{H}{\hbar}t} q\, e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\left(-i\frac{H}{\hbar}\right)$$

($[H,U]=0$, QUINDI POSSO METTERE $-i\frac{H}{\hbar}$ A DESTRA).

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = i\frac{H}{\hbar}\tilde{q} + \tilde{q}\left(-\frac{iH}{\hbar}\right) = \frac{i}{\hbar}(H\tilde{q} - \tilde{q}H) = \frac{i}{\hbar}[H,\tilde{q}]$$

SI NOTI L'ANALOGIA CON IL CASO CLASSICO SE AL POSTO DEL COMMUTATORE HO LE PARENTESI DI POISSON. (SI NOTI CHE, A MENO DI PROBLEMI DI COMMUTAZIONE NEL RISULTATO, $[f,g] = i\hbar\,[f,g]_{PB}$).

SI SONO OTTENUTE (VEDI EQUAZIONI DI HAMILTON)

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\tilde{q}] \quad \left(= \frac{1}{i\hbar}[\tilde{q},H]\right) \qquad \frac{d\tilde{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\tilde{p}] \quad \left(= \frac{1}{i\hbar}[\tilde{p},H]\right)$$

NOTA: OCCHIO CHE SOLO $\tilde{q}$ E $\tilde{p}$ EVOLVONO COSÌ, NON TUTTE LE LORO FUNZIONI COME AVVENIVA IN MECCANICA CLASSICA.

· ESEMPIO: OSCILLATORE

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

NOTIAMO CHE, POICHÈ $[H,U]=0$,

$$\tilde{H} = U^+HU = U^+UH = H$$

$$\tilde{H}(p,q) = H(p,q)$$
$$\shortparallel$$
$$H(\tilde{p},\tilde{q})$$

POSSO PER QUESTO CALCOLARE

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H(\tilde{p},\tilde{q}),\tilde{q}] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\tilde{p}^2}{2m},\tilde{q}\right] = -\frac{i}{2m\hbar}[\tilde{q},\tilde{p}^2] = -\frac{i}{2m\hbar}2\tilde{p}(i\hbar)$$
$$= \frac{\tilde{p}}{m}$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m\omega^2}{2}\tilde{q}^2,\tilde{p}\right] = \frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}2\tilde{q}\,i\hbar = -m\omega^2\tilde{q}$$

RITROVANDO ESATTAMENTE LE RELAZIONI CLASSICHE.

DA QUESTE RICAVIAMO

$$\frac{d^2\tilde{q}}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{d\tilde{p}}{dt} = -\omega^2\tilde{q} \qquad \text{CON LE C.I.} \quad \begin{aligned}\tilde{q}(0) &= q\\ \tilde{p}(0) &= p\end{aligned}$$

SCRIVO LA SOLUZIONE NELLA FORMA LINEARE

$$\tilde{q} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

(A, B SONO OPERATORI E TALE SAREBBE ϕ COME ARGOMENTO DI UN UNICO $\alpha\cos(\omega t+\phi)$). IMPONGO LE C.I. ($\tilde{q}(0)=q$, $\dot{\tilde{q}}(0)=\frac{p}{m}$) E OTTENGO

$$\tilde{q}(0) = A = q$$

$$\tilde{p} = m\frac{d\tilde{q}}{dt} = m[-q\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t] \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}(0) = mB\omega = p$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{q} = q\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t$$

- ESEMPIO

SU UNA PARTICELLA AGISCE UNA FORZA COSTANTE F.

$U(q) = -qF \qquad H = \frac{p^2}{2m} - qF$

CHE NON HA STATI LEGATI (SOLO SPETTRO CONTINUO).

SIA $|S\rangle$ UNO STATO NORMALIZZATO, AD ESEMPIO $\psi(x)$ GAUSSIANA. NOTI

$\langle S|p|S\rangle = p_0$

$\langle S|q|S\rangle = 0$

$\Delta p_0^2 = \langle S|(p-p_0)^2|S\rangle$

$\Delta q_0^2 = \langle S|(q-0)^2|S\rangle$

QUANTO VALGONO

$\langle S,t|p|S,t\rangle \qquad \langle S,t|q|S,t\rangle$

$\Delta p^2(t) \qquad \Delta q^2(t)$?

IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER DOVREI CALCOLARE

$|S,t\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|S\rangle$

OVVERO TROVARE LE AUTOFUNZIONI, DECOMPORRE $|S\rangle$ NELLA BASE ...

INVECE NELLO SCHEMA DI HEISENBERG

$\langle S,t|p|S,t\rangle = \langle S|\tilde{p}(t)|S\rangle$

$\langle S,t|q|S,t\rangle = \langle S|\tilde{q}(t)|S\rangle$

GLI OPERATORI $\tilde{p}$ E $\tilde{q}$ SONO QUELLI CHE SODDISFANO LE RELAZIONI CLASSICHE (NOTA: È ANCORA PIÙ ELEGANTE SE USO LE EQUAZIONI DI HAMILTON)

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}}{dt} = F \\ \frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{\tilde{p}}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2\tilde{q}}{dt^2} = \frac{F}{m} \Rightarrow \tilde{q} = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + At + B$$

$$\tilde{p} = m\frac{d}{dt}(\tilde{q}) = Ft + Am$$

DATE LE C.I. $\tilde{p}(0) = p$, $\tilde{q}(0) = q$,

$$\tilde{p}(0) = Am \equiv p \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{p}{m}$$

$\tilde{q}(0) = B \equiv q$

DA QUI

$$\begin{cases} \tilde{p} = Ft + p \\ \tilde{q} = \frac{Ft^2}{2m} + \frac{p}{m}t + q \end{cases}$$

E INFINE CALCOLO

$$\langle S| \tilde{p}(t) |S\rangle = \langle S| Ft + p |S\rangle = Ft\langle S|S\rangle + \langle S|p|S\rangle = Ft + p_0$$

$$\langle S| \tilde{q}(t) |S\rangle = \langle S| \frac{Ft^2}{2m} + \frac{pt}{m} + q |S\rangle = \frac{Ft^2}{2m}\langle S|S\rangle + \frac{t}{m}\langle S|p|S\rangle + \langle S|q|S\rangle$$

$$= \frac{Ft^2}{2m} + \frac{p_0}{m}t$$

COME CI ASPETTAVAMO: L'EVOLUZIONE TEMPORALE DEI VALORI MEDI È, COME ABBIAMO IMPOSTO, ANALOGA A QUELLA CLASSICA.

NON COSÌ PER LA LORO DISPERSIONE:

$$\langle S,t| p^2 |S,t\rangle - \langle S,t|p|S,t\rangle^2$$

$$= \langle S|\tilde{p}^2|S\rangle - (Ft + p_0)^2 = \langle S|(Ft+p)^2|S\rangle - (Ft + p_0)^2$$

$$= F^2t^2\langle S|S\rangle + 2Ft\langle S|p|S\rangle + \langle S|p^2|S\rangle - F^2t^2 - 2Ftp_0 - p_0^2$$

$$= \langle S|p^2|S\rangle - p_0^2 \qquad = \Delta p_0^2$$

LA DISPERSIONE DI p È INDIPENDENTE DAL TEMPO. INVECE

$$\langle S|\tilde{q}^2|S\rangle - \langle S|\tilde{q}|S\rangle^2$$

$$= \langle S|\left(\frac{Ft^2}{2m} + \frac{pt}{m} + q\right)^2|S\rangle - \left(\frac{Ft^2}{2m} + \frac{p_0t}{m}\right)^2$$

$$= \left(\frac{Ft^2}{2m}\right)^2\langle S|S\rangle + \frac{t^2}{m^2}\langle S|p^2|S\rangle + \langle S|q^2|S\rangle + 2\frac{Ft^3}{2m^2}\langle S|p|S\rangle$$

$$+ 2\frac{Ft^2}{2m}\langle S|q|S\rangle + \frac{t}{m}\langle S|qp + pq|S\rangle - \left(\frac{Ft^2}{2m}\right)^2 - \frac{p_0^2t^2}{m^2} - \frac{Ft^3}{m^2}p_0$$

$$= \frac{t^2}{m^2}\langle S|p^2|S\rangle + \langle S|q^2|S\rangle + \frac{t}{m}\langle S|qp + pq|S\rangle - \frac{p_0^2t^2}{m^2}$$

DOVE SI È USATO, PER GLI OPERATORI A, B $([A,B] \neq 0)$,

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$$

E ANCORA

$$\Delta q^2(t) = \frac{t^2}{m^2}\left(\langle S|p^2|S\rangle - p_0^2\right) + \frac{t}{m}\langle S|qp+pq|S\rangle + \langle S|q^2|S\rangle$$

$$= \frac{t^2}{m^2}\Delta p_0^2 + \frac{t}{m}\langle S|\underset{\uparrow}{qp+pq}|S\rangle + \Delta q_0^2$$

È HERMITIANO, QUINDI QUESTO VALOR MEDIO È UN NUMERO REALE

SI NOTI CHE PER GRANDI t

$$\Delta q(t) \sim \frac{t}{m}\Delta p_0$$

OSSIA È INDIPENDENTE DALLA DISPERSIONE INIZIALE Δq_0.

QUESTO È SPIEGABILE ANCHE IN MECCANICA CLASSICA:

$$q(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$\Delta q^2 = \underbrace{\Delta v_0^2 t^2}_{\text{TERMINE DOMINANTE}} + \Delta x_0^2 \qquad \left(= \left(\frac{\partial q}{\partial v_0}\delta v_0\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_0}\delta x_0\right)^2 \right)$$

· FOCUS: TEOREMA DI EHRENFEST (TESTA - PATRÌ)

ABBIAMO DERIVATO LA FORMA DELL'EVOLUTORE TEMPORALE COSÌ CHE VALESSE

$$\frac{d}{dt}\langle A,t|\,\xi\,|A,t\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle A,t|\,[\xi,H]\,|A,t\rangle$$

POICHÉ È VERO CHIUNQUE SIA $|A,t\rangle$, SI PUÒ LEGGERE ANCHE COME RELAZIONE TRA OPERATORI.

VALIDA PER OGNI OSSERVABILE ξ. SI NOTI L'ANALOGIA CON

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{PB}$$

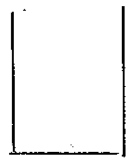
IN MECCANICA CLASSICA, EVIDENTE SE RICORDIAMO CHE SI HA (QUASI SEMPRE)

$$[f, H] = i\hbar\{f, H\}_{PB}$$

APPARE INOLTRE EVIDENTE CHE SE $[\xi, H] = 0$, ALLORA ξ È UNA COSTANTE DEL MOTO (NEL SENSO CHE È CONSERVATO IL SUO VALOR MEDIO, i.e. LA SUA AZIONE SU OGNI AUTOSTATO DI H, VISTO CHE $[\xi, H] = 0$ COMPORTA CHE ξ COMMUTI ANCHE CON L'EVOLUTORE TEMPORALE).

QUESTO "TEOREMA" È STATO PER NOI IL POSTULATO DI PARTENZA.

· ESERCIZIO



L

BUCA. $E_m = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ $\quad k = \frac{\pi m}{L}$ $\quad m \geq 1$ $\quad |m\rangle$ AUTOSTATI.

E' DATO LO STATO INIZIALE

$$|A\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle \qquad \alpha,\beta,\gamma \neq 0$$

IL SISTEMA PRESENTA UNA PERIODICITA'?

IN MQ IL MOTO E' PERIODICO SE RIOTTENGO, A MENO DI UNA FASE, LO STESSO STATO:

$$|A,t\rangle = e^{i\varphi(t)}|A, t=0\rangle$$

CERCHIAMO COME SI EVOLVE

$$|A,t\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|A\rangle = \alpha e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|1\rangle + \beta e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|2\rangle + \gamma e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|3\rangle$$

$$= \alpha e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle + \beta e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|2\rangle + \gamma e^{-i\frac{E_3}{\hbar}t}|3\rangle$$

SIANO

$$\omega := \frac{E_1}{\hbar} \qquad E_m = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}m^2$$

$$E_1 = \hbar\omega \qquad E_2 = 4E_1 = 4\hbar\omega \qquad E_3 = 9E_1 = 9\hbar\omega$$

ALLORA

$$|A,t\rangle = \alpha e^{-i\omega t}|1\rangle + \beta e^{-i4\omega t}|2\rangle + \gamma e^{-i9\omega t}|3\rangle$$

$$= e^{-i\omega t}\left(\alpha|1\rangle + \beta e^{-3i\omega t}|2\rangle + \gamma e^{-8i\omega t}|3\rangle\right)$$

$$\equiv e^{i\varphi}\left(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle\right)$$

EGUAGLIANDO TERMINE A TERMINE,

$$|1\rangle \qquad \alpha e^{-i\omega t} = \alpha e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad i\varphi = -i\omega t$$

$$\begin{cases} e^{-3i\omega t} = 1 \\ e^{-8i\omega t} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3\omega t = 2\pi m_1 \\ 8\omega t = 2\pi m_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} t = \frac{2\pi}{3\omega}m_1 \\ t = \frac{2\pi}{8\omega}m_2 \end{matrix}$$

OVVERO (m.c.m.)

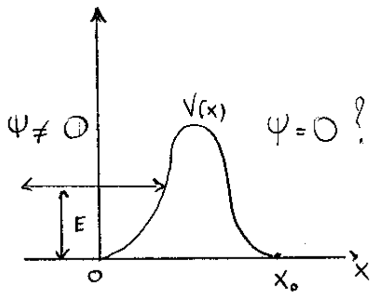
$$\frac{2\pi}{3\omega} \quad \frac{4\pi}{3\omega} \quad \frac{6\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{\pi}{4\omega} \quad \frac{\pi}{2\omega} \quad \frac{3\pi}{4\omega} \quad \frac{\pi}{\omega} \quad \ldots \quad \frac{2\pi}{\omega} \quad \ldots$$

LA PERIODICITA' E' $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

IL RISULTATO VALE CHIUNQUE SIA IL GENERICO STATO $|A\rangle$ A MENO CHE $|A\rangle$ NON SIA UN AUTOSTATO.

FORMALMENTE UN AUTOSTATO HA $T=0$ ESSENDO INVARIANTE PER EVOLUZIONE TEMPORALE.



· EFFETTO TUNNEL

IN MECCANICA CLASSICA UNO STATO DI ENERGIA "E" NON SUPERA LA BARRIERA DI POTENZIALE $V_0 > E$.

IN MQ SI È GIÀ VISTO CHE HO UNA PROBABILITÀ NON NULLA DI TROVARE UNA PARTICELLA NELLA ZONA CLASSICAMENTE INACCESSIBILE.

SIA $U(x) = 0$ PER $x<0 \vee x > x_0$.

$\hbar k = p \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad x<0$$

$$\psi(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \qquad x>x_0$$

$$\psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

SI È VISTO CHE

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \frac{dJ}{dx} = 0$$

SE $|\psi|^2$ NON DIPENDE DAL TEMPO (STATO STAZIONARIO),

$J = $ COST. IN x

MA ERA

$$J(x) = \text{FATTORE} \cdot \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \equiv \text{COST.}$$

(NON NECESSARIAMENTE NULLA, PERCHÈ NON SONO STATI DISCRETI).

PER $X<0$,

$$(A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx})(ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}) = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(L'ALTRO PEZZO È IL SUO C.C.).

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} = ik|A|^2 - ikA^*B e^{-2ikx} + B^* ikAe^{2ikx} - ik|B|^2$$

$$\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -ik|A|^2 + ikAB^* e^{2ikx} - ikBA^* e^{-2ikx} + ik|B|^2$$

SOTTRAENDOLI,

$$2ik|A|^2 - 2ik|B|^2 = 2ik(|A|^2 - |B|^2) = \text{COST.}$$

PER $X > X_0$ HO SIMILMENTE

$$2ik(|C|^2 - |D|^2) = \text{COST.}$$

LA STESSA COSTANTE DI PRIMA. PERCIÒ

$$|A|^2 - |B|^2 = |C|^2 - |D|^2$$

PRENDIAMO ORA e^{ikx}, AUTOFUNZIONE DI H $\left(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$ MA ANCHE DI p ($p = \hbar k$ A DESTRA). LO STESSO VALE PER e^{-ikx} ($p = -\hbar k$).
ALLORA PRESO $C = D = 0$ ($\psi(x) = 0$ PER $X > X_0$) CONSIDERO PER $X < 0$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

DIRE $|A|^2 = |B|^2$ VUOL DIRE CHE È EQUIPROBABILE MISURARE p_{DX} E p_{SX}.
IMPOSTO INVECE $D = 0$ (DOPO LA BARRIERA NESSUNO VA A SX),

$$\underset{\text{INCIDENTE}}{|A|^2} = \underset{\text{RIFLESSA}}{|B|^2} + \underset{\text{TRASMESSA}}{|C|^2}$$

DEFINISCO QUINDI I COEFFICIENTI DI TRASMISSIONE E RIFLESSIONE

$$\begin{cases} T = \dfrac{|C|^2}{|A|^2} \\[2ex] R = \dfrac{|B|^2}{|A|^2} \end{cases}$$

BARRIERA INFINITA DI POTENZIALE

$$V(x) = V_0 a \delta(x)$$

(NOTA CHE $[\delta(y)] = [y]^{-1}$).

LA GENERICA SOLUZIONE SI SCRIVE

NOTA: $\psi(x)$ NON È PARI PERCHÈ QUESTO NON È LO SPETTRO DISCRETO.

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x<0 \\ Ce^{ikx} & x>0 \end{cases}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \hbar k$$

NOTIAMO CHE ψ DEVE ESSERE CONTINUA IN $x=0$ PERCHÈ ABBIA SENSO

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0 a \delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

INVECE ψ' NON È CONTINUA (LA È SOLO IN PRESENZA DI GRADINI FINITI). INTEGRANDO HO:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi'' dx + V_0 a\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\,\psi(x)\delta(x) = \underbrace{E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx}_{\varepsilon\to 0 \;\searrow\; 0}$$

AL LIMITE PER $\varepsilon \to 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right) + V_0 a \psi(0) = 0$$

IMPONGO LA CONTINUITÀ IN $x=0$,

$$A + B = C$$

E LA DISCONTINUITÀ DI $\psi'(0)$,

$$\psi'(\varepsilon) = ikCe^{ik\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ikC$$

$$\psi'(-\varepsilon) = ikAe^{ik\varepsilon} - ikBe^{-ik\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ik(A-B)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ikC - ik(A-B)\right) + V_0 a C = 0$$

OTTENGO

$$\begin{cases} A+B = C \\ ik(C-A+B) - \dfrac{2mV_0 a}{\hbar^2}C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C - A + B + iC\underbrace{\frac{2mV_0 a}{\hbar^2 k}}_{\text{ADIMENSIONALE}} = 0 \quad := \sigma$$

(NOTA CHE A, B, C NON SONO ADIMENSIONALI: $\int |\psi|^2 dx = 1$)

IL COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE VALE $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$. ELIMINANDO B,

$$\begin{cases} B = C - A \\ C(1+i\sigma) - A + C - A = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = \frac{2}{2+i\sigma} A$$

$$|C|^2 = \frac{2}{2+i\sigma} \cdot \frac{2}{2-i\sigma} |A|^2 = \frac{4}{4+\sigma^2} |A|^2$$

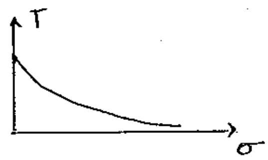
$$T = \frac{4}{4+\sigma^2}$$

NOTIAMO CHE T NON DIPENDE DA A. È VERO CHE $0 < T < 1$?

$$\sigma = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2 k} \qquad k \sim \sqrt{E} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \sigma < \infty$$

$0 < T < 1$

$\uparrow$ V_0 PICCOLI E GRANDI $\leftrightarrow$ σ PICCOLO



FOCUS: TRASFORMAZIONI CANONICHE

(SHANKAR CAP. 11)

IN MECCANICA CLASSICA OGNI $g(x,p)$ GENERA LA TRASF. CAN. INFINITESIMA

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \delta x = x + \varepsilon\{x, g\} = x + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial p} \\ \tilde{p} = p + \delta p = p + \varepsilon\{p, g\} = p - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial q} \end{cases}$$

(OCCHIO CHE L'ULTIMO PASSAGGIO CON I COMMUTATORI PUÒ DARE PROBLEMI). OSSIA

$$\tilde{\omega} = \omega + \delta\omega = \omega + \varepsilon\{\omega, g\}$$

IN MECCANICA QUANTISTICA, $G(q,p)$ GENERA LA TRASFORMAZIONE (G HERMITIANO)

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \delta\Omega = \Omega + \frac{1}{i\hbar}\varepsilon[\Omega, G]$$

SE U È L'OPERATORE UNITARIO CHE IMPLEMENTA LA TRASFORMAZIONE, $\tilde{\Omega} = U^+ \Omega U$.

AL PRIMO ORDINE POSSO SCRIVERE $U \simeq 1 + \varepsilon K$, O COME SI È VISTO

$$U \simeq 1 + \frac{1}{i\hbar}\varepsilon G \qquad \delta\Omega = U^+\Omega U - \Omega \simeq \left(1 - \frac{1}{i\hbar}\varepsilon G\right)\Omega\left(1 + \frac{1}{i\hbar}\varepsilon G\right) - \Omega \simeq \frac{1}{i\hbar}\varepsilon[\Omega, G]$$

DA QUESTA OTTENGO LA TRASFORMAZIONE FINITA DI $E = m\varepsilon$ COME

$$U(E) = U(N\varepsilon) = (U(\varepsilon))^N \simeq \left(1 + \frac{1}{i\hbar}\frac{E}{N}G\right)^N \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{N \to \infty} e^{-\frac{iE}{\hbar}G}$$

FOCUS: IL LIMITE CLASSICO

(SHANKAR CAP. 6)

SIA A UN'OSSERVABILE. IL SUO VALOR MEDIO EVOLVE COME

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \langle\dot{\Psi}|A|\Psi\rangle + \langle\Psi|A|\dot{\Psi}\rangle + \langle\Psi|\dot{A}|\Psi\rangle$$

DOVE L'ULTIMO TERMINE È NULLO SE A NON HA DIPENDENZA ESPLICITA DA t.

DALLA TDSE RICAVO $|\dot{\Psi}\rangle$ E $\langle\dot{\Psi}|$ DA SOSTITUIRE QUI SOPRA:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\dot{\Psi}| = \frac{i}{\hbar}\langle\Psi|H$$

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|[A,H]|\Psi\rangle$$

E SI È RITROVATO L'ENUNCIATO DEL TEOREMA DI EHRENFEST (CHE NOI ABBIAMO PRESO COME PUNTO DI PARTENZA PER RICAVARE LA TDSE).

IN MECCANICA CLASSICA ERA

$$\frac{da}{dt} = \{a, H\}$$

SCELTI GLI OPERATORI P E Q, RITROVIAMO ANCHE

$$\langle\dot{Q}\rangle = \left\langle\frac{\partial H}{\partial P}\right\rangle \qquad\qquad \langle\dot{P}\rangle = \left\langle-\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle$$

ANALOGHE ALLE EQUAZIONI DI HAMILTON MA QUI INTESE COME VALORI MEDI SU UNO STATO.

NEI CASI IN CUI È POSSIBILE APPROSSIMARE LA MEDIA DI TALI FUNZIONI CON LA FUNZIONE CALCOLATA NEL VALOR MEDIO,

$$\dot{q}_0 \equiv \langle\dot{Q}\rangle = \left\langle\frac{\partial H(Q,P)}{\partial P}\right\rangle \simeq \left.\frac{\partial H}{\partial P}\right|_{(Q=q_0,\,P=p_0)} = \frac{\partial H(q_0,p_0)}{\partial p_0}$$

$$\dot{p}_0 \equiv \langle\dot{P}\rangle = \left\langle-\frac{\partial H(Q,P)}{\partial Q}\right\rangle \simeq -\left.\frac{\partial H}{\partial Q}\right|_{(Q=q_0,\,P=p_0)} = -\frac{\partial H(q_0,p_0)}{\partial q_0}$$

ALLORA $\dot{q}_0$ E $\dot{p}_0$ EVOLVONO COME I LORO CORRISPETTIVI CLASSICI.

NON COSÌ IN GENERALE, PERCHÉ NON È DETTO CHE LE FLUTTUAZIONI ATTORNO AL VALOR MEDIO SIANO TRASCURABILI.

AD ESEMPIO

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial Q} \right\rangle = \left\langle \frac{dV}{dQ} \right\rangle = \langle V'(Q) \rangle \simeq V'(Q = q_0)$$

$$V'(q) = V'(q_0) + (q - q_0)V''(q_0) + \frac{1}{2}(q - q_0)^2 V'''(q_0) + \dots$$

$$\langle V'(q) \rangle = V'(q_0) + (0) + \frac{1}{2} V'''(q_0) \langle (q - q_0)^2 \rangle + \dots$$

PERCIÒ LA SOSTITUZIONE È ESATTA SE $V(q)$ CONTIENE AL PIÙ TERMINI QUADRATICI (NEL QUAL CASO $V'''(q), V^{IV}(q) \dots \equiv 0$); IN GENERALE, TUTTAVIA, UNA PARTICELLA QUANTISTICA RISENTE ANCHE DELLA FORZA NEL SUO INTORNO.

SI NOTI INFINE CHE, ANCHE NEI CASI IN CUI q_0 E p_0 OBBEDISCONO (ANCHE APPROSSIMATIVAMENTE) LE RELAZIONI CLASSICHE, QUESTO NON SIGNIFICA CHE SIA COSÌ PER OGNI LORO VARIABILE DIPENDENTE. UN ESEMPIO LAMPANTE È L'OSSERVABILE Q^2, PER CUI

$$\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 = \Delta Q^2 \neq 0$$

COMMUTATORI IN PIÙ DIMENSIONI

ESTENDIAMO IN 3D ALCUNE PROPRIETÀ VISTE IN 1D. INNANZITUTTO

$$[q, p] = i\hbar$$

SI TRADUCE IN

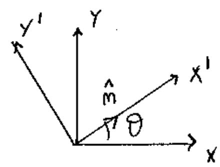
$$[q_x, q_y] = [q_x, q_z] = [q_y, q_z] = 0$$
$$[p_x, p_y] = [p_x, p_z] = [p_y, p_z] = 0 \quad \overset{*}{\Rightarrow} \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad \forall i \neq j$$

RESTANO DA DEFINIRE I 9 COMMUTATORI

$$[q_x, p_x], \; [q_y, p_y], \; [q_z, p_z] \qquad = i\hbar$$
$$[q_x, p_y], \; [q_y, p_x], \; \dots \qquad \equiv a$$

I PRIMI 3 VALGONO COME SEMPRE $i\hbar$. GLI ALTRI 6 HANNO LO STESSO VALORE (NON POSSONO CAMBIARE CAMBIANDO I NOMI AGLI ASSI).

NEL DISEGNO A FIANCO SIA $\hat{m}$ IL VERSORE DI x',



$$\hat{m} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

DEVE ESSERE LUNGO QUALSIASI DIREZIONE $\hat{m}$

$$[\underline{q} \cdot \hat{m}, \underline{p} \cdot \hat{m}] = i\hbar$$
$$[q_x \cos\theta + q_y \sin\theta, \; p_x \cos\theta + p_y \sin\theta] = i\hbar$$
$$\cos^2\theta [q_x, p_x] + \sin^2\theta [q_y, p_y] + \sin\theta\cos\theta [q_y, p_x] + \sin\theta\cos\theta [q_x, p_y] = i\hbar$$
$$\cos^2\theta \, i\hbar + \sin^2\theta \, i\hbar + 2\sin\theta\cos\theta \cdot a = i\hbar$$
$$i\hbar + 2a\sin\theta\cos\theta = i\hbar$$
$$a \sin 2\theta = 0 \quad \forall\theta \qquad \Rightarrow \qquad a = 0$$

SCRIVIAMO QUINDI

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

*NOTA: VOGLIAMO CHE LE COORDINATE COMMUTINO. AD ESEMPIO, IN R.S.,

$$q_x f(x,y,z) = x f$$
$$q_y q_x f(x,y,z) = y x f = x y f = q_x q_y f$$

MOMENTO ANGOLARE

IN MECCANICA CLASSICA, IN TUTTI I PROBLEMI CON SIMMETRIA SFERICA

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

IL MOMENTO ANGOLARE È UNA GRANDEZZA CONSERVATA.

DEFINIAMO ANCHE IN MQ

$$\underline{L} = \underline{r} \wedge \underline{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_x = y p_z - z p_y \\ L_y = -x p_z + z p_x \\ L_z = x p_y - y p_x \end{cases}$$

CALCOLIAMO

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [y p_z - z p_y,\ z p_x - x p_z] \\ &= [y p_z, z p_x] - [z p_y, z p_x] - [y p_z, x p_z] + [z p_y, x p_z] \\ &= y[p_z, z p_x] + [y, z p_x] p_z + z[p_y, x p_z] + [z, x p_z] p_y \\ &= yz[p_z, p_x] + y[p_z, z] p_x + x[z, p_z] p_y + [z, x] p_z p_y \\ &= -i\hbar y p_x + i\hbar x p_y \\ &= i\hbar (x p_y - y p_x) \\ &= i\hbar L_z \end{aligned}$$

CI SI POTEVA ASPETTARE $i\hbar$ PER RAGIONI DIMENSIONALI E PERCHÉ L_z È HERMITIANO

$[A,B]^+ = -[A,B]$ SE A, B SONO HERMITIANI ($[A,B]$ ANTIHERMITIANO)

$$[L_x, L_y]^+ = -[L_x, L_y]$$

$$(i\hbar L_z)^+ = i^* \hbar L_z^+ = -i\hbar L_z$$

SIMILMENTE PER LE ALTRE COMPONENTI (ε_{ijk} È IL TENSORE DI LEVI-CIVITA)

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$$

VERO SOLO IN 3 DIMENSIONI

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{PERMUTAZIONI PARI} \\ 0 & \text{DUE INDICI UGUALI} \\ -1 & \text{PERMUTAZIONI DISPARI} \end{cases}$$

COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICO ($\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{321}$)

INVARIANTE SOTTO PERMUTAZIONI CICLICHE

PER COMODITÀ SI È SOLITI MISURARE L IN UNITÀ DI $\hbar$. DETTO

$$\underline{K} = \frac{\underline{L}}{\hbar}$$

$$[K_i, K_j] = \left[\frac{L_i}{\hbar}, \frac{L_j}{\hbar}\right] = \frac{1}{\hbar^2}[L_i, L_j] = \frac{1}{\hbar^2} i\varepsilon_{ijk}\hbar L_k = i\varepsilon_{ijk}\left(\frac{L_k}{\hbar}\right) = i\varepsilon_{ijk} K_k$$

(NOI NON USEREMO QUESTA CONVENZIONE NELLE FORMULE).

CALCOLIAMOCI I COMMUTATORI $[L_i, r_k]$.

$$[L_x, r_x] = [p_z y - p_y z, x] = 0$$

$$[L_i, r_k] = 0 \quad \text{SE } i = k$$

$$[L_x, r_y] = [y p_z - z p_y, y] = [y p_z, y] - [z p_y, y]$$
$$= -z[p_y, y] - [z, y]p_y$$
$$= i\hbar z$$

SI NOTI ORA CHE

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \qquad [L_x, r_y] = i\hbar r_z$$
$$[L_x, L_z] = -i\hbar L_y \qquad [L_x, r_z] = -i\hbar r_y$$
$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \qquad [L_y, r_z] = i\hbar r_x$$

OVVERO VALE COME PER $[L_i, L_j]$

$$[L_i, r_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} r_k$$

E ANCORA

$$[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k$$

INFATTI

$$[L_x, p_y] = [p_z y - p_y z, p_y] = [p_z y, p_y] = p_z[y, p_y] = i\hbar p_z$$

DIMOSTREREMO CHE, PRESO UN QUALSIASI VETTORE $\underline{v}$,

$$[L_i, v_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} v_k \qquad \left(= (v_i \underline{e}_i \wedge v_j \underline{e}_j)\cdot(\underline{e}_i \wedge \underline{e}_j)\right)$$

ANZI È PROPRIO QUESTA LA DEFINIZIONE DI VETTORE. ANCHE IN MECCANICA CLASSICA SAREBBE STATO $[L_i, v_j]_{PB} = \varepsilon_{ijk} v_k$. INOLTRE

$$[L_i, S] = 0 \qquad \forall S \text{ SCALARE}$$

DIMOSTRIAMOLO USANDO $\underline{v}, \underline{w}$ t.c. (NOTA CHE SONO OPERATORI)

$$S = \underline{v} \cdot \underline{w}$$

$$[L_i, S] = [L_i, \sum_j v_j w_j] = \sum_j [L_i, v_j w_j]$$

$$= \sum_j \left([L_i, v_j] w_j + v_j [L_i, w_j] \right)$$

$$= \sum_{j,k} i\hbar \left\{ \varepsilon_{ijk} v_k w_j + \varepsilon_{ijk} v_j w_k \right\} = \sum_{j,k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ANTISIMMETRICO} \\ \text{(IN } j,k \text{ CON } i \text{ FERMA)}}}{\varepsilon_{ijk}} \underbrace{(v_k w_j + v_j w_k)}_{\text{SIMMETRICO}} i\hbar = 0$$

L' ULTIMO PRODOTTO È NULLO: $\qquad \varepsilon^i_{jk} : a_{jk} = 0$

$i = 1$

$$i\hbar\, \varepsilon_{123} (v_3 w_2 + v_2 w_3) \qquad j=2,\ k=3$$

$$+ i\hbar\, \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} (v_2 w_3 + v_3 w_2) \qquad j=3,\ k=2$$

$$= 0$$

CERCHIAMO ORA GLI AUTOVALORI DI L_x, L_y, L_z. POICHÈ NON COMMUTANO, NON SONO DIAGONALIZZABILI CONTEMPORANEAMENTE. STUDIAMO ALLORA L_z, CHE COMMUTA CON LO SCALARE

$$L^2 = \underline{L} \cdot \underline{L}$$

$$[L^2, L_i] = 0$$

SIA QUINDI $|\mu, m\rangle$ UN AUTOSTATO COMUNE DI L^2 E L_z,

$$L^2 |\mu, m\rangle = \hbar^2 \mu |\mu, m\rangle$$

$$L_z |\mu, m\rangle = \hbar m |\mu, m\rangle$$

μ, m ADIMENSIONALI. CHE VALORI POSSONO ASSUMERE?

DEFINIAMO I DUE OPERATORI NON HERMITIANI

$$L_\pm = L_x \pm i L_y$$

$$\begin{cases} L_+^\dagger = (L_x + i L_y)^\dagger = L_x - i L_y = L_- \\ L_-^\dagger = L_+ \end{cases}$$

NOTA: $\hbar$ HA LE DIMENSIONI DI UN'AZIONE, OVVERO $E \cdot t$, OVVERO UN MOMENTO ANGOLARE.

CALCOLIAMO

$$[L_+, L_z] = [L_x, L_z] + i[L_y, L_z]$$
$$= i\hbar\,\varepsilon_{132} L_y + i \cdot i\hbar\,\varepsilon_{231} L_x$$
$$= -i\hbar L_y - \hbar L_x = -\hbar L_+$$

NOTA: MOSTRIAMO, IN BREVE, CHE

$$\begin{cases} [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \\ L^2 = L_z^2 - \hbar L_z + L_+ L_- \\ L^2 = L_z^2 + \hbar L_z + L_- L_+ \end{cases}$$

$$[L_-, L_z] = -i\hbar L_y + \hbar L_x = \hbar L_-$$

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y)$$
$$= L_x^2 + L_y^2 + iL_yL_x - iL_xL_y = L_x^2 + L_y^2 + i[L_y, L_x]$$
$$= L^2 - L_z^2 + i \cdot i\hbar\,\varepsilon_{213} L_z = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$$L_- L_+ = L_x^2 + L_y^2 - iL_yL_x + iL_xL_y = L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y]$$
$$= L^2 - L_z^2 + i \cdot i\hbar\,\varepsilon_{123} L_z = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

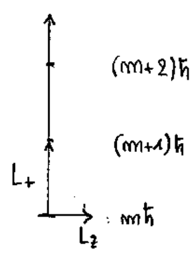
SIA ORA

$$|\alpha\rangle = L_+ |\mu, m\rangle$$

MOSTRIAMO CHE $|\alpha\rangle$ È AUTOVETTORE DI L^2 E L_z. POICHÉ $[L^2, L_+] = 0$, $[L_z, L_+] \neq 0$,

$$L^2 |\alpha\rangle = L^2 L_+ |\mu, m\rangle = L_+ L^2 |\mu, m\rangle$$
$$= L_+ (\hbar^2 \mu) |\mu, m\rangle = \hbar^2 \mu |\alpha\rangle$$

$$L_z |\alpha\rangle = L_z L_+ |\mu, m\rangle = (L_z L_+ - L_+ L_z + L_+ L_z)|\mu, m\rangle$$
$$= (-[L_+, L_z] + L_+ L_z)|\mu, m\rangle$$
$$= (\hbar L_+ + L_+ \hbar m)|\mu, m\rangle$$
$$= \hbar(m+1) L_+ |\mu, m\rangle = \hbar(m+1)|\alpha\rangle$$



SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE VALE

$$L_z L_- |\mu, m\rangle = \hbar(m-1) L_- |\mu, m\rangle$$

ANALOGAMENTE A QUANTO ACCADEVA CON η E η^+ PER L'OSCILLATORE ARMONICO.

CONSIDERIAMO INOLTRE L'UGUAGLIANZA

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

IN TERMINI DI VALORI MEDI SU UN GENERICO AUTOSTATO (NORMALIZZATO),

$$\langle \mu, m | L^2 | \mu, m \rangle = \langle \mu, m | (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) | \mu, m \rangle$$

$$\hbar^2 \mu = \langle \mu, m | (L_x^2 + L_y^2) | \mu, m \rangle + \hbar^2 m^2 \langle \mu, m | \mu, m \rangle \geq \hbar^2 m^2$$

(SONO TUTTI OPERATORI HERMITIANI). ERA $\mu \geq 0$ E PERCIO'

$$\hbar^2 \mu \geq \hbar^2 m^2$$

$$|m| \leq \sqrt{\mu} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\mu} \leq m \leq \sqrt{\mu}$$

IL CHE LIMITA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE I POSSIBILI AUTOVALORI DI L_z. PER UN DATO VALORE DI μ, $\exists M_p = \max(m)$ t.c.

$$L_+ | \mu, M_p \rangle = 0$$

E UN VALORE MINIMO M_m DI m t.c.

$$L_- | \mu, M_m \rangle = 0$$

CERCHIAMOLI CALCOLANDO

$$L^2 | \mu, M_p \rangle = \hbar^2 \mu | \mu, M_p \rangle$$

$$\parallel$$

$$(L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) | \mu, M_p \rangle = (\hbar^2 M_p^2 + \hbar^2 M_p) | \mu, M_p \rangle$$

$$= \hbar^2 M_p (M_p + 1) | \mu, M_p \rangle$$

$$\mu = M_p (M_p + 1)$$

$$L^2 | \mu, M_m \rangle = \hbar^2 \mu | \mu, M_m \rangle$$

$$\parallel$$

$$(L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) | \mu, M_m \rangle = \hbar^2 M_m (M_m - 1) | \mu, M_m \rangle$$

$$\mu = M_m (M_m - 1)$$

EGUAGLIANDO LE DUE RELAZIONI TROVATE POSSIAMO SCRIVERE

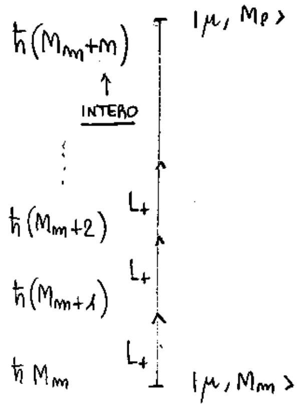
$$M_p^2 + M_p - M_m (M_m - 1) = 0$$

$$M_p = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4 M_m (M_m - 1)} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{4 M_m^2 - 4 M_m + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 \pm (2 M_m - 1) \right)$$

OVVERO

$$\begin{cases} M_p = M_m - 1 & \text{NON ACCETTABILE.} \\ M_p = -M_m & \text{OK SE } M_p > 0,\ M_m < 0. \end{cases}$$



SI E' TROVATO

$$M_m = -M_p$$

DA CUI

$$\hbar M_p = \hbar(M_m + m) \qquad m \text{ INTERO.}$$

$$M_p = -M_p + m \qquad M_p = \frac{m}{2} \qquad \text{INTERO O SEMIINTERO.}$$

$$M_p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \dots \qquad \mu = M_p(M_p+1) \quad (\text{AUTOVALORE DI } L^2).$$

· ESEMPIO

$$M_p = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad M_m = -\frac{3}{2}$$

GLI AUTOVALORI DI L_z SONO $\left\{-\frac{3}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar\right\}$

· NOMENCLATURA

MOMENTO ANGOLARE ℓ

SIGNIFICA IDENTIFICARE $M_p = \ell$. $\quad \mu = \ell(\ell+1)$ E' L'AUTOVALORE DI L^2.

IL PARAMETRO m PUO' ASSUMERE I VALORI

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$$

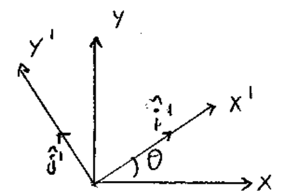
CI RIFERIREMO ALLO STATO $|\mu, m>$ CON

$$|\ell, m>$$

CHE HA MOMENTO ANGOLARE ℓ E COMPONENTE LUNGO z m.

LA DEGENERAZIONE DEL MULTIPLETTO E' $(2\ell+1)$, ED E' IL NUMERO DEI POSSIBILI AUTOVALORI m IN CORRISPONDENZA DI UN DATO VALORE DI ℓ.

MOMENTO ANGOLARE E ROTAZIONI



$$\hat{i}' = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\hat{j}' = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\hat{k}' = (0, 0, 1)$$

$$\underline{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = (v_x, v_y, v_z)$$
$$= v'_x \hat{i}' + v'_y \hat{j}' + v'_z \hat{k}' = (\cos\theta\, v'_x - \sin\theta\, v'_y,\ \sin\theta\, v'_x + \cos\theta\, v'_y,\ v'_z)$$

DA CUI

$$\begin{cases} v_x = \cos\theta\, v'_x - \sin\theta\, v'_y \\ v_y = \sin\theta\, v'_x + \cos\theta\, v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \xrightarrow{\theta \mapsto -\theta} \begin{cases} v'_x = \cos\theta\, v_x + \sin\theta\, v_y \\ v'_y = -\sin\theta\, v_x + \cos\theta\, v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA ROTAZIONE A $\underline{p}$ E $\underline{r}$,

$$\begin{cases} p_x' = \cos\theta\, p_x + \sin\theta\, p_y \\ p_y' = -\sin\theta\, p_x + \cos\theta\, p_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\theta\, x + \sin\theta\, y \\ y' = -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$$

È UNA TRASFORMAZIONE CANONICA. AD ESEMPIO (I TERMINI MISTI COMMUTANO)

$$[x', p_x'] = [x\cos\theta + y\sin\theta,\ p_x\cos\theta + p_y\sin\theta]$$
$$= [x\cos\theta, p_x\cos\theta] + [y\sin\theta, p_y\sin\theta]$$
$$= \cos^2\theta\, i\hbar + \sin^2\theta\, i\hbar = i\hbar$$

$$[x', p_y'] = [x\cos\theta + y\sin\theta,\ -\sin\theta\, p_x + \cos\theta\, p_y]$$
$$= [x\cos\theta, -\sin\theta\, p_x] + [y\sin\theta, \cos\theta\, p_y]$$
$$= -\cos\theta\sin\theta\, i\hbar + \sin\theta\cos\theta\, i\hbar = 0$$

ESISTE UN OPERATORE U UNITARIO ASSOCIATO ALLA TRASFORMAZIONE:

$$\begin{cases} x' = U x U^+ \\ y' = U y U^+ \\ p_x' = U p_x U^+ \\ p_y' = U p_y U^+ \end{cases}$$

MI ASPETTO CHE VALGA

NOTA: OCCHIO CHE STIAMO PER SCRIVERE $X' = UXU^+$, PERCHE' INTENDIAMO IL CDB DA X A X'.

$$U \sim e^{i\theta \frac{L_z}{\hbar}}$$

CONSIDERIAMO ALLORA UNA ROTAZIONE INFINITESIMA $(\theta \ll 1)$ E SVILUPPIAMO

$$U \simeq \mathbb{1} + iM\theta$$

(SI E' VISTO CHE, CON QUESTO SVILUPPO, SCEGLIENDO M HERMITIANO U VIENE AUTOMATICAMENTE UNITARIO)

$$X' = (\mathbb{1} + iM\theta)\, X\, (\mathbb{1} - iM\theta)$$

$$= X + iMX\theta - iXM\theta = X + i\theta[M, X]$$

MA SVILUPPANDO X' AL PRIMO ORDINE DALLA DEFINIZIONE IN θ HO

$$X' \simeq X + \theta \cdot Y \qquad \Rightarrow \qquad [M, X] = -iY$$

SIMILMENTE

$$Y' \simeq -\theta \cdot X + Y \qquad \Rightarrow \qquad [M, Y] = iX$$

$$\equiv Y + i\theta[M, Y]$$

RICORDIAMO

$$[L_i, P_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk}\, p_k$$

$$\left[\frac{L_z}{\hbar}, X\right] = i\varepsilon_{312} Y = iY$$

$$\left[\frac{L_z}{\hbar}, Y\right] = i\varepsilon_{321} X = -iX$$

E RICONOSCIAMO QUINDI

$$M = -\frac{L_z}{\hbar}$$

PER UNA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA VALE

$$U = \left(\mathbb{1} - \frac{iL_z}{\hbar}\theta\right)$$

MA UNA ROTAZIONE DI θ SI PUO' SCRIVERE COME m ROTAZIONI DI $\frac{\theta}{m}$:

$$U(\theta) = \underbrace{U\left(\frac{\theta}{m}\right) U\left(\frac{\theta}{m}\right) \dots U\left(\frac{\theta}{m}\right)}_{m \text{ VOLTE}} = \left(1 - \frac{iL_z}{\hbar}\frac{\theta}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \exp\left(-\frac{iL_z}{\hbar}\theta\right)$$

SI DICE CHE U E' IL GENERATORE DELLA ROTAZIONE DI ANGOLO θ.

SI NOTI INFINE CHE PER UNO SCALARE S

$$S = U S U^+$$
$$= S + i[M, S]\theta \equiv S$$

PERCHÈ S SIA INVARIANTE PER ROTAZIONI DEVE ESSERE

$$[M, S] = 0$$

· RICAPITOLANDO

$|\ell, m\rangle \quad : \quad L^2 |\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m\rangle$

$\qquad\qquad\quad L_z |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle$

GLI $|\ell, m\rangle$ SONO NORMALIZZATI MA DEFINITI A MENO DI UNA FASE.

$L_\pm = L_x \pm i L_y \qquad\qquad L_-^+ = L_+$

$L_\pm |\ell, m\rangle$ È UN AUTOSTATO DI L_z CON AUTOVALORE $m\hbar \pm \hbar$

$L_+ |\ell, m\rangle = C |\ell, m+1\rangle \qquad\qquad L_- |\ell, m\rangle = D |\ell, m-1\rangle$

$L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$

$$\langle \ell, m | L_+ L_- | \ell, m\rangle = \langle \ell, m | \hbar^2 \ell(\ell+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m | \ell, m\rangle$$
$$= \hbar^2 \left(\ell(\ell+1) - m^2 + m\right) \langle \ell, m | \ell, m\rangle = \hbar^2 \left(\ell(\ell+1) - m^2 + m\right)$$

$$\left| L_- |\ell, m\rangle \right|^2 = \langle \ell, m | L_-^+ L_- | \ell, m\rangle = \hbar^2 \left(\ell(\ell+1) - m^2 + m\right)$$
$$\left| D |\ell, m-1\rangle \right|^2 = |D|^2 \left| |\ell, m-1\rangle \right|^2 = |D|^2$$

$$\Rightarrow |D| = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}$$

NON C'È MODO DI DETERMINARE LA FASE, QUINDI SCRIVIAMO

$$L_- |\ell, m\rangle = e^{i\varphi} |D| |\ell, m-1\rangle$$
$$\langle \ell, m-1 | L_- | \ell, m\rangle = e^{i\phi} |D| \langle \ell, m-1 | \ell, m-1\rangle = e^{i\phi} |D|$$

LA CONVENZIONE È QUELLA DI FISSARE LE FASI IN MODO CHE

$$\langle \ell, m-1 | L_- | \ell, m\rangle = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} > 0$$

PARTIAMO DALLO STATO PIÙ ALTO O BASSO, COME $|\ell, \ell\rangle$, E NE FISSIAMO LA FASE: LE ALTRE SEGUONO DA

$$|\ell, \ell-1\rangle = \frac{1}{D} L_- |\ell, \ell\rangle$$

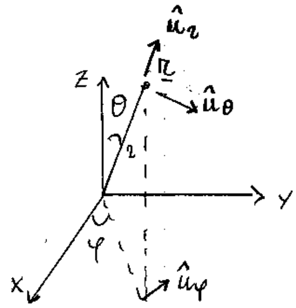
CONSIDERANDO CHE $L_-^+ = L_+$ CALCOLO

$$\langle \ell, m+1 | L_+ | \ell, m\rangle = C \langle \ell, m+1 | \ell, m+1\rangle = C$$

$$\langle \ell, m+1 | L_-^+ | \ell, m\rangle = \langle \ell, m | L_- | \ell, m+1\rangle^* \equiv \langle \ell, m | L_- | \ell, m+1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad C = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - (m+1)^2 + m+1} = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}$$

NOTA CHE PER $m=\ell$ SI ANNULLA C $\left(L_+|\ell,\ell\rangle = 0\right)$ E PER $m=-\ell$ SI HA $D=0$.



- RIPASSO DELLE COORDINATE SFERICHE

$$\underline{r} = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

FISSANDO DUE COORDINATE ALLA VOLTA HO LA TERNA

$$\hat{u}_r,\ \hat{u}_\theta,\ \hat{u}_\varphi$$

DEFINISCO I VETTORI COORDINATI COME

$$\underline{M}_r = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \qquad |\underline{M}_r| = 1$$

$$\underline{M}_\theta = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta) \qquad |\underline{M}_\theta| = r$$

$$\underline{M}_\varphi = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0) \qquad |\underline{M}_\varphi| = r\sin\theta$$

DA CUI OTTENGO (SI FA COSÌ QUALUNQUE SIA IL SISTEMA DI COORDINATE)

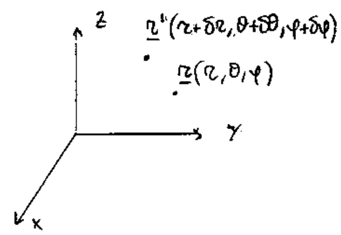
$$\hat{u}_r = \frac{\underline{M}_r}{|\underline{M}_r|} = \underline{M}_r = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$\hat{u}_\theta = \frac{\underline{M}_\theta}{|\underline{M}_\theta|} = \frac{1}{r}\underline{M}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$\hat{u}_\varphi = \frac{\underline{M}_\varphi}{|\underline{M}_\varphi|} = \frac{1}{r\sin\theta}\underline{M}_\varphi = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$$

PRESI DUE PUNTI VICINI, IL GRADIENTE DI f È DEFINITO DALLA RELAZIONE

$$f(\underline{r}') - f(\underline{r}) = (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \nabla f$$



CERCO LE COMPONENTI DI ∇f (NON SONO DERIVATE):

$$\underline{\nabla} f \equiv f_r\,\hat{u}_r + f_\theta\,\hat{u}_\theta + f_\varphi\,\hat{u}_\varphi$$

$$\underline{r}'(r+\delta r, \theta+\delta\theta, \varphi+\delta\varphi) - \underline{r}(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\delta r + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\delta\varphi$$

$$= \hat{u}_r\,\delta r + r\,\hat{u}_\theta\,\delta\theta + \hat{u}_\varphi\,\delta\varphi \cdot r\sin\theta$$

$$(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla} f = \delta r\, f_r + r\,\delta\theta\, f_\theta + r\sin\theta\,\delta\varphi\, f_\varphi$$

$$\parallel$$

$$f(r+\delta r, \theta+\delta\theta, \varphi+\delta\varphi) - f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\delta r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{u}_\varphi$$

CALCOLIAMO ORA LA DIVERGENZA DEL VETTORE $\underline{V}$. È VERO CHE

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{V} \overset{?}{=} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

NO. INFATTI IN UN SISTEMA DI COORDINATE NON CARTESIANE LA TERNA $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi$ VARIA DA PUNTO A PUNTO (IN CARTESIANE ERA FISSA).
RICAVIAMO INVECE L'ESPRESSIONE DELL'OPERATORE $\underline{\nabla}$ E SCRIVIAMO

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = \left(\hat{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{u}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot\left(v_r\,\hat{u}_r + v_\theta\,\hat{u}_\theta + v_\varphi\,\hat{u}_\varphi\right)$$

AD ESEMPIO IL PRIMO TERMINE DÀ

$$\hat{u}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(v_r\,\hat{u}_r + v_\theta\,\hat{u}_\theta + v_\varphi\,\hat{u}_\varphi\right) = \hat{u}_r\cdot\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\hat{u}_\varphi\right) = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

MA IN GENERALE VANNO DERIVATI ANCHE I VERSORI, QUINDI

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\hat{u}_\theta}{r}\left(v_r\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + v_\theta\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\hat{u}_\varphi}{r\sin\theta}\left(v_r\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} + v_\theta\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \varphi} + v_\varphi\frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

MA PER UN VERSORE, POICHÉ $\underline{u}\cdot\underline{u} = 1$, DERIVANDO RISPETTO A UNA COORDINATA

$$2\hat{\underline{u}}\cdot\frac{d\hat{\underline{u}}}{d\alpha} = 0 \qquad \underline{u} \perp \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

MI RESTANO SOLO DA CALCOLARE

$$\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) = \hat{u}_\theta$$

$$\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} = (-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0) = +\sin\theta\ \hat{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \varphi} = (-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ 0) = \cos\theta\ \hat{u}_\varphi$$

SOSTITUENDO QUANTO TROVATO,

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}(\sin\theta)v_r + \frac{v_\theta}{r\sin\theta}\cos\theta$$

$$= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r\,\mathrm{tg}\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

IL LAPLACIANO SI CALCOLA INFINE FACILMENTE COME

$$\nabla^2 f = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

- <u>MOMENTO ANGOLARE IN COORDINATE SFERICHE</u>

$$\underline{L} = \underline{r}\wedge\underline{p} = r\,\hat{u}_r \wedge (-i\hbar\underline{\nabla})$$

$$= -i\hbar r\,\hat{u}_r \wedge \left(\hat{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{u}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$= -i\hbar\,\hat{u}_r \wedge \left(\hat{u}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

USANDO LA REGOLA DELLA MANO DESTRA, $\hat{u}_r\wedge\hat{u}_\theta = \hat{u}_\varphi$, $\hat{u}_r\wedge\hat{u}_\varphi = -\hat{u}_\theta$ E

$$\underline{L} = -i\hbar\,\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i\hbar}{\sin\theta}\hat{u}_\theta\frac{\partial}{\partial \varphi} = i\hbar\left(-\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$L_z = \underline{L}\cdot\hat{u}_z = \frac{i\hbar}{\sin\theta}\hat{u}_\theta\cdot\hat{u}_z\frac{\partial}{\partial \varphi} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$\hat{u}_\theta\cdot\hat{u}_z = (\ ,\ ,-\sin\theta)\cdot(0,0,1)$

$\hat{u}_\varphi\cdot\hat{u}_z = (\ ,\ ,0)\cdot(0,0,1)$

NOTIAMO CHE SI È PERSA LA DIPENDENZA DA r (IL CHE È NATURALE, TRATTANDOSI DEL GENERATORE DELLE ROTAZIONI). ORA SCRIVIAMO

$$L^2 = \underline{L}\cdot\underline{L} = -\hbar^2\left(-\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(-\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

MA

$$\hat{u}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\hat{u}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$=-\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}-\hat{u}_\varphi \cdot \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\hat{u}_\varphi \cdot \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\right)=0$$

$$\frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(-\hat{u}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}-\frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(-\cos\theta\cos^2\varphi-\cos\theta\sin^2\varphi\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\cot\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

RICOMPONENDO I PEZZI HO

$$L^2 f=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\cot\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

CONFRONTANDOLO CON L'ESPRESSIONE DEL LAPLACIANO DI f,

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{L^2 f}{(-\hbar^2 r^2)}$$

INOLTRE POSSO ESPRIMERE

$$p^2=(-i\hbar)\underline{\nabla}\cdot(-i\hbar)\underline{\nabla}=-\hbar^2\nabla^2$$

$$p^2 f=-\hbar^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}L^2 f$$

CALCOLIAMO

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) = \frac{\partial}{\partial r}(f + rf') = f' + f' + rf'' = r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

POSSO ALLORA RISCRIVERE

$$p^2 f = -\frac{\hbar^2}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}L^2 f$$

DA CONFRONTARE IN MC CON I PROBLEMI IN CUI $p_\theta = \ell$ E' CONSERVATO,

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

RICAVIAMO INFINE LE ESPRESSIONI PER L_+ E L_-. RICORDIAMO

$$\underline{L} = i\hbar\left(-\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_z = i\hbar\left(-u_{\varphi,z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{u_{\theta,z}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$\hat{u}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\hat{u}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$

$\hat{u}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

DOVE $u_{\varphi,z} = \hat{u}_\varphi \cdot \hat{u}_z = \hat{u}_\varphi \cdot (0,0,1)$. DATO UN VETTORE $\underline{v} = a\hat{m}$, CIOE'

$v_x = a\, m_x \qquad v_y = a\, m_y$

$v_x + i v_y = a(m_x + i m_y) := a m_+$

DETTO ALLORA $\underline{L} = a\hat{u}_\varphi + b\hat{u}_\theta$, VOGLIO CALCOLARE

$$L_+ = L_x + iL_y = \underline{L}\cdot(\hat{u}_x + i\hat{u}_y) = \underline{L}\cdot\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix} = a(u_{\varphi x} + i u_{\varphi y}) + b(u_{\theta x} + i u_{\theta y}) := a u_{\varphi +} + b u_{\theta +}$$

CERCO QUINDI (RICORDIAMO CHE $\underline{L}$ NON HA DIPENDENZA DA r O $\hat{u}_r$)

$$u_{\varphi +} = u_{\varphi,x} + i u_{\varphi,y} = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = ie^{i\varphi}$$

$$u_{\theta +} = u_{\theta,x} + i u_{\theta,y} = \cos\theta\cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi = \cos\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos\theta\, e^{i\varphi}$$

$$L_+ = L_x + iL_y = i\hbar\left(-u_{\varphi +}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{u_{\theta +}}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$= i\hbar\left(-ie^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

ARMONICHE SFERICHE

CONSIDERIAMO LO SPAZIO DI HILBERT DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI $f(\theta, \varphi)$

$$d^3 r = r^2 dr\, d\Omega$$

$$d\Omega = d\cos\theta\, d\varphi \quad \text{"="} \quad \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\cos\theta \in [-1, 1] \qquad \theta \in [0, \pi]$$

CON IL PRODOTTO SCALARE

$$\langle f | g \rangle = \int d\cos\theta\, d\varphi\; f^*(\theta, \varphi)\, g(\theta, \varphi)$$

CERCHIAMO LE AUTOFUNZIONI DI K^2, K_z CON

$$K^2 = \frac{L^2}{\hbar^2} \qquad K_z = \frac{L_z}{\hbar}$$

COME QUELLE ψ_m^l NORMALIZZATE CHE SODDISFANO

$$\begin{cases} K^2 \psi_m^l(\theta, \varphi) = l(l+1)\, \psi_m^l \\ K_z \psi_m^l(\theta, \varphi) = m\, \psi_m^l \end{cases}$$

SI NOTI CHE AL SOLITO LA CONDIZIONE

$$\int d\cos\theta\, d\varphi\, |\psi_m^l|^2 = 1$$

NON DETERMINA UNIVOCAMENTE ψ_m^l (NON DÀ LA FASE). RICHIEDO CHE GLI ELEMENTI DI MATRICE SIANO POSITIVI PER CONVENZIONE,

$$\langle l, m+1 | L_+ | l, m \rangle \geq 0$$

E FISSO ARBITRARIAMENTE LA PRIMA FASE, DA CUI SEGUONO LE ALTRE.

IN RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖEDINGER, LA SECONDA EQUAZIONE DIVENTA

$$-i \frac{\partial \psi_m^l}{\partial \varphi} = m\, \psi_m^l$$

$$\Rightarrow \quad \psi_m^l = c(\theta)\, e^{im\varphi}$$

CON LA CONDIZIONE

$$\Psi_m^l(\varphi = 2\pi) = \Psi_m^l(\varphi = 0) \qquad \Rightarrow \qquad e^{i2\pi m} = 1$$

NOTIAMO SUBITO CHE SE m È SEMIINTERO QUESTA RICHIESTA NON È SODDISFATTA: m È NECESSARIAMENTE INTERO.

NE CONSEGUE CHE I VALORI POSSIBILI DI l SONO INTERI.

SI NOTI CHE $C(\theta)$ DIPENDE IN GENERALE DA l, m. POTREI FISSARLA USANDO LA PRIMA EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI, MA È DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE E PERCIÒ COMPLICATA. INVECE RICORDIAMO CHE

$$L_+ \Psi_l^l(\theta, \varphi) = 0$$

$$\hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(C_l^l(\theta) e^{il\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{\partial C_l^l}{\partial\theta} e^{il\varphi} + i\cot\theta\, C_l^l (il) e^{il\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial C_l^l}{\partial\theta} = l\cot\theta\, C_l^l \qquad\qquad \int\frac{dC_l^l}{C_l^l} = \int l\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

$$\ln(C_l^l) = l\cdot\ln(\sin\theta) + k = \ln(e^k \sin^l\theta)$$

$$C_l^l = A\sin^l\theta \qquad\qquad \Psi_l^l = A\sin^l\theta\, e^{il\varphi}$$

LA COSTANTE $|A|^2$ SI DETERMINA TRAMITE LA NORMALIZZAZIONE, MENTRE LA FASE È FISSATA CONVENZIONALMENTE IN

$$A = (-1)^l |A|$$

SI NOTI CHE LE C_m^l SONO TUTTE REALI AVENDO SCELTO C_l^l REALE: SIA

$$\Psi_{l-1}^l = \frac{1}{c} L_- \Psi_l^l \qquad\qquad L_-\Psi_l^l = c\,\Psi_{l-1}^l$$

RICORDO (DEVE CANCELLARSI PER $m=-l$, REGOLA MNEMONICA)

$$c = \langle l, m-1 | L_- | l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$$

(OCCHIO CHE STO CHIAMANDO L_- QUEL CHE IN REALTÀ È $K_- = \frac{L_-}{\hbar}$).

LA CONOSCENZA DELL'ELEMENTO DI MATRICE MI DÀ

$$L_-|l,m\rangle = c|l,m-1\rangle$$

$$\langle l,m-1|L_-|l,m\rangle = c\langle l,m-1|l,m-1\rangle = c$$

PERCIÒ RICAVO (IL PRIMO L_- È QUELLO VERO, POI LO USO DIVISO PER $\hbar$):

$$L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(+\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_-\psi_l^l = L_-\left(A\sin^l\theta e^{il\varphi}\right) = L_-\left(C_l^l(\theta)e^{il\varphi}\right) = \frac{\left(\frac{\partial C_l^l(\theta)}{\partial\theta} + l\cot\theta\, C_l^l(\theta)\right)e^{i(l-1)\varphi}}{C_{l-1}^l(\theta)}$$

ABBIAMO RICAVATO LE ARMONICHE SFERICHE

$$\underline{\psi_m^l = C_m^l(\theta)\, e^{im\varphi}} \qquad C_m^l(\theta) \text{ REALE}$$

$$\psi_m^{l*} = C_m^l(\theta)\, e^{-im\varphi}$$

OTTENUTA CONIUGANDO LA PRECEDENTE. NOTANDO ORA CHE

$$L_z^* = -L_z \qquad L_z^\dagger = L_z$$

SI HA

$$L_z\psi_m^l = m\psi_m^l$$

$$L_z^*\psi_m^{l*} = m\psi_m^{l*}$$

$$-L_z\psi_m^{l*} = m\psi_m^{l*}$$

DATA UN'AUTOFUNZIONE DI AUTOVALORE m, LA SUA COMPLESSA CONIUGATA È ANCORA AUTOFUNZIONE MA CON AUTOVALORE $-m$.

CHE RELAZIONE C'È TRA

$$C_m^l(\theta), \quad C_{-m}^l(\theta) \quad ?$$

SONO ENTRAMBE REALI E NORMALIZZATE, PERCIÒ NON PUÒ CHE ESSERE

$$C_m^l = \pm C_{-m}^l$$

MA QUALE DEI DUE?

NOTA: L'AUTOVALORE m NON È DEGENERE, QUINDI LE DUE AUTOFUNZIONI DI AUTOVALORE $-m$ TROVATE DIFFERISCONO AL PIÙ PER UNA FASE.

APPLICHIAMO m VOLTE GLI OPERATORI $L_\pm$ A $|l,m\rangle$. SI DIMOSTRA CHE

$$C|l,0\rangle = L_-^m|l,m\rangle$$

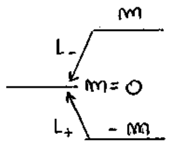
$$C|l,0\rangle = L_+^m|l,-m\rangle$$

CON LA STESSA COSTANTE C.

SI HA ALLORA

$$C\psi_0^{\ell} = L_-^{m}\psi_m^{\ell}$$

$$C\psi_0^{\ell} = L_+^{m}\psi_{-m}^{\ell}$$



CONSIDERO CHE L'ARMONICA CON $m=0$ È REALE. INOLTRE VALGONO

$$\underline{L} = i\hbar\, \underline{r} \wedge \underline{\nabla}$$

$$\underline{L}^* = -\underline{L}$$

$$(L_x - iL_y)^* = L_x^* + iL_y^* = -L_x - iL_y = -L_+ \quad \Rightarrow \quad L_-^* = -L_+$$

$$C\psi_0^{\ell} = L_+^{m}\psi_{-m}^{\ell} \qquad C\psi_0^{\ell} = L_-^{m}\psi_m^{\ell}$$

$$(C\psi_0^{\ell})^* = L_-^{*\,m}\psi_m^{\ell *} = (-L_+)^m\psi_m^{\ell *} = (-1)^m L_+^m \psi_m^{\ell *}$$

$$L_+^m\psi_{-m}^{\ell} = (-1)^m L_+^m \psi_m^{\ell *} \qquad \left(\text{INFATTI } (C\psi_0^{\ell})^* = C\psi_0^{\ell}\right)$$

$$\underline{\psi_{-m}^{\ell} = (-1)^m \psi_m^{\ell *}}$$

- <u>NOTAZIONE</u>

$$Y_{\ell m},\ Y_\ell^m,\ Y_m^\ell$$

È AMBIGUA? NO, INFATTI $\ell \geq m$.

(SÌ, HO SCRITTO ψ_m^ℓ FINO A ADESSO E NON HO INTENZIONE DI CORREGGERE).

SULLA TAVOLA CLEBSCH-GORDAN NON SONO RIPORTATE LE $m<0$ POICHÈ

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

NON SI TROVANO INOLTRE LE BANALI

$$Y_\ell^\ell = A \sin^\ell\vartheta\, e^{i\ell\varphi}\cdot(-1)^\ell$$

(IL $(-1)^\ell$ È CONVENZIONALE E POTREBBE VARIARE IN ALTRE TAVOLE)

$$Y_0^0 = A = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad \text{DATA DA} \int d\Omega\, |Y_0^0|^2 = 1$$

SONO RIPORTATE INVECE AD ESEMPIO

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONVENZIONE}}}{-}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

· ARMONICHE E POLINOMI

$$r Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, r\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, z \qquad r Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, r\sin\theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(x+iy)$$

$$r Y_1^{-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, r\sin\theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(x-iy)$$

$$z = r\cos\theta \qquad \underline{r} = (r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)$$

$$x+iy = r\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\sin\theta e^{i\varphi}$$

$$x-iy = (x+iy)^* = r\sin\theta e^{-i\varphi}$$

SCRIVO PERCIÒ (x,y,z) COME COMBINAZIONI DELLE $Y_{l=1}^m$.

I POLINOMI DI GRADO 1 CORRISPONDONO ALLE $Y_{l=1}^m$.

PER $l=2$,

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi} \qquad r^2 Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(r\sin\theta e^{i\varphi})^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(x+iy)^2$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} \qquad r^2 Y_2^1 = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}(r\cos\theta)(r\sin\theta e^{i\varphi}) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\, z(x+iy)$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \qquad r^2 Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}r^2\cos^2\theta - r^2\right) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^{-2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$$

È ANCORA VERO CHE HO UNA BASE DEI POLINOMI DI II GRADO (PARI)?

$x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$ $\qquad$ dim = 6

HO SOLO 5 ARMONICHE FONDAMENTALI; SE VI AGGIUNGO

$$\underbrace{r^2 Y_l^m}_{\text{5 ARMONICHE}} + \underbrace{r^2 Y_0^0}_{\to \frac{r^2}{\sqrt{4\pi}}}$$

HO OTTENUTO UNA BASE. IN GENERALE LE ARMONICHE SFERICHE DI ORDINE l SONO IL PRODOTTO DI $\frac{1}{r^l}$ PER UN POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO l.

COSTRUISCO I POLINOMI A PARITÀ DEFINITA DI GRADO III E IV COME

$$r^3 Y_{l=3}^m + r^3 Y_{l=1}^m$$

$$r^4 Y_{l=4}^m + r^4 Y_{l=2}^m + r^4 Y_{l=0}$$

· PARITÀ

$$I\,\psi(\underline{r}) = \psi(-\underline{r})$$

SI DICONO VERI VETTORI QUELLI CHE SODDISFANO

$$\begin{cases} I\,\underline{r}\,I = -\underline{r} \\ I\,\underline{p}\,I = -\underline{p} \end{cases}$$

SI RICORDI CHE I È HERMITIANO E UNITARIO, QUINDI
$I\underline{r}I^{-1} = I\underline{r}I^{+} = I\underline{r}I$
CAMBIAMENTO DI BASE

INVECE $\underline{L}$ È UNO PSEUDOVETTORE: INFATTI

$$I\,\underline{L}\,I = I\,\underline{r}\wedge\underline{p}\,I \underset{\substack{\uparrow\\ \text{LEGIT, } I \text{ AGISCE}\\ \text{SU CIASCUNA COMPONENTE.}}}{=} (I\underline{r}I)\wedge(I\underline{p}I) = -\underline{r}\wedge(-\underline{p}) = \underline{r}\wedge\underline{p} = \underline{L}$$

OVVERO

$$I\underline{L}I = \underline{L}$$

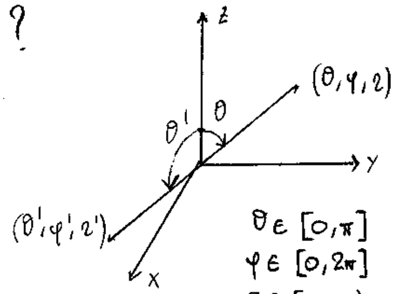
$$I\underline{L}II = \underline{L}I$$

$$I\underline{L} = \underline{L}I \quad \Rightarrow \quad [\underline{L}, I] = 0$$

I È PERCIÒ UNO SCALARE.

ALLORA L_i, I, L^2 HANNO UN INSIEME COMPLETO DI AUTOVETTORI SIMULTANEI (VEDI DOPO)

COME OTTENGO $\underline{r} \to -\underline{r}$ IN COORDINATE SFERICHE?



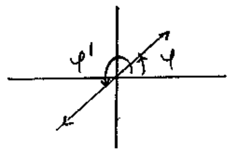
$\theta \in [0,\pi]$
$\varphi \in [0,2\pi]$
$r \in [0,\infty)$

$$(r,\theta,\varphi) \to (r, \pi-\theta, \varphi+\pi)$$

POICHÉ

$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi,\; r\sin\theta\sin\varphi,\; r\cos\theta)$$

CONTROLLIAMO



$$r\sin(\pi-\theta)\cos(\varphi+\pi) = -r\sin\theta\cos\varphi$$

$$r\cos(\pi-\theta) = -r\cos\theta.$$

STUDIAMO QUINDI L'AZIONE DI I SU

$$Y_l^l = A\sin^l\theta\, e^{il\varphi}$$

$$I\,Y_l^l(\theta,\varphi) = Y_l^l(\pi-\theta,\varphi+\pi) = A[\sin(\pi-\theta)]^l e^{il\varphi+il\pi}$$

$$= A\sin^l\theta\, e^{il\varphi}\,(-1)^l$$

$$= (-1)^l\, Y_l^l$$

VEDIAMO QUANTO VALE $I\,Y_l^m$ RICORDANDO CHE

$$Y_l^m = C\,L_-^{l-m}\,Y_l^l$$

$$I\,Y_l^m = C\,I\,L_-^{l-m}\,Y_l^l \underset{\substack{\uparrow\\ I \text{ COMMUTA CON}\\ \text{TUTTE LE COMPONENTI DI } \underline{L}}}{=} C\,L_-^{l-m}\,I\,Y_l^l = C\,L_-^{l-m}\left((-1)^l\,Y_l^l\right)$$

DA CUI

$$I Y_\ell^m = (-1)^\ell \, c L_-^{\ell-m} Y_\ell^\ell = (-1)^\ell Y_\ell^m$$

PERCIÒ POSSO SCRIVERE IN GENERALE

$$I Y_\ell^m = (-1)^\ell Y_\ell^m$$

CAPIAMO ORA IL PERCHÈ DELLA STRUTTURA DELLE BASI DEI POLINOMI VISTE POCO FA: DEVE ESSERE CONSERVATA LA PARITÀ.

NOTA: UNA VOLTA SPECIFICATI m E ℓ PER GLI OPERATORI L^2, L_z (CON $[L^2, L_z] = 0$), HO ELIMINATO LA DEGENERAZIONE. POICHÈ $[L^2, I] = [L_z, I] = 0$, QUESTA STESSA BASE È ANCHE BASE DI I.

ESERCIZIO

SI CONSIDERI IL ROTATORE (PARTICELLA VINCOLATA A MUOVERSI SU UNA SFERA DI RAGGIO FISSATO; LO SPAZIO DI HILBERT IN CUI OPERARE È QUELLO DI θ, φ DI CUI LE ARMONICHE SFERICHE COSTITUISCONO UNA BASE).

$$H = \alpha L^2 + \beta L_y$$

NOTA: IN COORDINATE SFERICHE RISCRIVO $\frac{p^2}{2m}$ OSSERVANDO

$$p^2 = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\cdot)}_{=0,\ R \text{ FISSATO}} + \frac{L^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2mR^2} \cdot L^2$$

1) POSSIBILI VALORI DI ENERGIA DI H.

MI SERVONO LE AUTOFUNZIONI DI L E L_z, CIOÈ LE ARMONICHE SFERICHE. BASTA CHE RINOMINO L'ASSE $y \to z$ E HO GIÀ LO SPETTRO $|\ell, m\rangle$, SU CUI H ASSUME I VALORI

$$E_{\ell m} = \alpha \hbar^2 \ell(\ell+1) + \beta \hbar m$$

ESSENDO

$$L^2 |\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m\rangle$$

$$L_y |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle$$

2) ALL'ISTANTE $t=0$ MISURO L^2 E L_z OTTENENDO $2\hbar^2, 0$. CHI È LO STATO IMMEDIATAMENTE DOPO IL PROCESSO DI MISURA?

SEGUENDO L'INTERPRETAZIONE DI COPENHAGEN,

$$2 = \ell(\ell+1) \quad \Rightarrow \quad \ell = 1$$

INOLTRE HO UN AUTOSTATO DI L_z CON AUTOVALORE 0. HO QUINDI

$$\underset{\overset{\uparrow}{L^2}}{|1}, \underset{\overset{\uparrow}{L_z}}{0}\rangle = \psi(0)$$

3) CALCOLA $\psi(t)$.

$$\psi(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(0)$$

SI TRATTA DI SCRIVERE $\psi(0)$ IN TERMINI DELLE AUTOFUNZIONI DI H, OVVERO DIAGONALIZZARE H.

POICHE' $[H, L^2] = 0$, APPLICANDO H RESTO NELLO SPAZIO CON $\ell = 1$ LA CUI BASE E' (SONO GLI AUTOVETTORI DI L^2 E L_z)

↳ IN OGNI SOTTOSPAZIO A ℓ FISSATO, LA MATRICE DI L^2 E' PROPORZIONALE ALL' IDENTITÀ

$$|1,1\rangle \qquad |1,0\rangle \qquad |1,-1\rangle$$

COSTRUISCO LA MATRICE DI ELEMENTI

$$\langle 1, m| L_y | 1, m'\rangle$$

RICORDANDO CHE

$$L_+ = L_x + iL_y \qquad \langle \ell, m+1 | L_+ | \ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}$$

$$L_- = L_x - iL_y \qquad \langle \ell, m-1 | L_- | \ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}$$

$$L_+ - L_- = 2iL_y$$

$$\langle 1, m| L_y | 1, m'\rangle = \frac{1}{2i}\langle 1, m| L_+ - L_- | 1, m'\rangle$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\langle 1, m| L_+ | 1, m'\rangle - \langle 1, m| L_- | 1, m'\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\delta_{m,m'+1}\,\hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m'(m'+1)} - \delta_{m,m'-1}\,\hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m'(m'-1)}\right\}$$

OSSERVO SUBITO CHE

$$\langle 1, m| L_y | 1, m\rangle = 0 = \langle 1,1| L_y | 1,-1\rangle = \langle 1,-1| L_y | 1,1\rangle$$

GLI ELEMENTI NON NULLI SONO

$$\langle 1,1| L_y | 1,0\rangle = \frac{\hbar}{2i}\sqrt{2}$$

$$\langle 1,0| L_y | 1,1\rangle = -\frac{\hbar}{2i}\sqrt{2}$$

(QUEST'ULTIMO BANALE PERCHE' LA MATRICE E' HERMITIANA).

$$\langle 1,-1|L_Y|1,0\rangle = -\frac{\hbar}{2i}\sqrt{2} \qquad \langle 1,0|L_Y|1,-1\rangle = \frac{\hbar}{2i}\sqrt{2}$$

PERCIÒ

$$L_Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} & 0 \\ -\frac{\hbar}{\sqrt{2}i} & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} \\ 0 & -\frac{\hbar}{\sqrt{2}i} & 0 \end{pmatrix} \quad \langle 1,1|L_Y|1,-1\rangle$$

TIP: NON PUOI RACCOGLIERE $\frac{\hbar}{\sqrt{2}i}$ PERCHÈ FA SBAGLIARE I DETERMINANTI, MA RIBATTEZZARLO "a" E CONTINUARE MI PARE CONSIGLIABILE.

PER CONTROLLO POSSO CALCOLARE GLI AUTOVALORI DI L_Y:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda & -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \\ \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{pmatrix} + \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\det\begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} & -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}\right) + \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}(-\lambda)\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\right) = -\lambda^3 + \lambda\hbar^2 = -\lambda\left(\lambda^2 - \hbar^2\right) \equiv 0$$

DA CUI

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm\hbar$$

TROVO GLI AUTOVETTORI.

$\lambda = \hbar$

$$L_Y\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}b = \hbar a \\ \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}a - \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}c = \hbar b \\ \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}b = \hbar c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{i}{\sqrt{2}}b \\ c = \frac{i}{\sqrt{2}}b \end{cases}$$

(PER DEFINIZIONE DI AUTOVETTORE HO DUE EQUAZIONI DIPENDENTI).

$$\underline{v} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}b, b, \frac{i}{\sqrt{2}}b\right)$$

$$|\underline{v}|^2 = 2|b|^2 \rightarrow |b| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{E POSSO SCEGLIERE } b = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

PER ELIMINARE UNA FASE. SCELGO LA 2^,

$$|E_1\rangle = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

SIMILMENTE PER $\lambda = -\hbar$ HO

$$|E_{-1}\rangle = \left(-\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

PER $\lambda = 0$ HO INFINE

$$L_y \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{v} = (a, 0, a)$$

$$|\underline{v}|^2 = 2|a|^2 \quad \rightarrow \quad |a| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{E SCELGO } a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|E_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

SI SONO COSÌ TROVATI GLI STATI t.c.

$$L_y |E_1\rangle = \hbar |E_1\rangle$$

$$L_y |E_{-1}\rangle = -\hbar |E_{-1}\rangle$$

$$L_y |E_0\rangle = 0$$

$$L^2 |E_i\rangle = \hbar^2 1(1+1) |E_i\rangle = 2\hbar^2 |E_i\rangle$$

CALCOLO ALLORA

$$H = \alpha L^2 + \beta L_y$$

$$H|E_1\rangle = (2\alpha\hbar^2 + \beta\hbar)|E_1\rangle$$

$$H|E_0\rangle = 2\alpha\hbar^2 |E_0\rangle$$

$$H|E_{-1}\rangle = (2\alpha\hbar^2 - \beta\hbar)|E_{-1}\rangle$$

SI È COSÌ DIAGONALIZZATA L'HAMILTONIANA (OSSIA LA SUA PARTE IN L_y, ESSENDO LA PARTE IN L^2 GIÀ PROPORZIONALE ALL'IDENTITÀ).

TORNIAMO AL NOSTRO

$$\psi = |\underset{\substack{\uparrow \\ L^2}}{1}, \underset{\substack{\uparrow \\ L_z}}{0}\rangle \qquad\qquad \psi(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\,\psi(0)$$

$$\begin{cases} |E_1\rangle = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle \\ |E_{-1}\rangle = -\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle \\ |E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle \end{cases}$$

NOTO CHE

$$|E_1\rangle + |E_{-1}\rangle = \frac{2i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

PERCIO'

$$|1,0\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle + |E_{-1}\rangle\right)$$

$$\equiv a|E_1\rangle + b|E_0\rangle + c|E_{-1}\rangle$$

E UN POSSIBILE CHECK E' CHE DOPO IL CAMBIO DI BASE SIA ANCORA

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2 = 1$$

ORA POSSO CALCOLARE

$$\psi(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|E_1\rangle + e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|E_{-1}\rangle\right) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|E_1\rangle + e^{-i\frac{E_{-1}}{\hbar}t}|E_{-1}\rangle\right)$$

POICHE' GLI STATI SONO SEMPRE DEFINITI A MENO DI UNA FASE,

$$\psi(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{-it(2\alpha\hbar+\beta)}|E_1\rangle + e^{-it(2\alpha\hbar-\beta)}|E_{-1}\rangle\right)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-it(2\alpha\hbar+\beta)}\left(|E_1\rangle + e^{2it\beta}|E_{-1}\rangle\right)$$

$$" = " \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle + e^{2it\beta}|E_{-1}\rangle\right)$$

POSSO CONTROLLARE CHE LO STATO EVOLUTO RESTI NORMALIZZATO (DI SOLITO LO E', PERCHE' L'EVOLUTORE SI LIMITA A MOLTIPLICARE PER UNA FASE). HO OTTENUTO

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2it\beta}\left(-\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-e^{2it\beta}\right)|1,1\rangle + \frac{1}{2}\left(1+e^{2it\beta}\right)|1,0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-1+e^{2it\beta}\right)|1,-1\rangle$$

IL CHECK E' CHE PER $t=0$ RIOTTENGO (A MENO DI FASI) LO STATO INIZIALE.

4) PROBABILITA' DI MISURARE $L_z = \pm\hbar$ AL TEMPO t.

$$\text{PROB}(\xi_i) = |\langle \xi_i|\psi\rangle|^2$$

BASTA SEMPLICEMENTE

$$PROB(L_z = +\hbar) = |\langle 1,1|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-e^{2it\beta})\right|^2$$

$$= \frac{1}{8}(1-e^{2it\beta})(1-e^{-2it\beta}) = \frac{1}{4}(1-\cos 2t\beta)$$

$$PROB(L_z = -\hbar) = \frac{1}{4}(1-\cos 2t\beta)$$

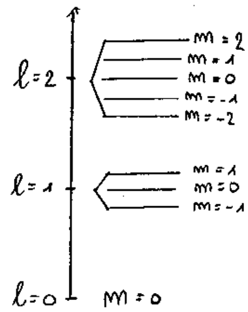
PERCIO'

$$PROB(L_z = \pm\hbar) = \frac{1}{2}(1-\cos 2t\beta)$$

CHE POTEVO TROVARE ANCHE COME

$$1 - PROB(L_z = 0) = 1 - |\langle 1,0|\psi(t)\rangle|^2 = 1 - \frac{1}{4}(2+2\cos 2t\beta)$$

5) SIA DATO LO STATO FONDAMENTALE ($\alpha \gg \beta$)



$$E_{lm} = \alpha\hbar^2 l(l+1) + \beta\hbar m$$

(GLI STATI NON SI SOVRAPPONGONO PERCHE' $\alpha \gg \beta$).

SI CALCOLI

$$\langle SF|\frac{x}{r}|\psi(t)\rangle$$

DOVE $|SF\rangle = |0,0\rangle$.

ABBIAMO

$$\frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi$$

USANDO LE ARMONICHE SFERICHE, CALCOLIAMO GLI ELEMENTI DI MATRICE

$$\langle 0,0|\frac{x}{r}|1,1\rangle = \int d\Omega\, Y_0^{0*}\sin\theta\cos\varphi\, Y_1^1$$

$$= \int d\cos\theta\, d\varphi \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sin\theta\cos\varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

USIAMO

$$\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}d\varphi = 0 \quad SE \quad n \neq 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi\, e^{i\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})e^{i\varphi} = \frac{1}{2}2\pi = \pi$$

$$\int_{-1}^{1} d\cos\theta \sin^2\theta = \int_{-1}^{1} d\cos\theta(1-\cos^2\theta) = \int_{-1}^{1} dx(1-x^2) = \frac{4}{3}$$

QUINDI

$$\langle 0,0|\frac{x}{r}|1,1\rangle = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\pi\cdot\frac{4}{3} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

POI

$$\langle 0,0|\frac{x}{r}|1,0\rangle = \int d\Omega\, Y_0^{0*}\sin\theta\cos\varphi\, Y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int d\cos\theta\, d\varphi\, \sin\theta\cos\varphi\cos\theta = 0$$

$$\langle 0,0|\frac{x}{r}|1,-1\rangle = \int d\Omega\, Y_0^{0*}\sin\theta\cos\varphi\, Y_1^{-1} = \int d\Omega\, Y_0^{0*}\sin\theta\cos\varphi\left(-Y_1^{1*}\right)$$

$$= \int d\cos\theta\, d\varphi\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sin\theta\cos\varphi\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

INFINE

$$\Psi(t) = a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle$$

$$\langle SF|\frac{x}{r}|\Psi(t)\rangle = a\langle SF|\frac{x}{r}|1,1\rangle + b\langle SF|\frac{x}{r}|1,0\rangle + c\langle SF|\frac{x}{r}|1,-1\rangle$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-e^{2it\beta}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-1+e^{2it\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(-1+e^{2it\beta}-1+e^{2it\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(e^{2it\beta}-1\right)$$

· <u>RICAPITOLANDO</u>: ESPRESSIONI DA RICORDARE

$$\underline{\nabla} = \hat{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{u}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad f(\underline{r}')-f(\underline{r}) = \underline{\nabla} f\cdot(\underline{r}'-\underline{r})$$

$$\underline{L} = \underline{r}\wedge\underline{p} = i\hbar\left(-\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\cdot\,) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$$

$$p^2 = -\hbar^2\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\cdot\,) + \frac{L^2}{r^2} \qquad p^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{L_z^2}{\rho^2}$$

(IN CILINDRICHE)

· HAMILTONIANE SEPARABILI

CONSIDERIAMO UNA HAMILTONIANA CON POTENZIALE SEPARABILE

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

STUDIAMO INNANZITUTTO IL PROBLEMA IN 1D:

$$\left\{ \frac{p_x^2}{2m} + V_1(x) \right\} \varphi_m^{(1)} = E_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}(x)$$

$$\left\{ \frac{p_x^2}{2m} + V_2(x) \right\} \varphi_m^{(2)} = E_m^{(2)} \varphi_m^{(2)}(x)$$

SIA

$$\varphi_{mmr}(x,y,z) = \varphi_m^{(1)}(x)\,\varphi_m^{(2)}(y)\,\varphi_r^{(3)}(z)$$

OSSIA IL PRODOTTO DI 3 AUTOFUNZIONI DEI 3 PROBLEMI UNIDIMENSIONALI.

MOSTRIAMO CHE QUESTA È AUTOFUNZIONE DI H:

$$H\,\varphi_{mmr}(x,y,z) = \left(E_m^{(1)} + E_m^{(2)} + E_r^{(3)}\right)\varphi_{mmr}$$

SONO TUTTE? SÌ, PERCHÈ FORMANO UN INSIEME COMPLETO IN 3D.

DIMOSTRAZIONE

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_1(x) + V_2(y) + V_3(z) = H$$

$$H = H^{(1)}(x) + H^{(2)}(y) + H^{(3)}(z)$$

E SI HANNO

$$H^{(1)}(x)\,\varphi_m^{(1)}(x)\,\varphi_m^{(2)}(y)\,\varphi_r^{(3)}(z) = E_m^{(1)}\,\varphi_m^{(1)}(x)\,\varphi_m^{(2)}(y)\,\varphi_r^{(3)}(z)$$

$$H^{(1)}(x)\,\varphi_{mmr} = E_m^{(1)}\,\varphi_{mmr}$$

$$H^{(2)}(y)\,\varphi_{mmr} = E_m^{(2)}\,\varphi_{mmr}$$

$$H^{(3)}(z)\,\varphi_{mmr} = E_r^{(3)}\,\varphi_{mmr}$$

SONO TUTTE? PRENDIAMO LO SPAZIO DELLE $f(x,y)$: SOTTO OPPORTUNE IPOTESI,

$$f(x,y) = \sum_m a_m(y)\,\varphi_m(x)$$

$$a_m(y) = \sum_m b_{mm}\,\varphi_m(y)$$

· ESEMPIO: OSCILLATORE COMPLETAMENTE ANISOTROPO

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2 + \frac{1}{2}k_3 z^2$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_3^2 z^2 \qquad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$$

CHI È LO SPETTRO?

$$E = \hbar\omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_3\left(n_3+\frac{1}{2}\right) = E_{n_1,n_2,n_3}$$

DOVE SI NOTA CHE GLI STATI SONO CARATTERIZZATI DA TRE NUMERI QUANTICI. LO STATO FONDAMENTALE È DATO DA

$$E_f = E_{000} = \frac{\hbar}{2}(\omega_1+\omega_2+\omega_3)$$

CHI SONO LE AUTOFUNZIONI? IN 1D AVEVO

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

QUINDI

$$\psi_{000}(x) = \left(\frac{m\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega_1 x^2}{2\hbar}\right)\cdot\left(\frac{m\omega_2}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega_2 y^2}{2\hbar}\right)\cdot\left(\frac{m\omega_3}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega_3 z^2}{2\hbar}\right)$$

$$= \text{cost.}\cdot\exp\left(-\frac{m}{2\hbar}\left(\omega_1 x^2+\omega_2 y^2+\omega_3 z^2\right)\right)$$

ESERCIZIO

CONSIDERIAMO L'HAMILTONIANA

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2}(x^2+y^2+4z^2) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+4z^2) \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

① SI TROVI LO SPETTRO.

$$V_1(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \qquad E_1 = \hbar\omega\left(n_1+\frac{1}{2}\right)$$

$$V_2(y) = \frac{1}{2}m\omega^2y^2 \qquad E_2 = \hbar\omega\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

$$V_3(z) = 2m\omega^2z^2 = \frac{1}{2}m(2\omega)^2z^2 \qquad E_3 = \hbar(2\omega)\left(n_3+\frac{1}{2}\right)$$

$$V = V_1+V_2+V_3$$

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega(n_1+n_2+2n_3+2)$$

SF: $E_{000} = 2\hbar\omega$

I ECC.: $n_1 = 1 \quad n_2 = n_3 = 0$; $n_2 = 1 \quad n_1 = n_3 = 0$ $\qquad E_{100} = E_{010} = 3\hbar\omega$

II ECC.: 200, 020, 110, 001 $\qquad E = 4\hbar\omega$

② SCRIVERE L'AUTOFUNZIONE DELLO STATO FONDAMENTALE.

PER L'OSCILLATORE UNIDIMENSIONALE,

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

ALLORA

$$\psi_{000}(x,y,z) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega y^2}{2\hbar}\right)\left(\frac{m2\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m(2\omega)z^2}{2\hbar}\right)$$

$$= 2^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+2z^2)\right)$$

② SCRIVERE L'AUTOFUNZIONE DEL PRIMO STATO ECCITATO.

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2}\, \xi \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$\psi_{100} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2}\, \xi \exp\left(\quad \right) \dots = \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\, \psi_{000}(x,y,z)$$

$$\psi_{010} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y\, \psi_{000}(x,y,z)$$

③ MOSTRARE CHE H COMMUTA CON L_z.

POICHÈ H È INVARIANTE PER ROTAZIONI ATTORNO ALL'ASSE Z,

$$UHU^\dagger = H$$

DOVE U È IL GENERATORE DI TALE ROTAZIONE,

$$U = e^{-i\theta\frac{L_z}{\hbar}}$$

$$e^{-i\theta\frac{L_z}{\hbar}} H e^{i\theta\frac{L_z}{\hbar}} = H$$

RICORDANDO

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \dots$$

$$H - \frac{i\theta}{\hbar}[L_z, H] + \mathcal{O}(\theta^2) = H \qquad \Rightarrow \qquad [L_z, H] = 0$$

OPPURE POSSO CALCOLARE PER ESTESO

$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi\,,\ r\sin\theta\sin\varphi\,,\ r\cos\theta)$$

$$V = \frac{K}{2}(x^2+y^2+4z^2) = \frac{K}{2}(r^2\sin^2\theta + 4r^2\cos^2\theta)$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L_z V f(r,\theta,\varphi) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{K}{2}\left(r^2\sin^2\theta + 4r^2\cos^2\theta\right)\right) f = \frac{K}{2}\left(\quad \right)\left(-i\hbar\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) = V L_z f$$

POICHÈ P^2 È UNO SCALARE COMMUTA CON TUTTO; HO QUINDI LA TESI. (IN BUONA SOSTANZA HO FATTO VEDERE CHE IN R.S. IL MIO V NON DIPENDE DALLA COORDINATA φ, CHE È INVECE L'UNICA SU CUI AGISCE L_z).

④ TROVARE UNA BASE SIMULTANEA DI L_z E H.

$$L_z \Psi_{000} = 0$$

INFATTI OSSERVANDO $\Psi_{000}(x,y,z)$ NOTIAMO CHE È INVARIANTE PER ROTAZIONI ATTORNO A $\hat{z}$, QUINDI

$$\Psi_{000} = f(\theta, r).$$

CERCO LE ALTRE AUTOFUNZIONI NELLA FORMA

$$\Psi_{100} + i\Psi_{010} = \Psi_+$$

$$\Psi_{100} - i\Psi_{010} = \Psi_-$$

$$\left| \begin{array}{l} r Y_1^1 = \alpha(x+iy) \\ r Y_1^{-1} = -\alpha(x-iy) \\ r Y_1^0 = \beta z \end{array} \right.$$

SI HANNO

$$\Psi_{100} = A x \Psi_{000}$$

$$\Psi_{010} = A y \Psi_{000}$$

$$\Psi_+ = A(x+iy)\Psi_{000} = A r \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Psi_{000} = A r \sin\theta e^{i\varphi}\Psi_{000}(\theta, r)$$

$$L_z e^{i\varphi} = -i\hbar i e^{i\varphi} = \hbar e^{i\varphi}$$

$$L_z \Psi_+ = \hbar \Psi_+$$

$$L_z \Psi_- = -\hbar \Psi_-$$

E HO RITROVATO, A MENO DI COSTANTI, LE ALTRE DUE ARMONICHE SFERICHE $(m = \pm 1)$.

NOTA: CREDO CHE UN'ALTERNATIVA SIA LA SEGUENTE (CHIARAMENTE LA DEGENERAZIONE DELLA BASE INIZIALE $\Psi_{m_1 m_2 m_3}(x,y,z)$ RENDE LA SCELTA NON UNIVOCA). RISCRIVO

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(4z^2) = H_0 + \frac{1}{2}m(2\omega)^2 z^2$$

DOVE H_0 È L'HAMILTONIANA DELL'OSCILLATORE ISOTROPO BIDIMENSIONALE, LE CUI AUTOFUNZIONI SI POSSONO PRENDERE NELLA FORMA (VEDI P. 187 PATRÌ-TESTA)

$$\Psi_{ms} = R_{ms}(r)\Phi_s(\varphi) \qquad \text{CON } -m \le s \le m, \; m, s \text{ CON LA STESSA PARITÀ}, \; E_m = \hbar\omega(m+1)$$

IN PARTICOLARE Φ_s È UN'AUTOFUNZIONE DI L_z ESSENDO

$$\Phi_s(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{is\varphi} \qquad L_z \Phi_s = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{is\varphi} = \hbar s \cdot \Phi_s$$

INFINE COSTRUISCO

$$\Psi_{TOT} = \Psi_{ms}(r,\varphi)\cdot\Psi_{m_3}(z) = \Psi_{ms}(r,\varphi)\cdot\Psi_{m_3}(r,\theta)$$

- COORDINATE CILINDRICHE

$$\underline{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

$$\underline{M}_\rho = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \qquad \hat{u}_\rho = \frac{\underline{M}_\rho}{|\underline{M}_\rho|} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$\underline{M}_\varphi = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) \qquad \hat{u}_\varphi = \frac{\underline{M}_\varphi}{|\underline{M}_\varphi|} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$\underline{M}_z = \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = (0,0,1) \qquad \hat{u}_z = \frac{\underline{M}_z}{|\underline{M}_z|} = (0,0,1)$$

$$\underline{\nabla} = \frac{\hat{u}_\rho}{|\underline{M}_\rho|}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{u}_\varphi}{|\underline{M}_\varphi|}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hat{u}_z}{|\underline{M}_z|}\frac{\partial}{\partial z} = \hat{u}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\underline{L} = \underline{r} \wedge \underline{p}$$

$$L_z = \hat{u}_z \cdot \left\{ (\underbrace{\rho\hat{u}_\rho}_{\text{COMPON. XY}} + \underbrace{z\hat{u}_z}_{\text{COMPON. Z}}) \wedge (-i\hbar)\left(\hat{u}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}$$

$$= (-i\hbar)\,\hat{u}_z \cdot \left\{ \rho\hat{u}_\rho \wedge \left(\hat{u}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}$$

$$= (-i\hbar)\,\hat{u}_z \cdot \left\{ \rho\hat{u}_\rho \wedge \frac{1}{\rho}\hat{u}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right\} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

DOVE SI SONO ELIMINATI ANCHE I TERMINI CHE NON CONCORRONO ALL'ESPRESSIONE DELLA COMPONENTE L_z (ANCHE SE NON ERANO DI PER SÉ NULLI, MA SOLO $\perp$ A $\hat{u}_z$). SI NOTI CHE SI È PERSA LA DIPENDENZA DA ρ E RITROVATA LA FORMA DI L_z IN COORDINATE SFERICHE. AVREMO QUINDI NUOVAMENTE AUTOFUNZIONI NELLA FORMA $e^{im\varphi}$

CALCOLIAMO INFINE IL LAPLACIANO.

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} f = \left(\hat{u}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{u}_\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{u}_\rho\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\hat{u}_\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{u}_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\hat{u}_\varphi}{\rho}\left\{\frac{\partial \hat{u}_\rho}{\partial \varphi}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right\}$$

POICHÈ

$$\frac{\partial \hat{u}_\rho}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \hat{u}_\varphi$$

POSSIAMO SCRIVERE

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}$$

SCRIVIAMO QUINDI IN COORDINATE CILINDRICHE

$$p^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

NOTIAMO CHE

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad L_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$p^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{L_z^2}{\rho^2}$$

DA CONFRONTARSI, IN COORDINATE SFERICHE, CON

$$p^2 = -\hbar^2 \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\cdot) + \frac{L^2}{r^2}$$

$$= -\hbar^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2}$$

NOTA: NEI PROBLEMI A ρ O r FISSATO, LE DUE ESPRESSIONI SI RIDUCONO A

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{L_z^2}{\rho^2} \qquad \text{(CILINDRICHE)}$$

$$p^2 = \frac{L^2}{r^2} \qquad \text{(SFERICHE)}$$

· ESERCIZIO

PARTICELLA CHE SI MUOVE SU UN CILINDRO DI RAGGIO R.

$$U(z) = \frac{1}{2} M\omega^2 z^2$$

POICHÈ R È FISSATO, P^2 SI RIDUCE E HO

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{L_z^2}{2MR^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 z^2$$

QUAL È LO SPAZIO DI HILBERT IN CUI VIVONO LE FUNZIONI D'ONDA?

$\psi(\varphi, z)$ IN CILINDRICHE.

CERCHIAMO LO SPETTRO DELL'HAMILTONIANA.

NOTIAMO CHE H È SEPARABILE, QUINDI

$$\psi_{mn} = \psi_m(\varphi)\,\psi_n(z)$$

$$E = \frac{\hbar^2 m^2}{2MR^2} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

GIÀ CONOSCIAMO LE $\psi_n(z)$ (OSCILLATORE UNIDIMENSIONALE) E

$$\psi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$

AVREMO

$m = 0 \quad n = 0 \qquad E = \frac{\hbar\omega}{2}$

$m = 0 \quad n = 1 \qquad E = \frac{3\hbar\omega}{2}$

$m = \pm 1 \quad n = 0 \qquad E = \frac{\hbar^2}{2MR^2} + \frac{\hbar\omega}{2}$

PER CIASCUNA VELOCITÀ
HO DUE SENSI DI ROTAZIONE

- ## MOTI CENTRALI

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

CON V POTENZIALE CENTRALE. SO A PRIORI (SIMMETRIA PER ROTAZIONI)

$[\underline{L}, V] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\underline{L}, H] = 0$

ESISTE UNA BASE IN CUI H, L^2, L_z SONO DIAGONALI,

$|E, \ell, m\rangle$

$H|E,\ell,m\rangle = E_{\ell m}|E,\ell,m\rangle$

$L_+ H|E,\ell,m\rangle = E_{\ell m} L_+|E,\ell,m\rangle$

$H L_+|E,\ell,m\rangle = E_{\ell m} L_+|E,\ell,m\rangle$

$H C|E,\ell,m+1\rangle = E_{\ell m} C|E,\ell,m+1\rangle$

$H|E,\ell,m+1\rangle = E_{\ell m}|E,\ell,m+1\rangle$

E AVREI TROVATO UN ALTRO AUTOSTATO CON LA STESSA ENERGIA.
QUESTO MI DICE SUBITO CHE GLI STATI ℓ SONO DEGENERI E

$E_{\ell m} = E_\ell$ LO SPETTRO NON DIPENDE DA m.

$\ell = 0 \quad m = 0$

$\ell = 1 \quad m = 0, \pm 1$

$\ell = 2 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2$

STUDIAMO, USANDO LE COORDINATE SFERICHE,

$H\psi = E\psi$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{L^2\psi}{r^2\hbar^2}\right) + V\psi = E\psi$$

NOTA: RACCOGLIERE $\frac{\hbar^2}{2m}$ CONFONDE LE IDEE, MEGLIO LASCIARLI SEPARATI.

POICHE' H, L^2, L_z COMMUTANO, CERCO LE SOLUZIONI NELLA FORMA

$$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r)\, Y_m^\ell(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} Y_m^\ell - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f(r)\, Y_m^\ell\right) + V f Y_m^\ell = E f Y_m^\ell$$

HO TROVATO L'EQUAZIONE NELLA SOLA f

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\cdot\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}f+Vf=Ef$$

DETTA $u=rf$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2u}{dr^2}+\underbrace{\left\{\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right\}}_{V_{eff}(r)}u(r)=Eu(r)$$

IL PROBLEMA È MOLTO SIMILE A QUELLO CLASSICO SE NON FOSSE CHE QUI $r\in[0,\infty]$ E CHE OVVIAMENTE V_{eff} DIPENDE DA l.
IL FATTO CHE m NON COMPAIA NELL' EQUAZIONE MI DICE CHE LO SPETTRO È DEGENERE: LO CERCO FISSANDO UNO ALLA VOLTA I VALORI DI l.
RESTA DA NORMALIZZARE

$$\int \psi^*\psi\, d^3r = 1$$

$$\int f^*(r)f(r)\,Y^*_{lm}Y_{lm}\,r^2\,dr\,d\Omega = \int f^*(r)f(r)\,r^2dr = \int_0^\infty |u(r)|^2\,dr$$

OSSIA ANCHE LA NORMALIZZAZIONE AVVIENE COME IN UN PROBLEMA UNIDIMENSIONALE.

• CERCHI, BUCHE E SCATOLE IN MECCANICA STATISTICA

PARTICELLA LIBERA CHE SI MUOVE SU UN CERCHIO DI RAGGIO R.

$$H = \frac{p^2}{2M}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{L_z^2}{2M\rho^2}$$

(L'HO RISCRITTA IN CILINDRICHE). IL VINCOLO COMPORTA

$$\psi(\rho,\varphi,z) \to \psi(\varphi), \quad z=0, \quad \rho = R.$$

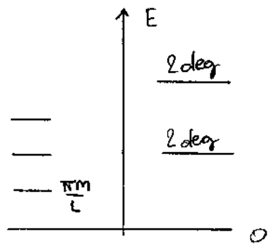
$$H = \frac{L_z^2}{2MR^2}$$

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2MR^2} \qquad m \in \mathbb{Z} \qquad\qquad L = 2\pi R$$

$$= \frac{\hbar^2}{2M}\frac{4\pi^2 m^2}{L^2} = \frac{h^2 m^2}{2ML^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \qquad\qquad k = \frac{2\pi m}{L}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

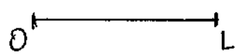
DA CONFRONTARSI CON LA PARTICELLA IN UNA BUCA DI LARGHEZZA L,

$$E = \frac{h^2 m^2}{8ML^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = \frac{\hbar^2 \pi^2 m^2}{2ML^2} \qquad\qquad k = \frac{\pi m}{L}, \quad m > 0$$



NOTO CHE NELLA BUCA HO IL DOPPIO DEGLI STATI, MA GLI STATI SUL CERCHIO SONO DOPPIAMENTE DEGENERI. QUESTO GIUSTIFICA IN MECCANICA STATISTICA IL FATTO CHE IL CONTEGGIO DEGLI STATI NON CAMBI.

STUDIAMO ORA IL MOTO DI UNA PARTICELLA SU UN SEGMENTO CON CONDIZIONI PERIODICHE AL CONTORNO



$$\psi(x) = \psi(x+L)$$

E' IMMEDIATA LA GENERALIZZAZIONE ALLA "SCATOLA PERIODICA"

$$\begin{cases} \psi(x,y,z) = \psi(x+L,y,z) \\ \psi(x,y,z) = \psi(x,y+L,z) \\ \psi(x,y,z) = \psi(x,y,z+L) \end{cases}$$

RISOLVIAMO NEL CASO UNIDIMENSIONALE,

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

L'EQUAZIONE DI SCHRÖEDINGER SI SCRIVE

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi = A\cos(kx+\varphi)$$

IMPONIAMO $\psi(x) = \psi(x+L)$,

$$A\cos(kx+\varphi) = A\cos(kx+kL+\varphi)$$

$$kL = 2\pi m > 0 \qquad \text{(INFATTI LO E` } k\text{)}$$

$$k = \frac{2\pi m}{L} \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\psi(x) = \frac{A}{2}e^{i\varphi}e^{ikx} + \frac{A}{2}e^{-i\varphi}e^{-ikx}$$

PER CIASCUN VALORE DI m HO DOPPIA DEGENERAZIONE,

$$e^{ikx} = e^{i\frac{2\pi m}{L}x}$$

$$e^{-ikx} = e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}$$

MA POTREI SIMILMENTE AFFERMARE

$$m = 3 \rightarrow e^{i\frac{2\pi 3}{L}x}, \; e^{-i\frac{2\pi 3}{L}x}$$

$$\begin{cases} m = 3 & \rightarrow e^{i\frac{2\pi 3}{L}x} \\ m = -3 & \rightarrow e^{-i\frac{2\pi 3}{L}x} \end{cases}$$

OVVERO

$$e^{ikx} \qquad k = \frac{2\pi m}{L} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

E QUESTE HANNO IL VANTAGGIO DI ESSERE AUTOFUNZIONI DELL' IMPULSO OLTRE CHE DI H.

MANCA DA STUDIARE IL CASO CON $E = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = 0 \rightarrow \psi(x) = a + bx$$

IMPONENDO LE C.C.,

$$a+bx = a+b(x+L) \quad \Rightarrow \quad b=0$$

$$\psi(x) = a$$

OSSIA L'AUTOFUNZIONE ESISTE, MA NON È DEGENERE.

LA PARTICELLA È "DIFFUSA" UNIFORMEMENTE LUNGO IL CERCHIO: HO IN OGNI PUNTO UGUALE PROBABILITÀ DI TROVARLA.

LA SOLUZIONE SI GENERALIZZA AL CASO TRIDIMENSIONALE CON

$$E = \frac{\hbar^2 |\underline{k}|^2}{2m}$$

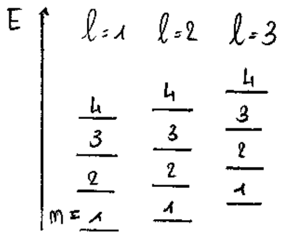
$$\underline{k} = \frac{2\pi\, \underline{m}}{L} \qquad \underline{m} = (m_x, m_y, m_z) \qquad m_i \in \mathbb{Z}$$

· <u>OSCILLATORE ISOTROPO TRIDIMENSIONALE</u>

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

$$[H, \underline{L}] = 0$$

LO SPETTRO E_{ml} NON DIPENDE DA m E LE AUTOFUNZIONI SONO DA CERCARE TRA QUELLE DI L^2, L_z.



$$\psi(r,\theta,\varphi) = \underbrace{\frac{u(r)}{r}}\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

PER L^2 E L_z QUESTA È UNA COSTANTE.

MI ASPETTO CHE E CRESCA AL CRESCERE DI l: CLASSICAMENTE STO FORNENDO PIÙ MOMENTO ANGOLARE E QUINDI PIÙ ENERGIA.

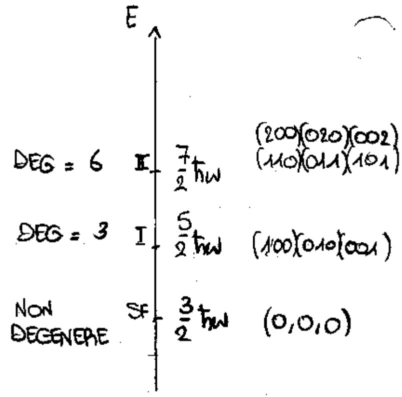
POSSO RISOLVERE IL PROBLEMA RICONDUCENDOMI AL CASO MONODIMENSIONALE, ESSENDO H SEPARABILE.

AVREI ALLORA

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2+y^2+z^2)$$

$$E = \hbar\omega\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_2+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_3+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right) := \hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right)$$



CERCO UNA COMBINAZIONE LINEARE DI QUESTE AUTOFUNZIONI CHE MI DIA UNA BASE DI L^2 E L_z (HO VISTO PRIMA CHE QUESTO È POSSIBILE).

RICORDANDO LE AUTOFUNZIONI DELL'OSCILLATORE UNIDIMENSIONALE,

$$\begin{cases} \psi_0 = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2} \\ \psi_1 = 2\sqrt{\alpha}\, x\, \psi_0 \\ \psi_2 = \sqrt{2}\left(\alpha x^2 - \frac{1}{4}\right)\psi_0 \end{cases} \qquad \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

PRENDO

$$\psi_{000} = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\alpha x^2 - \alpha y^2 - \alpha z^2} = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\alpha r^2}$$

CHE È GIÀ AUTOFUNZIONE $(l=0, m=0)$ DI L^2 E L_z (INFATTI DANNO ENTRAMBI DERIVATE RISPETTO AGLI ANGOLI θ, φ). ORA CONSIDERO

$$\psi_{100} = \psi_1(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = 2\sqrt{\alpha}\, x\, \psi_{000}(r)$$

$$\psi_{010} = 2\sqrt{\alpha}\, y\, \psi_{000}(r)$$

$$\psi_{001} = 2\sqrt{\alpha}\, z\, \psi_{000}(r)$$

OSSIA LE AUTOFUNZIONI DEL I STATO ECCITATO DELL'OSCILLATORE. RICORDIAMO

$$\begin{cases} r Y_1^1 = A(x+iy) \\ r Y_1^{-1} = -A(x-iy) \\ r Y_1^0 = B z \end{cases} \qquad z = \frac{r Y_1^0}{B}$$

USIAMO QUINDI LE AUTOFUNZIONI DELL'OSCILLATORE PER CERCARE DI COSTRUIRE LE ARMONICHE SFERICHE.

ABBIAMO

$$\Psi_{001} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{B} r \Psi_{000}(r) Y_1^0(\theta,\varphi) \qquad l=1, \ m=0$$

$$\Psi_{100} + i\Psi_{010} = 2\sqrt{\alpha}\, \Psi_{000}(r)(x+iy)$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha}}{A} r \Psi_{000}(r) Y_1^1 \qquad l=1, \ m=1$$

$$\Psi_{100} - i\Psi_{010} = \dots \qquad l=1, \ m=-1$$

PASSIAMO AL II STATO ECCITATO: POICHÈ LA DEGENERAZIONE È PARI, NON POSSO ASPETTARMI SOLTANTO ARMONICHE CON LO STESSO l.

$$\Psi_{200} = \sqrt{2}\left(\alpha x^2 - \frac{1}{4}\right)\Psi_{000}$$

$$\Psi_{020} = \sqrt{2}\left(\alpha y^2 - \frac{1}{4}\right)\Psi_{000}$$

$$\Psi_{002} = \sqrt{2}\left(\alpha z^2 - \frac{1}{4}\right)\Psi_{000}$$

$$\Psi_{110} = 4\alpha xy \Psi_{000}$$

$$\Psi_{101} = 4\alpha xz \Psi_{000}$$

$$\Psi_{011} = 4\alpha yz \Psi_{000}$$

MI ASPETTO 5 STATI CON $l=2$ PIÙ QUELLO CON $l=0$, AVENDO A CHE FARE CON POLINOMI DI II GRADO.

NOTA: MEGLIO FORSE LAVORARE AL CONTRARIO, COME $Y_2^2 = A\sin^2\theta e^{i2\varphi}$ E USANDO $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.

$$r^2 Y_2^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Psi_{200} - \Psi_{020} = \sqrt{2}\left(\alpha x^2 - \frac{1}{4} - \alpha y^2 + \frac{1}{4}\right)\Psi_{000} = \alpha\sqrt{2}(x^2 - y^2)\Psi_{000}$$

$$\Psi_{200} - \Psi_{020} + ib\Psi_{110} = \alpha\sqrt{2}(x^2-y^2)\Psi_{000} + 4b\alpha i xy \Psi_{000}$$

$$= \alpha\sqrt{2}\left(x^2 - y^2 + 2i\sqrt{2}\, bxy\right)\Psi_{000}$$

SCELGO QUINDI

$$\Psi_{200} - \Psi_{020} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Psi_{110} \qquad l=2, \ m=2$$

SIMILMENTE (BASTA PRENDERE IL C.C. PER PASSARE DA m A $-m$),

$$\psi_{200} - \psi_{020} - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_{110} \qquad l=2,\ m=-2$$

ORA

$$r^2 Y_2^1 = z(x+iy) = zx + izy$$

NOTA:
$Y_2^1 = A \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$
$Y_2^0 = B(3\cos^2\theta - 1)$

$$\psi_{101} + i\psi_{011} \qquad l=2,\ m=1$$

$$\psi_{101} - i\psi_{011} \qquad l=2,\ m=-1$$

$$r^2 Y_2^0 = (2z^2 - x^2 - y^2)$$

$$2\psi_{002} - \psi_{200} - \psi_{020} \qquad l=2,\ m=0$$

$$= \sqrt{2}\left(2\alpha z^2 - \frac{1}{2} - \alpha x^2 + \frac{1}{4} - \alpha y^2 + \frac{1}{4}\right)\psi_{000}$$

$$= \alpha\sqrt{2}(2z^2 - x^2 - y^2)\psi_{000}$$

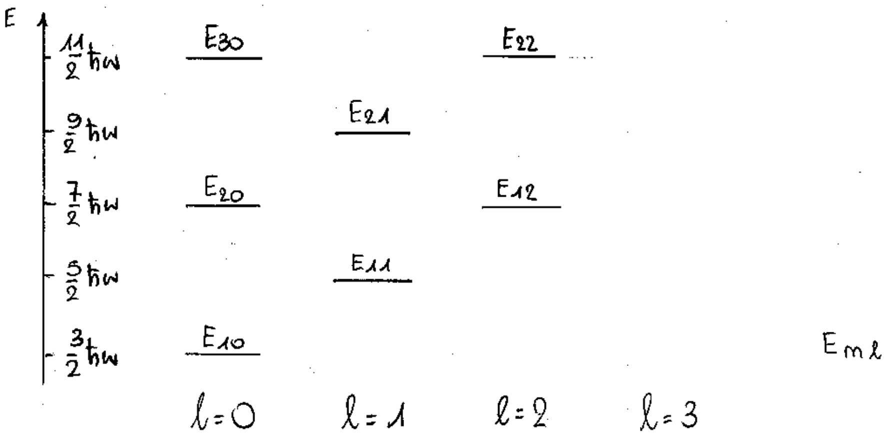
RIMANE $l=0$: SCELGO UNA COMBINAZIONE IN MODO TALE CHE IL RISULTATO NON DIPENDA DAGLI ANGOLI.

$$\psi_{200} + \psi_{020} + \psi_{002}$$

$$= \sqrt{2}\left(\alpha r^2 - \frac{3}{4}\right)\psi_{000}(r) \qquad l=0,\ m=0$$

IL PROSSIMO STATO AVRÀ DEGENERAZIONE 10:

(300)(030)(003)
(210)(201)(120)(021)
(102)(012)(111)



$l=4,2,0$	15
$l=3,1$	10
$l=2,0$	6
$l=1$	3
$l=0$	$d=0$

SI OSSERVA LA "DEGENERAZIONE ACCIDENTALE" (AD ESEMPIO $E_{20}=E_{12}$), CARATTERISTICA PECULIARE DELL' OSCILLATORE ISOTROPO (MA ANCHE DELL' ATOMO DI IDROGENO).

COME SI COMPORTANO SOTTO PARITÀ LE SOLUZIONI?

PER L'OSCILLATORE MONODIMENSIONALE SI ERA VISTO

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$$

DISPARI	$n = 3$
PARI	$n = 2$
DISPARI	$n = 1$
PARI	$n = 0$

($[H, I] = 0$ E TEOREMA DEI NODI). ORA

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(-\underline{r}) = \psi_{n_1}(-x)\,\psi_{n_2}(-y)\,\psi_{n_3}(-z)$$

$$= (-1)^{n_1}(-1)^{n_2}(-1)^{n_3}\,\psi_{n_1,n_2,n_3}(\underline{r})$$

$$= (-1)^{n_1+n_2+n_3}\,\psi_{n_1 n_2 n_3}(\underline{r})$$

$$= (-1)^{n}\,\psi_{n_1 n_2 n_3}(\underline{r})$$

$\frac{7}{2}\hbar\omega$	$\ell = 2, 0$	PARI	$n = 2$
$\frac{5}{2}\hbar\omega$	$\ell = 1$	DISPARI	$n = 1$
$\frac{3}{2}\hbar\omega$	$\ell = 0$	PARI	$n = 0$

(CHE È POI ANCHE LA PARITÀ DI ℓ).

· LA FUNZIONE RADIALE RIDOTTA

RICORDIAMO QUANTO RICAVATO PER I MOTI CENTRALI,

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

$$\psi = \frac{u_\ell(r)}{r}\,Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_\ell'' + \left(V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}\right)u_\ell = E\,u_\ell \qquad \text{CON} \qquad \int_0^\infty dr\,|u|^2 = 1$$

STUDIAMO IL PROBLEMA AL VARIARE DI ℓ. PER $\ell = 0$ E SCEGLIENDO COME $V(r)$ UN POTENZIALE ARMONICO,

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u_\ell'' + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 u_\ell = E\,u_\ell$$

CHE È LA STESSA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELL'OSCILLATORE ARMONICO UNIDIMENSIONALE; TUTTAVIA

$$u_0(r=0) = c \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{c}{r} \quad \text{PER } r \to 0$$

CHE È UNA u_0 ACCETTABILE PER L'OSCILLATORE, ORA DÀ LUOGO A DIVERGENZE AVENDO DEFINITO $u = r\psi$.

RICORDIAMO DALL' ELETTROMAGNETISMO

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = e\,\delta^{(3)}(r) \qquad \varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right) \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\,\delta^{(3)}(\underline{r})$$

$$\underline{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta^{(3)}(r)}$$

POICHE' LA δ NON E' UNA FUNZIONE D'ONDA DI UNO STATO LEGATO, DOVREMO CONSIDERARE QUELLE u_ℓ t.c.

$u_\ell \sim r \qquad r \to 0$

$u_\ell(r=0) = 0$

COSI' DA ANNULLARE LA DIVERGENZA NELL' ORIGINE.

QUESTO CI FA SCARTARE SUBITO LE AUTOFUNZIONI PARI (SI E' VISTO CHE NON SI POSSONO ANNULLARE NELL' ORIGINE); CI RESTA SOLO LA PARTE DISPARI DELLO SPETTRO.

RICORDIAMO CHE NEI PROBLEMI UNIDIMENSIONALI DOVEVO IMPORRE

a) $\psi(+\infty) = 0$

b) $\psi(-\infty) = 0$

c) NORMALIZZAZIONE

ORA INVECE RICHIEDO

a) $u(+\infty) = 0$

b) $u(0) = 0$

c) NORMALIZZAZIONE

E ANCORA TROVEREMO CHE CIO' SARA' POSSIBILE SOLO PER ALCUNI VALORI DI E (CONDIZIONE DI QUANTIZZAZIONE).

· ATOMO DI IDROGENO

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

(POTENZIALE COULOMBIANO). LA S.E. SI SCRIVE, IN TERMINI DI $u(r) = r f(r)$,

$$u_\ell'' - \frac{2m}{\hbar^2}\left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}\right) u_\ell = -\frac{2mE}{\hbar^2} u_\ell$$

CERCHIAMO LO SPETTRO DISCRETO $(E<0)$. SIANO

$$K^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2} \qquad \lambda = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$$

$$u_\ell'' + \left(\frac{\lambda}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) u_\ell = K^2 u_\ell$$

STUDIAMO IL COMPORTAMENTO DELLA SOLUZIONE PER GRANDI E PICCOLI r.

$r \to \infty$

$$u_\ell'' = K^2 u_\ell$$

$$u_\ell = \cancel{a e^{Kr}} + b e^{-Kr}$$

$r \to 0$

$$u_\ell'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u_\ell = 0 \qquad (u_\ell \text{ VA A ZERO PER } r \to 0)$$

$$u_\ell \sim r^S \qquad (\text{SOLUZIONE DI PROVA})$$

$$S(S-1) r^{S-2} - \ell(\ell+1) r^{S-2} = 0$$

$$S^2 - S - \ell(\ell+1) = 0$$

$$S = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\ell(\ell+1)}}{2} = \frac{1 \pm (2\ell+1)}{2} = \begin{cases} \ell+1 \\ -\ell \end{cases}$$

LA SOLUZIONE CON $-\ell$ NON È MAI ACCETTABILE (DIVERGE); SI HA

$$u_\ell \sim r^{\ell+1}$$

NOTA: SE $u_\ell \sim r$ È PERCHÉ $\ell = 0$, QUINDI LA PARTE IN $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$ SCOMPARE E NON C'È DIVERGENZA.

SI SONO TROVATI

$$\begin{cases} u_\ell \sim e^{-\kappa r} & r\to\infty \\ u_\ell \sim r^{\ell+1} & r \to 0 \end{cases}$$

SCELGO

$$u_\ell = r^{\ell+1} e^{-\kappa r} g(r) \qquad \text{CON} \qquad \begin{vmatrix} g(0) = \text{COST.} \\ g(r) \sim r^p \quad r\to\infty \end{vmatrix} \quad (\text{NON COME } e^{\kappa r}, e^{2\kappa r})$$

SOSTITUENDO NELLA S.E.,

$$u_\ell = e^{-\kappa r} f$$

$$u_\ell'' = \kappa^2 e^{-\kappa r} f + e^{-\kappa r} f'' + 2(-\kappa e^{-\kappa r}) f' \qquad (AB)'' = A''B + AB'' + 2A'B'$$

$$\kappa^2 e^{-\kappa r} f + e^{-\kappa r} f'' - 2\kappa e^{-\kappa r} f' + \frac{\lambda}{r} e^{-\kappa r} f = \kappa^2 e^{-\kappa r} f + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} e^{-\kappa r} f$$

$$f'' - 2\kappa f' + \frac{\lambda}{r} f - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f = 0$$

$$f = r^{\ell+1} g$$

$$f'' = (\ell+1)\ell r^{\ell-1} g + r^{\ell+1} g'' + 2(\ell+1) r^\ell g'$$

$$f' = (\ell+1) r^\ell g + r^{\ell+1} g'$$

$$(\ell+1)\ell r^{\ell-1} g + r^{\ell+1} g'' + 2(\ell+1) r^\ell g' - 2\kappa\left\{(\ell+1) r^\ell g + r^{\ell+1} g'\right\} + \lambda r^\ell g$$

$$- \ell(\ell+1) r^{\ell-1} g = 0$$

$$r g'' + 2(\ell+1) g' - 2\kappa\left\{(\ell+1) g + r g'\right\} + \lambda g = 0$$

$$r g'' + 2(\ell+1-\kappa r) g' + (\lambda - 2\kappa\ell - 2\kappa) g = 0$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER SERIE PONENDO

$$g(r) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p$$

CON

$$g' = \sum_{\rho=0}^{\infty} a_\rho \rho z^{\rho-1} \qquad g'' = \sum_{\rho=0}^{\infty} a_\rho \rho(\rho-1) z^{\rho-2}$$

SOSTITUENDOLE E CHIAMANDO $q = \rho - 1$, $q \in [0, +\infty]$,

$$zg'' = \sum_{\rho=0}^{\infty} a_\rho \rho(\rho-1) z^{\rho-1}$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} a_{q+1} (q+1) q z^q \overset{q\to\rho}{=} \sum_{\rho=0}^{\infty} a_{\rho+1} (\rho+1)\rho z^\rho$$

$$2(\ell+1) g' = 2(\ell+1) \sum_{\rho=1}^{\infty} a_\rho \rho z^{\rho-1} = 2(\ell+1) \sum_{q=0}^{\infty} a_{q+1} (q+1) z^q$$

$$= 2(\ell+1) \sum_{\rho=0}^{\infty} a_{\rho+1} (\rho+1) z^\rho$$

$$-2\kappa z g' = -2\kappa \sum_{\rho=0}^{\infty} a_\rho \rho z^\rho$$

NOTA: OVVIAMENTE QUESTI CAMBI DI INDICE SONO SBAGLIATI: I TERMINI IN zg'' E zg' NON POSSONO AVERE POTENZE DI z^0. VALE LA PENA INVECE DI FARE IN MODO CHE COMPAIA z^ρ IN TUTTE LE SOMME E SCRIVERE L'EQUAZIONE FINALE SOLO A PARTIRE DA $\rho = 1$ (A NOI SERVIRÀ SOLO IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO).

SOMMANDOLE

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} z^\rho \left\{ a_{\rho+1} (\rho+1)\rho + 2(\ell+1) a_{\rho+1} (\rho+1) - 2\kappa a_\rho \rho + (\lambda - 2\kappa\ell - 2\kappa) a_\rho \right\} = 0$$

CHE È VERIFICATA SE VALE $\forall \rho$

$$a_{\rho+1} (\rho+1) \left[\rho + 2\ell + 2 \right] + a_\rho \left[-2\kappa\rho + \lambda - 2\kappa\ell - 2\kappa \right] = 0$$

MA QUESTO MI DÀ LA LEGGE DI RICORRENZA

$$a_{\rho+1} = a_\rho \frac{2\kappa\rho + 2\kappa\ell + 2\kappa - \lambda}{(\rho+1)(\rho+2\ell+2)}$$

PER ρ GRANDE,

$$a_{\rho+1} \simeq a_\rho \frac{2\kappa\rho}{\rho^2} = a_\rho \frac{2\kappa}{\rho}$$

STUDIAMO

$$a_{\rho+1} = a_\rho \frac{2\kappa}{\rho}$$

$$a_2 = a_1 2\kappa$$

$$a_3 = \frac{2\kappa}{2} a_2 = \frac{(2\kappa)^2}{2} a_1$$

$$a_4 = \frac{2\kappa}{3} a_3 = \frac{(2\kappa)^3}{3!} a_1$$

PROCEDENDO IN QUESTO MODO,

$$a_{m+1} = \frac{(2K)^m}{m!} a_1$$

AVREI ALLORA

$$g(r) \sim e^{2Kr}$$

CHE SOSTITUITA DÀ

$$u_\ell \sim r^{\ell+1} e^{-Kr} g(r) = r^{\ell+1} e^{Kr}$$

CHE NON È ACCETTABILE PERCHÉ ESPLODE PER $r \to \infty$. POTEVAMO ASPETTARCELO: NON HO SOLUZIONI PER K GENERICO, MA SOLO SE $\exists\, p$ t.c.

$$2Kp + 2K\ell + 2K - \lambda = 0$$

$$K = \frac{\lambda}{2(p+\ell+1)}$$

$$E = -\frac{\hbar^2 K^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\lambda^2}{4(p+\ell+1)^2} = -\frac{\hbar^2}{8m(p+\ell+1)^2} \cdot \frac{4m^2\alpha^2}{\hbar^4} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{(p+\ell+1)^2}$$

IL VALORE DI p CONTROLLA IL GRADO DEL POLINOMIO $(a_{p+1} = 0)$.

SF: $p = 0$, $\ell = 0$ $\qquad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} =: -E_0$

CHE È PROPRIO L'ENERGIA MINIMA DI BOHR VISTA TEMPO ADDIETRO. (CHIAMO E_0 ENERGIA DI IONIZZAZIONE). DETTO

$$n = p + \ell$$

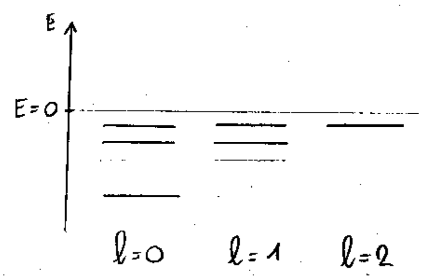
SI HA IL PRIMO STATO ECCITATO PER $n = 1$, $\begin{pmatrix} p=1 & \ell=0 \\ p=0 & \ell=1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \to deg = 4$

$$E_1 = -\frac{E_0}{4}$$

PER $n = 2$, $\begin{pmatrix} p=2 & \ell=0 \\ p=1 & \ell=1 \\ p=0 & \ell=2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \to deg = 9$

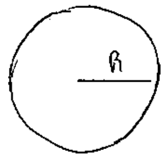
$$E_2 = -\frac{E_0}{9}$$

DI NUOVO OSSERVIAMO LA DEGENERAZIONE ACCIDENTALE (CONSERVAZIONE VETTORE DI LENZ).



RIPENDRENDO IL MODELLO CLASSICO DELL'ORBITA DELL'ELETTRONE,

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{\alpha}{r^2}$$



$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{2R} - \frac{\alpha}{R} = -\frac{\alpha}{2R}$$

SI DICE RAGGIO DI BOHR IL RAGGIO "CLASSICO" a_b CHE L'ELETTRONE AVREBBE CON L'ENERGIA DELLO STATO FONDAMENTALE.

$$E_I = \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \equiv \frac{\alpha}{2a_B}$$

$$a_b = \frac{\hbar^2}{m\alpha}$$

$$K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{2m\, m\alpha^2}{2\hbar^2}} = \frac{m\alpha}{\hbar^2} = \frac{1}{a_b}$$

SCRIVIAMO PER LO STATO FONDAMENTALE ($n=0$, CON $n = p + l$)

$$u = r^{l+1} e^{-Kr} g(r)$$

$$= r e^{-\frac{r}{a_b}} \cdot A$$

(INFATTI PER AVERE $n=0$ DEVONO ESSERE $p=0$, PER CUI $g(r)$ HA GRADO 0, E $l=0$).

POSSO INFINE SCRIVERE

$$\psi = \frac{u}{r} Y_l^m(\theta,\varphi) = r^l e^{-Kr} g_p(r) Y_l^m(\theta,\varphi)$$

- RICAPITOLANDO: ATOMO DI IDROGENO

$$a_b = \frac{\hbar^2}{m\alpha} \qquad\qquad \underline{n = p + \ell + 1} \qquad n = 1, 2 \dots \infty$$

$$E_n = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{\alpha}{2a_B}\frac{1}{n^2} = -\frac{a_B^{2}\hbar^2}{2m}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_I}{n^2}$$

$$\underline{\psi = r^{\ell} e^{-kr} g_p(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)} = R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$|E| = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad\qquad k = \frac{1}{n a_b}$$

ENERGIA CLASSICA ORBITA R: $\qquad E = -\dfrac{\alpha}{2R}$

LO STATO FONDAMENTALE $(\ell = 0,\ p = 0,\ n = 1)$ SI SCRIVE

$$\psi = A e^{-kr} = A e^{-\frac{r}{a_b}} \qquad \text{(IN } A \text{ HO MESSO } Y_0^0\text{).}$$

$$\int |\psi|^2 d^3r = \int |A|^2 e^{-\frac{2r}{a_b}} r^2 dr\, d\Omega = 4\pi |A|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_b}} r^2 dr$$

$$= 4\pi |A|^2 \left(\frac{a_b}{2}\right)^3 \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = 4\pi |A|^2 \frac{a_B^3}{8} \cdot 2 = \pi a_B^3 |A|^2$$

INFATTI

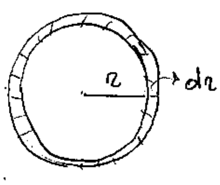
$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^2 dx = \frac{d^2}{d\lambda^2} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left.\frac{2}{\lambda^3}\right|_{\lambda = 1} = 2$$

PERCIÒ

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}}$$

CERCHIAMO LA PROBABILITÀ CHE L'ELETTRONE SI TROVI TRA r E $r + dr$, OSSIA CHI È $P(r)dr$.

$$P(r)dr = |\psi|^2 (\text{VOLUME GUSCIO SFERICO}) = |\psi|^2 4\pi r^2 dr$$

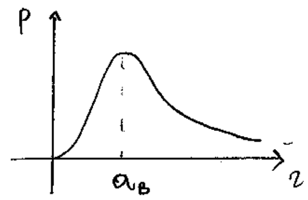


$$P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2 = \frac{4}{a_B}\left(\frac{r}{a_B}\right)^2 e^{-\frac{2r}{a_B}}$$

STUDIAMO

$$f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2x(1-x)e^{-2x}$$



HO PUNTI STAZIONARI PER $x=0$ E $x=1$, QUINDI

$$r_{MAX} = a_B$$

· TEOREMA DEL VIRIALE

ANCHE IN 3D VALE

$$\langle E | [H, \underline{p}\cdot\underline{r}] | E \rangle = 0 \qquad (\text{IN 1D ERA } \langle E|[H,pq]|E\rangle = 0)$$

DI CONSEGUENZA PER QUALSIASI POTENZIALE CENTRALE (VEDI NOTA)

$$\langle E | 2T | E \rangle = \langle E | r \frac{\partial V}{\partial r} | E \rangle$$

DOVE $|E\rangle$ APPARTIENE ALLO SPETTRO DISCRETO.

SCELTO

$$V = -\frac{\alpha}{r} \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2}$$

$$2\langle E|T|E\rangle = \langle E|\frac{\alpha}{r}|E\rangle = -\langle E|U|E\rangle$$

OSSIA (U, V SONO LA STESSA COSA)

$$\begin{cases} 2\bar{T} + \bar{U} = 0 \\ \bar{T} + \bar{U} = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{T} = -E \\ \bar{U} = 2E \end{cases}$$

PERCIÒ PER L'ATOMO DI IDROGENO SCRIVO

$$-\langle E|\frac{\alpha}{r}|E\rangle = -\frac{\alpha}{2a_B}\frac{1}{n^2}\cdot 2$$

$$\langle E|\frac{1}{r}|E\rangle = \frac{1}{a_B}\frac{1}{n^2}$$

NOTA:

$$[H, \underline{p}\cdot\underline{r}] = \underline{p}\cdot\left[\frac{p^2}{2m}+V(r), \underline{r}\right] + \left[\frac{p^2}{2m}+V(r), \underline{p}\right]\cdot\underline{r} = -\underline{p}\cdot\left(i\hbar\frac{\underline{p}}{m}\right) + i\hbar\,\underline{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r$$

PRINCIPIO VARIAZIONALE

SIANO

$H\Psi = E\Psi$, E_0 STATO FONDAMENTALE.

ALLORA

$$E_0 = \min_{\psi} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \qquad \left(= \min_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle \text{ SE } |\psi|^2 = 1 \right)$$

QUESTO PRINCIPIO È ALLA BASE DEGLI ALGORITMI DI APPROSSIMAZIONE PER IL CALCOLO DI E_0 (E SI PUÒ GENERALIZZARE A E_m).

DIMOSTRAZIONE

PRESA UNA BASE $|E_m\rangle$ ORTONORMALE,

$$|\psi\rangle = \sum a_m |E_m\rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{m,m} \langle E_m | a_m^* a_m | E_m \rangle = \sum_m |a_m|^2$$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{m,m} \langle E_m | a_m^* E_m a_m | E_m \rangle = \sum_m E_m |a_m|^2$$

ALLORA

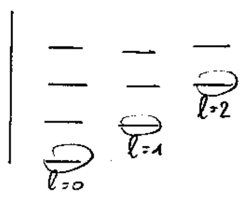
$$\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\sum_m |a_m|^2 E_m}{\sum_m |a_m|^2} = \frac{\sum_m |a_m|^2 (E_m - E_0) + \left(\sum_m |a_m|^2\right) E_0}{\sum_m |a_m|^2}$$

$$= E_0 + \frac{\sum_m |a_m|^2 (E_m - E_0)}{\sum_m |a_m|^2} \geq E_0$$

E L'UGUAGLIANZA È VERIFICATA SCEGLIENDO $\psi = \psi_0$ $(E_m = E_0)$. $\therefore$

APPLICHIAMO IL PRINCIPIO AL NOSTRO PROBLEMA CENTRALE.

SI È VISTO CHE PER OGNI l HO UNO "STATO FONDAMENTALE" E_l.. MOSTRIAMO CHE $E_{l_1} \leq E_{l_2}$ SE $l_1 < l_2$.



SI È VISTO (HAMILTONIANA DELLA FUNZIONE RADIALE RIDOTTA $u(r)$)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r) = H_0 + V_\ell(r)$$

APPLICHIAMO IL PRINCIPIO VARIAZIONALE:

$$E_\ell = \min_\psi \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \min_\psi \frac{\langle\psi|H_0|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} + \frac{\langle\psi|V_\ell|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

QUINDI

$$E_{\ell_2} = \min_\psi \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\left(\langle\psi|H_0|\psi\rangle + \langle\psi|V_{\ell_1}|\psi\rangle + \langle\psi|(V_{\ell_2}-V_{\ell_1})|\psi\rangle\right)$$

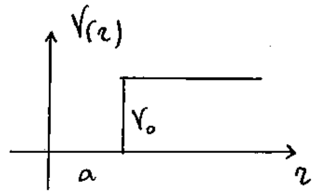
$$\geq \min_\psi \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\left(\langle\psi|H_0|\psi\rangle + \langle\psi|V_{\ell_1}|\psi\rangle\right) = E_{\ell_1}$$

INFATTI

$$V_{\ell_2} - V_{\ell_1} = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left((\ell_2+1)\ell_2 - \ell_1(\ell_1+1)\right) \geq 0$$

CLASSICAMENTE QUESTO SIGNIFICA CHE AGGIUNGENDO ENERGIA ROTAZIONALE L'ENERGIA AUMENTA.

· ESEMPIO: BUCA SFERICA

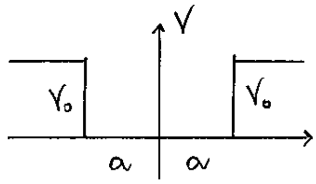


USANDO LA FUNZIONE RADIALE RIDOTTA,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + Vu = Eu$$

ANALOGO AL PROBLEMA UNIDIMENSIONALE, MA CON LA RESTRIZIONE $u(r=0)=0$.

CONSIDERIAMO LA "BUCA DOPPIA" IN FIGURA;



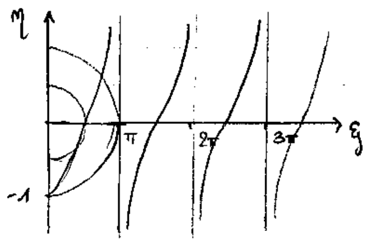
LA PARTE DISPARI DELLO SPETTRO DEL PROBLEMA MONODIMENSIONALE MI DÀ LE AUTOFUNZIONI DEL PROBLEMA RADIALE (E ANCHE DI QUELLO MONODIMENSIONALE CON $V(0)=\infty$, PERCHÈ ANCHE IN QUEL CASO LA DISCONTINUITÀ SI PORTA LA CONDIZIONE $u(0)=0$: I DUE PROBLEMI SONO DEL TUTTO ANALOGHI).

RICORDIAMO CHE SI ERANO INSERITE LE COORDINATE

$$\xi = a\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \eta = a\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

PER LA PARTE DISPARI IL PROBLEMA È RISOLTO DA

$$\begin{cases} \eta = -\xi \cot \xi \\ \xi^2+\eta^2 = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \end{cases}$$



DA CUI SI VEDE CHE SE LA BUCA È POCO PROFONDA NON CI SONO STATI LEGATI (CIÒ NON ERA VERO IN UNA DIMENSIONE):

$$\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$V_0 \geq \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$$

MOMENTO DI SPIN

LO SPIN ASSUME SENSO IN MQR (COME $\underline{B}$ E $\underline{E}$ CHE DIVENTANO LA STESSA COSA IN INTERPRETAZIONE RELATIVISTICA); POSSO VISUALIZZARLO COME UN MOMENTO ANGOLARE (TIPO TROTTOLA), MA A PARTE L'IMMAGINE PITTORESCA $\underline{S}$ E' UN VETTORE CHE GODE DELLE STESSE PROPRIETA' DI COMMUTAZIONE DI $\underline{L}$ (O QUASI):

$$[S_i, S_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_k$$
$$[\underline{S}, \underline{r}] = 0$$
$$[\underline{S}, \underline{p}] = 0$$

NOTA: SIGNIFICA $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ E PERMUTAZIONI CICLICHE.

OGNI PARTICELLA E' UN AUTOSTATO DI S^2:

$$S^2 = \hbar^2\, \ell(\ell+1)$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

ℓ E' LO SPIN.

S^2 E' UN C-NUMERO.

LO SPIN PUO' ASSUMERE TUTTI I VALORI INTERI E SEMIINTERI.

DESCRIVO UNA PARTICELLA TRAMITE $\underline{r}, \underline{p}, \underline{S}$.

LE PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$ HANNO I DUE STATI

$$S_z = \begin{cases} +\frac{\hbar}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

$\uparrow \quad S_z = +\frac{\hbar}{2}$

$\downarrow \quad S_z = -\frac{\hbar}{2}$

(O UNA QUALSIASI COMBINAZIONE LINEARE DEI DUE STATI, IL CHE CHIARAMENTE NON HA UN CORRISPETTIVO "A TROTTOLA").

SI USA SCRIVERE (NELLO SPAZIO PRODOTTO TENSORIALE, VEDI P. 246)

$\psi(r)\,\chi$ → SPINORE

$$\chi_+ = |+\tfrac{1}{2}\rangle \qquad S_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+ \qquad \chi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\chi_- = |-\tfrac{1}{2}\rangle \qquad S_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_- \qquad \chi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

HO UNO SPAZIO A 2 DIMENSIONI DI CUI χ_+, χ_- SONO UNA BASE:

$$\chi = a\chi_+ + b\chi_-$$
$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

SCRIVO ALLORA

$$\psi(r)\chi = \psi(r)(a\chi_+ + b\chi_-) = \psi(r)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\psi(r) \\ b\psi(r) \end{pmatrix}$$

MA POSSO AVERE PIÙ IN GENERALE

$$\psi_1(r)\chi_+ + \psi_2(r)\chi_-$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix}$$

SI PARLA NEL PRIMO CASO DI STATI FATTORIZZABILI (STESSA DIPENDENZA DA r) E NEL SECONDO CASO DI STATI ENTANGLED.

CERCHIAMO QUANTO VALGONO, PER LO SPIN $\frac{1}{2}$,

S_x^2, S_y^2, S_z^2.

$$S_z^2\chi_\pm = \left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)^2\chi_\pm = \frac{\hbar^2}{4}\chi_\pm$$

$$S_z^2(a\chi_+ + b\chi_-) = a\frac{\hbar^2}{4}\chi_+ + b\frac{\hbar^2}{4}\chi_- = \frac{\hbar^2}{4}(a\chi_+ + b\chi_-)$$

PERCIÒ

$$S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}$$

LO STESSO VALE PER LE DIREZIONI x, y E PIÙ IN GENERALE (SE $s = \frac{1}{2}$)

$$\underline{(\underline{S}\cdot\hat{m})^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}}$$

DA CUI

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

COMPATIBILE CON $S^2 = \hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$.

PRENDIAMO IL VERSORE

$$\hat{m} = (m_1, m_2, 0) \qquad\qquad m_1^2 + m_2^2 = 1$$

$$(\underline{S}\cdot\hat{m})^2 = (S_x m_x + S_y m_y)^2$$

$$= S_x^2 m_1^2 + S_y^2 m_2^2 + m_1 m_2 S_x S_y + m_2 m_1 S_y S_x$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(m_1^2 + m_2^2) + m_1 m_2 (S_x S_y + S_y S_x)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} + m_1 m_2 (S_x S_y + S_y S_x) \qquad \equiv \frac{\hbar^2}{4}$$

DA CUI SI OTTIENE LA RELAZIONE

$$S_x S_y + S_y S_x = 0$$

SI NOTI CHE OVVIAMENTE AVREI POTUTO SCEGLIERE $m = (m_1, 0, m_3)$ OPPURE $m = (0, m_2, m_3)$ OTTENENDO

$$S_x S_z + S_z S_x = 0$$

$$S_y S_z + S_z S_y = 0$$

SCRIVO QUINDI, DOPO AVER DEFINITO L'ANTICOMMUTATORE

$$\{A, B\} = AB + BA$$

LA RELAZIONE (VALIDA SOLO PER LO SPIN $\frac{1}{2}$)

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

INFATTI

$$i = j \qquad 2S_i^2 = 2\frac{\hbar^2}{4} = \frac{\hbar^2}{2} \qquad\qquad S_i^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$i \neq j \qquad S_i S_j + S_j S_i = 0$$

ABBIAMO QUINDI

$$[S_i, S_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} S_k$$

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

SOMMANDO LE DUE RELAZIONI E DIMEZZANDO IL RISULTATO SI HA

$$S_i S_j = \frac{\hbar^2}{4}\delta_{ij} + i\frac{\hbar}{2}\varepsilon_{ijk} S_k$$

· <u>ESEMPIO</u>

$$\langle A | S_x S_y S_z | A \rangle = \langle A | \left(i\frac{\hbar}{2}\varepsilon_{123} S_z\right) S_z | A \rangle$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\langle A | S_z^2 | A \rangle = i\frac{\hbar}{2}\langle A | \frac{\hbar^2}{4} | A \rangle = i\frac{\hbar^3}{8}$$

MATRICI DI PAULI

NELLA BASE $|+\frac{1}{2}\rangle$, $|-\frac{1}{2}\rangle$ DI S_z, SCRIVO

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

NOTA CHE HA PER COLONNE LE IMMAGINI DEI VETTORI DELLA BASE.

COME SCRIVO S_+?

$$S_+|+\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$

NOTA: LE FASI DEI VETTORI DI BASE SI FISSANO IMPONENDO CHE $\langle +\frac{1}{2}|S_x|-\frac{1}{2}\rangle$ SIA REALE.

L'UNICO ELEMENTO NON NULLO È

$$\langle +\tfrac{1}{2}|S_+|-\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}$$

$\left(\ell = \frac{1}{2},\ m = -\frac{1}{2}\right)$

$\left(= \langle \ell, m+1|L_+|\ell, m\rangle\right)$

$$= \hbar\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \hbar$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- = S_+^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix}$$

O ANCHE

$$\langle -\tfrac{1}{2}|S_-|+\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m-1)} = \hbar$$

$\left(= \langle \ell, m-1|L_-|\ell, m\rangle\right)$

POICHÈ ERA

$$S_+ = S_x + iS_y$$

$$S_- = S_x - iS_y$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$$

$$S_y = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

IN GENERALE

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$$

$$S_iS_j = \frac{\hbar^2}{4}\sigma_i\sigma_j = \frac{\hbar^2}{4}\delta_{ij} + i\frac{\hbar^2}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k}$$

· ESERCIZIO

SPIN $\frac{1}{2}$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \alpha S_x$$

SICCOME α È UNA COSTANTE, RICADIAMO NEL CASO CON LA HAMILTONIANA SEPARABILE.

$$|\alpha, t=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \chi_+ + |1\rangle \chi_- \right)$$

DOVE $|0\rangle$, $|1\rangle$ SONO AUTOSTATI DELL'OSCILLATORE E

$$S_z \chi_\pm = \pm \frac{\hbar}{2} \chi_\pm$$

① TROVARE $|\alpha, t\rangle$.

$$\chi_+ = |\tfrac{1}{2}\rangle \qquad \chi_- = |-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SAPPIAMO GIÀ CHE GLI AUTOVALORI DI S_x SONO $\pm \frac{\hbar}{2}$; COMUNQUE

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} \equiv 0$$

PER $\lambda = \frac{\hbar}{2}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad b\frac{\hbar}{2} = a\frac{\hbar}{2} \Rightarrow a = b \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

$$|v_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_-$$

PER $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$ OTTENGO $a = -b$, PERCIÒ

$$|v_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_-$$

CHECK: DEVONO ESSERE ORTOGONALI,

$$v_+^* v_- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

SOMMANDO E SOTTRAENDO LE ESPRESSIONI PER $|v_+\rangle$ E $|v_-\rangle$,

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_+ + v_-\right)$$

$$\chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_+ - v_-\right)$$

NOTA: POSSO INVECE SCRIVERE $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^+ = M$
E APPLICO SEMPLICEMENTE

$$|\alpha\rangle_x = M^+|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |0\rangle+|1\rangle \\ |0\rangle-|1\rangle \end{pmatrix}$$

RISCRIVO

$$|\alpha, t=0\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle v_+ + |0\rangle v_- + |1\rangle v_+ - |1\rangle v_-\right)$$

(SONO PRODOTTI ESTERNI). ALLORA

$$H|0\rangle v_+ = \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\alpha\hbar}{2}\right)|0\rangle v_+$$

$$H|0\rangle v_- = \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\alpha\hbar}{2}\right)|0\rangle v_-$$

$$H|1\rangle v_+ = \left(\frac{3\hbar\omega}{2} + \frac{\alpha\hbar}{2}\right)|1\rangle v_+$$

$$H|1\rangle v_- = \left(\frac{3\hbar\omega}{2} - \frac{\alpha\hbar}{2}\right)|1\rangle v_-$$

DA CUI SI VEDE CHE H HA ASSUNTO LA FORMA DIAGONALE, CALCOLO

$$|\alpha, t\rangle = \frac{1}{2}\left\{\exp\left(-\frac{it}{\hbar}\frac{\hbar}{2}(\omega+\alpha)\right)|0\rangle v_+ + \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\frac{\hbar}{2}(\omega-\alpha)\right)|0\rangle v_-\right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\frac{\hbar}{2}(3\omega+\alpha)\right)|1\rangle v_+ - \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\frac{\hbar}{2}(3\omega-\alpha)\right)|1\rangle v_-\right\}$$

$$\exp\left(\frac{it}{2}(\omega+\alpha)\right)|\alpha, t\rangle = \frac{1}{2}\left\{|0\rangle v_+ + \exp\left(\frac{it}{2}(\omega+\alpha-\omega+\alpha)\right)|0\rangle v_-\right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{it}{2}(\omega+\alpha-3\alpha-\alpha)\right)|1\rangle v_+ - \exp\left(\frac{it}{2}(\omega+\alpha-3\omega+\alpha)\right)|1\rangle v_+\right\}$$

$$|\alpha, t\rangle = \frac{1}{2}\left\{|0\rangle v_+ + e^{it\alpha}|0\rangle v_- + e^{-i\omega t}|1\rangle v_+ - e^{i(\alpha-\omega)t}|1\rangle v_-\right\}$$

② QUALI VALORI DI S_z SI POSSONO MISURARE AL TEMPO t E CON CHE PROBABILITÀ?

$$PROB\left(S_z = +\frac{\hbar}{2}\right),\ PROB\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = ?$$

DOBBIAMO TORNARE NELLA BASE DI S_z. RISCRIVO *

$$|\alpha, t\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big\{ |0\rangle(\chi_+ + \chi_-) + e^{i\alpha t}|0\rangle(\chi_+ + \chi_-) + e^{-i\omega t}|1\rangle(\chi_+ + \chi_-)$$

$$- e^{i(\alpha-\omega)t}|1\rangle(\chi_+ - \chi_-) \Big\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big\{ (1+e^{i\alpha t})|0\rangle \chi_+ + (1-e^{i\alpha t})|0\rangle \chi_-$$

$$+ (e^{-i\omega t} - e^{-i(\alpha-\omega)t})|1\rangle \chi_+ + (e^{-i\omega t} + e^{-i(\alpha-\omega)t})|1\rangle \chi_- \Big\}$$

(CHECK: PER $t=0$ RITROVO $|\alpha, t=0\rangle$). POSSO CALCOLARE

$$P_r\left(S_z = +\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+e^{i\alpha t})\right|^2 + \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-i\omega t} - e^{i(\alpha-\omega)t})\right|^2$$

$$= \frac{1}{8}\Big\{(1+e^{i\alpha t})(1+e^{-i\alpha t}) + (e^{-i\omega t} - e^{i(\alpha-\omega)t})(e^{i\omega t} - e^{-i(\alpha-\omega)t})\Big\} = \frac{1}{2}$$

$$P_r\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = 1 - P_r\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

*NOTA: ANCHE QUI SI POTEVA FARLO IN FORMA MATRICIALE APPLICANDO

$$|\alpha, t\rangle_z = M|\alpha, t\rangle_x$$

COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI

SPESSO CI SI TROVA A STUDIARE CASI COME

$$\begin{cases} L_1^2, L_{1z} \\ L_2^2, L_{2z} \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1^2, S_{1z} \\ S_2^2, S_{2z} \end{cases} \qquad \begin{cases} L^2, L_z \\ S^2, S_z \end{cases}$$

$$\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 \qquad \underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 \qquad \underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$$

$$L^2, L_z, L_1^2, L_2^2 \qquad S^2, S_z, S_1^2, S_2^2 \qquad J^2, J_z, L^2, S^2$$

PARTIAMO DAL SECONDO PROBLEMA E CONSIDERIAMO DUE PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$. UNA BASE È DATA DA

$$\begin{cases} |\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}\rangle_2 & \uparrow\uparrow & m = 1 \\ |\frac{1}{2}\rangle_1 |-\frac{1}{2}\rangle_2 & \uparrow\downarrow & m = 0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}\rangle_2 & \downarrow\uparrow & m = 0 \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1 |-\frac{1}{2}\rangle_2 & \downarrow\downarrow & m = -1 \end{cases}$$

LO SPAZIO DI HILBERT HA DIMENSIONE 4. QUESTA BASE GIÀ DIAGONALIZZA S_z; ANZI, PIÙ IN GENERALE L_z, J_z, S_z:

$$(L_{1z} + L_{2z}) |\ell_1, m_1\rangle_1 |\ell_2, m_2\rangle_2$$

$$= L_{1z} |\ell_1, m_1\rangle_1 |\ell_2, m_2\rangle_2 + L_{2z} |\ell_1, m_1\rangle_1 |\ell_2, m_2\rangle_2$$

$$= \hbar m_1 |\ell_1, m_1\rangle_1 |\ell_2, m_2\rangle_2 + \hbar m_2 |\ell_1, m_1\rangle_1 |\ell_2, m_2\rangle_2$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) |\ell_1, m_1\rangle_1 |\ell_2, m_2\rangle_2$$

NOTA: GLI OPERATORI S_1^2 E S_2^2 RESTANO DIAGONALI SIA IN QUESTA BASE ($|S_{1z}\rangle|S_{2z}\rangle$) SIA IN QUELLA CHE ORA ANDIAMO A COSTRUIRE ($|S^2, S_z\rangle$).
È IMPORTANTE OSSERVARE CHE COMMUTA TUTTO TRANNE $[S^2, S_{1z}], [S^2, S_{2z}] \neq 0$.

PERCIÒ AD ESEMPIO

$$S_z = (S_{1z} + S_{2z})$$

$$S_z |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 = \hbar \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

TUTTAVIA QUESTA BASE NON RENDE DIAGONALE S^2. COSTRUIAMO

$$S_+ = S_{1+} + S_{2+}$$

$$S_+ |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 = 0$$

NOTA: STO FACENDO UN CDB MA IN ENTRAMBE LE BASI S_z È DIAGONALE. GLI SPAZI CON $S_z = \pm 1$ NON SONO DEGENERI, QUINDI NON SI MUOVONO.

POICHÈ ERA PER DEFINIZIONE $m_{MAX} = \ell$, SCOPRIAMO CHE

$|\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}\rangle_2$

HA SPIN TOTALE $\ell = 1$. POICHÈ $S^2|\alpha\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|\alpha\rangle$,

$$S^2 |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 = 2\hbar^2 |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

ECCO QUINDI UN PRIMO AUTOSTATO NELLA BASE

$$(\underset{\ell}{\text{SPIN TOTALE}}, \underset{m}{\text{SPIN}}) \rightarrow |S^2, S_z\rangle$$

$$|1, 1\rangle = |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

TROVIAMO UN ALTRO AUTOSTATO APPLICANDO L'OPERATORE DI DISCESA

$$\underset{\hbar \cdot \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,|1,0\rangle \;=\; \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle}{\underbrace{S_-|1,1\rangle}_{\parallel}} = (S_{1-} + S_{2-})|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 = \hbar|-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 + \hbar|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

DA CUI

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

CHE, COME MI ASPETTO, È ANCORA NORMALIZZATO. INFINE

$$|1, -1\rangle = |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

PER COMPLETARE LA BASE DI S^2 COSTRUISCO CON I DUE $m = 0$

$$|\alpha\rangle = a|-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 + b|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

IMPONGO

$$\langle\alpha|1,0\rangle = 0 \; ; \quad \frac{a^*}{\sqrt{2}} + \frac{b^*}{\sqrt{2}} = 0 \; ; \quad a^* = -b^*$$

PERCIÒ

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 - |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

DOVENDO ESSERE NORMALIZZATO. IN SOSTANZA SI SONO IMPOSTI

1. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$
2. $\langle 1,0|\alpha\rangle = 0$
3. $S_z|\alpha\rangle = 0$

QUEST'ULTIMA SI È IMPOSTA SCEGLIENDO $|\alpha\rangle$ COME COMBINAZIONE DI STATI CON $m = 0$.

È VERO CHE QUELLO COSÌ OTTENUTO È AUTOSTATO DI S^2?

CALCOLO

$$S_+|\alpha\rangle = (S_{1+}+S_{2+})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1|-\tfrac{1}{2}\rangle_2 - |-\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2\right) = 0$$

QUESTO CI DICE CHE $|\alpha\rangle$ È UNO STATO MASSIMALE. ERA

$S_z|\alpha\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad m=0$

PERCIÒ DEVE ESSERE $l=0$ (UNO STATO MASSIMALE HA $m=l$):

$|\alpha\rangle = |0,0\rangle$

SI SONO TROVATI

$|1,1\rangle, \quad |1,0\rangle, \quad |1,-1\rangle$

$|0,0\rangle$

AUTOSTATI SIMULTANEI DI S_z E S^2.

ERA NECESSARIO CALCOLARE $S_+|\alpha\rangle$? L'AZIONE DI S_+ SUGLI $m=0$ È

$S_+|\alpha\rangle = c|1,1\rangle$

$\langle 1,1|S_+|\alpha\rangle = c\,; \quad (S_-|1,1\rangle)^+|\alpha\rangle = c$

$\sqrt{2}\langle 1,0|\alpha\rangle = c = 0$

NOTA: SI RICORDI CHE $A|v\rangle = |u\rangle \Rightarrow \langle v|A^+ = \langle u|$ PER QUALSIASI OPERATORE A.

INFATTI $\langle 1,0|\alpha\rangle = 0$.

SOMMA DI SPIN DIVERSI

$|l_1,m_1\rangle, \; |l_2,m_2\rangle$

AVREMO GLI STATI

$\|l_1,l_1\rangle\|l_2,l_2\rangle$	l_1+l_2
$\|l_1,l_1-1\rangle\|l_2,l_2\rangle, \quad \|l_1,l_1\rangle\|l_2,l_2-1\rangle$	l_1+l_2-1
$\|l_1,l_1-2\rangle\|l_2,l_2\rangle, \quad \|l_1,l_1-1\rangle\|l_2,l_2-1\rangle, \quad \|l_1,l_1\rangle\|l_2,l_2-2\rangle$	l_1+l_2-2

CHI SONO GLI AUTOSTATI DI S^2?

IL PRIMO È CERTAMENTE AUTOSTATO DI AUTOVALORE l_1+l_2.

AD ESEMPIO SE $l_1 = l_2 = 1$,

$|1,1\rangle|1,1\rangle = |2,2\rangle$

$L^2_{TOT} \quad L_{TOT,z}$

ABBASSANDO $|2,2\rangle$ TROVO

$$|2,1\rangle = a|1,1\rangle|1,0\rangle + b|1,0\rangle|1,1\rangle$$

NOTO QUESTO, COSTRUISCO (USANDO STATI CON $L_{TOT,z} = 1$)

$$|\alpha\rangle = c|1,1\rangle|1,0\rangle + d|1,0\rangle|1,1\rangle$$

IMPONENDO LA NORMALIZZAZIONE E $\langle\alpha|2,1\rangle = 0$. SO GIÀ CHE

$$S_{TOT+}|\alpha\rangle = c|2,2\rangle$$

$$\langle 2,2|S_{TOT+}|\alpha\rangle = c = 0 \quad \text{PERCHÉ} \quad \langle 2,2|S_{TOT+} = (S_{TOT-}|2,2\rangle)^+ = (\beta|2,1\rangle)^+$$

OVVERO $|\alpha\rangle$ È UNO STATO ESTREMALE : SCRIVO

$$|\alpha\rangle = |1,1\rangle$$

IN SINTESI

$$\begin{array}{l} |1\rangle|1\rangle \\ |1\rangle|0\rangle \\ |0\rangle|1\rangle \end{array} \begin{array}{l} \to |2,2\rangle \\ \to \left\{ \begin{array}{l} |2,1\rangle \\ |1,1\rangle \end{array} \right. \end{array} \quad \text{E RESTANO} \quad \left.\begin{array}{l} |1\rangle|-1\rangle \\ |0\rangle|0\rangle \\ |-1\rangle|1\rangle \end{array}\right\} \to |2,0\rangle, |1,0\rangle, |0,0\rangle$$

PER I PRIMI DUE, APPLICO S_- SU $|2,1\rangle$ E $|1,1\rangle$ OTTENENDO

$$S_-|2,1\rangle = \text{SOMMA DI STATI CON } (S_z = 0)$$

$$= a_1|1\rangle|-1\rangle + a_2|0\rangle_1|0\rangle_2 + a_3|-1\rangle|1\rangle = K|2,0\rangle$$

$$S_-|1,1\rangle = \text{SOMMA DI STATI CON } (S_z = 0)$$

$$= b_1|1\rangle|-1\rangle + b_2|0\rangle_1|0\rangle_2 + b_3|-1\rangle|1\rangle = \tilde{K}|1,0\rangle$$

PER TROVARE $|0,0\rangle$ COSTRUISCO

$$|\alpha\rangle = c_1|1\rangle|-1\rangle + c_2|0\rangle_1|0\rangle_2 + c_3|-1\rangle|1\rangle \quad \text{CON} \quad \begin{cases} \langle 2,0|\alpha\rangle = 0 \\ \langle 1,0|\alpha\rangle = 0 \\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \end{cases}$$

$$S_+|\alpha\rangle = \text{SOMMA DI STATI CON } (S_z = 1)$$

$$= d_1|2,1\rangle + d_2|1,1\rangle$$

$$\langle 2,1|S_+|\alpha\rangle = d_1 + d_2\underbrace{\langle 2,1|1,1\rangle}_{0} = d_1$$

$$(\langle 2,1|S_-)|\alpha\rangle = d_1 = 0$$

E SIMILMENTE MOSTRO CHE $d_2 = 0 \to S_+|\alpha\rangle = 0 \to |\alpha\rangle = |0,0\rangle$.

INFINE

$$\left.\begin{array}{l} |0\rangle|-1\rangle \\ |-1\rangle|0\rangle \end{array}\right\} \to |2,-1\rangle, |1,-1\rangle \qquad |-1\rangle|-1\rangle = |2,-2\rangle$$

TUTTI I COEFFICIENTI DELLE COMBINAZIONI LINEARI SI TROVANO NELLE TAVOLE DI CLEBSH-GORDAN (IN QUESTO HO BLOCCHETTI DA 1,2,3,2,1).

COME REGOLA GENERALE PER $l_1 \oplus l_2$,

$$L_{TOT} = \{ l_1+l_2,\ l_1+l_2-1,\ \dots,\ |l_1-l_2| \}$$

$$L_{TOT,z} = -L_{TOT}, \dots, 0, \dots, +L_{TOT}$$

$1 \oplus 1 \rightarrow 2, 1, 0$

$\frac{7}{2} \oplus \frac{3}{2} \rightarrow 5, 4, 3, 2$

ESEMPIO: $1 \oplus \frac{1}{2} \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$|1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle \qquad |-1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} |1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle \\ |0\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \\ \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} |0\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle \\ |-1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \\ \left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \end{array}$$

CALCOLIAMO

$$S_-\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\parallel$$

$$S_-|1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle = S_{1-}|1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + S_{2-}|1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\,|0\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle - |1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

DA CUI

$$\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|0\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

CALCOLIAMO PER ORTOGONALITÀ

$$\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = a|0\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + b|1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

CON

$$a\sqrt{\tfrac{2}{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} = 0 \rightarrow b = -a\sqrt{2}$$

$$\left\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \middle| \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle = 1 \rightarrow a^2 + 2a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

PRENDENDO IL "–" COME NELLE TAVOLE,

$$\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

INFINE

$$S_-\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \left[\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = 2\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\parallel$$

$$S_-\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle\right) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{2}\,|-1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|0\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

(POTEVO SALTARMI UN PASSAGGIO E NORMALIZZARE, O USARLO COME CHECK).

$$\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = S_-\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}|-1\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

(L'AMBIGUITÀ È SOLO SUL SEGNO, MA È FACILE CONTROLLARE).

· OSSERVAZIONE (CLEBSH-GORDAN)

$L = 1 \qquad S = \frac{1}{2}$

$|\ell = 1, m\rangle = \psi = g_\ell(r) Y_1^m(\theta,\varphi)$

ALLORA $(1 \oplus \frac{1}{2})$

$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} g_1 Y_1^1 \chi_- + \sqrt{\frac{2}{3}} g_1 Y_1^0 \chi_+$

$= g_1\left[\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^1 \chi_- + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^0 \chi_+\right]$

I SEGNI + TORNANO PERCHÈ SI È IMPOSTO $\langle |S_{1+}|\rangle, \langle |S_{1-}|\rangle > 0$

↳ TORNA SE $\langle |L_\pm|\rangle > 0$

· ESERCIZIO

$H = H_0 + \frac{\omega}{2} J_z + \frac{\alpha}{\hbar} J^2 \qquad \alpha \ll \omega, \text{ SPIN } 1/2, \ \underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$

CON H_0 HAMILTONIANA DELL'OSCILLATORE ARMONICO ISOTROPO IN 3D.

a) SPETTRO PER $\alpha = 0$ (SOLO GLI $E \le \frac{5}{2}\hbar\omega$)

L'HAMILTONIANA È SEPARABILE E CONOSCIAMO LO SPETTRO DI H_0*. PER $\ell = 0$ HO $\psi_0\chi_+, \psi_0\chi_-$ CON

$H\psi_0\chi_+ = H_0\psi_0\chi_+ + \frac{\omega}{2} J_z(\psi_0\chi_+)$

$= \frac{3}{2}\hbar\omega\psi_0\chi_+ + \frac{\omega}{2}\psi_0\frac{\hbar}{2}\chi_+$

$= \frac{7}{4}\hbar\omega\psi_0\chi_+$

$H\psi_0\chi_- = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)\hbar\omega\psi_0\chi_- = \frac{5}{4}\hbar\omega\psi_0\chi_-$

	H_0	H
$\ell = 2, 0$	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	
$\ell = 1$	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	
$\ell = 0$	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	$\frac{7}{4}\hbar\omega$, $\frac{5}{4}\hbar\omega$

*NOTA: RIVEDI OSCILLATORE ISOTROPO IN 3D. LE SUE AUTOFUNZIONI SONO DI FATTO CONTROLLATE DA n, ℓ, m (P. 178 PATRÌ).

TROVO TUTTAVIA CHE UN MODO SAGGIO PER FARE QUESTO ESERCIZIO SIA VARIARE m E QUINDI ℓ, NON VICEVERSA.

IL LIVELLO $\ell = 1$ È 6 VOLTE DEGENERE $(\psi_{1m}\chi_\pm)$:

$H\psi_{1m}\chi_\pm = H_0\psi_{1m}\chi_\pm + \frac{\omega}{2} L_z\psi_{1m}\chi_\pm + \frac{\omega}{2} S_z\psi_{1m}\chi_\pm$

$= \frac{5}{2}\hbar\omega\psi_{1m}\chi_\pm + \frac{\omega}{2}\hbar\omega\psi_{1m}\chi_\pm \pm \frac{\hbar\omega}{4}\psi_{1m}\chi_\pm$

$= \hbar\omega\left(\frac{5}{2} + \frac{m}{2} \pm \frac{1}{4}\right)\psi_{1m}\chi_\pm$

DA CUI VEDIAMO CHE

$E(m = -1, -) = \hbar\omega\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}\hbar\omega$

$E(m = -1, +) = \hbar\omega\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}\hbar\omega$

$$E(m=0,-) = \hbar\omega\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right) = \hbar\omega\,\frac{9}{4}$$

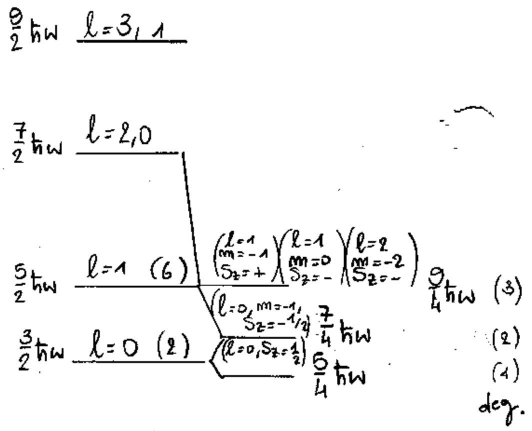
E MI FERMO (SI RICHIEDEVA LO SPETTRO PER VALORI DI $E \leq \frac{5}{2}\hbar\omega$).

PER $l=2$,

$\psi_{2m}\chi_\pm$

$$H\,\psi_{2m}\chi_\pm = \frac{7}{2}\hbar\omega\,\psi_{2m}\chi_\pm + \frac{\omega}{2}\hbar m\,\psi_{2m}\chi_\pm \pm \frac{\omega}{2}\frac{\hbar}{2}\psi_{2m}\chi_\pm$$

$$E(m=-2,-) = \frac{9}{4}\hbar\omega$$



OSSERVO CHE LE ALTRE AUTOFUNZIONI E QUELLE DEI LIVELLI SUPERIORI DANNO TUTTE VALORI DI E SUPERIORI A $\frac{5}{2}\hbar\omega$.

b) SPETTRO ED AUTOFUNZIONI PER $\alpha \neq 0$ $\left(E \leq \frac{5}{2}\hbar\omega\right)$

$$J^2\psi_0\chi_- = (L+S)^2\psi_0\chi_- = (L^2 + 2\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{COMMUTANO}}}{\underline{L}\cdot\underline{S}} + S^2)\,\psi_0\chi_- \underset{\substack{\uparrow \\ l=0}}{=} \hbar^2\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\psi_0\chi_-$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2\psi_0\chi_-$$

E COSÌ PER GLI ALTRI LIVELLI (LE AUTOFUNZIONI SONO LE STESSE).

ESERCIZIO

$$H = \frac{\alpha}{\hbar^2}(\underline{L}\cdot\underline{S}) + \frac{\alpha}{\hbar^2}L^2 \qquad \text{SPIN } 1/2$$

È UN ROTATORE (VIVE NELLO SPAZIO DEGLI ANGOLI, A R FISSATO).

a) SPETTRO.

NOTO CHE

$$J^2 = (\underline{L}+\underline{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\underline{L}\cdot\underline{S}$$

$$\underline{L}\cdot\underline{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

POSSO RISCRIVERE

$$H = \frac{\alpha}{\hbar^2}\left[\frac{J^2}{2} - \frac{L^2}{2} - \frac{S^2}{2} + L^2\right]$$

CONSIDERATO CHE È SEMPRE $S = \frac{1}{2}$,

$$H = \frac{\alpha}{\hbar^2}\left(\frac{J^2}{2} + \frac{L^2}{2} - \frac{1}{2}\hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right) = \frac{\alpha}{2\hbar^2}\left(J^2 + L^2\right) - \frac{3}{8}\alpha$$

SAPPIAMO CHE UNA BASE È DATA DALLE

$$Y_l^m \chi_\pm = |l, m\rangle |\pm \tfrac{1}{2}\rangle$$

CON $J = l + \frac{1}{2}$, $J = l - \frac{1}{2}$.

TROVIAMO QUANTO VALE H SUGLI $|J, J_z, L\rangle$.

NEL CASO A $J = l + \frac{1}{2}$,

$$H|l+\tfrac{1}{2}, J_z, l\rangle = \frac{\alpha\hbar^2}{2\hbar^2}\left\{\left(l+\tfrac{1}{2}\right)\left(l+\tfrac{3}{2}\right) + l(l+1)\right\} - \frac{3\alpha}{8} = \frac{\alpha l}{2}(2l+3)$$

$l=1,\ J=\frac{5}{2}$	$E = 7\alpha$	$d=6$
$l=1,\ J=\frac{3}{2}$	$E=\frac{5}{2}\alpha$	$d=4$
$l=0,\ J=\frac{1}{2}$	$E=0$	$d=2$
$l=2,\ J=\frac{3}{2}$	$E=\frac{9}{2}\alpha$	$d=4$
$l=1,\ J=\frac{1}{2}$	$E=\alpha$	$d=2$

PER $J = l - \frac{1}{2}$ (E $l \neq 0$),

$$H|l-\tfrac{1}{2}, J_z, l\rangle = \frac{\alpha\hbar^2}{2\hbar^2}\left\{\left(l-\tfrac{1}{2}\right)\left(l+\tfrac{1}{2}\right) + l(l+1)\right\} - \frac{3}{8}\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(2l^2 + l - 1\right)$$

(I VALORI POSSIBILI DI J SONO DATI DAL DISCORSO CHE ABBIAMO FATTO SU CLEBSH-GORDAN: $\{l_1+l_2, \dots, |l_1-l_2|\}$).

b) CALCOLARE N PER LO STATO INIZIALE

$$\Psi(t=0) = N \sin\theta \cos\varphi\, \chi_+$$

POTREMMO FARCI IL CALCOLO, MA È PIÙ UTILE PROVARE A RICONDURCI ALLE ARMONICHE SFERICHE. RICORDIAMO PER $l = 1$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

RICONOSCIAMO

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\sin\theta\, e^{i\varphi} + \sin\theta\, e^{-i\varphi}\right)$$

PERCIO' POSSIAMO RISCRIVERE

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{1}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{1}\right)$$

$$\psi(t=0) = N\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{1}\right)\chi_+ = N\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(|\underset{L_z}{-1}, \underset{S_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle - |1, \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

SIAMO PASSATI ALLA RAPPRESENTAZIONE

TRAMITE STATI ORTOGONALI; SAPPIAMO CHE LO STATO

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1, \tfrac{1}{2}\rangle - |1, \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

E' NORMALIZZATO, QUINDI

$$N\sqrt{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad N = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

VALORE CHE NON USEREMO; L'IMPORTANTE E' AVER TROVATO

$$\psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1, \tfrac{1}{2}\rangle - |1, \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

c) TROVA $\psi(t)$.

DEVO CAMBIARE BASE (UNA IN CUI H E' DIAGONALE). USANDO LE TAVOLE,

$$1 \times \frac{1}{2} = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases} \qquad |L_z, S_z\rangle \rightarrow |J^2, J_z\rangle$$

LEGGO

$$|-1, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_J - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_J$$

$$|1, \tfrac{1}{2}\rangle = |\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle_J$$

NOTA: RICORDA CHE $|\underset{\sum_i l_i}{J^2}, \underset{\sum_i m_i}{J_z}\rangle$ MA CHE QUESTO SI PERDE QUANDO SOMMO DUE STATI (POSSONO INFATTI INTERFERIRE).

POSSO CALCOLARE

$$\psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_J - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_J - |\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle_J\right\}$$

RIPRENDO ORA L'HAMILTONIANA

$$H = \frac{\alpha}{2\hbar^2}\left(J^2 + L^2 - S^2\right)$$

NOTA: RICORDA CHE L^2, S^2 RIMANGONO DIAGONALI IN ENTRAMBE LE BASI.

VERIFICO

$$H\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\left\{\frac{\alpha\hbar^2}{2\hbar^2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+2\right)-\frac{3\alpha}{8}\right\}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=2\alpha\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$H\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=2\alpha\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$H\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\alpha\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

NOTA: MI STO MUOVENDO NELLO SPAZIO PRODOTTO $1\otimes\frac{1}{2}$, PERCIÒ È CHIARO CHI SIANO ℓ, S QUANDO APPLICO GLI OPERATORI L^2 E S^2 (ANCHE SE NON SONO SCRITTI ESPLICITAMENTE NEL KET).

(POTEVO LEGGERLE DA PRIMA; TRA L'ALTRO FA $\frac{5}{2}\alpha$ E NON 2α). ALLORA

$$\psi(t)=e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\,\psi(0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}e^{-2\alpha i\frac{t}{\hbar}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\alpha i\frac{t}{\hbar}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2\alpha i\frac{t}{\hbar}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\rightarrow\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_J-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle_J-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha\frac{t}{\hbar}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_J$$

d) VALORI POSSIBILI DI J^2 E L_z E LORO PROBABILITÀ AL TEMPO t.

$$J^2=\hbar^2\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}\hbar^2 \qquad P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$J^2=\hbar^2\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\hbar^2 \qquad P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

DOBBIAMO ORA TORNARE NELLA BASE IN CUI È DIAGONALE L_z.
SEMPRE DALLE TAVOLE SI LEGGE

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_J=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\left|-1,+\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_J=\sqrt{\frac{1}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|-1,+\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle_J=\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle$$

RISCRIVO

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\left|-1,+\frac{1}{2}\right\rangle\right\}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle-\frac{e^{i\alpha\frac{t}{\hbar}}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{\frac{1}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|-1,+\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-e^{i\alpha\frac{t}{\hbar}}\right)\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(1+2e^{i\alpha\frac{t}{\hbar}}\right)\left|-1,+\frac{1}{2}\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\underset{\uparrow\atop L_z}{1},\underset{\uparrow\atop S_z}{\frac{1}{2}}\right\rangle$$

ORA POSSO CALCOLARE

$$P(L_z=0) = \frac{1}{9}\left|1-e^{i\alpha\frac{t}{\hbar}}\right|^2$$

$$P(L_z=-1) = \frac{1}{18}\left|1+2e^{i\alpha\frac{t}{\hbar}}\right|^2$$

$$P(L_z=1) = \frac{1}{2}$$

È UTILE VERIFICARE CHE PER $t=0$ RITROVIAMO LE PROBABILITÀ SULLO STATO INIZIALE.

e) CALCOLARE

$$\langle \Psi(t) | \underline{S}\cdot\underline{m} | \Psi(t)\rangle$$

NOTA: $\underline{m}=(m_x, m_y, m_z)$ DOVE GLI m_i SONO NUMERI E NON OPERATORI.

DETTO

$$\Psi(t) = a\,|0,-\tfrac{1}{2}\rangle + b\,|-1,\tfrac{1}{2}\rangle + c\,|1,\tfrac{1}{2}\rangle$$

VOGLIO

$$\left(a^*\langle 0,-\tfrac{1}{2}| + b^*\langle -1,\tfrac{1}{2}| + c^*\langle 1,\tfrac{1}{2}|\right)\underline{S}\cdot\hat{m}\left(a|0,-\tfrac{1}{2}\rangle + b|-1,\tfrac{1}{2}\rangle + c|1,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

MA

$$\langle \underset{L_z}{m}, \underset{S_z}{m} | \underline{S}\cdot\hat{m} | m', m'\rangle = \int d\Omega\, Y_1^{m*} Y_1^{m'} \chi_m^* \,\underline{S}\cdot\hat{m}\, \chi_{m'}$$

$$|m', m'\rangle = Y_{lm'}\chi_{m'}$$

O, ANCOR PIÙ IN GENERALE,

$$\langle m, m | f(\theta,\varphi)\,\underline{S}\cdot\hat{m} | m', m'\rangle = \int d\Omega\, Y_1^{m*} f(\theta,\varphi) Y_1^{m'} \chi_m^*\, \underline{S}\cdot\hat{m}\, \chi_{m'}$$

INOLTRE

$$Y_1^{m*}Y_1^{m'} = \delta_{mm'}$$

NOTA: QUANTO APPENA DETTO È BANALE SE SI RICORDA CHE È UNA BASE ORTONORMALE. INOLTRE $\underline{S}\cdot\hat{m}$ AGISCE SOLO SULLA PARTE IN S_z (VOLENDO È $\underline{S}\cdot\hat{m}\otimes \mathbb{1}^{(L_z)}$).

QUINDI L'ESPRESSIONE SOPRA SI SEMPLIFICA IN

$$\langle \Psi(t) | \underline{S}\cdot\hat{m} | \Psi(t)\rangle$$

$$= |a|^2\langle 0,-\tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|0,-\tfrac{1}{2}\rangle + |b|^2\langle -1,\tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|-1,\tfrac{1}{2}\rangle + |c|^2\langle 1,\tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|1,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= |a|^2\langle -\tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|-\tfrac{1}{2}\rangle + |b|^2\langle \tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|\tfrac{1}{2}\rangle + |c|^2\langle \tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= |a|^2\langle -\tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|-\tfrac{1}{2}\rangle + \left(|b|^2+|c|^2\right)\langle \tfrac{1}{2}|\underline{S}\cdot\hat{m}|\tfrac{1}{2}\rangle$$

INOLTRE RICORDIAMO

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{|+\tfrac{1}{2}\rangle, |-\tfrac{1}{2}\rangle\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\langle m | S_x, S_y | m \rangle = 0 \qquad \text{CON } m = +\tfrac{1}{2} \text{ o } -\tfrac{1}{2}.$$

NOTA: QUESTO INVECE È TUTT'ALTRO CHE BANALE. SONO NULLI GLI ELEMENTI DI MATRICE CERCATI E SI VEDE BENE NELLA BASE IN CUI È DIAGONALE S_z (RAPPRESENTAZIONE DI PAULI).

$$\langle \Psi(t) | \underline{S}\cdot\hat{m} | \Psi(t) \rangle = |a|^2 \langle -\tfrac{1}{2} | S_z m_z | -\tfrac{1}{2} \rangle + \left(|b|^2 + |c|^2\right) \langle \tfrac{1}{2} | S_z m_z | \tfrac{1}{2} \rangle$$

$$= |a|^2 m_z \left(-\frac{\hbar}{2}\right) + \left(|b|^2 + |c|^2\right) m_z \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2} m_z \left(|b|^2 + |c|^2 - |a|^2\right)$$

UN ALTRO MODO FIGO PER FARLO ERA SCRIVERE LA MATRICE ASSOCIATA A $\underline{S}\cdot\hat{m}$ USANDO LE MATRICI DI PAULI.

- ESERCIZIO

DUE PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$ HANNO LA FUNZIONE D'ONDA

$$\Psi = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_2$$

RICORDO

$$|+\tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_1 = 2 |\tfrac{1}{2}\rangle_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_2 = -|\tfrac{1}{2}\rangle_2 + 2|-\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

a) CALCOLARE c PER CUI $|\Psi\rangle$ È NORMALIZZATA.

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = |c|^2 \underline{(2\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot \underline{(-1\ 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = |c|^2 (4 \cdot 5) = 20|c|^2$$

OPPURE

$$\Psi = c\, 2 |\tfrac{1}{2}\rangle_1 \left(-|\tfrac{1}{2}\rangle_2 + 2|-\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 4|c|^2 {}_1\langle \tfrac{1}{2} | \left(-{}_2\langle \tfrac{1}{2}| + 2\ {}_2\langle -\tfrac{1}{2}|\right) \cdot |\tfrac{1}{2}\rangle_1 \left(-|\tfrac{1}{2}\rangle_2 + 2|-\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

$$= 4|c|^2 (1+4) = 20|c|^2$$

IN ENTRAMBI I CASI NORMALIZZO PONENDO $|c| = \frac{1}{\sqrt{20}}$.

b) IL SISTEMA È SOGGETTO A

$$H = \frac{g}{\hbar^2} S^2 \qquad S = S_1 + S_2$$

ⓑ TROVARE $\Psi(t)$ E LA PROBABILITÀ DI MISURARE $E=0$.

RISCRIVO

$$\Psi = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2$$

CAMBIAMO BASE,

$$S_{1z},\ S_{2z} \rightarrow S^2,\ S_z$$

USANDO C.G. CON $\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2} = \begin{cases} S=1 \\ S=0 \end{cases}$,

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}|\underset{S}{1},\underset{S_z}{1}\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle\right) = \Psi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}|1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|1,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|0,0\rangle$$

$E = \frac{g}{\hbar^2}1\cdot 2\hbar^2 = 2g$ $\qquad$ $E=0$

ALLORA

$$\Psi(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}2g}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}|1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|1,0\rangle\right) + \sqrt{\frac{2}{5}}|0,0\rangle$$

$$\text{PROB}(E=0) = \text{PROB}(S=0) = \frac{2}{5}.$$

· <u>ESERCIZIO</u>

PARTICELLA DI CARICA NOTA, SPIN $\frac{1}{2}$ SOGGETTA ALL'HAMILTONIANA

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} + \beta\frac{J^2}{\hbar^2} \qquad\qquad \underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$$

SONO DATE (R FUNZIONE D'ONDA NORMALIZZATA DELL'ATOMO DI IDROGENO)

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{r}R_{n=2,\,l=1}(r)\begin{pmatrix} x+iy \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{r}R_{n=2,\,l=1}(r)\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Psi_3 = \frac{N_3}{r}R_{n=2,\,l=1}(r)\begin{pmatrix} z \\ -x \end{pmatrix}$$

$$|n,l,m\rangle = R_{nl}\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

NOTA: SI HA $(n=p+l+1)$

$$R_{nl}(r) = r^l g_p(r)\,e^{-\frac{a_B}{n}r}$$

a) SONO AUTOFUNZIONI DI H?

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{r} R_{21}(x+iy)\chi_+$$

MA

$$\frac{x+iy}{r} = \sin\theta\, e^{i\varphi}$$

QUINDI

$$\Psi_1 = N_1 R_{21} \sin\theta\, e^{i\varphi}\chi_+ = \left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right) N_1 R_{21} Y_1^1 \chi_+$$

CHE È AUTOFUNZIONE DELLA H_0 DELL'ATOMO DI IDROGENO,

$$H = H_0 + \beta \frac{J^2}{\hbar^2}$$

$$H_0 \Psi_1 = + \frac{E_I}{4}\Psi_1$$

È ANCHE AUTOFUNZIONE DI H?

$$Y_1^1 \chi_+ = \underset{L_z,\, S_z}{\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle} = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle_J \qquad 1 \oplus \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Psi_1 = \left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right) N_1 R_{21} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle_J$$

$$J^2\Psi_1 = \left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right) N_1 R_{21} \underbrace{J^2 \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle_J}_{\hbar^2 \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{15}{4}\hbar^2 \Psi_1$$

$$H\Psi_1 = \left(-\frac{E_I}{4} + \frac{15\beta}{4}\right)\Psi_1$$

CALCOLIAMO N_1.

$$\Psi_1 = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} N_1 |2,1,1\rangle \chi_+ \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}$$

SIMILMENTE

$$\Psi_2 = N_2 R_{21} \frac{z}{r}\chi_- = N_2 R_{21} \cos\theta\, \chi_- = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} N_2 R_{21} Y_1^0 \chi_-$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} N_2 |2,1,0\rangle \chi_-$$

$$H_0 \Psi_2 = -\frac{E_I}{4}\Psi_2$$

USANDO C.G.,

$$Y_1^0 \chi_- = |\underset{\substack{\uparrow\\ L_z}}{0}, -\underset{\substack{\uparrow\\ S_z}}{\tfrac{1}{2}}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\underset{\substack{\uparrow\\ J}}{\tfrac{3}{2}}, -\underset{\substack{\uparrow\\ J_z}}{\tfrac{1}{2}}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

APPAIONO 2 VALORI DIVERSI DI J, QUINDI ψ_2 È COMBINAZIONE DI AUTOFUNZIONI MA NON È LEI STESSA AUTOFUNZIONE DI H. COMUNQUE

$$N_2 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

$$\psi_2 = |2,1,0\rangle \chi_- = R_{21}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle_J\right)$$

INFINE

$$\psi_3 = N_3 R_{21}\left(\frac{z}{r}\chi_+ - \frac{x}{r}\chi_-\right)$$

$$= N_3 R_{21}\left(\cos\theta\,\chi_+ - \sin\theta\cos\varphi\,\chi_-\right) = N_3 R_{21}\left(\cos\theta\,\chi_+ - \tfrac{1}{2}\sin\theta\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\chi_-\right)$$

$$= N_3 R_{21}\left\{\sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\,Y_1^0\chi_+ - \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{8\pi}{3}}\,Y_1^1\right)\chi_- - \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{8\pi}{3}}\,Y_1^{-1}\right)\chi_-\right\}$$

$$= \sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\,N_3 R_{21}\left\{Y_1^0\chi_+ + \tfrac{1}{\sqrt{2}}Y_1^1\chi_- - \tfrac{1}{\sqrt{2}}Y_1^{-1}\chi_-\right\}$$

CHE È COMBINAZIONE DI 3 STATI CON LA STESSA ENERGIA, QUINDI È AUTOFUNZIONE DI H_0. LO È ANCHE DI H? USANDO C.G.,

$$|\underset{\substack{\uparrow\\ Y_\ell^m}}{0}, \underset{\substack{\uparrow\\ \chi_+}}{\tfrac{1}{2}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\underset{\substack{\uparrow\\ Y_\ell^m}}{1}, -\underset{\substack{\uparrow\\ \chi_-}}{\tfrac{1}{2}}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\underset{\substack{\uparrow\\ Y_\ell^m}}{-1}, -\underset{\substack{\uparrow\\ \chi_-}}{\tfrac{1}{2}}\rangle$$

$$= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\right) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle$$

CHE È AUTOFUNZIONE DI J^2 (COMPARE SOLO $\frac{3}{2}$).

$$\psi_3 = \sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\,N_3\left\{|2,1,0\rangle\chi_+ + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|2,1,1\rangle\chi_- - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|2,1,-1\rangle\chi_-\right\}$$

NORMALIZZIAMOLO.

$$\langle \Psi_3 | \Psi_3 \rangle = \frac{4\pi}{3} |N_3|^2 \left\{ \chi_+^* \langle 2,1,0| + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_-^* \langle 2,1,1| - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 2,1,-1| \chi_-^* \right\}$$

$$\cdot \left\{ |2,1,0\rangle \chi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} |2,1,1\rangle \chi_- + \frac{1}{\sqrt{2}} |2,1,-1\rangle \chi_- \right\}$$

$$= \frac{4\pi}{3} |N_3|^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{8\pi}{3} |N_3|^2$$

$$N_3 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}$$

c) EVOLUZIONE TEMPORALE.

Ψ_1, Ψ_3 SONO INVARIANTI SOTTO EVOLUZIONI TEMPORALE:

$$\Psi_1(t) = \Psi_1(0)$$

$$\Psi_3(t) = \Psi_3(0)$$

INVECE

$$\Psi_2(0) = |2,1,0\rangle \chi_- = R_{21} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J + \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J \right)$$

$$H\left(R_{21} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J\right) = -\frac{E_I}{4} R_{21} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J + \frac{\beta}{\hbar^2} \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) \hbar^2 R_{21} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J$$

$$H\left(R_{21} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J\right) = \left\{ -\frac{E_I}{4} + \beta \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \right\} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J$$

ALLORA

$$E_1 = -\frac{E_I}{4} + \frac{15}{4}\beta$$

$$E_2 = -\frac{E_I}{4} + \frac{3}{4}\beta$$

$$\Psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\frac{it}{\hbar}E_1} R_{21} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{t}{\hbar}E_2} R_{21} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_J$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} R_{21} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{t}{\hbar}(E_2 - E_1)} R_{21} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} R_{21} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\frac{t}{\hbar}3\beta} R_{21} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

d) MISURIAMO L_z. CHE VALORI TROVIAMO E CON CHE PROBABILITÀ?

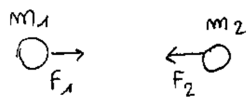
DOBBIAMO TORNARE CON LE TAVOLE A UNA BASE DI L_z:

$$\Psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} R_{21} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle \right) + \sqrt{\frac{1}{3}} R_{21} e^{3it\frac{\beta}{\hbar}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left|-1, +\frac{1}{2}\right\rangle \right)$$

AD ESEMPIO,

$$P(L_z = 0) = \left| \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3it\frac{\beta}{\hbar}} \right|^2$$

PROBLEMA DEI DUE CORPI



$$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_1(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_2(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{cases}$$

SOMMANDOLE,

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0$$

DEFINENDO LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA

$$\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\underline{R}} = 0$$

E LA DISTANZA RELATIVA

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

$$\begin{cases} \ddot{\underline{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \underline{F}_1 \\ \ddot{\underline{r}}_2 = \frac{1}{m_2} \underline{F}_2 \end{cases}$$

SOTTRAENDOLE,

$$\ddot{\underline{r}}_2 - \ddot{\underline{r}}_1 = \frac{1}{m_2} \underline{F}_2 + \frac{1}{m_1} \underline{F}_2 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \underline{F}_2$$

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{\mu} \underline{F}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_2(|\underline{r}|)$$

DOVE SI È DEFINITA LA MASSA RIDOTTA μ.

NEI MOTI PLANETARI (O PER L'ATOMO DI IDROGENO) SI PONE

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_e} \simeq \frac{1}{m_e} \qquad (m_H \simeq 2000\, m_e)$$

IN REALTÀ LA DIFFERENZA SI FA SENTIRE QUANDO SI OSSERVA SPERIMENTALMENTE LO SPETTRO DI EMISSIONE DI ISOTOPI DIVERSI.

DATE LE GRANDEZZE

$$\underline{R}, \underline{r}$$

VI ASSOCIAMO L'IMPULSO CONIUGATO

$$\underline{P} = (m_1 + m_2) \dot{\underline{R}}$$

$$= (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2}{m_1 + m_2} \right) = m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2 = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$$

VOGLIAMO INFATTI PASSARE DALLE

$\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{p}_1, \underline{p}_2$

A UN NUOVO SET DI VARIABILI CANONICHE

$\underline{R}, \underline{r}, \underline{P}, \underline{p}$

VERIFICHIAMO INFATTI CHE

$$[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad [r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[R_i, r_j] = 0$$

$$[R_i, p_j] = 0$$

$$[P_i, r_j] = 0$$

PER LA PRIMA,

$$[R_i, P_j] = \left[\frac{m_1 r_{1i} + m_2 r_{2i}}{m_1+m_2}, p_{1j}+p_{2j}\right] = \left[\frac{m_1 r_{1i}}{m_1+m_2}, p_{1j}\right] + \left[\frac{m_2 r_{2i}}{m_1+m_2}, p_{2j}\right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2} i\hbar\delta_{ij} + \frac{m_2}{m_1+m_2} i\hbar\delta_{ij} = i\hbar\delta_{ij}$$

PER MOSTRARE LA SECONDA, RICORDIAMO

$$E = \frac{1}{2} M_{TOT} V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{REL}^2 + U$$

E DEFINIAMO IN MODO NATURALE

$$\underline{p} = \mu\underline{v} = \mu(\dot{\underline{r}}_2 - \dot{\underline{r}}_1) = \frac{\mu}{m_2}\underline{p}_2 - \frac{\mu}{m_1}\underline{p}_1$$

(SI POTEVA ANCHE RICAVARE $\underline{p}$ DALLA LAGRANGIANA). ALLORA

$$[r_i, p_j] = \left[r_{2i} - r_{1i}, \frac{\mu}{m_2}p_{2j} - \frac{\mu}{m_1}p_{1j}\right] = \left[r_{2i}, \frac{\mu}{m_2}p_{2j}\right] + \left[r_{1i}, \frac{\mu}{m_1}p_{1j}\right]$$

$$= \frac{\mu}{m_2} i\hbar\delta_{ij} + \frac{\mu}{m_1} i\hbar\delta_{ij} = \mu i\hbar\delta_{ij}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = i\hbar\delta_{ij}$$

LE ALTRE SEGUONO SIMILMENTE DA

$$[r_i, P_j] = [r_{2i} - r_{1i}, p_{2j} + p_{1j}] = [r_{21}, p_{2j}] - [r_{1i}, p_{1j}]$$

$$= i\hbar\delta_{ij} - i\hbar\delta_{ij} = 0$$

HO COSÌ DIMOSTRATO CHE IL NUOVO SET DI VARIABILI È CANONICO.

HO OTTENUTO L'HAMILTONIANA

$$H = \underbrace{\frac{P^2}{2M_{TOT}}}_{\text{PARTICELLA LIBERA}} + \underbrace{\frac{p^2}{2\mu} + U(r)}_{\text{HAMILTONIANA IN CAMPO CENTRALE}}$$

CHE COME SI VEDE È SEPARABILE, PERCIÒ

$$\Psi(R, r) = \frac{e^{i\frac{P \cdot R}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, \Psi_{nlm}(r)$$

CON $\Psi_{nlm}(r)$ L'AUTOFUNZIONE DELL'ATOMO DI IDROGENO (CON μ AL POSTO DELLA MASSA). INOLTRE

$$E = \frac{P^2}{2M_{TOT}} + E_n$$

RISOLVERE INVECE IL PROBLEMA NEL SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA SIGNIFICA IGNORARE LA PARTE DI H CORRISPONDENTE ALLA PARTICELLA LIBERA (QUINDI $E = E_n$).

- ESERCIZIO

DUE PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$, $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{S}_{TOT}$

$$H = \frac{\alpha}{\hbar^2} S^2 + \frac{\beta}{\hbar} S_{1z} + \frac{\gamma}{\hbar} S_{2z}$$

① TROVA E_{SF} SE $\alpha \gg \beta, \gamma$

DI SOLITO USIAMO

$|S_{1z}, S_{2z}\rangle$ OPPURE $|S_{TOT}, S_{TOT,z}\rangle$

IN QUESTO CASO NESSUNA DELLE DUE BASI RENDE H GIÀ DIAGONALE.

PERÒ

$[H, S_{TOT,z}] = 0$ (INFATTI $[S^2, S_{T,z}]=0$, $[S_{1z}, S_{T,z}]=0$, $[S_{2z}, S_{T,z}]=0$)

PER GLI STATI CON $S_{TOT,z}$ NON DEGENERE, SCEGLIENDO

$|1,1\rangle$

$|1,0\rangle$

$|0,0\rangle$ CON $|S_{TOT}, S_{TOT,z}\rangle$

$|1,-1\rangle$

NOTA: RICORDA CHE SE $[A,B]=0$ E $A|a\rangle = a|a\rangle$, ALLORA $A(B|a\rangle) = a(B|a\rangle)$. SEGUE CHE, SE A È NON DEGENERE, OGNI AUTOVETTORE DI A È ANCHE AUTOVETTORE DI B (INFATTI $B|a\rangle$ È UN MULTIPLO DI $|a\rangle$).

QUI PERÒ PERCHÈ $S_{TOT,z}$ NON SIA DEGENERE DEVO CONSIDERARE PARTICELLE DI SPIN 0 (COME I PIONI).

H RISULTA DIAGONALIZZATA. ALTRIMENTI SI HA COMUNQUE CHE IL PRIMO E L'ULTIMO SONO AUTOSTATI DI H E DEVO DIAGONALIZZARE SOLO IL BLOCCO CENTRALE. OSSERVO INFATTI CHE

$$|1,1\rangle_S = |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

$$S^2|1,1\rangle_S = 1(1+1)\hbar^2 |1,1\rangle_S = 2\hbar^2 |1,1\rangle_S$$

$$S_{1z}|\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

$$S_{2z}|\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

$$H|1,1\rangle_S = \left(2\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)|1,1\rangle_S$$

$$H|1,-1\rangle_S = \left(2\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)|1,-1\rangle_S$$

OSSERVANDO INVECE IL SECONDO E TERZO AUTOSTATO,

$$\frac{S^2}{\hbar^2}|1,0\rangle_S = 2|1,0\rangle$$

$$\frac{S_{1z}}{\hbar}|1,0\rangle \underset{\uparrow\ \text{C.G.}}{=} \frac{S_{1z}}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - \tfrac{1}{2}|-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right) \underset{\uparrow\ \text{C.G.}}{=} \frac{1}{2}|0,0\rangle$$

DA CUI VEDO CHE IN QUESTA BASE S_{1z} NON È DIAGONALE. SIMILMENTE

$$\frac{S_{2z}}{\hbar}|1,0\rangle = \frac{S_{2z}}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{2}|-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= -\frac{1}{2}|0,0\rangle$$

PERCIÒ

$$H|1,0\rangle_S = 2\alpha|1,0\rangle_S + \frac{\beta-\gamma}{2}|0,0\rangle_S$$

(CI STIAMO MUOVENDO NEL SOTTOSPAZIO CON $S_{TOT,z} = 0$).

$$\frac{S^2}{\hbar^2}|0,0\rangle = 0$$

$$\frac{S_{1z}}{\hbar}|0,0\rangle = \frac{S_{1z}}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right) = \frac{1}{2}|1,0\rangle$$

$$\frac{S_{2z}}{\hbar}|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(|\tfrac{1}{2}\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right) = -\frac{1}{2}|1,0\rangle$$

$$H|0,0\rangle_S = \frac{\beta-\gamma}{2}|1,0\rangle_S$$

SCRIVIAMO LA RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE DI H. IDENTIFICHIAMO

$$|1,0\rangle_S \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$|0,0\rangle_S \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(OVVERO LAVORIAMO SOLO SUL BLOCCO CENTRALE, UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE 2).

IMPONIAMO

$$H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

SE

$$H = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}2\alpha\\ \frac{\beta-\gamma}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\frac{\beta-\gamma}{2}\\ 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H = \begin{pmatrix}2\alpha & \frac{\beta-\gamma}{2}\\ \frac{\beta-\gamma}{2} & 0\end{pmatrix}$$

(CHECK: H È HERMITIANA). DIAGONALIZZIAMOLA:

$$\det\begin{pmatrix}2\alpha-\lambda & \frac{\beta-\gamma}{2}\\ \frac{\beta-\gamma}{2} & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\alpha - \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2 \equiv 0$$

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2} \simeq \begin{cases} 2\alpha + (\ldots) \\ 0 - (\ldots)\end{cases} \qquad (\text{ERA } \alpha \gg \beta,\gamma)$$

QUINDI

$$E_{SF} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2}$$

NOTA: ABBIAMO DIAGONALIZZATO IL BLOCCO CENTRALE TROVANDO GLI AUTOVALORI DI H RELATIVI AGLI STATI $|1,0\rangle, |0,0\rangle$. IN LINEA DI PRINCIPIO VANNO CONFRONTATI CON GLI AUTOVALORI TROVATI PRIMA SUGLI STATI $|1,1\rangle, |1,-1\rangle$, OVVERO

$$\lambda = 2\alpha \pm \frac{3}{4}(\beta+\gamma)$$

SCEGLIENDO IL PIÙ PICCOLO TRA TUTTI HO E_{SF}.

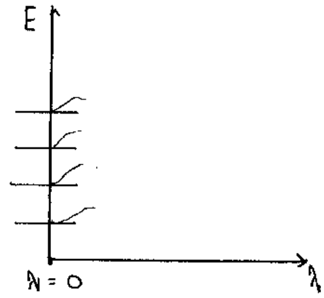
NOTA: SI HA CHE IN GENERALE COMMUTA TUTTO TRANNE $[S^2_{TOT}, S_{1z}]$, $[S^2_{TOT}, S_{2z}] \neq 0$. NELLA BASE "OVVIA" DI S_{1z}, S_{2z} SI È VISTO CHE $S_{TOT,z}$ È GIÀ DIAGONALE MA NON LO È S^2_{TOT}; CON C-G. VADO IN UNA BASE IN CUI $S^2_{TOT}, S_{TOT,z}$ SONO DIAGONALI MA NON S_{1z} E S_{2z}. QUI ABBIAMO VISTO CHE POSSO DIAGONALIZZARE H, MA IN QUESTA BASE NON SARANNO PIÙ DIAGONALI S^2, S_{1z}, S_{2z} PRESI SINGOLARMENTE (LO È SOLO QUELLA LORO PARTICOLARE COMBINAZIONE).

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

$$H = H_0 + \lambda V$$

H_0 È UN'HAMILTONIANA CHE SO RISOLVERE, λ UN PARAMETRO PICCOLO.

DATO LO SPETTRO DELLA H IMPERTURBATA ($\lambda = 0$), COME CAMBIANO I LIVELLI SE INCREMENTO λ?



PRENDO LO STATO Ψ_λ,

$$H \Psi_\lambda = E(\lambda) \Psi_\lambda$$

PER λ PICCOLO,

$$E(\lambda) = E_0 + \lambda E_1 + o(\lambda^2)$$

$$\Psi_\lambda = \psi^{(0)} + \lambda \psi^{(1)} + o(\lambda^2)$$

CON $\psi^{(0)}$ AUTOFUNZIONE DI H_0, $E_0 \in \{\text{SPETTRO DI } H_0\}$:

$$H_0 \psi^{(0)} = E_0 \psi^{(0)}$$

SCOPO DELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI È CALCOLARE E_1, $\psi^{(1)}$ (E IN CASO LE CORREZIONI SUCCESSIVE).

IMPONGO L'IDENTITÀ

$$(H_0 + \lambda V)(\psi^{(0)} + \lambda \psi^{(1)}) = (E_0 + \lambda E_1)(\psi^{(0)} + \lambda \psi^{(1)}) + o(\lambda^2)$$

$$H_0 \psi^{(0)} + \lambda V \psi^{(0)} + \lambda H_0 \psi^{(1)} = E_0 \psi^{(0)} + \lambda E_1 \psi^{(0)} + \lambda E_0 \psi^{(1)} + o(\lambda^2)$$

(HO TRASCURATO I TERMINI IN λ^2). PER COSTRUZIONE

$$H_0 \psi^{(0)} = E_0 \psi^{(0)}$$

PERCIÒ OTTENGO

$$V \psi^{(0)} + H_0 \psi^{(1)} = E_1 \psi^{(0)} + E_0 \psi^{(1)}$$

DA RISOLVERE PER TROVARE E_1, $\psi^{(1)}$.

DOBBIAMO DISTINGUERE I CASI:

① E_0 È NON DEGENERE PER H_0 ($\psi^{(0)}$ NOTA)

② E_0 È DEGENERE PER H_0 ($\psi^{(0)}$ IGNOTA)

① CASO NON DEGENERE.

PRENDO IL PRODOTTO SCALARE CON $\psi^{(0)}$,

$$\langle \psi^{(0)} | V | \psi^{(0)} \rangle + \langle \psi^{(0)} | H_0 | \psi^{(1)} \rangle = E_1 \langle \psi^{(0)} | \psi^{(0)} \rangle + E_0 \langle \psi^{(0)} | \psi^{(1)} \rangle$$

POICHÈ H_0 È HERMITIANA,

$$\langle \psi^{(0)} | H_0 | \psi^{(1)} \rangle = E_0 \langle \psi^{(0)} | \psi^{(1)} \rangle$$

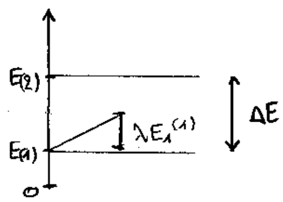
PERCIÒ ($\psi^{(0)}, \psi^{(1)}$ NORMALIZZATE) L'EQUAZIONE CHE DETERMINA E_1 È

$$\underline{\langle \psi^{(0)} | V | \psi^{(0)} \rangle = E_1}$$

IN CHE SENSO LA CORREZIONE È PICCOLA?

$$\lambda E_1 \ll E_0$$

NON HA SENSO, PERCHÈ LE ENERGIE SONO DEFINITE A MENO DI UNA COSTANTE! DETTA INVECE ΔE LA SPAZIATURA TRA I LIVELLI DELLO SPETTRO, PER OGNI LIVELLO DEVE VALERE



$$\lambda E_1 \ll \Delta E$$

CERCHIAMO ORA L'AUTOFUNZIONE PERTURBATA ψ_λ.

SIANO ψ_m LE AUTOFUNZIONI DI H_0,

$$H_0 \psi_m = E_m \psi_m$$

PER FISSARE LE IDEE, $\psi_0 = \psi^{(0)}$.

POICHÈ LE ψ_m FORMANO UNA BASE, POSSO ESPRIMERE

$$\psi^{(1)} = \sum_m a_m \psi_m$$

PRENDENDO COME PRIMA IL PRODOTTO SCALARE CON I BRA ψ_m,

$$\langle \psi_m | V | \psi^{(0)} \rangle + \langle \psi_m | H_0 | \psi^{(1)} \rangle = E_1 \langle \psi_m | \psi^{(0)} \rangle + E_0 \langle \psi_m | \psi^{(1)} \rangle$$

PER $m \neq 0$, $\psi_m \neq \psi^{(0)}$ (PER $m=0$ L'HO GIÀ USATA),

$$\langle \psi_m | V | \psi^{(0)} \rangle + E_m \langle \psi_m | \psi^{(1)} \rangle = E_0 \langle \psi_m | \psi^{(1)} \rangle$$

E, POICHÈ LE ψ_m SONO UNA BASE ORTONORMALE,

$$\langle \psi_m | \psi^{(1)} \rangle = \sum_{m} a_m \langle \psi_m | \psi_m \rangle = a_m$$

SI È COSÌ OTTENUTA

$$\langle \Psi_m | V | \psi^{(0)} \rangle + E_m a_m = E_0 a_m$$

$$a_m = \frac{\langle \Psi_m | V | \psi^{(0)} \rangle}{E_0 - E_m} \qquad m \neq 0$$

POSSO ORA SCRIVERE

$$\psi^{(1)} = a_0 \psi^{(0)} + \sum_{m \geq 1} a_m \Psi_m$$

$$\Psi_\lambda = \psi^{(0)} + \lambda a_0 \psi^{(0)} + \lambda \sum_{m \geq 1} a_m \Psi_m$$

$$= (1 + \lambda a_0) \psi^{(0)} + \lambda \sum_{m \geq 1} a_m \Psi_m$$

POICHÈ GLI STATI SONO DEFINITI A MENO DI UNA COSTANTE, DIVIDO PER IL NUMERO $(1+\lambda a_0)$ E TAGLIO AL PRIMO ORDINE $\left(\frac{\lambda}{1+\lambda a_0} \simeq \lambda (1 - \lambda a_0 \ldots) \right)$:

$$\Psi_\lambda = \psi^{(0)} + \frac{\lambda}{1 + \lambda a_0} \sum_{m \geq 1} a_m \Psi_m \simeq \psi^{(0)} + \lambda \sum_{m \geq 1} a_m \Psi_m$$

ABBIAMO OTTENUTO

$$\Psi_\lambda = \Psi_0 + \lambda \psi^{(1)}$$

$$\psi^{(1)} = \sum_{m \geq 1} a_m \Psi_m$$

CON QUESTA SCELTA (HO ELIMINATO LA COMPONENTE LUNGO $|\psi^{(0)}\rangle$),

$$\langle \psi^{(0)} | \psi^{(1)} \rangle = 0$$

$$\langle \Psi_\lambda | \Psi_\lambda \rangle = \langle \psi^{(0)} + \lambda \psi^{(1)} | \psi^{(0)} + \lambda \psi^{(1)} \rangle = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle + \lambda \langle \Psi_0 | \Psi_1 \rangle$$

$$+ \lambda \langle \Psi_1 | \Psi_0 \rangle + \sigma(\lambda^2) \simeq 1$$

OVVERO Ψ_λ È NORMALIZZATA,

$$\langle \Psi_\lambda | \Psi_\lambda \rangle = 1 .$$

CHIARAMENTE LO STESSO DISCORSO VALE SCEGLIENDO COME $\psi^{(0)}$ UN'ALTRA DELLE AUTOFUNZIONI Ψ_m.

② E_0 È AUTOVALORE DEGENERE.

SIA Ψ_m UNA BASE NEL SOTTOSPAZIO DI H_0 CON ENERGIA E_0 (ATTENZIONE AL CAMBIO DI NOTAZIONE; PER INCISO QUI I Ψ_m SONO IN NUMERO FINITO). PER CIASCUNO,

$$H_0 \Psi_m = E_0 \Psi_m$$

SCRIVO $\psi^{(0)}$ COME

$$\psi^{(0)} = \sum_n c_n \Psi_n$$

MOLTIPLICHIAMO PER Ψ_m L'EQUAZIONE DI PRIMA,

$$\langle \Psi_m | V | \psi^{(0)} \rangle + \langle \Psi_m | H_0 | \psi^{(1)} \rangle = E_1 \langle \Psi_m | \psi^{(0)} \rangle + E_0 \langle \Psi_m | \psi^{(1)} \rangle$$

POICHÈ

$$\langle \Psi_m | H_0 | \psi^{(1)} \rangle = E_0 \langle \Psi_m | \psi^{(1)} \rangle$$

OTTENGO

$$\langle \Psi_m | V | \psi^{(0)} \rangle = E_1 \langle \Psi_m | \psi^{(0)} \rangle$$

DOVE $\psi^{(0)}$ NON È NOTA A PRIORI. SE Ψ_m È BASE ORTONORMALE,

$$\langle \Psi_m | V | \sum_n c_n \Psi_n \rangle = E_1 \langle \Psi_m | \sum_n c_n \Psi_n \rangle$$

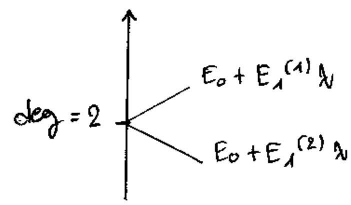
$$\sum_n \langle \Psi_m | V | \Psi_n \rangle c_n = E_1 \sum_n \langle \Psi_m | \Psi_n \rangle c_n$$

$$\sum_n \langle \Psi_m | V | \Psi_n \rangle c_n = E_1 c_m$$

RISCRIVO

$$V_{mn} = \langle \Psi_m | V | \Psi_n \rangle$$

$$\sum_n V_{mn} c_n = E_1 c_m$$

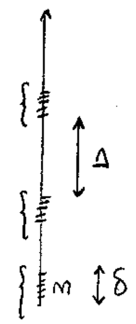


$$\hat{V} \underline{c} = E_1 \underline{c}$$

IL PROBLEMA SI È RIDOTTO A DIAGONALIZZARE $\hat{V}$ PER TROVARNE GLI AUTOVALORI E_1. QUANTI SONO? TANTI QUANTI LA DEGENERAZIONE DEL LIVELLO (O EVENTUALMENTE COINCIDENTI).

NON TRATTIAMO QUI IL PROBLEMA DEL DETERMINARE LE AUTOFUNZIONI PERTURBATE. SI NOTI CHE LA PERTURBAZIONE PUÒ ELIMINARE LA DEGENERAZIONE.

IN FISICA ATOMICA SPESSO SI PRESENTA IL CASO A FIANCO (SOTTOLIVELLI VICINISSIMI). MI BASTA CONSIDERARE UN UNICO LIVELLO m VOLTE DEGENERE E APPLICARE QUINDI LA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI (CON ERRORE OVVIAMENTE DI ORDINE δ).



· TEORIA DELLE PERTURBAZIONI PER L'EVOLUZIONE TEMPORALE

$$H = H_0 + \lambda V(t)$$

DATO $\psi(t=0)$, QUANTO VALE $\psi(t)$? DOVREI RISOLVERE

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

SI NOTI CHE INVECE

$$\psi(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(0)$$

VALE SOLTANTO SE H È INDIPENDENTE DAL TEMPO.

SIA ALLORA ψ_m UNA BON DI H_0,

$$\psi(t=0) = \sum_m a_m \psi_m$$

PER $\lambda = 0$ HO BANALMENTE

$$\psi(t) = e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\psi(t=0) = \sum_m a_m e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}\psi_m := \sum_m a_m e^{-i\omega_m t}\psi_m$$

PER $\lambda \neq 0$, SCELGO UNA SOLUZIONE DI PROVA NELLA FORMA

$$\psi(t) = \sum_m (a_m + b_m(t))\, e^{-i\omega_m t}\psi_m$$

CON $b_m(t) \sim \lambda$, $b_m(t) \equiv 0$ SE $\lambda = 0$, $b_m(t=0) = 0$.

SI NOTI CHE UN'ALTRA SCELTA EQUIVALENTE SAREBBE STATA

$$\psi(t) = \sum_m \left(a_m e^{-i\omega_m t} + b_m(t)\right)\psi_m$$

SOSTITUENDO NELLA TDSE,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \sum_n \left[-i\omega_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) \psi_n + e^{-i\omega_n t} \frac{\partial b_n}{\partial t} \psi_n \right]$$

$$= \sum_n E_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) \psi_n + i\hbar \sum_n e^{-i\omega_n t} \frac{\partial b_n}{\partial t} \psi_n$$

$$H\Psi = H_0 \Psi + \lambda V \Psi$$

$$= \sum_n E_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) \psi_n + \lambda V \sum_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) \psi_n$$

(SE AVESSI USATO L'ALTRA FORMA DI $\Psi(t)$ ORA NON AVREI ALCUNA SEMPLIFICAZIONE). SI OTTIENE

$$i\hbar \sum_n e^{-i\omega_n t} \frac{\partial b_n}{\partial t} \psi_n = \lambda \sum_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) V \psi_n$$

MOLTIPLICANDOLA SCALARMENTE PER ψ_m,

$$i\hbar \sum_n e^{-i\omega_n t} \frac{\partial b_n}{\partial t} \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \lambda \sum_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) \langle \psi_m | V | \psi_n \rangle$$

$$i\hbar e^{-i\omega_m t} \frac{\partial b_m}{\partial t} = \lambda \sum_n e^{-i\omega_n t} (a_n + b_n(t)) \langle \psi_m | V | \psi_n \rangle$$

$$\frac{\partial b_m}{\partial t} = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_n e^{i(\omega_m - \omega_n)t} (a_n + b_n(t)) \langle \psi_m | V | \psi_n \rangle$$

CON CONDIZIONE INIZIALE $b_m(t=0) = 0$.

FIN QUI LA SOLUZIONE È ESATTA. IN APPROSSIMAZIONE PERTURBATIVA, TRASCURO $b_n(t)$ E HO

$$\frac{\partial b_m}{\partial t} = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_n e^{i(\omega_m - \omega_n)t} a_n \langle \psi_m | V | \psi_n \rangle$$

$$\int_0^t \frac{\partial b_m}{\partial t'} dt' = b_m(t) - b_m(0) = b_m(t)$$

$$b_m(t) = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_n \int_0^t dt \; e^{i(\omega_m - \omega_n)t} a_n \langle \psi_m | V(t) | \psi_n \rangle$$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI IL SISTEMA È INIZIALMENTE IN UN QUALSIASI AUTOSTATO DI H_0 (DICIAMO $\Psi = \Psi_0$). ALLORA

$$a_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$b_m(t) = \frac{\lambda}{i\hbar} \int_0^t dt\, e^{i(\omega_m - \omega_0)t} \langle \Psi_m | V(t) | \Psi_0 \rangle \qquad \omega_m = \frac{E_m}{\hbar}$$

DA CUI RISALGO A

$$\Psi(t) = e^{-i\omega_0 t}\left(1 + b_0(t)\right)\Psi_0 + \sum_{m \geq 1} e^{-i\omega_m t} b_m(t)\Psi_m$$

AL TEMPO t, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE UNA MISURA DI H_0 DIA $E_m \neq E_0$ (PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE)?

$$P_m = |\langle \Psi_m | \Psi(t) \rangle|^2$$

$$\langle \Psi_m | \Psi(t) \rangle = e^{-i\omega_m t} b_m(t)$$

$$P_m = |b_m(t)|^2$$

IL CHE CI DÀ UN'IMPORTANTE INTERPRETAZIONE FISICA DELLE $b_m(t)$.

ESERCIZIO

$S_1 = \frac{1}{2} \qquad S_2 = \frac{1}{2}$

$$H = \alpha S_{1z} S_{2z} + \beta S^2 \qquad \beta << \alpha \qquad \alpha S_{1z} S_{2z} \equiv H_0$$

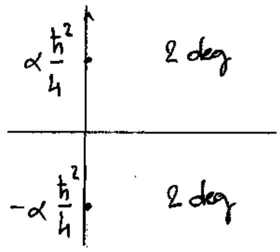
UNA BASE DI H_0 $\left(|S_{1z}, S_{2z}\rangle \right)$ E'

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \qquad \alpha \frac{\hbar^2}{4}$

$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \qquad -\alpha \frac{\hbar^2}{4}$

$|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \qquad -\alpha \frac{\hbar^2}{4}$

$|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \qquad \alpha \frac{\hbar^2}{4}$



NEL SOTTOSPAZIO DI ENERGIA $-\alpha \frac{\hbar^2}{4}$ CON BASE

$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

VOGLIAMO DIAGONALIZZARE S^2. CALCOLIAMO GLI ELEMENTI DI MATRICE

$$\langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} | S^2 | \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle$$

USANDO C.-G.,

$$S^2 |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = S^2 \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} | \underset{S_{TOT}}{1}, \underset{S_{TOT,z}}{0}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}} |0,0\rangle \Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \hbar^2 2 |1,0\rangle$$

$$= \sqrt{2}\hbar^2 |1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar^2 \Big[\tfrac{1}{\sqrt{2}} |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}} |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \Big]$$

$$= \hbar^2 \Big[|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \Big]$$

$$S^2 |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = S^2 \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}} |0,0\rangle \Big) = \hbar^2 \sqrt{2} |1,0\rangle$$

$$= \hbar^2 \Big[|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \Big]$$

ALLORA

$$\langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} | S^2 | \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle = \hbar^2$$

$$\langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | S^2 | \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle = \hbar^2$$

GLI ALTRI DUE ELEMENTI SONO UGUALI, PERCIO'

$$V = S^2 = \begin{pmatrix} \hbar^2 & \hbar^2 \\ \hbar^2 & \hbar^2 \end{pmatrix}$$

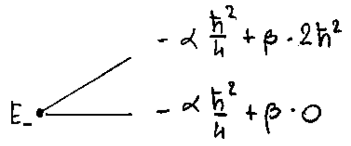
LA DIAGONALIZZO:

$$P_V(\lambda) = (\hbar^2-\lambda)^2 - \hbar^4 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} 2\hbar^2 & \leftarrow S=1 \\ 0 & \leftarrow S=0 \end{cases}$$

COME IN REALTA' GIA' SAPEVO.

LA BASE E' CHIARAMENTE $|1,0\rangle, |0,0\rangle$.

SI E' OTTENUTO CHE LO STATO CON $E_- = -\frac{\alpha\hbar^2}{4}$ SI SEPARA IN



RIPETENDO IL CONTO PER GLI ALTRI DUE STATI TROVO $V = \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 \end{pmatrix}$.

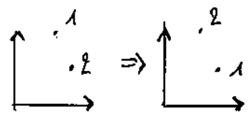
LA PERTURBAZIONE NON SEPARA IL LIVELLO, CHE QUINDI RIMANE DOPPIAMENTE DEGENERE.

· PARTICELLE IDENTICHE E PRINCIPIO DI PAULI

$\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$

INTRODUCIAMO L'OPERATORE DI SCAMBIO P_{12} t.c.

$$P_{12}\,\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \psi(\underline{r}_2, \underline{r}_1)$$



SI HA

$$P^2\psi(r_1, r_2) = P\,\psi(r_2, r_1) = \psi(r_1, r_2)$$

$$\Rightarrow \quad P^2 = \mathbb{1}$$

QUINDI I SUOI AUTOVALORI SONO

$$P\psi = \lambda\psi$$

$$P^2\psi = \lambda P\psi = \lambda^2\psi \equiv \psi$$

$$\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

CHE CORRISPONDONO AD AUTOFUNZIONI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE.

P È HERMITIANO, INFATTI

$$\langle A|P|B\rangle = \int dr_1 dr_2\ \psi_A^*(r_1, r_2)\, P\psi_B(r_1, r_2)$$

$$= \int dr_1 dr_2\ \psi_A^*(r_1, r_2)\, \psi_B(r_2, r_1) \qquad s_2 = r_1, \quad s_1 = r_2$$

$$= \int ds_1 ds_2\ \psi_A^*(s_2, s_1)\, \psi_B(s_1, s_2)$$

$$\langle A|P|B\rangle^* = \int ds_1 ds_2\ \psi_B^*(s_1, s_2)\, \psi_A(s_2, s_1)$$

$$= \int ds_1 ds_2\ \psi_B^*(s_1, s_2)\, P\,\psi_A(s_1, s_2) = \langle B|P|A\rangle$$

E COME SEMPRE

$$P^2 = \mathbb{1},\ P \text{ HERMITIANO} \quad \Rightarrow \quad P \text{ UNITARIO}$$

INFATTI

$$PP^+ = PP = P^2 = \mathbb{1}$$
$$P^+P = PP = P^2 = \mathbb{1} \qquad \Rightarrow \quad P^+ = P^{-1}$$

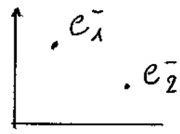
NOTA: IL CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI SA UN PO' DI SMAGHEGGIO, MA IN FONDO SI TRATTA DI FUNZIONI $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$; r_1, r_2 SONO VARIABILI, NON PARTICELLE.

SE LE PARTICELLE HANNO SPIN

$\Psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2, S_{1z}, S_{2z})$

$P\Psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2, S_{1z}, S_{2z}) = \Psi(\underline{r}_2, \underline{r}_1, S_{2z}, S_{1z})$

E LE PROPRIETÀ DI P RESTANO VALIDE.



CONSIDERIAMO 2 PARTICELLE FISICAMENTE IDENTICHE (AD ESEMPIO DUE ELETTRONI). LA FISICA NON PUÒ DIPENDERE DAGLI SCAMBI TRA LE DUE PARTICELLE; IN ALTRI TERMINI H DEVE ESSERE INVARIANTE PER SCAMBIO DI PARTICELLE:

$[H, P] = 0$

AD ESEMPIO NON PUÒ ESSERE

$H = \alpha S_{1z} + \beta S_{2z}$ CON $\alpha \neq \beta$.

SI AVRÀ ALLORA

$PHP^+ = H$

$PHP = H$; $PHP^2 = HP$; $PH = HP$; $[H, P] = 0$.

NOTA: NON SOLO H, MA OGNI ALTRA f OSSERVABILE DEVE SODDISFARE $[f, P] = 0$. SE LO STATO DEL SISTEMA È INIZIALMENTE SIMMETRICO ($|S\rangle$) O ANTISIMMETRICO ($|A\rangle$), LO RIMARRÀ PER SEMPRE; SE È INIZIALMENTE UNA SOVRAPPOSIZIONE DI $|S\rangle$ E $|A\rangle$, LA MISURA DI UNA OSSERVABILE NON DEGENERE LO FA COLLASSARE IN UNO DEI DUE. RICORDO INFATTI IL TEOREMA: $[A,B]=0$, $A|a\rangle = a|a\rangle$, ALLORA $A(B|a\rangle) = a(B|a\rangle)$. SE A È NON DEGENERE, OGNI AUTOSTATO DI A LO È ANCHE DI B ($B|a\rangle \propto |a\rangle$).

ESISTE UNA BASE IN CUI H, P SONO ENTRAMBE DIAGONALI:

BASE $\begin{cases} \text{SIMMETRICHE SOTTO SCAMBIO} \\ \text{ANTISIMMETRICHE SOTTO SCAMBIO} \end{cases}$

NOTA: QUELLO CHE NON È OVVIO A PRIORI È CHE QUESTA DISTINZIONE SIA LEGATA ALLO SPIN; IN NATURA SI È VISTO CHE È COSÌ.

SUBENTRA ALLORA IL PRINCIPIO DI PAULI: NON ESISTONO SOVRAPPOSIZIONI DI AUTOFUNZIONI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE (O LE UNE O LE ALTRE).

DISTINGUIAMO IN BASE ALLO SPIN

1. FERMIONI: SPIN SEMINTERO → ANTISIMMETRICHE
2. BOSONI: SPIN INTERO → SIMMETRICHE

LA VALIDITÀ DEL PRINCIPIO DERIVA DA OSSERVAZIONI SPERIMENTALI.

NOTA: NON TUTTI I VETTORI DELLO SPAZIO H CORRISPONDONO A STATI FISICI.

· ESEMPIO

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r_2^2 \qquad \text{SPIN } 0$$

OSSERVO SUBITO CHE $[H, P] = 0$. NOTO INOLTRE CHE

$$H = H_1 + H_2$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \qquad \psi_0(1)\psi_0(2)$$

IL PRIMO STATO ECCITATO SI OTTIENE COME

$$\begin{cases} \psi_1(1)\psi_0(2) \\ \psi_0(1)\psi_1(2) \end{cases} \qquad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = 2\hbar\omega$$

IL SECONDO

$$\begin{cases} \psi_2(1)\psi_0(2) \\ \psi_0(1)\psi_2(2) \\ \psi_1(1)\psi_1(2) \end{cases} \qquad E_2 = 3\hbar\omega$$

MA PER IL PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI LA BASE DEVE ESSERE SIMMETRICA E QUESTA NON LA È. COSTRUIAMONE UNA:

$$P(\psi_0(1)\psi_0(2)) = \psi_0(2)\psi_0(1) = \psi_0(1)\psi_0(2)$$

CHE VA GIÀ BENE. MA NON FUNZIONA, AD ESEMPIO,

$$P(\psi_0(1)\psi_1(2)) = \psi_0(2)\psi_1(1)$$

MI BASTA SCRIVERE LE COMBINAZIONI

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) - \psi_0(2)\psi_1(1)\right) & \ominus \; (\lambda = -1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) + \psi_0(2)\psi_1(1)\right) & \oplus \; (\lambda = +1) \end{cases}$$

(SO GIÀ CHE SONO ORTOGONALI PERCHÈ CORRISPONDONO A DIVERSI AUTOVALORI DI P). SIMILMENTE PER IL II STATO ECCITATO

$$\begin{cases} \psi_1(1)\psi_1(2) & \oplus \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_2(2) + \psi_0(2)\psi_2(1)\right) & \oplus \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_2(2) - \psi_0(2)\psi_2(1)\right) & \ominus \end{cases}$$

IN GENERALE $(n \neq m)$ COSTRUISCO I DUE STATI

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_n(1)\psi_m(2) \pm \text{SCAMBIATO}\right)$$

MA PER PAULI (SPIN 0) LE AUTOFUNZIONI ANTISIMMETRICHE NON SONO POSSIBILI. QUESTO NON CAMBIA LO SPETTRO, MA NE CAMBIA LA DEGENERAZIONE:

E_0	1 STATO
E_1	1 STATO
E_2	2 STATI

CONSIDERIAMO ORA DUE PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$ (FERMIONI, ANTISIMMETRICA). DEVO RISCRIVERE LE AUTOFUNZIONI TENENDO CONTO DELLO SPIN.
LO STATO E_0 È AD ESEMPIO 4 VOLTE DEGENERE:

$$\psi_0(1)\psi_0(2)\chi_1\chi_2$$

$$\hookrightarrow \psi_0(1)\psi_0(2)\cdot\begin{cases} |\frac{1}{2}\rangle_1|\frac{1}{2}\rangle_2 & \oplus \\ |\frac{1}{2}\rangle_1|-\frac{1}{2}\rangle_2 & \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1|\frac{1}{2}\rangle_2 & \\ |-\frac{1}{2}\rangle_1|-\frac{1}{2}\rangle_2 & \oplus \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \oplus & \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(1)\psi_0(2)\left(|\frac{1}{2}\rangle|-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}\rangle\right) \\ \ominus & \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(1)\psi_0(2)\left(|\frac{1}{2}\rangle|-\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}\rangle\right) \end{cases}$$

L'UNICO STATO FISICO PER IL PRINCIPIO DI PAULI È QUELLO ANTISIMMETRICO E QUINDI E_0 NON È DEGENERE.
INOLTRE RICONOSCIAMO

$$\psi_0(1)\psi_0(2)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2}\rangle|-\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}\rangle\right)}\quad |S=0, S_z=0\rangle$$

USANDO LA BASE DI S POSSO INFATTI RISCRIVERE

$$\begin{cases} \psi_0(1)\psi_0(2)\ |1,1\rangle & \oplus \\ \psi_0(1)\psi_0(2)\ |1,0\rangle & \oplus \\ \psi_0(1)\psi_0(2)\ |0,0\rangle & \ominus \\ \psi_0(1)\psi_0(2)\ |1,-1\rangle & \oplus \end{cases}$$

PER IL PRIMO STATO ECCITATO TERRÒ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) + \psi_0(2)\psi_1(1)\right)|0,0\rangle \qquad \oplus\cdot\ominus = \ominus$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) - \psi_0(2)\psi_1(1)\right)|1,\underset{\uparrow\, S_z}{m}\rangle \qquad \ominus\cdot\oplus = \ominus$$

OVVERO 4 AUTOFUNZIONI.

OGNI VOLTA CHE H È NELLA FORMA

$$H = H_{SPAZIALE} + H_{SPIN}$$

ALLORA COMMUTA ANCHE SOLO CON $P_{SPAZIALE}$, P_{SPIN}. ESISTE (COME QUI) UNA BASE IN CUI SONO DIAGONALI ANCHE P_{SPIN}, $P_{SPAZIALE}$.

· OSSERVAZIONE (OPERATORI CHE COMMUTANO CON P)

SIA V UNA FUNZIONE GENERICA t.c.

$$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(\underline{r}_2, \underline{r}_1) \qquad \Rightarrow [P, V] = 0$$

INFATTI

$$PV\Psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = P\left(V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)\Psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2)\right) = V(\underline{r}_2, \underline{r}_1)\Psi(\underline{r}_2, \underline{r}_1) = V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)\Psi(\underline{r}_2, \underline{r}_1)$$
$$= V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) P\Psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$$

OVVERO

$$PV = VP$$

· LA BASE IN CUI S, S_z E P SONO DIAGONALI

CONSIDERIAMO LO SPAZIO $S \oplus S$ CON BASE $|S_{TOT}, S_{TOT,z}\rangle$,

$$S_{TOT} = 2S, 2S-1, 2S-2, \dots, 0$$

NOTO CHE L'OPERATORE

$$\underline{S}_{TOT} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

È INVARIANTE SOTTO SCAMBIO, PERCIÒ

$$[P, \underline{S}_{TOT}] = 0$$

IN PARTICOLARE P COMMUTA CON LA SINGOLA COMPONENTE DI $\underline{S}_{TOT}$

$$[P, S_{TOT,z}] = 0$$

E OVVIAMENTE, ESSENDO S^2 UNO SCALARE,

$$[P, S^2_{TOT}] = 0, \quad [S_{TOT,z}, S^2_{TOT}] = 0$$

PERCIÒ DIAGONALIZZANO TUTTI SIMULTANEAMENTE.

PRESO LO STATO NON DEGENERE $|S, S_z\rangle$,

$$\begin{cases} S^2_{TOT} |S, S_z\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, S_z\rangle \\ S_{TOT,z} |S, S_z\rangle = \hbar S_z |S, S_z\rangle \end{cases}$$

QUESTO È GIÀ AUTOSTATO DI P:

$$P |S, S_z\rangle = \lambda |S, S_z\rangle \qquad \lambda = \pm 1$$

SI ERA VISTO CHE

$|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ SONO STATI PARI (SCAMBIO, VEDI C.-G.).

$|0,0\rangle$ È UNO STATO DISPARI.

MOSTRIAMO CHE IN EFFETTI IL VALORE DI λ DIPENDE SOLO DA S E NON DA S_z. PRENDO

$$P|S,S\rangle = \lambda |S,S\rangle \qquad P|1,1\rangle = +|1,1\rangle$$

RICORDANDO $S_- = S_x - i S_y$,

$$[P, \underline{S}] = 0 \implies [P, S_-] = 0$$

ALLORA RIPRENDO L'ESPRESSIONE SOPRA E

$$S_-^K P|S,S\rangle = \lambda S_-^K |S,S\rangle$$

$$P S_-^n |S,S\rangle = \lambda S_-^n |S,S\rangle$$

$$P\, C\, |S, S-n\rangle = \lambda C |S, S-n\rangle \qquad \text{CON } C \text{ UNA COSTANTE.}$$

$$P|S, S-n\rangle = \lambda |S, S-n\rangle \qquad \forall n$$

AD ESEMPIO

$$P|1,0\rangle = +|1,0\rangle \qquad n=1$$

$$P|1,-1\rangle = +|1,-1\rangle \qquad n=2$$

PIÙ IN GENERALE, STUDIAMO IL CASO $S \times S$. SI DIMOSTRA CHE

$|2S, m\rangle$ PARI

$|2S-1, m\rangle$ DISPARI

$|2S-2, m\rangle$ PARI

E CONTINUA COSÌ L'ALTERNANZA.

AD ESEMPIO,

1×1 $\quad |2, m\rangle$ P
$\quad\quad\quad\quad |1, m\rangle$ D
$\quad\quad\quad\quad |0, m\rangle$ P

2×2 $\quad |4, m\rangle$ P
$\quad\quad\quad\quad |3, m\rangle$ D
$\quad\quad\quad\quad |2, m\rangle$ P
$\quad\quad\quad\quad \vdots$

PERCHÈ?

$$\underset{S_{TOT}}{|4,}\underset{S_{TOT,z}}{4\rangle} = \underset{S_{1z}}{|2\rangle_1}|2\rangle_2$$

È UNO STATO EVIDENTEMENTE PARI. GLI STATI CON $S_{TOT,z} = 3$ SONO

$|2\rangle_1|1\rangle_2$, $|1\rangle_1|2\rangle_2$

CON CUI POSSO COSTRUIRE DUE STATI (+ PARI, - DISPARI).

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle_1|1\rangle_2 \pm |1\rangle_1|2\rangle_2\right)$$

NELLO SPAZIO CON BASE $|S_{TOT}, S_{TOT,z}\rangle$ GLI STATI CON $S_{TOT,z} = 3$ SONO

$|4,3\rangle$, $|3,3\rangle$

SI È GIÀ VISTO CHE $|4,3\rangle$ È PARI, QUINDI LO STATO DISPARI È

$|3,3\rangle$.

SEGUE CHE I $|3, m\rangle$ SONO TUTTI DISPARI.

CONTINUIAMO CON GLI STATI CON $S_{TOT,z} = 2$. IN $|S_{1z}, S_{2z}\rangle$ HO

$|2\rangle_1|0\rangle_2$, $|0\rangle_1|2\rangle_2$, $|1\rangle_1|1\rangle_2$

SIMMETRIZZIAMOLI:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|2\rangle_2\right) & + \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|2\rangle_2\right) & - \\ |1\rangle_1|1\rangle_2 & + \end{cases}$$

HO OTTENUTO 2 STATI PARI E 1 DISPARI.

NELLA BASE $|S_{TOT}, S_{TOT,z}\rangle$ INVECE AVREI ($S_{TOT,z} = 2$)

$\underset{\text{PARI}}{|4,2\rangle}$, $\underset{\text{DISPARI}}{|3,2\rangle}$, $|2,2\rangle$ ↖ DEVE QUINDI ESSERE PARI $\Rightarrow$ $|2, m\rangle$ È PARI.

E COSÌ VIA.

· ESEMPIO

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 + r_2^2)$$

PARTICELLE IDENTICHE, SPIN 1×1

LO STATO FONDAMENTALE SI COSTRUISCE CON $(E = \hbar\omega)$

$\psi_0(1)\,\psi_0(2)\,|0,0\rangle$

$\psi_0(1)\,\psi_0(2)\,|2,m\rangle$

QUINDI HA deg = 6. IL PRIMO STATO ECCITATO $(E = 2\hbar\omega)$

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) + \psi_0(2)\psi_1(1)\right)$$
$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) - \psi_0(2)\psi_1(1)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_+\,|0,0\rangle \\ \psi_+\,|2,m\rangle \\ \psi_-\,|1,m\rangle \end{cases} \qquad \text{deg} = 9$$

· OSSERVAZIONE (HAMILTONIANE DI PARTICELLE IDENTICHE SEPARABILI)

CONSIDERIAMO L'HAMILTONIANA

$$H = H_{SPAZ}(r_1, r_2) + H_{SPIN}(S_1, S_2)$$

DEVONO VALERE

$$H_{SPAZ}(r_1, r_2) = H_{SPAZ}(r_2, r_1)$$

$$H_{SPIN}(S_1, S_2) = H_{SPIN}(S_2, S_1)$$

PRESE ALLORA

C_{SPAZIO} (SCAMBIA SOLO r_1, r_2)

C_{SPIN} (SCAMBIA SOLO S_1, S_2)

$$\Rightarrow \quad [C_{SPAZIO}, H] = 0 \qquad [C_{SPIN}, H] = 0$$

INOLTRE

$$P = C_{SPAZIO} \cdot C_{SPIN}$$

$$[C_{SPAZIO}, C_{SPIN}] = 0$$

ESISTE UNA BASE IN CUI TUTTI E TRE SONO DIAGONALI:

$$\psi_{SPAZIO}(r_1, r_2) \cdot \psi_{SPIN}(S_1, S_2)$$

AUTOF. DI C_{SPAZIO} — AUTOF. DI C_{SPIN} ← QUESTA LA CERCHIAMO USANDO $|S_{TOT}, S_{TOT,z}\rangle$

· ESERCIZIO

$$H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(L_A^2 + L_B^2 + \underline{S}_A \cdot \underline{S}_B\right)$$

SU UNA SUPERFICIE SFERICA $(r = 1)$, DI SPIN $\frac{1}{2}$ E IDENTICHE.

(A) SPETTRO FINO A $E < \frac{5}{2}\varepsilon$ (E DEGENERAZIONE DEGLI STATI).

NOTO CHE H È SEPARABILE IN SPAZIO - SPIN, INOLTRE

$$\underline{S}_A \cdot \underline{S}_B = ?$$

$$S_{TOT}^2 = (\underline{S}_A + \underline{S}_B)^2 = S_A^2 + S_B^2 + 2\underline{S}_A \cdot \underline{S}_B = \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + 2\underline{S}_A \cdot \underline{S}_B$$

PERCIÒ

$$\underline{S}_A \cdot \underline{S}_B = \frac{1}{2}\left(S_{TOT}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right)$$

E SE AVESSI AVUTO

$$S_{Az} \cdot S_{Bz} = ?$$

$$S_{TOT,z}^2 = S_{Az}^2 + S_{Bz}^2 + 2 S_{Az} \cdot S_{Bz} = \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} + 2 S_{Az}$$

MA ATTENZIONE: LA PROPRIETÀ

$$S_{Ai}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

È VALIDA SOLO PER PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$.

SI È OTTENUTA

$$H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(L_A^2 + L_B^2 + \frac{1}{2} S_{TOT}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right)$$

PER LA PARTE IN L_A^2, L_B^2,

(1) $l_A = 0$, $l_B = 0$ $\quad Y_{A0}^{0} Y_{B0}^{0}$ $\quad E_{SPAZ} = 0$

(2) $l_A = 1$, $l_B = 0$ $\quad Y_{A1}^{m} Y_{B0}^{0}$ $\quad E_{SPAZ} = 2\varepsilon$

$l_A = 0$, $l_B = 1$ $\quad Y_{A0}^{0} Y_{B1}^{m}$

(3) $l_A = 2$, $l_B = 0$ $\quad E_{SPAZ} = 6\varepsilon$

$l_A = 1$, $l_B = 1$ $\quad Y_{A1}^{m} Y_{B1}^{m'}$ $\quad E_{SPAZ} = 4\varepsilon$

⋮

MA MI POSSO GIÀ FERMARE AL PRIMO STATO ECCITATO.

LA BASE IN CUI È DIAGONALE ANCHE P SI COSTRUISCE COME

$$\begin{cases} Y_{A0}^{0} Y_{B0}^{0} & \oplus \quad (1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{A1}^{m} Y_{B0}^{0} \pm Y_{A0}^{0} Y_{B1}^{m} \right) & \oplus / \ominus \quad (2) \end{cases}$$

PER LA PARTE DI SPIN,

$|1, m\rangle \quad \oplus \qquad E_{SPIN} = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{\varepsilon}{4}$

$|0, 0\rangle \quad \ominus \qquad E_{SPIN} = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(0 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) = -\frac{3\varepsilon}{4}$

PERCIÒ PER LO STATO FONDAMENTALE (SONO FERMIONI)

$Y_{A0}^{0} Y_{B0}^{0} |0,0\rangle \qquad E_{TOT} = 0 - \frac{3}{4}\varepsilon = -\frac{3}{4}\varepsilon \qquad deg = 1$

PER IL 1° ECCITATO

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{A1}^{m} Y_{B0}^{0} + Y_{A0}^{0} Y_{B1}^{m} \right)|0,0\rangle \qquad E_{TOT} = 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{5}{4}\varepsilon \qquad deg = 3$

IL 2° ECCITATO

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{A1}^{m} Y_{B0}^{0} - Y_{A0}^{0} Y_{B1}^{m} \right)|1,m'\rangle \qquad E_{TOT} = 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{9}{4}\varepsilon \qquad deg = 9$

(B) SI CONSIDERI

$$\Psi_1 = M\left(Y_{A1}^{0} Y_{B1}^{1} + Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{1} - Y_{A1}^{1} Y_{B1}^{0} - Y_{A1}^{1} Y_{B1}^{-1} \right) \chi_{TOT,1}^{0}$$

$S_{TOT,z}$ $\quad$ S_{TOT}

È UNO STATO ACCETTABILE? È AUTOSTATO DI H?

LO SPINORE È INVARIANTE PER P. LO È LA PARTE SPAZIALE? È IN EFFETTI ANTISIMMETRICA, QUINDI È ANTISIMMETRICO IL PRODOTTO.

TUTTI I TERMINI HANNO $l_A = l_B = 1$ E LO SPIN È TUTTO NELLO SPINORE.

$$E = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(2\hbar^2 + 2\hbar^2 + \frac{1}{2}2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right)$$

PERCIÒ Ψ_1 È UN'AUTOFUNZIONE. STUDIAMO ORA

$$\Psi_2 = N\left(Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 1 \right) \chi_0^0$$

CHE È ACCETTABILE. RISCRIVO

$$\Psi_2 = N Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} \chi_0^0 + N\chi_0^0 \xrightarrow{L_A^2 + L_B^2} 0 \qquad \text{SONO DERIVATE!}$$

$$N Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} \chi_0^0 \xrightarrow{L_A^2 + L_B^2} N(2\hbar^2 + 2\hbar^2) Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} \chi_0^0$$

DI FATTO IN N HO RACCHIUSO L'ARMONICA SFERICA FONDAMENTALE.

POTREI RISCRIVERE

$$\Psi_2 = N\left(Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + L\pi\, Y_{A0}^{0} Y_{B0}^{0}\right) \chi_0^0$$

CHE HANNO VALORI DI l_A, l_B DIVERSI: NON È AUTOFUNZIONE DI H.

RICAPITOLANDO,

$$\Psi_1 = M\left(Y_{A1}^{0} Y_{B1}^{1} + Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{1} - Y_{A1}^{1} Y_{B1}^{0} - Y_{A1}^{1} Y_{B1}^{-1}\right) \chi_1^0$$

$$\Psi_2 = N\left(Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 1\right) \chi_0^0$$

RISCRIVIAMOLE IN TERMINI DI AUTOFUNZIONI DI L^2_{TOT}, $L_{TOT,z}$.

CONSIDERIAMO LA PARTE SPAZIALE DI Ψ_1,

$$M\left(|\underset{L_{Az}}{0}, \underset{L_{Bz}}{1}\rangle + |-1,1\rangle - |1,0\rangle - |1,-1\rangle\right)$$

APPLICANDO C.-G. PER CIASCUN TERMINE $(1\oplus 1)$,

$$M\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle \right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot M\left(2|1,1\rangle + 2|1,0\rangle\right) = -M\sqrt{2}\left(|\underset{L_{TOT}}{1}, \underset{L_{TOT,z}}{1}\rangle + |1,0\rangle\right)$$

SI NOTI CHE HO SOLAMENTE $L_{TOT} = 1$ (POTEVA ESSERE $2,1,0$): CE LO ASPETTIAMO, PERCHÈ LO STATO DEVE ESSERE DISPARI.

IL DISCORSO SULLA PARITÀ FATTO SUGLI SPIN VALE ANCHE PER I MOMENTI ANGOLARI:

$1\oplus 1$	$L_{TOT} = 2$	PARI
	$L_{TOT} = 1$	DISPARI
	$L_{TOT} = 0$	PARI

NOTA: CON $l_1 \oplus l_2$ GENERICI INVECE **QUESTA COSA NON FUNZIONA**. NELLE TAVOLE DI C.-G., FAI CASO CHE IN TUTTE LE $l\oplus l$ VETTORI "OPPOSTI" HANNO GLI STESSI COEFFICIENTI MA CON SEGNI TALI DA FAR ELIDERE GLI ELEMENTI CORRISPONDENTI A L_{TOT} SIMMETRICO QUANDO LI SOTTRAGGO (O A L_{TOT} ANTISIMMETRICO SE LI SOMMO).

NORMALIZZO INFINE A VISTA $M = \frac{1}{2}$:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + |1,0\rangle\right)\chi_1^0$$

RIPETO IL RAGIONAMENTO PER Ψ_2,

$$\Psi_2 = N\left(Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 4\pi\, Y_{A0}^{0} Y_{B0}^{0}\right) \chi_0^0$$

$$N\left(|\underset{L_{Az}}{-1}, \underset{L_{Bz}}{-1}\rangle + 4\pi|\underset{L_{TOT}}{0}, \underset{L_{TOT,z}}{0}\rangle\right) = N\left(|\underset{L_{TOT}}{2}, \underset{L_{TOT,z}}{-2}\rangle + 4\pi|0,0\rangle\right)$$

PERCIÒ

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}} \left(|2,-2\rangle + 4\pi |0,0\rangle \right) \chi_0^0$$

ⓒ SUPPONIAMO DI MISURARE J^2, DOVE

$$\underline{J} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{L}_{TOT} + \underline{S}_{TOT}$$

RISCRIVO

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\underset{L_{TOT,z}}{1}, \underset{S_{TOT,z}}{0}\rangle + |0,0\rangle \right)$$

$|1,1\rangle \chi_1^0$ $\quad$ $|1,0\rangle \chi_1^0$ $\quad$ SOTTOINTENDENDO CHE SIAMO IN $\overset{L_{TOT}}{1} \otimes \overset{S_{TOT}}{1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |2,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\underset{J_{TOT}}{2}, \underset{J_{TOT,z}}{0}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |0,0\rangle \right]$$

ALLORA

$$P(J_{TOT}^2 \underset{J=2}{=} 6\hbar^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{12}$$

$$P(J_{TOT}^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{4}$$

$$P(J_{TOT}^2 = 0) = \frac{1}{6}$$

PER LA SECONDA, $S_{TOT} = 0$;

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}} \left(|\underset{J_{TOT}}{2}, \underset{J_{TOT,z}}{-2}\rangle + 4\pi |0,0\rangle \right)$$

(SI NOTI CHE ALTRIMENTI AVREI DOVUTO DISTINGUERE $2 \otimes S$ E $0 \otimes S$: I DUE PEZZI NON NECESSARIAMENTE HANNO LO STESSO ℓ). INFINE

$$P(6\hbar^2) = \frac{1}{1+16\pi^2} \quad , \quad P(0) = \frac{(4\pi)^2}{1+16\pi^2}$$

ⓓ È DATO L'OPERATORE

$$\sigma = \exp\left[\frac{\pi}{2\hbar^2} \left(L_{TX}^2 + L_{TY}^2 \right) \right]$$

È UNITARIO?

RICORDO CHE $(e^A)^+ = e^{A^+}$, PERCIÒ (L_{TX}, L_{TY} HERMITIANI)

$$\sigma^+ = \exp\left[\frac{\pi}{2\hbar^2} \left(L_{TX}^2 + L_{TY}^2 \right) \right] = \sigma$$

LA VERIFICA DI

$$\sigma^+ \sigma = \mathbb{1}$$

SI TRADUCE IN $\sigma^2 = \mathbb{1}$. MA (OCCHIO CHE $[L^2_{TX}, L^2_{TY}] \neq 0$)

$$L^2_{TX} + L^2_{TY} = L^2 - L^2_{TZ}$$

CHE DIAGONALIZZANO SIMULTANEAMENTE NELLA BASE $|l,m\rangle$:

$$\sigma = \exp\left[\frac{\pi}{2\hbar^2}\left(L^2_T - L^2_{TZ}\right)\right]$$

$$\sigma |l,m\rangle = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(l(l+1) - m^2\right)\right] |l,m\rangle$$

PUÒ ESSERE $\exp[...] = 1 \quad \forall l,m$? NO: σ NON È UNITARIO.

SI NOTI CHE

$$U = e^{i\alpha A} \qquad A \text{ HERMITIANO}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

È UNITARIO, MA IN σ MANCA LA i.

(e) SI CALCOLI $\hat{\Psi} = \sigma \Psi_1$. QUALI SONO I POSSIBILI VALORI DI UNA MISURA DI L^2_{TX}?

$$\hat{\Psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma|\underset{\substack{\uparrow \\ l}}{1},\underset{\substack{\uparrow \\ m}}{1}\rangle + \sigma|1,0\rangle\right)\chi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{\pi}{2\hbar^2}(2\hbar^2-\hbar^2)}|1,1\rangle + e^{\frac{\pi}{2\hbar^2}(2\hbar^2)}|1,0\rangle\right]\chi_1^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\pi}{2}}|1,1\rangle + e^{\pi}|1,0\rangle\right)$$

DEVO PORTARLO IN UNA BASE DI L^2_{TX}. MI CALCOLO GLI UNICI ELEMENTI DI MATRICE NON NULLI DI L_+

$$\langle 1,0|L_+|1,-1\rangle, \quad \langle 1,1|L_+|1,0\rangle.$$

RICORDO CHE, IN GENERALE,

$$L_+|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\ |l,m+1\rangle$$

$$= \sqrt{2 - m(m+1)}\ |l,m+1\rangle$$

ORDINO LA BASE

$$|1,1\rangle \qquad |1,0\rangle \qquad |1,-1\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

RAPPRESENTO L_+ IN QUESTA BASE CON LA MATRICE

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hbar = L_+$$

SIMILMENTE, POICHE' $L_- = L_+^+$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \hbar = L_-$$

POSSO CALCOLARMI

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

POICHE' E' UNO SPIN 1, SO GIA' CHE GLI AUTOVALORI SONO $\lambda = 0, \pm\hbar$.

CERCO GLI AUTOVETTORI E LI SCRIVO IN $|L, L_{TOT,z}\rangle$.

$$\lambda = \hbar, \quad \phi_+ = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle$$

$$\lambda = -\hbar, \quad \phi_- = -\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle$$

$$\lambda = 0, \quad \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle$$

CAMBIO DI BASE (SOFFRO UN PO' A VEDERLO COSI'),

$$\begin{aligned} \phi_+ + \phi_- &= \sqrt{2}|1,0\rangle \\ \phi_+ - \phi_- &= |1,1\rangle + |1,-1\rangle \\ \sqrt{2}\phi_0 &= |1,1\rangle - |1,-1\rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ + \phi_-) \\ |1,1\rangle = \frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_- + \sqrt{2}\phi_0) \\ |1,-1\rangle \text{ NON MI SERVE :)} \end{cases}$$

TORNIAMO AL NOSTRO STATO

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\pi/2}|1,1\rangle + e^{\pi}|1,0\rangle\right)$$

E NORMALIZZIAMOLO (NON LO E' GIA', PERCHE' σ NON E' UNITARIO!):

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{e^{\pi}+e^{2\pi}}}\left(e^{\pi/2}|1,1\rangle + e^{\pi}|1,0\rangle\right) := N\left(e^{\pi/2}|1,1\rangle + e^{\pi}|1,0\rangle\right)$$

$$= N\left(\frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{e^{\pi}}{\sqrt{2}}\right)\phi_+ + N\sqrt{2}\,e^{\pi/2}\phi_0 - N\left(\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{e^{\pi}}{\sqrt{2}}\right)\phi_-$$

INFINE,

$$P\left(L_{TX}^2 = \hbar^2\right) = N^2\left(\frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{e^{\pi}}{\sqrt{2}}\right) + \ldots$$

(f) SI TROVI L' EVOLUZIONE DI

$$\psi_2 = N\left(Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 1\right) \chi_0^0$$

SOTTO L'AZIONE DI

$$H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(L_A^2 + L_B^2 + \underline{S}_A \cdot \underline{S}_B\right)$$

RICOSTRUIAMO

$$\underline{S}_A \cdot \underline{S}_B = \frac{1}{2}\left(S_T^2 - S_A^2 - S_B^2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$H\left(Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 1\right) = \frac{13}{4}\varepsilon\, Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} - \frac{3}{4}\varepsilon\,(1)$$

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi_2 = N\left[e^{-i\frac{t}{\hbar}\frac{13}{4}\varepsilon} Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + e^{i\frac{t}{\hbar}\frac{3\varepsilon}{4}}\right]\chi_0^0$$

$$\rightarrow N\left[e^{-i\frac{4t}{\hbar}\varepsilon} Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 1\right]\chi_0^0$$

(g) SI CALCOLI $\left\langle \psi_2(t) \right| \frac{x_A x_B}{r^2} \left| \psi_2(t) \right\rangle$

$$= \int_{\theta_1,\theta_2=0}^{\pi}\int_{\varphi_1,\varphi_2=0}^{2\pi} N^2\left[e^{i\omega t}(-1)Y_{A1}^{1}(-1)Y_{B1}^{1} + 1\right]\frac{1}{r^2}\left(r^2 \sin\theta_1\cos\varphi_1 \sin\theta_2\cos\varphi_2\right)\left[e^{-i\omega t} Y_{A1}^{-1} Y_{B1}^{-1} + 1\right] d\Omega_1 d\Omega_2$$

$$= N^2\int\left[e^{i\omega t}\frac{3}{8\pi}\sin\theta_1\sin\theta_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} + 1\right]\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \cos\varphi_1\cos\varphi_2\left[e^{-i\omega t}\frac{3}{8\pi}\sin\theta_1\sin\theta_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} + 1\right] d\theta_{1,2}\, d\varphi_{1,2}$$

- ## SIMMETRIA DEGLI STATI NEL SISTEMA DEL CDM

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

PARTICELLE IDENTICHE

DEVE ESSERE

$$V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = V(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

$$V(\underline{r}) = V(-\underline{r})$$

TIPICAMENTE $V = V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$.

PASSO TRAMITE TRASFORMAZIONI CANONICHE ALLE VARIABILI

$$\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \left(\text{NEL NOSTRO CASO } \underline{R} = \frac{\underline{r}_1 + \underline{r}_2}{2}\right)$$

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \qquad \mu = \frac{m}{2}$$

$$H = \frac{P^2}{2M_{TOT}} + \frac{p^2}{2\mu} + V(\underline{r}) = \frac{P^2}{2M_{TOT}} + H_{REL}$$

AVREMO

$$\Psi(\underline{R}, \underline{r}) = e^{i\frac{\underline{P}\cdot\underline{R}}{\hbar}} \psi(r)$$

AUTOFUNZIONE DI H_{REL} CHE POSSIAMO PRENDERE AUTOFUNZIONE DI Π POICHÈ $[H_{REL}, \Pi] = 0$.

NOTO CHE

$$\begin{cases} \underline{R} \to \underline{R} \\ \underline{r} \to -\underline{r} \end{cases}$$

SOTTO SCAMBIO: QUINDI PARITÀ $\Leftrightarrow$ SCAMBIO NEL SISTEMA DEL CDM.

- ## ESEMPIO

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1 - r_2)^2$$

(a) BOSONI SPIN $\emptyset$

(b) FERMIONI SPIN $\frac{1}{2}$

SI TROVI LO SPETTRO NEL CENTRO DI MASSA.

NEL SISTEMA DEL CM,

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \qquad \mu = \frac{m}{2}$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{m}{\mu}\right)\omega^2 r^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{2}\,\omega\right)^2 r^2$$

$$E = \hbar\sqrt{2}\,\omega\left(m + \frac{3}{2}\right)$$

3 — $l = 3, 1$
2 — $l = 2, 0$
1 — $l = 1$
$m = 0$ — $l = 0$

SO CHE PER UN SISTEMA CENTRALE

$$\psi = g_l(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$Y_l^m \xrightarrow[\text{PARITA'}]{} (-1)^l\, Y_l^m$$

QUINDI LE ψ COSÌ COSTRUITE HANNO GIÀ PARITÀ DEFINITA ($g_l(r)$ È SIMMETRICA). CONTROLLIAMO LO SPIN: DOBBIAMO ESCLUDERE PER I BOSONI TUTTI GLI M DISPARI (SPIN = 0).
NEL CASO DEI FERMIONI $\left(S = \frac{1}{2}\right)$ TUTTI GLI STATI SONO POSSIBILI; PER GLI M PARI VI ACCOPPIO LO SPINORE $|S_{TOT} = 0, S_{TOT,z} = 0\rangle$ (DISPARI) MENTRE PER QUELLI DISPARI $|S_{TOT} = 1, m\rangle$. HO COSÌ CHE

$m = 0 \quad deg = 1 \quad E = \hbar\omega\sqrt{2}\,\frac{3}{2}$

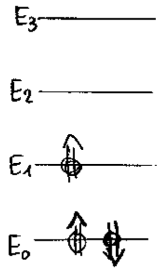
$m = 1 \quad deg = 9 \quad E = \hbar\omega\sqrt{2}\,\frac{5}{2}$

$m = 2 \quad deg = 6 \quad E = \hbar\omega\sqrt{2}\,\frac{7}{2}$

IL PRINCIPIO DI ESCLUSIONE

CONSIDERIAMO 3 PARTICELLE NON INTERAGENTI, SPIN $= \frac{1}{2}$

$$H = H(\underline{r}_1) + H(\underline{r}_2) + H(\underline{r}_3)$$



SPETTRO DI H

SUPPONIAMO TUTTI GLI STATI NON DEGENERI.

SISTEMO NELLO STATO FONDAMENTALE LE PRIME DUE PARTICELLE (COSÌ CHE $S_{TOT}=0$) E LA TERZA VA MESSA IN E_1 CON SPIN ARBITRARIO. HO DUE POSSIBILI CONFIGURAZIONI (PER ORA A LIVELLO NAÏVE),

$$E_g = 2E_0 + E_1 \qquad deg = 2$$

MA PERCHÈ È VERO?

$$\Psi = \psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\psi_0(r_3)\chi(\text{SPIN})$$

LA PARTE SPAZIALE È COMPLETAMENTE SIMMETRICA. ESISTE $\chi(\text{SPIN})$ CHE SIA COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICA?

PER LE PRIME DUE PARTICELLE

$$|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2 = |0,0\rangle_{12}$$

È L'UNICO STATO ANTISIMMETRICO, QUINDI CERCO UNO STATO NELLA FORMA

$$a\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)|+\rangle_3 + b\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)|-\rangle_3$$

$$= a|+-+\rangle - a|-++\rangle + b|+--\rangle - b|-+-\rangle \qquad \equiv \chi$$

IMPONIAMO SIA ANTISIMMETRICO PER LO SCAMBIO

$\underline{1 \leftrightarrow 3}$

$$a|+-+\rangle - a|++-\rangle + b|--+\rangle - b|-+-\rangle \qquad \equiv \chi'$$

$$\chi = -\chi' \Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ a = 0 \\ b = 0 \\ b = -b \end{cases} \rightarrow a = b = 0$$

DA CUI IMPARIAMO CHE NON ESISTE $\chi(\text{SPIN})$ ANTISIMMETRICO PER TRE PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$.

SI PUÒ INVECE COSTRUIRE

$$\Psi_\pm(r_1, r_2, r_3) = \varphi_0(r_1)\,\varphi_0(r_2)\,\varphi_1(r_3)\,|S_{12}=0\rangle_{12}\,|\pm\rangle_3$$

ANTISIMMETRICO PER $1 \leftrightarrow 2$. A PARTIRE DA QUESTA,

$$\Psi_\pm(123) + \Psi_\pm(312) + \Psi_\pm(231) \qquad \text{CICLICHE}$$

$$-\Psi_\pm(321) - \Psi_\pm(132) - \Psi_\pm(213) \equiv \Psi(1,2,3) \qquad \text{ANTICICLICHE}$$

CHE È COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICO: DEVO VERIFICARE CHE QUESTA COMBINAZIONE NON SIA IDENTICAMENTE NULLA.

$$\Psi(1,2,3) = \Psi_\pm(123) + \Psi_\pm(312) + \Psi_\pm(231) + \Psi_\pm(312) + \Psi_\pm(231) + \Psi_\pm(123)$$

$$= 2\underbrace{\Psi_\pm(123)}_{\varphi_0(r_1)\varphi_0(r_2)\varphi_1(r_3)} + 2\underbrace{\Psi_\pm(312)}_{\varphi_0(r_1)\varphi_0(r_3)\varphi_1(r_2)} + 2\underbrace{\Psi_\pm(231)}_{\varphi_0(r_2)\varphi_0(r_3)\varphi_1(r_1)}$$

CHE NON SONO STATI DIPENDENTI PERCHÉ HANNO UNA DIVERSA DIPENDENZA SPAZIALE.

HO UNA COMBINAZIONE (BEN DEFINITA) $\cancel{\frac{3}{1\;2}}\quad\cancel{\frac{2}{1\;3}}\quad\cancel{\frac{1}{2\;3}}$

DEI TRE STATI A FIANCO; LA DEGENERAZIONE

È DATA SOLAMENTE DALLO SPIN (O TUTTE LE Ψ_+, O TUTTE LE Ψ_-).

SI NOTI CHE PER PARTICELLE DI SPIN 1 AVREI UN'ULTERIORE DEGENERAZIONE DI SPIN; PER $S = \frac{1}{2}$ INVECE $S_{TOT} = 0$.

- <u>L'INTEGRALE DI SCAMBIO</u>

CONSIDERIAMO DUE PARTICELLE MOLTO LONTANE CHE SI TROVANO IN DUE STATI ORTOGONALI ψ_a, ψ_b.

$2 \cdot \qquad \cdot 1$

$\psi_a(r_2) \qquad \psi_b(r_1)$

DOVUNQUE SI TROVINO, SE SONO FERMIONI

$$\psi = \psi_a(r_1)\,\psi_b(r_2)$$

NON PUÒ ESISTERE PERCHÉ NON È ANTISIMMETRICO; INVECE

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(r_1)\,\psi_b(r_2) - \psi_b(r_1)\,\psi_a(r_2)\right)$$

SI È PERSO COSÌ IL PRINCIPIO DI LOCALITÀ: LE DUE

PARTICELLE INTERAGISCONO PER SIMMETRIZZAZIONE DI Ψ.
MA LE FUNZIONI D'ONDA NON SONO OSSERVABILI. CI SONO OSSERVABILI CHE SONO INFLUENZATE DA QUESTA INTERAZIONE?

CALCOLIAMO SU

$$\Psi = \Psi_a(r_1)\Psi_b(r_2)$$

IL VALOR MEDIO

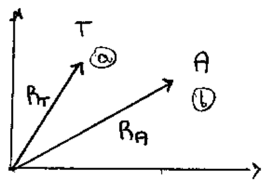
$$\langle \Psi | (r_1 - r_2)^2 | \Psi \rangle = \int dr_1 dr_2 \, \Psi_a^*(r_1)\Psi_b^*(r_2)(r_1^2 + r_2^2 - 2\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2)\Psi_a(r_1)\Psi_b(r_2)$$

$$= \int dr_1 \Psi_a^*(r_1) r_1^2 \Psi_a(r_1) \int dr_2 \Psi_b^*(r_2)\Psi_b(r_2)$$

$$+ \int dr_1 \Psi_a^*(r_1)\Psi_a(r_1) \int dr_2 \Psi_b^*(r_2) r_2^2 \Psi_b(r_2)$$

$$-2 \int dr_1 \Psi_a^*(r_1) \underline{r}_1 \Psi_a(r_1) \int dr_2 \Psi_b^*(r_2) \underline{r}_2 \Psi_b(r_2)$$

$$= \langle r^2 \rangle_a + \langle r^2 \rangle_b - 2 \langle \underline{r} \rangle_a \cdot \langle \underline{r} \rangle_b$$



NEL SISTEMA TERRA-ANDROMEDA,

$$\langle (r_1 - r_2)^2 \rangle = R_T^2 + R_A^2 - 2\underline{R}_T \cdot \underline{R}_A = (\underline{R}_T - \underline{R}_A)^2$$

RIPETIAMO IL CALCOLO SU

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_a(r_1)\Psi_b(r_2) \pm \Psi_b(r_1)\Psi_a(r_2)\right) := \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_\pm(r_1, r_2)$$

$$\langle \Psi | (r_1 - r_2)^2 | \Psi \rangle = \frac{1}{2}\int dr_1 dr_2 \, \Psi_\pm(r_1, r_2)^* (r_1 - r_2)^2 \Psi_\pm(r_1, r_2)$$

$$= \frac{1}{2}\int dr_1 dr_2 \, \Psi_\pm(r_1, r_2)^* (r_1 - r_2)^2 \left[\Psi_a(r_1)\Psi_b(r_2) \pm \Psi_a(r_2)\Psi_b(r_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int dr_1 dr_2 \, \Psi_\pm(r_1, r_2)^* (r_1 - r_2)^2 \Psi_a(r_1)\Psi_b(r_2) \pm \frac{1}{2}\int dr_1 dr_2 \Psi_\pm(r_1, r_2)^* (r_2 - r_1)^2 \Psi_a(r_2)\Psi_b(r_1)$$

EFFETTUO IL CAMBIO $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$= \int dr_1 dr_2 \, \Psi_\pm(r_1, r_2)^* (r_1 - r_2)^2 \Psi_a(r_1)\Psi_b(r_2)$$

DOVE SI E' SFRUTTATA LA SIMMETRIA DI $\Psi_\pm$ SOTTO SCAMBIO $r_1 \leftrightarrow r_2$.

E ANCORA

$$\langle (r_1-r_2)^2\rangle = \int dr_1 dr_2 \left(\psi_a^*(r_1)\psi_b^*(r_2) \pm \psi_b^*(r_1)\psi_a^*(r_2)\right)(r_1-r_2)^2\,\psi_a(r_1)\psi_b(r_2)$$

$$= \int dr_1 dr_2\, \psi_a^*(r_1)\psi_b(r_2)^*(r_1-r_2)^2\,\psi_a(r_1)\psi_b(r_2)$$

$$\underbrace{\pm\int dr_1 dr_2\, \psi_a(r_1)^*\psi_b(r_2)^*(r_1-r_2)^2\,\psi_b(r_1)\psi_a(r_2)}$$ INTEGRALE DI SCAMBIO

DOVE L'EFFETTO DELL'ANTISIMMETRIZZAZIONE ENTRA SOLTANTO NELL'INTEGRALE DI SCAMBIO. SVILUPPIAMOLO:

$$I = \int dr_1\, \psi_a^*(r_1)\, r_1^2\, \psi_b(r_1)\int dr_2\, \psi_b^*(r_2)\psi_a(r_2) + \int dr_1\, \psi_a^*(r_1)\psi_b(r_1)\int dr_2\, \psi_b^*(r_2)\, r_2^2\,\psi_a(r_2)$$

$$-2\int dr_1\, \psi_a^*(r_1)\, \underline{r}_1\,\psi_b(r_1)\int dr_2\, \psi_b^*(r_2)\,\underline{r}_2\,\psi_a(r_2)$$

POICHE' SI ERANO SUPPOSTE ψ_a E ψ_b ORTOGONALI,

$$I = -2\langle a|\underline{r}|b\rangle\cdot\langle b|\underline{r}|a\rangle = -2|\langle a|\underline{r}|b\rangle|^2$$

ECCO IL NOSTRO EFFETTO OSSERVABILE DEL PRINCIPIO DI PAULI. VIOLA DAVVERO IL PRINCIPIO DI LOCALITA'? SE A E B SONO DISTANTI, LE DUE FUNZIONI D'ONDA NON SI SOVRAPPONGONO: DOVE E' DIVERSA DA ZERO L'UNA, E' SOSTANZIALMENTE NULLA L'ALTRA. L'INTEGRALE DI SCAMBIO CONTA SOLO SE LE PARTICELLE SONO ABBASTANZA VICINE.

· ELETTROMAGNETISMO

PARTIAMO DALL' EQUAZIONE CLASSICA

$$m\underline{a} = e\underline{E} + e\underline{v} \wedge \underline{B}$$

CERCO

$$\mathcal{L}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

COSÌ CHE, APPLICANDO L'EQUAZIONE DI LAGRANGE,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\underline{v}} \mathcal{L}\right) - \nabla_{\underline{r}} \mathcal{L} = 0$$

CERCHIAMO

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - V(\underline{r}, \underline{v})$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\underline{v} - \nabla_{\underline{v}} V\right) + \frac{\partial V}{\partial \underline{r}} = 0$$

$$m\underline{a} - \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\underline{v}} V\right) + \frac{\partial V}{\partial \underline{r}} = 0$$

$$m\underline{a} = \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\underline{v}} V\right) - \nabla_{\underline{r}} V$$

QUINDI IMPONIAMO

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\underline{v}} V\right) - \nabla_{\underline{r}} V = e\underline{E} + e\underline{v} \wedge \underline{B}$$

RICORDIAMO CHE

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \wedge \underline{A} = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \hat{i}\left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right) + \hat{j}\left(-\partial_x A_z + \partial_z A_x\right)$$
$$+ \hat{k}\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)$$

CERCHIAMO $\underline{v} \wedge \underline{B}$.

$$(\underline{v} \wedge \underline{B})_x = v_y B_z - v_z B_y = v_y \partial_x A_y - v_y \partial_y A_x + v_z \partial_x A_z - v_z \partial_z A_x$$

$$= \underline{v} \cdot \partial_x \underline{A} - v_x \partial_x A_x - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_x + v_x \partial_x A_x = \underline{v} \cdot \partial_x \underline{A} - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_x$$

SIMILMENTE AVREMO

$$(\underline{v} \wedge \underline{B})_x = \underline{v} \cdot \partial_x \underline{A} - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_x$$
$$(\underline{v} \wedge \underline{B})_y = \underline{v} \cdot \partial_y \underline{A} - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_y$$
$$(\underline{v} \wedge \underline{B})_z = \underline{v} \cdot \partial_z \underline{A} - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_z$$

NOTA: POSSO IN ALTERNATIVA RICORDARE

$$\underline{v} \wedge \underline{B} = \underline{v} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{v} \cdot \underline{A}) - (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{A}$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_x (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) \\ \partial_y (\qquad) \\ \partial_z (\qquad) \end{pmatrix} - (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

ORA CALCOLIAMOCI

$$F_x = -e\,\partial_x \phi - e \frac{\partial A_x}{\partial t} + e\,\underline{v} \cdot \partial_x \underline{A} - e\,\underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_x \qquad (= e E_x + e(\underline{v} \wedge \underline{B})_x)$$

SCRIVERE

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_x$$

NOTA: SULLA FALSARIGA, HO

$$\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{A} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v}(\underline{\nabla} \otimes \underline{A})$$
$$\frac{dA_j}{dt} = \frac{\partial A_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

HA LA SEGUENTE INTERPRETAZIONE:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{A}(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{d}{dt} A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

QUINDI RICONOSCIAMO NELL' ESPRESSIONE SOPRA UNA DERIVATA TOTALE.

POSSO RISCRIVERE, USANDO L' EQUAZIONE DI LAGRANGE,

$$F_x = -e\,\partial_x \phi + e\,\underline{v} \cdot \partial_x \underline{A} - e \frac{dA_x}{dt}$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial v_x}\right) - \partial_x V$$

NOTA: CON I VETTORI OTTENGO

$$\frac{d}{dt}(\underline{\nabla}_v V) - \underline{\nabla}_r V = -e\,\underline{\nabla}_r \phi + e\,\underline{\nabla}_r(\underline{v} \cdot \underline{A}) - \frac{d\underline{A}}{dt}$$

MI BASTA SCEGLIERE

$$V = e\phi - e\,\underline{v} \cdot \underline{A}$$

V SCELTO QUI A FIANCO FUNZIONA PERCHE'

$$\underline{\nabla}_v(\underline{v} \cdot \underline{A})_j = \frac{\partial}{\partial v_j}(v_i A_i) = \delta_{ij} A_i = A_j$$
$$\frac{d}{dt}(\underline{\nabla}_v V) = -e \frac{d}{dt}(\underline{A})$$

INFATTI

$$-\partial_x V = -e\,\partial_x \phi + e\,\underline{v} \cdot \partial_x \underline{A}$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_x} = -e A_x$$

ABBIAMO RICAVATO LA LAGRANGIANA ELETTROMAGNETICA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - e\phi + e\,\underline{v} \cdot \underline{A}$$

COSTRUIAMO L'HAMILTONIANA.

NOTA: SAREBBE $\underline{\nabla}_{\underline{v}} \mathcal{L}$, E RICORDO $\underline{\nabla}_{\underline{v}} f(v) = \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v}$

$$\underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}} = m\underline{v} + e\underline{A}$$

NOTIAMO SUBITO CHE L'IMPULSO CANONICO NON COINCIDE CON L'IMPULSO MECCANICO. AD ESEMPIO, QUESTO COMPORTA

$$\underline{L} = \underline{r} \wedge m\underline{v} = \underline{r} \wedge (\underline{p} - e\underline{A})$$

RICAVIAMO DALL'IMPULSO

$$\underline{v} = \frac{1}{m}(\underline{p} - e\underline{A})$$

$$H = \underline{p} \cdot \underline{v} - \mathcal{L} = \underline{p} \cdot \frac{1}{m}(\underline{p} - e\underline{A}) - \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2}(\underline{p} - e\underline{A})^2 + e\phi - e\frac{1}{m}(\underline{p} - e\underline{A}) \cdot \underline{A}$$

$$= \frac{1}{m} \underline{p} \cdot (\underline{p} - e\underline{A}) - \frac{1}{m} e\underline{A}(\underline{p} - e\underline{A}) - \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 + e\phi$$

$$= \frac{1}{m}(\underline{p} - e\underline{A}) \cdot (\underline{p} - e\underline{A}) - \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 + e\phi$$

$$= \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 + e\phi$$

CHE È L'ESPRESSIONE DELL'HAMILTONIANA ELETTROMAGNETICA.

RICONOSCIAMO

$$H = (\text{E CINETICA}) + (\text{POTENZIALE ELETTRICO})$$

(IL CAMPO $\underline{B}$ NON FA LAVORO, QUINDI MODIFICA H SOLO ATTRAVERSO L'IMPULSO $\underline{p}$: L'ENERGIA CINETICA È SCRITTA IN TERMINI DI $\underline{p}$ CANONICO).

· TRASFORMAZIONI DI GAUGE

STUDIAMO IL CASO CON χ INDIPENDENTE DAL TEMPO DELLA TRASFORMAZIONE

$$\begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\chi \\ \phi' = \phi - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

IN GENERALE,

$\chi = \chi(\underline{r}, t)$ E $\underline{A} = \underline{A}(\underline{r}, t)$

DA CUI, SUPPOSTA $\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$,

$$H' = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A}')^2 + e\phi' = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A} - e\underline{\nabla}\chi)^2 + e\phi$$

DEFINENDO LA TRASFORMAZIONE

NOTA: NEI DUE FOCUS IN FONDO HO RIVISTO TUTTO QUESTO IN TERMINI DI TRASFORMAZIONI CANONICHE.

$$\begin{cases} \underline{p}' = \underline{p} - e\underline{\nabla}\chi \\ \underline{q}' = \underline{q} \end{cases}$$

SI HA

$$H' = \frac{1}{2m}\left(\underline{p}' - e\underline{A}\right)^2 + e\phi$$

MOSTRIAMO CHE LA TRASFORMAZIONE SOPRA È CANONICA.

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 , \quad [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[q_i', q_j'] = [q_i, q_j] = 0$$

$$[p_i', p_j'] = [p_i - e\partial_i\chi, p_j - e\partial_j\chi] = [p_i, p_j] - e[\partial_i\chi, p_j] - e[p_i, \partial_j\chi]$$

$$+ e^2[\partial_i\chi, \partial_j\chi]$$

$$= -i\hbar e\partial_j\partial_i\chi + i\hbar e\partial_i\partial_j\chi = 0$$

$$[q_i', p_j'] = [q_i, p_j - e\partial_j\chi] = [q_i, p_j] - e[q_i, \partial_j\chi] = i\hbar\delta_{ij}$$

(SI RICORDI CHE χ È UNA FUNZIONE DI $\underline{q}$). LA FISICA PERCIÒ NON CAMBIA SE UTILIZZIAMO H'.

SUPPONIAMO DI AVER RISOLTO

$$H\psi = E\psi$$

$$H'\psi' = E\psi'$$

COME SONO LEGATE ψ E ψ'?

$$\psi' = e^{\alpha\chi}\psi$$

INFATTI

$$(\underline{p}' - e\underline{A})\psi' = (\underline{p} - e\underline{A} - e\underline{\nabla}\chi)(e^{\alpha\chi}\psi) = (-i\hbar\underline{\nabla} - e\underline{A} - e\underline{\nabla}\chi)(e^{\alpha\chi}\psi)$$

$$= -i\hbar\underline{\nabla}(e^{\alpha\chi}\psi) - e^{\alpha\chi}(e\underline{A} + e\nabla\chi)\psi$$

MA

$$\underline{\nabla}(e^{\alpha\chi}\psi) = (\underline{\nabla}e^{\alpha\chi})\psi + e^{\alpha\chi}\,\underline{\nabla}\psi = \alpha\,\underline{\nabla}\chi\, e^{\alpha\chi}\psi + e^{\alpha\chi}\,\underline{\nabla}\psi$$

$$-i\hbar\,\underline{\nabla}(e^{\alpha\chi}\psi) = -i\hbar\alpha\,\underline{\nabla}\chi\, e^{\alpha\chi}\psi + e^{\alpha\chi}\,\underline{p}\,\psi = e^{\alpha\chi}(\underline{p} - i\hbar\alpha\,\underline{\nabla}\chi)\psi$$

PERCIO`

$$(\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)(e^{\alpha\chi}\psi) = e^{\alpha\chi}(\underline{p} - i\hbar\alpha\underline{\nabla}\chi - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)\psi$$

MI BASTA IMPORRE

$$-i\hbar\alpha - e = 0 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{ie}{\hbar}$$

CON QUESTA SCELTA,

$$(\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\underline{p} - e\underline{A})\psi$$

ORA CALCOLIAMO

$$\frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)^2(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2\psi$$

INFATTI

$$(\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)^2(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi) = (\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)\cdot(\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi)$$

$$= (\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)\cdot e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\underbrace{(\underline{p} - e\underline{A})\psi}_{\phi} = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\underline{p} - e\underline{A})\phi$$

$$= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(\underline{p} - e\underline{A})^2\psi$$

OSSIA LA REGOLA SOPRA SI APPLICA AD OGNI FUNZIONE DI $\underline{p} - e\underline{A} - e\underline{\nabla}\chi$,

$$f(\underline{p} - e\underline{A} - e\,\underline{\nabla}\chi)\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}f(\underline{p} - e\underline{A})\psi$$

ALLORA

$$(e\phi + V)\psi' = (e\phi + V)(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}(e\phi + V)\psi$$

$$H'\psi' = H'(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}H\psi$$

DOVE SI E' USATO IL FATTO CHE OTTENGO H QUANDO CANCELLO IL TERMINE DI GAUGE DA H'.

INFINE

$$H'\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} H\psi = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} E\psi = E\psi'$$

VEDIAMO UN ESEMPIO DI COME SI TRASFORMANO ALTRE OSSERVABILI.

$$\underline{L} = \underline{r} \wedge (\underline{p} - e\underline{A})$$
$$\underline{L}' = \underline{r} \wedge (\underline{p} - e\underline{A} - e\underline{\nabla}\chi)$$

$$L_z\psi = \lambda\psi$$
$$L'_z\psi' = \lambda\psi'$$

$$L'_z\psi' = [\underline{r} \wedge (\underline{p} - e\underline{A} - e\underline{\nabla}\chi)]_z (e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}[\underline{r} \wedge (\underline{p} - e\underline{A})]_z\psi$$
$$= e^{i\frac{e}{\hbar}\chi} L_z\psi = \lambda\psi'$$

E ANCORA TROVIAMO CHE IN DUE GAUGE DIVERSE GLI AUTOVALORI SONO GLI STESSI, MENTRE LE AUTOFUNZIONI SONO UGUALI A MENO DI UNA TRASFORMAZIONE CANONICA.

$$L_z\psi = (\underline{r} \wedge \underline{p})_z\psi = \lambda\psi$$
$$L'_z(e^{ie/\hbar\,\chi}\psi) = \lambda(e^{i\frac{e}{\hbar}\chi}\psi)$$

· <u>FOCUS: TRASFORMAZIONI CANONICHE</u> (SHANKAR P. 98)

IN MECCANICA CLASSICA, OGNI $g(q,p)$ GENERA LA TRASFORMAZIONE CANONICA

$$\begin{cases} q_i \to q_i + \delta q_i = q_i + \varepsilon\dfrac{\partial g}{\partial p_i} = q_i + \varepsilon\{q_i, g\} \\ p_i \to p_i + \delta q_i = p_i - \varepsilon\dfrac{\partial g}{\partial q_i} = p_i + \varepsilon\{p_i, g\} \end{cases}$$

UNA FUNZIONE $\omega(q,p)$ GENERICA SI TRASFORMA COME $\delta\omega = \varepsilon\{\omega, g\}$

(INFINITESIMA). SE H È INVARIANTE SOTTO TALE TRASFORMAZIONE, g È CONSERVATA.

RICORDANDO CHE, A PARTE PROBLEMI DI COMMUTAZIONE (CHE NON CI SONO SE $g=g(p)$ O $g=g(q)$, O ALMENO LE LORO DERIVATE)

$$[\,,\,] = i\hbar\{\,,\,\}_{PB} \qquad e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots$$

HO AD ESEMPIO, SCELTI $g = \hat{p}$, $\varepsilon = a$, L'OPERATORE $U = e^{-i\frac{\hat{p}a}{\hbar}} = e^{\frac{a\hat{p}}{i\hbar}}$ COSÌ CHE

$$e^{-\frac{a\hat{p}}{i\hbar}}\hat{q}\,e^{+\frac{a\hat{p}}{i\hbar}} \simeq \hat{q} + [-\tfrac{a\hat{p}}{i\hbar}, \hat{q}] = \hat{q} + a\{\hat{q}, \hat{p}\} = \hat{q} + a$$

DA CUI $\hat{p}$ È IL GENERATORE DELLE TRASLAZIONI (VEDI ANCHE $\underline{L}\cdot\hat{m}$, H). QUI, INFINE, GUARDACASO

$$\underline{p} \to \underline{p} + e\{\underline{p}, \chi\} = \underline{p} - e\underline{\nabla}\chi \qquad (\text{INVECE } \{q, \chi\} = 0)$$

- GAUGE DIPENDENTE DAL TEMPO

$$\underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\chi$$
$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

$$H = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 + e\phi + V$$

$$H' = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A}')^2 + e\phi' + V = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A} - \underline{\nabla}\chi)^2 + e\phi - e\frac{\partial\chi}{\partial t} = H_0' - e\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

SI E' VISTO

$$\psi' = e^{\frac{ie\chi}{\hbar}}\psi$$

SE χ NON DIPENDE DAL TEMPO,

$$H'\psi' = e^{\frac{ie\chi}{\hbar}} H\psi$$

SE INVECE $\chi = \chi(t)$, RESTA VERO SOLTANTO

$$H_0'\psi = e^{\frac{ie\chi}{\hbar}} H\psi$$

MA A LIVELLO DI EVOLUZIONE TEMPORALE, ALLA

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

CORRISPONDE

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\frac{e\chi}{\hbar}}\psi\right) = i\hbar\left(\frac{ie}{\hbar}\frac{\partial\chi}{\partial t}e^{\frac{ie\chi}{\hbar}}\psi\right) + i\hbar e^{i\frac{e\chi}{\hbar}}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= -e\frac{\partial\chi}{\partial t}\psi' + e^{i\frac{e\chi}{\hbar}}H\psi = -e\frac{\partial\chi}{\partial t}\psi' + H_0'\psi'$$

$$= \left(H_0' - e\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)\psi' = H'\psi'$$

- CAMPO MAGNETICO UNIFORME

$$\underline{B} = (0, 0, B)$$

USANDO LA GAUGE DI LANDAU, PRENDIAMO IL POTENZIALE VETTORE NELLA FORMA

$$\underline{A} = \alpha\, \underline{r} \wedge \underline{B}$$

$$= \alpha\,(yB, xB, 0)$$

VERIFICHIAMO INFATTI CHE

$$\underline{B} \equiv \underline{\nabla} \wedge \underline{A} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \alpha y B & -\alpha x B & 0 \end{pmatrix} = \hat{k} \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \alpha y B & -\alpha x B \end{pmatrix} = -2\alpha B \hat{k}$$

E L'IDENTITÀ È VERIFICATA SCEGLIENDO $-2\alpha = 1$, OVVERO

$$\underline{A} = -\frac{1}{2}\,\underline{r} \wedge \underline{B} = \left(-\frac{y}{2}B, \frac{x}{2}B, 0\right)$$

IL VANTAGGIO DI QUESTA GAUGE È CHE $\underline{A}$ È SOLENOIDALE:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{2}B\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2}B\right) = 0$$

CALCOLIAMOCI INOLTRE

$$A^2 = \frac{y^2}{4}B^2 + \frac{x^2}{4}B^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)B^2 - \frac{1}{4}z^2B^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[r^2 B^2 - (\underline{r} \cdot \underline{B})^2 \right]$$

E QUESTA FORMA È INVARIANTE SE CAMBIO LA DIREZIONE DI $\underline{B}$.
L'HAMILTONIANA SI SCRIVE

$$H = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2$$

$$H\Psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\underline{\nabla} - e\underline{A}) \cdot (-i\hbar\underline{\nabla} - e\underline{A})\Psi$$

$$= \frac{1}{2m}(-i\hbar\underline{\nabla} - e\underline{A}) \cdot (-i\hbar\underline{\nabla}\Psi - e\underline{A}\Psi)$$

TENENDO CONTO CHE

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{A} \Psi) = \frac{\partial}{\partial x}(A_x \Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y \Psi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z \Psi)$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Psi + A_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$= (\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) \Psi + \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \Psi \qquad = \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \Psi$$

POSSO SCRIVERE

$$H\Psi = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \Psi + ie\hbar \, \underline{\nabla} \cdot (\underline{A} \Psi) + i\hbar e \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \Psi + e^2 A^2 \Psi \right]$$

$$= \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \Psi + 2ie\hbar \, \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \Psi + e^2 A^2 \Psi \right]$$

INFINE

$$\underline{A} \cdot \underline{\nabla} \Psi = \left(-\frac{y}{2} B \partial_x \Psi + \frac{x}{2} B \partial_y \Psi \right) = \frac{B}{2} (x \partial_y - y \partial_x) \Psi$$

CHE CONFRONTO CON

$$\underline{L} = \underline{r} \wedge \underline{p} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -i\hbar\partial_x & -i\hbar\partial_y & -i\hbar\partial_z \end{pmatrix}$$

$$L_z = -i\hbar (x \partial_y - y \partial_x)$$

E RICONOSCO

$$\underline{A} \cdot \underline{\nabla} \Psi = \frac{B}{(-2i\hbar)} L_z \Psi$$

POSSO ORA SCRIVERE

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \frac{1}{2m} 2ie\hbar \frac{B}{(-2i\hbar)} L_z \Psi + \frac{e^2}{2m} \frac{1}{4} \left[r^2 B^2 - (\underline{r} \cdot \underline{B})^2 \right] \Psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - \frac{e}{2m} (\underline{L} \cdot \underline{B}) \Psi \qquad + \frac{e^2}{8m} \left[r^2 B^2 - (\underline{r} \cdot \underline{B})^2 \right] \Psi$$

DOVE L'ULTIMO TERMINE È TRASCURABILE PER $\underline{B}$ PICCOLI.

NON RIESCO A CARATTERIZZARE LA RELAZIONE TRA $\underline{B}$ E LO SPIN SENZA METTERE DI MEZZO LA MQR. CI ACCONTENTIAMO DEL RISULTATO SPERIMENTALE

$$\underline{L} \cdot \underline{B} \rightarrow (\underline{L} + g \underline{S}) \cdot \underline{B}$$

DOVE g È IL FATTORE GIROMAGNETICO (PER UN ELETTRONE $g \simeq 2$).

· FOCUS: GENERATORE DELLA TRASFORMAZIONE DI GAUGE

DOPO AVER DIMOSTRATO CHE, SE $\chi = \chi(\underline{q})$, LA TRASFORMAZIONE

$$\begin{cases} \underline{p}' = \underline{p} - e \underline{\nabla} \chi \\ \underline{q}' = \underline{q} \end{cases}$$

È CANONICA, DAL TEOREMA DI STONE L'OPERATORE CHE LA IMPLEMENTA È $U = e^{iG}$:

$$U \underline{p} U^+ = \underline{p}' = \underline{p} - e \underline{\nabla} \chi$$

$$e^{iG} \underline{p} e^{-iG} = \underline{p} + [iG, \underline{p}] + \frac{1}{2!} [iG, [iG, \underline{p}]] + \dots$$

(DOVE G È IL GENERATORE). MA

$$[iG, \underline{p}] = i(i\hbar) \underline{\nabla} G$$

$$[iG, [iG, \underline{p}]] = i(-\hbar) [G, \underline{\nabla} G] = 0$$

QUINDI SONO NULLI I TERMINI SUCCESSIVI ED È ESATTO SCRIVERE

$$\underline{p} - \hbar \underline{\nabla} G = \underline{p} - e \underline{\nabla} \chi \quad \Rightarrow \quad U = e^{i \frac{e}{\hbar} \chi}$$

COME SI TRASFORMANO LE AUTOFUNZIONI SOTTO GAUGE?

$$\psi' = U \psi = e^{i \frac{e}{\hbar} \chi} \psi$$

$$H' \psi' = H' U \psi = U U^+ H' U \psi = U H \psi = e^{i \frac{e}{\hbar} \chi} H \psi = U E \psi = E U \psi = E \psi'$$

E COSÌ PER QUALSIASI ALTRA $f(\underline{p}')$.

· ESERCIZIO

DUE PARTICELLE IDENTICHE, SPIN $\frac{1}{2}$.

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m}{4}(x_1 - x_2)^2\omega^2 + \frac{m}{4}(y_1 - y_2)^2\omega^2 + \frac{m}{4}(z_1 - z_2)^2\Omega^2 + \alpha J_z$$

DOVE

$$\underline{J} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

$$\alpha \ll \omega \ll \Omega$$

PASSANDO AL SISTEMA $\underline{R}, \underline{r}, \underline{P}, \underline{p}$,

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{2}\Omega^2 z^2 + \alpha J_z$$

VEDIAMO COME RISCRIVERE

$$\underline{r}_1 \wedge \underline{p}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{p}_2 = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$$

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \qquad \underline{p} = \mu \underline{v} = \mu(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = \frac{\mu}{m_2}\underline{p}_2 - \frac{\mu}{m_1}\underline{p}_1 = \frac{\underline{p}_2 - \underline{p}_1}{2}$$

$$\underline{R} = \frac{\underline{r}_1 + \underline{r}_2}{2} \qquad \underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$$

RICAVO

$$\begin{aligned} 2\underline{R} &= \underline{r}_1 + \underline{r}_2 \\ \underline{r} &= \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{r}_1 = \underline{R} - \frac{\underline{r}}{2} \\ \underline{r}_2 = \underline{R} + \frac{\underline{r}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \underline{p}_1 + \underline{p}_2 \\ 2\underline{p} &= \underline{p}_2 - \underline{p}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{p}_1 = \frac{\underline{P}}{2} - \underline{p} \\ \underline{p}_2 = \frac{\underline{P}}{2} + \underline{p} \end{cases}$$

ALLORA

$$\underline{r}_1 \wedge \underline{p}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{p}_2 = \left(\underline{R} - \frac{\underline{r}}{2}\right) \wedge \left(\frac{\underline{P}}{2} - \underline{p}\right) + \left(\underline{R} + \frac{\underline{r}}{2}\right) \wedge \left(\frac{\underline{P}}{2} + \underline{p}\right)$$

$$= \underline{R} \wedge \frac{\underline{P}}{2} + \frac{\underline{r}}{2} \wedge \underline{p} + \underline{R} \wedge \frac{\underline{P}}{2} + \frac{\underline{r}}{2} \wedge \underline{p} = \underline{R} \wedge \underline{P} + \underline{r} \wedge \underline{p}$$

PERCIÒ

$$\underline{J} = \underline{L}_{CM} + \underline{L}_{REL} + \underline{S}_{TOT}$$

METTIAMOCI NEL SISTEMA DEL CDM, OVVERO IN UNO IN CUI $\underline{P} = 0$:

$\underline{P}\,\psi = 0$

ALLORA

$\underline{J} = \underline{L}_{REL} + \underline{S}_{TOT}$

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\mu\Omega^2}{2}z^2 + \alpha\left(L_z + S_{TOT,z}\right)$$

RICONOSCO SUBITO UN OSCILLATORE ARMONICO (ANISOTROPO)

$\psi_{nmk} = \psi_n(x)\,\psi_m(y)\,\psi_k(z)$

CON ENERGIE

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(m+\frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega\left(k+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega(n+m+1) + \hbar\Omega\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

E AVRÒ

$(0\,0\,0)$ $\quad E = \hbar\omega + \hbar\frac{\Omega}{2}$

$(010),(100)$ $\quad E = 2\hbar\omega + \hbar\frac{\Omega}{2}$

$(200),(110),(020)$ $\quad E = 3\hbar\omega + \hbar\frac{\Omega}{2}$

ORA OSSERVO CHE H È INVARIANTE PER ROTAZIONI ATTORNO A $\hat{z}$.

ESSENDO L_z IL GENERATORE DELLE ROTAZIONI ATTORNO A $\hat{z}$,

$[H, L_z] = 0$.

PER GLI STATI NON DEGENERI (IL 1°), HO GIÀ AUTOFUNZIONI DI L_z.

PER GLI ALTRI, DIAGONALIZZO. RICORDO (OSCILLATORE IN 2D)

$\psi_0 = a\,e^{-bx^2}$

$\psi_{000} = a^3 e^{-bx^2} e^{-by^2} e^{-bz^2} = a^3 e^{-br^2}$

NON C'È DIPENDENZA ANGOLARE (DIPENDE SOLO DA r^2).

$\psi_1 = c\,x\,e^{-bx^2}$

$\psi_{100} = a^2 e^{-by^2} e^{-bz^2}\, x\, e^{-bx^2} = c a^2 x\, e^{-br^2}$

$\psi_{010} = c a^2 y\, e^{-br^2}$

RICORDO

$$Y_1^1 = \frac{(x+iy)}{r} \qquad Y_1^{-1} = \frac{(x-iy)}{r} \qquad Y_1^0 = \frac{z}{r}$$

PERCIO' POSSO "GIRARE" GLI STATI $(100),(010)$ E COSTRUIRE DUE AUTOFUNZIONI DI L_z CON AUTOVALORI $L_z = \pm 1$.
SIMILMENTE POSSO GIRARE $(200),(110),(020)$ E OTTENERE $L_z = \pm 2, \pm 1$.

NOTIAMO ALLORA CHE SI SEPARA

$$E = 2\hbar\omega + \hbar\frac{\Omega}{2} \quad \begin{cases} 2\hbar\omega + \hbar\frac{\Omega}{2} + \hbar\alpha \\ 2\hbar\omega + \hbar\frac{\Omega}{2} - \hbar\alpha \end{cases}$$

METTIAMOCI LO SPIN. PER LA PARTE SPAZIALE, LA SIMMETRIA EQUIVALE ALLA PARITA' ED E'

$$\psi_m(-x) = (-1)^m \psi(x)$$

OTTENGO

$$(000) \quad \oplus \quad \rightarrow \quad |S_{TOT} = 0\rangle$$

$$\begin{matrix}(100) & \ominus & \rightarrow \\ (010) & \ominus & \rightarrow\end{matrix} \quad |S_{TOT} = 1\rangle$$

AGGIUNGENDO IL TERMINE DI HAMILTONIANA $\propto S_{TOT,z}$, (000) RESTA INVARIATO MENTRE CIASCUNO DEI $(100),(010)$ SI SEPARA IN BASE AL VALORE $S_{TOT,z} = 0, \pm 1$.