Appunti del corso di

Meccanica Quantistica Relativistica

Anno 2017/2018
Davide Venturelli
Prof. M. Testa

Per informazioni o segnalazioni:
venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

Ah, l'equazione di Dirac si scrive

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

per l'amor del cielo. E non tatuatevela.

SOMMARIO - MQR

1. CAMPI E RELATIVITÀ

- COMPONENTI COVARIANTI E CONTRAVARIANTI
- METRICA E PS
- TENSORI E LORO TRASFORMAZIONI
- SPAZIOTEMPO, DISTANZA INVARIANTE
- COME SI TRASFORMA $g_{\mu\nu}$
- TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
- CINEMATICA E DINAMICA RELATIVISTICHE
- LIMITE CLASSICO
- MASSA E ENERGIA

2. CAMPO DI KLEIN - GORDON

- EQUAZIONE DI K-G
- COVARIANZA RELATIVISTICA
- METRICA INDOTTA DALL'EVOLUZIONE TEMPORALE
- SOLUZIONE GENERALE
- DISCRETIZZAZIONE DELLE SOLUZIONI
- SCHEMA DI HEISENBERG
- FORMULAZIONE LAGRANGIANA
- CALCOLO DEL MOMENTO CINETICO CONIUGATO
- QUANTIZZAZIONE
- HAMILTONIANA
- ENERGIA DEL VUOTO E PRODOTTO NORMALE
- STATI DI PARTICELLE
- BOSONI
- INVARIANZA PER TRASLAZIONI, CORRENTE CONSERVATA
- MATRICE DENSITÀ E MICROCAUSALITÀ
- FORMA QUADRIDIMENSIONALE DEL COMMUTATORE
- PROPAGATORE DEL CAMPO
- CAMPO SCALARE COMPLESSO
- INVARIANZA PER CAMBIO DI FASE GLOBALE

3. CAMPO ELETTROMAGNETICO

- EQUAZIONI E TENSORE DI MAXWELL
- FORMA COVARIANTE A VISTA
- GAUGE DI LORENZ
- FORMULAZIONE LAGRANGIANA
- GAUGE DI RADIAZIONE
- SOLUZIONE GENERALE
- QUANTIZZAZIONE (CAMPI, ENERGIA)
- IMPULSO E SUA QUANTIZZAZIONE
- FOTONI E STATI COERENTI

4. CAMPO DI DIRAC

- EQUAZIONE DI DIRAC
- ALGEBRA DELLE MATRICI DI DIRAC
- FORMA COVARIANTE
- SIMILITUDINI E TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
- COVARIANTI BILINEARI
- INTERAZIONE CON IL CAMPO EM
- LIMITE NON RELATIVISTICO (EQUAZIONE DI PAULI)
- $\underline{L}$ NON È CONSERVATO
- SPIN E CONSERVAZIONE DI $\underline{J}$
- INTERAZIONE SPIN-ORBITA
- METRICA INDOTTA DALL'EQUAZIONE DI DIRAC
- SOLUZIONE GENERALE
- NORMALIZZAZIONE DEGLI SPINORI
- FORMALISMO LAGRANGIANO
- QUANTIZZAZIONE ED ENERGIA
- PROBLEMA DELLE ENERGIE E REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE
- VALORI MEDI DEI COMMUTATORI
- MICROCAUSALITÀ E SUPERSELEZIONE
- I QUANTI DI DIRAC SONO BOSONI
- PROPAGATORE
- CARICA DEL CAMPO DI DIRAC
- TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INFINITESIME
- INVARIANZA E CARICA CONSERVATA
- MOMENTO ANGOLARE PER I TRE CAMPI

5. ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

- SCHEMA DI INTERAZIONE
- EQUAZIONE DI DYSON
- MATRICE S
- LAGRANGIANA DI INTERAZIONE IN CAMPO EM
- SEZIONE D'URTO DI RUTHERFORD E DI MOTT
- QED (CONTROREAZIONE SUI CAMPI)
- CALCOLO DELL'HAMILTONIANA DI INTERAZIONE
- TEOREMA DI WICK
- PROPAGATORE DEL FOTONE
- PROCESSO $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$
- SCATTERING COMPTON
- INVARIANZA DI GAUGE DELL'AMPIEZZA DI SCATTERING
- SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA (FOTONI)

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

· SPAZIO VETTORIALE

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \rightarrow c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = \underline{v} \in V$$

IN RELATIVITÀ RISTRETTA $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; IN MQ, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

SE VALE

$$\sum_i c_i \underline{e}_{(i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \ \forall i$$

· BASE

IL VETTORE $\underline{v}$ È UN ENTE ASTRATTO E ASSOLUTO; LO RAPPRESENTO IN UNA DATA BASE CON

$$\underline{v} = v^i \underline{e}_{(i)}$$

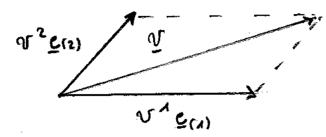
COME SI TRASFORMANO LE COMPONENTI DI $\underline{v}$ CAMBIANDO BASE?

CONSIDERIAMO LA BASE $\underline{e}'_{(j)}$ (NON NECESSARIAMENTE ORTOGONALE). VALE

$$\underline{e}_{(i)} = \Lambda^k{}_i \, \underline{e}'_{(k)}$$

LE SOMME SONO TRA INDICI IN ALTO E IN BASSO.

MATRICE DI COEFFICIENTI



$$\underline{v} = v^i \underline{e}_{(i)} = v^i \Lambda^k{}_i \, \underline{e}'_{(k)} \equiv v^{k'} \underline{e}'_{(k)}$$

$$v^{k'} = \Lambda^k{}_i \, v^i$$

NOTA: CONTROVARIANTE PERCHÉ VARIA AL CONTRARIO RISPETTO ALLE BASI.

QUESTE SI DICONO COMPONENTI CONTROVARIANTI DEL VETTORE.

NOTA: USA LA CONVENZIONE DI RG E SCRIVI $\Lambda^i{}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$.

· METRICA

$$(\underline{v}, \underline{w}) = c_1 (\underline{v}_1, \underline{w}) + c_2 (\underline{v}_2, \underline{w})$$

(PRODOTTO SCALARE)

SE $\underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2$, OSSIA È BILINEARE IN $\underline{v}$ E $\underline{w}$. SIANO

$$\underline{v} = v^{(i)} \underline{e}_{(i)} \qquad (\underline{v}, \underline{w}) = v^i w^j (\underline{e}_{(i)}, \underline{e}_{(j)})$$

$$\underline{w} = w^{(j)} \underline{e}_{(j)}$$

UNA VOLTA NOTA

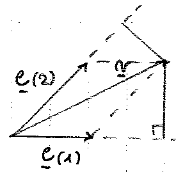
$$g_{ij} \equiv (\underline{e}_{(i)}, \underline{e}_{(j)})$$

(COMPONENTI DEL TENSORE METRICO), POSSO PRENDERE IL PS DI DUE VETTORI QUALSIASI.

NOTA: LA METRICA MAPPA UN VETTORE $|v\rangle$ NEL SUO BRA $\langle v|$ (ONE-FORM). INFATTI $\langle v|w\rangle$ MI DÀ UNO SCALARE: $g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta$. È IL PS CHE VA DEFINITO IN TERMINI DI METRICA (VEDI P. 68 SCHUTZ, GENERAL RELATIVITY).

COMPONENTI COVARIANTI

COINCIDONO CON QUELLE CONTROVARIANTI SE LA BASE È ORTOGONALE.



COME LE RICAVO?

$$v_i = (\underline{v}, \underline{e}_{(i)}) = \Lambda^k{}_i \, (\underline{v}, \underline{e}'_{(k)})$$

$$v_i = \Lambda^k{}_i \, v'_k \qquad \text{COVARIANTI}$$

DA CONFRONTARSI CON

$$v^{k'} = \Lambda^k{}_i \, v^i \qquad \text{CONTROVARIANTI}$$

NOTA: v_i NON È UN VETTORE MA UNA ONE-FORM (SUO DUALE). UN POCHINO IL DISEGNO CONFONDE; PERÒ È VERO CHE

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta$$

E CHE QUINDI COINCIDONO USANDO LA METRICA EUCLIDEA.

INOLTRE IL DISEGNO SERVE A VEDERE CHE

$$v_i = (\underline{v}, \underline{e}_{(i)})$$

MENTRE NON È VERO CHE $v^i = (\underline{v}, \underline{e}_{(i)})$! DI FATTO

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$$

QUINDI USANDO LA METRICA DI MINKOWSKI

$$v_0 = v^0, \quad v_i = -v^i$$

INFINE,

$$v_i = (\underline{v}, \underline{e}_{(i)}) = g_{ij} v^i e^j_{(i)} = g_{ij} v^i \delta_i{}^j = g_{ii} v^i = v_i$$

COME SI COLLEGANO?

$$(\underline{e}_{(k)}, \underline{v}) = v^i (\underline{e}_{(k)}, \underline{e}_{(i)})$$

$$v_k = v^i g_{ki}$$

OSSIA MI BASTA SATURARE SUL TENSORE METRICO g_{ki} (OSSIA g_{ki} ABBASSA GLI INDICI DA CONTROVARIANTE A COVARIANTE).

DEFINIAMO INOLTRE

$$g_{ik} g^{k\ell} = \delta_i{}^\ell$$

NOTA: COL CACCHIO CHE È UNA DEFINIZIONE. ESPRIME IL FATTO CHE $g_{\alpha\beta}$ E $g^{\alpha\beta}$ SONO UNO L'INVERSO DELL'ALTRO (VETTORI $\leftrightarrow$ DUALE). INOLTRE $g^{ik} g_{k\ell} = \delta^i{}_\ell$ (P. 75 SCHUTZ)

CHE È LA RAPPRESENTAZIONE IN FORMA MISTA DEL TENSORE METRICO (È UNA DELTA DI KRONECKER IN QUALSIASI SISTEMA DI RIFERIMENTO).

PER DEFINIZIONE DI MATRICE INVERSA VALE ALLORA

$$v^i = g^{ik} v_k$$

NOTA: HO MOLTIPLICATO PER g^{ik} $v_k = v^i g_{ki}$

POSSO ESPRIMERE IL PS IN VARI MODI:

$$(\underline{v}, \underline{w}) = v^i w^k g_{ik} = v^i w_i = v_i w^i = g^{ik} v_i w_k$$

SI NOTI CHE IL PS È UNA QUANTITÀ ASSOLUTA: NON DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO. COME VEDO CHE È INVARIANTE?

$$v^i = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^d \end{pmatrix}$$

$$v' = \Lambda v \qquad v^{i'} = \Lambda^i{}_k v^k$$

INVECE

$v_i = \Lambda^k{}_i v'_k = v'_k \Lambda^k{}_i$

$\bar{v} = \bar{v}' \Lambda$

$(\quad) = (\quad)(\quad)$ OVVERO $\bar{v}$ È UN VETTORE RIGA.

ALLORA, MOLTIPLICANDO A DESTRA PER Λ^{-1},

$\bar{v}' = \bar{v} \Lambda^{-1}$

NOTA: BRUTTA FORTE STA ROBA. INVECE
$v^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{j} v^{j}$ $\quad v_i = \Lambda^{j'}{}_i v_{j'}$
$v^{i'} w_{i'} = \Lambda^{i'}{}_j \Lambda^{l}{}_{i'} v^j w_l = v^j w_j$

IL PS VALEVA

$(\underline{w}, \underline{v}) = \bar{w} v = \bar{w} \Lambda^{-1} \Lambda v = \bar{w}' v' = (\underline{w}', \underline{v}')$

$(\quad)(\,)$

NOTA: O MEGLIO ANCORA, COME IN RG,
$(\vec{v}, \vec{w}) = (v^i \underline{e}_{(i)}, w^j \underline{e}_{(j)}) = v^i w^j g_{ij}$
$= v^i w^j \Lambda^{\alpha'}{}_i \Lambda^{\beta'}{}_j g_{\alpha'\beta'} = v^{\alpha'} w^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} = (v^{\alpha'} \underline{e}_{(\alpha')}, w^{\beta'} \underline{e}_{(\beta')})$

- PRODOTTO TENSORIALE

IDENTIFICO UN TENSORE TRAMITE LE SUE COMPONENTI $T^{il} = (v^i w^l)$.

COME SI TRASFORMA?

$T^{il'} = \Lambda^i{}_m \Lambda^l{}_m T^{mm}$

$T_{il} = \Lambda^m{}_i \Lambda^m{}_l T'_{mm}$

NOTA: OVVERO SI TRASFORMA COME DUE VETTORI CONTROVARIANTI SE HO GLI INDICI IN ALTO, COME COVARIANTI SE HO GLI INDICI IN BASSO.

- COME SI TRASFORMA IL TENSORE METRICO?

$g_{ik} = (\underline{e}_{(i)}, \underline{e}_{(k)})$

$\underline{e}_{(i)} = \Lambda^k{}_i \underline{e}'_{(k)}$

$(\underline{e}_{(j)}, \underline{e}_{(i)}) = \Lambda^k{}_j \Lambda^l{}_i (\underline{e}'_{(k)}, \underline{e}'_{(l)})$

$g_{ji} = \Lambda^k{}_j \Lambda^l{}_i g'_{kl}$

IL CHE GIUSTIFICA IL NOME DI "TENSORE" METRICO.

- LEGGI INVARIANTI

SE DA UNA MISURA IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SCOPRO CHE

$v^i = w^i$

NOTA: INFATTI I VETTORI SONO INVARIANTI (VARIANO LE COMPONENTI).

QUESTO È VERO IN OGNI SISTEMA DI RIFERIMENTO.

INVECE UNA RELAZIONE COME

$v^i = w_i$

NON È INVARIANTE PER SISTEMI DI RIFERIMENTO.

SIMILMENTE È UNA RELAZIONE INVARIANTE

$$T^{ik} = V^{ik}$$

MENTRE NON LA È

$$T^{ik} = V_i^{\ k}$$

È QUESTO IL MODO IN CUI SI VERIFICA SE UNA LEGGE FISICA SIA O MENO INVARIANTE.

· <u>SPAZIOTEMPO</u>

$$(t, \underline{x})$$

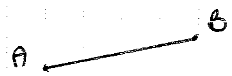
È IL MODO DI SPECIFICARE UN EVENTO IN RELATIVITÀ GALILEIANA.
IN RELATIVITÀ RISTRETTA HO UNA VELOCITÀ LIMITE c, QUINDI SCRIVO, UTILIZZANDO GRANDEZZE OMOGENEE,

$$(x^0, \underline{x}) \qquad x^0 = ct$$

<u>OSSERVATORE INERZIALE</u>: SI TROVA IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI VALE IL PRINCIPIO DI INERZIA.
NON DISCENDE DAL II PRINCIPIO, PERCHÈ QUESTO VALE SOLO IN UN SISTEMA INERZIALE (ALTRIMENTI $\underline{F} = m\underline{a} + F_{CORIOLIS} + F_{TRASCINAMENTO} + F_{CENTRIFUGA}$).

DUE SISTEMI INERZIALI SONO PER FORZA IN MOTO TRASLATORIO L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO. GLI EVENTI SONO QUINDI LEGATI DA RELAZIONI LINEARI

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$$



INOLTRE

$$\Delta X^0 = X^0_A - X^0_B$$

$$\Delta \underline{X} = \| \underline{X}_A - \underline{X}_B \| \qquad \Delta S^2 = \Delta X^{0\,2} - (\Delta \underline{X})^2$$

DATI DUE SISTEMI O E O', ΔS^2 È LO STESSO:

$$O \qquad \Delta S^2 = \Delta X^{0\,2} - (\Delta \underline{X})^2$$

$$O' \qquad \Delta S^2 = (\Delta X^{0'})^2 - (\Delta \underline{X}')^2$$

SI NOTI CHE È INVARIANTE IN VALORE E IN FORMA (SE AD ESEMPIO PASSO IN COORDINATE SFERICHE NON HO INVARIANZA DI FORMA: QUESTA DISCENDE DALLA TRASFORMAZIONE ORTOGONALE IN SPAZIO EUCLIDEO).

QUINDI LA MATRICE Λ È SOGGETTA ALLE RESTRIZIONI

- PRINCIPIO DI INERZIA ($\Rightarrow$ LINEARITÀ)
- INVARIANZA DI FORMA

SCRIVO

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu}\, \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

COME È FATTO $g_{\mu\nu}$? LO LEGGO DA Δs^2: $g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$.

E COME SI TRASFORMA?

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu\, g'_{\alpha\beta}$$

(NOTA CHE GLI INDICI GRECI μ, ν VANNO DA 0 A 3, MENTRE QUELLI LATINI CORRONO SULLA PARTE SPAZIALE, OSSIA $i = 1,2,3$).

COME SI È VISTO,

$$\Delta x_\mu = g_{\mu\nu}\Delta x^\nu \,, \quad \Delta x^\mu = g^{\mu\nu}\Delta x_\nu$$

SCRIVIAMO ESPLICITAMENTE

$$\Delta x^0 = \underbrace{g^{00}}_{=1}\Delta x_0 + \underbrace{g^{0i}\Delta x_i}_{=0} = \Delta x_0$$

(SONO LE COMPONENTI FUORI DIAGONALE!)

$$\Delta x^i = -\Delta x_i$$

PER CONVENZIONE, LE MISURE CHE EFFETTUO CON IL REGOLO SONO DENOTATE DALL'INDICE IN ALTO.

NOTA: LA RELAZIONE SU Λ CHE STIAMO PER DERIVARE È LA CONTROPARTE NELLO SPAZIOTEMPO DELLE ISOMETRIE IN $\mathbb{R}^3$ (CHE IMPLICAVANO LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ E PRESERVAVANO g_{ij}).

* IN GENERALE VALE LA RELAZIONE COMPLICATA

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu\, g'_{\alpha\beta}$$

MA L'INVARIANZA IN FORMA IMPLICA CHE RESTI INVARIATO IL TENSORE METRICO (E QUINDI IL PS): CIÒ SI ESPRIME CON

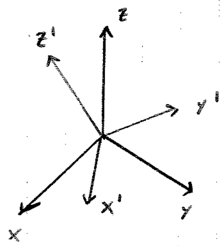
$$\underline{g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu\, g_{\alpha\beta}}$$

E SI PARLA DI TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

NOTA: INVECE
$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^{\mu'}$
APPARTIENE AL GRUPPO DELLE TRASFORMAZIONI DI POINCARÉ.

NOTA: Λ NON È ORTOGONALE!

PRENDIAMO DUE SISTEMI RUOTATI MA FERMI UNO RISPETTO ALL'ALTRO: QUESTA È UNA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ.



UN'ALTRA È IL BOOST

$$x' = \frac{x - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad y' = y \, , \quad z' = z$$

$$x^{0\prime} = \frac{x^0 - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RISCRIVIAMO IN FORMA MATRICIALE

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, g_{\alpha\beta}$$

$$= \Lambda^\beta{}_\nu \, g_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha{}_\mu \quad \left(= (\Lambda^T)^\nu{}_\beta \, g_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha{}_\mu \right)$$

$$g \overset{*}{=} \Lambda^T g \Lambda$$

NOTA: LO SCAMBIO DI INDICI $\alpha \leftrightarrow \beta$ NON È NECESSARIO.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

PRENDENDO I det, SCOPRO CHE UNA PROPRIETÀ DELLE T. DI LORENTZ È

$$\det g = \det \Lambda^T \cdot \det g \cdot \det \Lambda$$

$$\underline{(\det \Lambda)^2 = 1}$$

*NOTA: PERCHÉ Λ^T E NON Λ^{-1}? DAMMI RETTA E USA LA NOTAZIONE

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \partial x^{\mu'} / \partial x^\nu$$

COSÌ DA TENERE TRACCIA DI CHI SONO LA BASE DI PARTENZA E DI ARRIVO. $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$ NON È UN TENSORE, PERCHÉ NON È SCRITTO IN COMPONENTI RISPETTO A UNA BASE MA VIVE A CAVALLO TRA DUE BASI DIVERSE. PER LA CRONACA

$$(\Lambda^T)^{\mu'}{}_\nu = \Lambda^{\nu'}{}_\mu$$

$$(\Lambda^{-1})^{\mu'}{}_\nu = \Lambda^\nu{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}$$

INOLTRE, SE SCELGO $\mu = \nu = 0$,

$$1 = \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 \, g_{\alpha\beta}$$

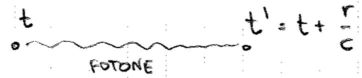
$$= (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 \, \delta_{ij}$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$$

DA CUI DEDUCO UN'ALTRA PROPRIETÀ,

$$\underline{\Lambda^0{}_0 \geq 1 \ \vee \ \Lambda^0{}_0 \leq -1}$$

- SINCRONIZZAZIONE DEGLI OROLOGI



TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

FORMANO UN GRUPPO ($AB \in \Lambda$, $\exists A^{-1} \dots$)

SI DICONO TRASFORMAZIONI PROPRIE SOLO QUELLE CON

$\det \Lambda = +1$

$\Lambda^0{}_0 \geq 1$

NOTA: QUEST'ULTIMA SIGNIFICA ORTOCRONA.

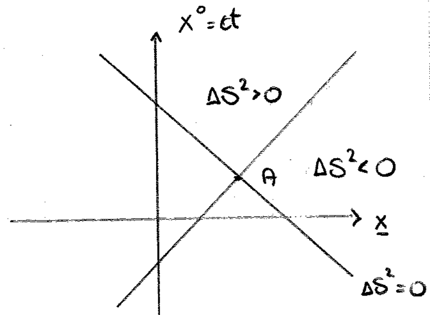
E DESCRIVONO PROCESSI CHE AVVENGONO IN NATURA.

INVECE È IMPROPRIA LA PARITÀ, CHE CORRISPONDE A

$$\begin{cases} x^{0\prime} = x^0 \\ \underline{x}' = -\underline{x} \end{cases}$$

INFATTI È VIOLATA DA ALCUNI PROCESSI (DECADIMENTI β).

CINEMATICA E DINAMICA



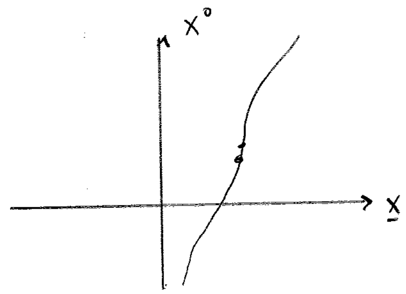
RICORDIAMO

$$\Delta S^2 = \Delta x^{0\,2} - (\Delta \underline{x})^2 = (\Delta x^{0\prime})^2 - (\Delta \underline{x}')^2$$
$$= g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

NEL GRAFICO È RAPPRESENTATO IL CONO LUCE DI A.

QUESTO DIVIDE LO SPAZIOTEMPO IN PASSATO, PRESENTE E FUTURO ASSOLUTI.

- TIPO SPAZIO ($\Delta S^2 < 0$): ESISTE UN RIFERIMENTO IN CUI I DUE EVENTI ACCADONO ALLO STESSO TEMPO.
- TIPO TEMPO ($\Delta S^2 > 0$): È PRESERVATA LA SUCCESSIONE CAUSALE, MA ESISTE UN RIFERIMENTO IN CUI AVVENGONO NELLO STESSO LUOGO. SONO COLLEGABILI CON UN SEGNALE LUCE.



A FIANCO UNA TRAIETTORIA NELLO SPAZIOTEMPO.

PRENDIAMO SULLA TRAIETTORIA

$x^\mu + dx^\mu$

$dx^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu$

ALLORA, PER UNA PARTICELLA CON MASSA, L'INTERVALLO È DI TIPO TEMPO:

$$\underset{\underset{ds^2}{\parallel}}{dx^\mu dx_\mu} = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu > 0$$

SI DICE <u>QUADRIVELOCITÀ</u> IL QUADRIVETTORE

$$u^\mu = c\,\frac{dx^\mu}{ds} \quad \left(= \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)$$

CHE HA COME COMPONENTI

$$u^0 = c\,\frac{dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (d\underline{x})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\underline{x}}{dx^0}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma c$$

$$u^i = c\,\frac{dx^i}{ds} = \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma v^i$$

NOTA: $u^\mu = \gamma(c, v^1, v^2, v^3)$

DOVE SI È DEFINITO $\beta = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt}$ E SI È USATO $dx^0 = c\,dt$.

SI DEFINISCE <u>QUADRIMPULSO</u>

$$p^\mu = m u^\mu$$

SE DICIAMO $d\tau = \frac{ds}{c}$ IL TEMPO INVARIANTE, CHIAMIAMO <u>QUADRIFORZA</u>

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

NOTA: SEGUE $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$.

NOTIAMO CHE

$$u^\mu u_\mu = c^2\,\frac{dx^\mu dx_\mu}{ds^2} = c^2$$

ED È UN INVARIANTE. INOLTRE

$$u_\mu F^\mu = u_\mu m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{m}{2}\frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 0$$

NOTA: È INVARIANTE PERCHÉ È UN PS, NON PERCHÉ È u_μ. ABBIAMO SOLO SCOPERTO QUANTO VALE.
RICORDA CHE LA DERIVATA DI UN VERSORE È $\perp$ AL VERSORE PERCHÉ IL SUO MODULO È COSTANTE: MA QUI SI È APPENA VISTO CHE $u_\mu u^\mu = \text{cost.}$, QUINDI $u^\mu \perp du^\mu/d\tau$.

DA CUI DEDUCIAMO CHE LA QUADRIFORZA È SEMPRE ORTOGONALE ALLA QUADRIVELOCITÀ. INOLTRE, ESPLICITANDO $(\underline{F}, \underline{u}) = 0$,

$$0 = F^0 u_0 + F^i u_i = F^0 u^0 - \underline{F}\cdot\underline{u}$$

$$\frac{cF^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\underline{F}\cdot\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad F^0 = \frac{\underline{F}\cdot\underline{v}}{c}$$

- LIMITE CLASSICO

NON LO SI OTTIENE PER $v \to 0$, BENSÌ PER $c \to \infty$.

INFATTI

$$F^i = m\frac{du^i}{d\tau} \to m\frac{dv^i}{dt}$$

NOTA: INFATTI $u^i = \gamma v^i \xrightarrow[c\to\infty]{} v^i$
E $d\tau = \frac{dt}{\gamma} \to dt$.
O ANCHE
$F^i = m\gamma \frac{d}{dt}(\gamma v^i)$ CON $\gamma \xrightarrow[c\to\infty]{} 1$.

$$F^0 = m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

MA

$$c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq c\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

QUINDI

$$cF^0 = m\frac{d}{d\tau}\left(c^2+\frac{1}{2}v^2\right) \to \frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right) \equiv \underline{F}\cdot\underline{v}$$

NOTA: RIOTTENGO IL TEOREMA DELLE FORZE VIVE.

- MASSA E ENERGIA

$$E = cP^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

NOTA: HO CHIAMATO
$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m\underline{v}\right) = \left(\gamma mc, \gamma m\underline{v}\right)$

A RIPOSO, $\beta = 0$ E OTTENGO

$$E = mc^2$$

RELAZIONE ANCORA DA SIGNIFICARE.

- PARTICELLE DI MASSA NULLA

COSA SIGNIFICA? IN FISICA CLASSICA VUOL DIRE $\underline{p} = m\underline{v} = 0$. INVECE QUI

$$\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (= \gamma m\underline{v})$$

IL CUI LIMITE SIMULTANEO $m \to 0$, $|\underline{v}| \to c$ PUÒ ESSERE FINITO. OSSERVO CHE

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2c^2$$

$$m^2c^2 = p^0p_0 + p^ip_i = p^{0\,2} - p^ip^i$$

$$p^0 = \sqrt{m^2c^2+|\underline{p}|^2}$$

$$E_{\underline{p}} = \sqrt{m^2c^4+c^2|\underline{p}|^2}$$

PERCIÒ SE $m = 0$ HO SEMPLICEMENTE

$$E_{\underline{p}} = c|\underline{p}|$$

- CAMPO DI KLEIN-GORDON

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

$$= H\psi$$

DOVE

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

COME LA RENDO RELATIVISTICA? UNA PROPOSTA È

$$H_R = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \underline{p}^2}$$

DA CUI

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\sqrt{m^2c^4 - c^2\hbar^2\Delta} + V(x)\right]\psi$$

CHE È BRUTTA (ANCHE IN RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI).

TUTTAVIA SE LA ITERIAMO OTTENIAMO $(V(x) = 0)$

NOTA: LA ITERO NEL SENSO CHE DERIVO DI NUOVO RISPETTO A t, RICORDANDO CHE $\frac{\partial}{\partial t}$ E H_R COMMUTANO.

$$(i\hbar)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(m^2c^4 - c^2\hbar^2\Delta\right)\psi$$

(A DESTRA LO POSSO FARE PERCHÈ Δ COMMUTA CON $\frac{\partial}{\partial t}$). SI NOTI CHE PERÒ È DIVENTATA DEL II ORDINE (MI SERVONO DUE C.I.)*. COMPARIRANNO INOLTRE SOLUZIONI A ENERGIA NEGATIVA, PRIMA ESCLUSE DALLA RADICE.

*NOTA: È UN PROBLEMA PERCHÉ TRA I POSTULATI DELL' MQ C'È CHE LO STATO DEL SISTEMA SIA TUTTO IN $\psi(x)$, NON ANCHE IN $\dot{\psi}(x)$.

INTRODUCIAMO LE UNITÀ NATURALI

$$c = 1, \quad \hbar = 1$$

OSSIA $[L] = [t^{-1}]$, $[E] = [M]$.

OTTENIAMO L'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \Delta + m^2\right)\psi = 0$$

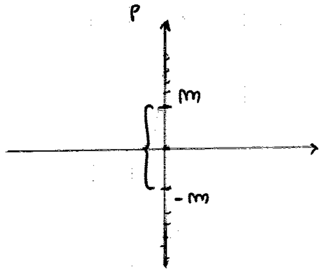
CERCHIAMONE SOLUZIONI DI ONDA PIANA

$$\psi(x) = A e^{-ip^0x^0} e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}}$$

SOSTITUENDOLA,

$$(-p^{0\,2} + \underline{p}^2 + m^2)\,A = 0$$

$$p^0 = \pm\sqrt{m^2 + \underline{p}^2}$$



VOLENDO ANCHE CLASSICAMENTE USCIVANO SOLUZIONI A ENERGIA NEGATIVA, MA BASTAVA SCARTARLE: SE UNA PARTICELLA HA INIZIALMENTE ENERGIA POSITIVA E SI MUOVE CON CONTINUITÀ NON SALTA A ENERGIE NEGATIVE.
NON COSÌ IN MQ (SI PENSI ALLE TRANSIZIONI NELL'ATOMO DI IDROGENO, DISCONTINUE) E QUI HO UNO SPETTRO ILLIMITATO INFERIORMENTE.

L'EQUAZIONE DI K-G PUÒ ESSERE RISCRITTA NELLA FORMA

$$\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2\right)\psi = 0$$

O ANCHE, DEFINENDO $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$$\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{(\Box + m^2)\,\psi = 0}$$

- <u>COVARIANZA RELATIVISTICA DELL'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON</u>

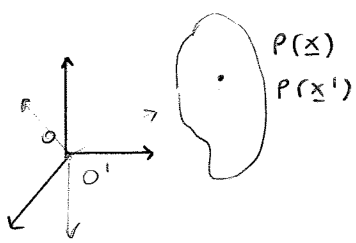
SE LA FISICA È COVARIANTE, COME SONO LEGATE

$\psi(x)$, $\psi'(x')$

VISTE DA DUE OSSERVATORI DIVERSI? PRENDIAMO DUE SISTEMI INERZIALI

O, O'

AD ESEMPIO, HO UN BLOCCO DI MATERIA DI CUI VOGLIO DEFINIRE LA DENSITÀ: L'OSSERVATORE O DEFINISCE LA FUNZIONE $\rho(\underline{x})$. L'OSSERVATORE O' MISURA $\rho'(\underline{x}')$ E, POICHÉ SI TRATTA DELLO STESSO PUNTO (NEL CASO IN CUI O' È SOLTANTO RUOTATO),



$$\rho'(\underline{x}') = \rho(\underline{x})$$

$$\underline{x}' = \hat{R}\,\underline{x}$$

PER QUANTO RIGUARDA LE VELOCITÀ $\underline{v}(\underline{x})$, $\underline{v}'(\underline{x}')$, NOTO CHE LA VELOCITÀ È UN VETTORE ED È SEMPRE LO STESSO, $\underline{v}(P)$. CAMBIANO LE SUE COMPONENTI PERCHÉ GLI HO GIRATO SOTTO GLI ASSI:

$$v^{i'}(\underline{x}') = R^{i}{}_{j}\, v^{j}(\underline{x})$$

NOTA: PUÒ CONFONDERE IL FATTO CHE IL RAGIONAMENTO NON FUNZIONI CON IL "VETTORE" POSIZIONE, CHE APPUNTO PER QUESTO NON È DAVVERO UN VETTORE.

SIMILMENTE, PER UN CAMPO TENSORIALE,

$$T^{i'j'}(\underline{x}') = R^{i}{}_{l}\, R^{j}{}_{m}\, T^{lm}(\underline{x})$$

CHE SI DICE <u>CONDIZIONE DI COVARIANZA</u>.

ORA PASSIAMO AL CASO RELATIVISTICO. LA TRASFORMAZIONE IN QUESTIONE NON È UNA ROTAZIONE, MA APPARTIENE INVECE AL GRUPPO DI POINCARÉ:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}$$

ALLORA PER UNO SCALARE

$$\psi'(x') = \psi(x)$$

PER UN 4-VETTORE

$$v^{\mu'}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, v^{\nu}(x)$$

NOTA: VEDREMO CHE C'È UNA TERZA POSSIBILITÀ (CAMPO SPINORIALE) E CHE QUINDI IN GENERALE $\phi'(x') = S(\Lambda)\phi(x)$

ANCORA, SI NOTI CHE IL VETTORE È LO STESSO ED È IL CAMBIO DI SISTEMA DI RIFERIMENTO A FAR SÌ CHE SI MESCOLINO LE SUE COMPONENTI. NOTIAMO ANCHE CHE LA TRASLAZIONE a^{μ} NON HA EFFETTO SULLE SINGOLE COMPONENTI DI $\underline{v}$, OVVERO

$$v^{\mu'}(x') = v^{\mu}(x)$$

SOTTO TRASLAZIONI

$$x' = x + a$$

LA MATRICE Λ INTERVIENE SOLO NELLA TRASFORMAZIONE $x \to x'$ PER UN CAMPO SCALARE, MENTRE AGISCE UNA SECONDA VOLTA ANCHE SULLE v^{μ} PER UN 4-VETTORE.

UNA SOTTIGLIEZZA È CHE LE x^μ SIANO DETTE COMPONENTI DI UN 4-VETTORE, CHE A RIGORE NON È VERO: INFATTI CAMBIANO SOTTO TRASLAZIONI a^μ (T. POINCARÉ). DI FATTO IL 4-VETTORE È dx^μ; SOTTO T. DI LORENTZ, TUTTAVIA, LE x^μ SI TRASFORMANO COME LE COMPONENTI DI UN 4-VETTORE.

★ VEDIAMO PERCHÉ L'EQUAZIONE DI K-G È COVARIANTE (E NON INVARIANTE). NEL CASO SCALARE, DUE OSSERVATORI MISURANO

$$O \qquad (\Box_x + m^2)\,\psi(x) = 0$$

$$O' \qquad (\Box_{x'} + m^2)\,\psi'(x') = 0$$

NOTA: QUESTO È QUANTO SI VUOLE DIMOSTRARE.

CON

$$x' = \Lambda x \qquad \psi'(x') = \psi(x)$$

NOTIAMO CHE L'EQUAZIONE HA NEI DUE SISTEMI LA STESSA FORMA; I DUE OSSERVATORI NON SANNO DI ESSERE IN MOTO (1° PRINCIPIO).

POICHÉ $\psi(x) = \psi'(x')$ NUMERICAMENTE, POSSO INFATTI SOSTITUIRE

$$(\Box_x + m^2)\,\psi'(x') = 0$$

PER RICAVARE L'AZIONE DI $\Box_x$ SU $\psi'(x')$ RICORDO CHE $x' = \Lambda x$, QUINDI

$$\frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^{\rho'}} = \Lambda^\rho{}_\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^{\rho'}} \equiv \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} := \partial_\mu \psi(x)$$

SE CHIAMIAMO

$$v_\mu(x) := \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu}$$

NOTIAMO CHE SI TRASFORMA COME LE COMPONENTI COVARIANTI,

$$v_\mu(x) = \Lambda^\rho{}_\mu\, v'_\rho(x')$$

SCRIVIAMO QUINDI

$$\partial_\mu \psi(x) = \Lambda^\rho{}_\mu\, \partial'_\rho \psi'(x')$$

E PER DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE (IN COORDINATE PSEUDO-CARTESIANE)

$$\partial_\mu \partial_\nu \psi(x) = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu\, \partial_{\rho'} \partial_{\sigma'} \psi'(x')$$

(IN COORDINATE CURVILINEE DOVREI USARE I SIMBOLI DI CHRISTOFFEL).

MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI PER LE COMPONENTI $g^{\mu\nu}$ DEL TENSORE METRICO,

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \Psi(x) = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \, \partial_{\rho'}\partial_{\sigma'} \Psi'(x') \, g^{\mu\nu}$$

MA LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SODDISFANO

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = g^{\rho\sigma}$$

PERCIO', RICONOSCENDO NELL' ESPRESSIONE SOPRA IL D'ALAMBERTIANO,

$$\Box_x \Psi(x) = \Box_{x'} \Psi'(x')$$

L'EQUAZIONE DI K-G È COVARIANTE.

PUOI DIMOSTRARE CHE, SE $v^{\mu'}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu v^\mu(x)$,

$$(\Box_x + m) v^\mu(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Box_{x'} + m) v^{\mu'}(x') = 0$$

METRICA DI KLEIN-GORDON

IN MECCANICA QUANTISTICA SI SCRIVEVA

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) \, |\Psi(t)\rangle$$

CON U OPERATORE UNITARIO,

$$U^+(t) U(t) = \mathbb{1}$$

MA LA DEFINIZIONE DI U^+ DIPENDE DA QUELLA DI AGGIUNTO,

$$(\Psi_2, \Psi_1) = \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle$$

$$(\Psi_2, A\Psi_1) = (A^+\Psi_2, \Psi_1)$$

DA CUI SI VEDE CHE A SUA VOLTA QUESTA DEFINIZIONE È CARATTERIZZATA DALLA SCELTA DELLA METRICA.

NOI RICHIEDIAMO CHE L'EVOLUZIONE TEMPORALE SIA UNITARIA,

$$(U(t)\Psi_2, U(t)\Psi_1) = (\Psi_2, \Psi_1)$$

$$\parallel$$

$$\langle \Psi_2 | U^+(t) U(t) | \Psi_1 \rangle$$

NOTA: INFATTI QUESTO EQUIVALE A RICHIEDERE CHE LA NORMA (IL PS) NON DIPENDA DAL TEMPO, COME SI VEDE QUI A FIANCO.

SIANO ϕ_1 E ϕ_2 SOLUZIONI DELL' EQUAZIONE DI K-G,

$$(\Box + m^2)\phi_1(x) = 0$$

$$(\Box + m^2)\phi_2(x) = 0$$

COME SONO LEGATE $\phi_1(x)$ E $\phi_2(x)$? DA QUESTO LEGAME FAREMO DISCENDERE UNA METRICA.

NOTIAMO INNANZITUTTO CHE L'EQUAZIONE È A COEFFICIENTI REALI, QUINDI ϕ_1^* E ϕ_2^* SONO ANCORA SOLUZIONI. POSSO SCRIVERE

$$\begin{cases} \phi_2^* (\Box + m^2)\phi_1 = 0 \\ \phi_1 (\Box + m^2)\phi_2^* = 0 \end{cases}$$

DA CUI

$$0 = \phi_2^* \Box \phi_1 - \phi_1 \Box \phi_2^*$$

$$0 = \partial_\mu (\phi_2^* \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2^*)$$

IL DALAMBERTIANO SI PUÒ ESPRIMERE INFATTI COME

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

DOVE

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

ABBIAMO TROVATO LA LEGGE DI CONSERVAZIONE

$$\underline{\partial_\mu (\phi_2^* \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2^*) = 0}$$

O ANCHE

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0$$

NOTIAMO CHE

$$0 = \int_{\mathbb{R}^\infty} d^3x \, (\partial_0 J^0 + \partial_i J^i) = \frac{d}{dx^0} \int_{\mathbb{R}^\infty} J^0 + \int_{\mathbb{R}^\infty} \mathrm{div}\, \underline{J} \, dv$$

$$= \frac{d}{dt} Q = 0$$

INFATTI

$$\int_{\Sigma'_\infty} \underline{J} \cdot \underline{n} \, d\Sigma' = 0$$

PERCIÒ SI È TROVATA

$$\frac{d}{dx^0} \; i \int_{\mathbb{R}^\infty} d^3x \, [\phi_2^* \partial_0 \phi_1 - (\partial_0 \phi_2^*) \phi_1] = 0$$

DOVE SI È MOLTIPLICATO PER i COSÌ DA OTTENERE UN NUMERO REALE QUANDO SCELGO $\phi_2 = \phi_1$.

ABBIAMO COSTRUITO IL PRODOTTO SCALARE

$$(\phi_2, \phi_1) = i \int_{\mathbb{R}^\infty} d^3\underline{x} \left[\phi_2^* \partial_0 \phi_1 - (\partial_0 \phi_2^*) \phi_1 \right] := i \int_{\mathbb{R}^\infty} d^3\underline{x}\ \phi_2^* \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_1$$

NOTIAMO CHE LA NORMA PUÒ ESSERE NEGATIVA, QUINDI NON POSSO USARE QUESTO OGGETTO COME UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ.

RISPETTO ALLE T. DI GALILEO, QUELLE DI LORENTZ MESCOLANO IL TEMPO (UN PARAMETRO) CON LA POSIZIONE (UN OPERATORE).

QUESTO DÀ LUOGO A DIFFICOLTÀ COME QUELLA VISTA, CHE RISOLVO SOSTITUENDO LA DISTRIBUZIONE

$\phi(\underline{x}, x^0)$

NOTA: I CASI SONO DUE: O RENDIAMO ANCHE t OPERATORE (MA NON PORTA A NULLA), O RENDIAMO LE X DELLE VARIABILI.

FUNZIONE DEI PARAMETRI CON UN CAMPO CLASSICO (LE X DIVENTANO VARIABILI).

LO VEDREMO QUANTIZZANDO IL CAMPO ELETTROMAGNETICO (L'UNICO DI CUI ABBIAMO UN ANALOGO CLASSICO, MENTRE PER GLI ALTRI VEDIAMO IN PRATICA SOLO LA CONTROPARTE QUANTISTICA).

- SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

È UN'EQUAZIONE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI. LA POSSO INTEGRARE COMPLETAMENTE E CERCARNE SOLUZIONI DI ONDA PIANA

$$\phi(x) = A_p e^{-ipx}$$

CON

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = (-i p_\mu)(-i p^\mu)\phi$$

PERCIÒ OTTENGO PER SOSTITUZIONE, SE $A \neq 0$,

$$-p_\mu p^\mu + m^2 = 0$$

$$-p^0 p_0 - p^i p_i + m^2 = 0$$

$$-p^{0\,2} + |\underline{p}|^2 + m^2 = 0$$

SI È TROVATA LA RELAZIONE DI DISPERSIONE

$$p^{0\,2} = m^2 + \underline{p}^2$$

$$p^0 = \pm\sqrt{m^2+\underline{p}^2} := \pm\,\omega_{\underline{p}}$$

LA SOLUZIONE GENERALE SI TROVA SOVRAPPONENDO QUELLE PER TUTTI I POSSIBILI p^μ,

$$\sum_{\substack{p_0>0\\<0}}' \int d^3\underline{p}\left[A_\pm(\underline{p})\,e^{-ip_\mu x^\mu}\right] = \phi(x)$$

LA SOMMA CORRE SULLE DUE POSSIBILI SOLUZIONI $\pm$, I CUI COEFFICIENTI $A_\pm$ SONO IN GENERALE DIVERSI; A PARTE QUESTA ACCORTEZZA, È L'USUALE

$$f(x) = \int dp\, e^{ipx}\,\tilde{f}(p)$$

POICHÉ INOLTRE

$$p_\mu x^\mu = p_0 x^0 + p_i x^i = p^0 x^0 - \underline{p}\cdot\underline{x}$$

POSSO RISCRIVERE L'ESPONENZIALE

$$e^{-i\omega_{\underline{p}} x^0 + i\underline{p}\cdot\underline{x}} = e^{-i(\omega_{\underline{p}} x^0 - \underline{p}\cdot\underline{x})}$$

PER CONVENZIONE, SCRIVO L'ALTRA SOLUZIONE COME

$$e^{i\omega_{\underline{p}} x^0 - i\underline{p}\cdot\underline{x}} = e^{i(\omega_{\underline{p}} x^0 - \underline{p}\cdot\underline{x})}$$

DOVE HO CAMBIATO IL SEGNO DI $\underline{p}\cdot\underline{x}$ (NON MI PERDO NULLA, TANTO INTEGRO SU TUTTI I $\underline{p}$). POSSO ESPRIMERE

$$\phi(\underline{x}, x^0) = \int d\underline{p}\,\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_p}}\left[\alpha(\underline{p})\,e^{-ip_\mu x^\mu} + \beta^*(\underline{p})\,e^{ip_\mu x^\mu}\right]$$

NOTA: SE VOGLIO CHE IL CAMPO ϕ SIA REALE, IN REALTÀ DOVRÒ SCEGLIERE $\beta^*(\underline{p}) = \alpha^*(\underline{p})$.

DOVE SI È INSERITO UN FATTORE DI NORMALIZZAZIONE. SI NOTI CHE ORA

$$p^0 = \omega_p > 0$$

LE SOLUZIONI CON $-\omega_{\underline{p}}$ SONO NEL PEZZO IN $\beta^*(\underline{p})$ DELLA SOLUZIONE: HO TOLTO DI MEZZO LA SOMMATORIA. ALLEGGERIAMOLA ULTERIORMENTE SCRIVENDO

$$\phi(\underline{x}, x^0) = \int d^3\underline{p}\left[f_{\underline{p}}(x)\,\alpha(\underline{p}) + \beta^*(\underline{p})\,f^*_{\underline{p}}(x)\right] \quad \left(= \int d^3p\left[f^{(+)}_{\underline{p}}(x)\,\alpha(\underline{p}) + f^{(-)}_{\underline{p}}(x)\,\beta^*(\underline{p})\right]\right)$$

CON

$$f_{\underline{p}}(x) = \frac{e^{-ip\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_{\underline{p}}}}$$

MOSTRIAMO CHE $f_{\underline{p}}(x)$ E $f_{\underline{q}}(x)$ SONO ORTONORMALI USANDO IL PRODOTTO SCALARE IMPLICATO DA KLEIN - GORDON. CHIAMANDO $q^0 = \sqrt{m^2 + q^2}$,

$$i \int d\underline{x} \left[f_{\underline{q}}^*(x) \partial_0 f_{\underline{p}}(x) - (\partial_0 f_{\underline{q}}^*) f_{\underline{p}} \right] \equiv (f_{\underline{q}}^{(+)}, f_{\underline{p}}^{(+)}) := i \int d\underline{x}\, f_{\underline{q}}^* \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\underline{p}}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\underline{p}} 2\omega_{\underline{q}}}} \int d\underline{x}\; e^{iqx} \partial_0 e^{-ipx} - (\partial_0 e^{iqx}) e^{-ipx}$$

$$= \frac{(p^0 + q^0)}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_{\underline{q}} \omega_{\underline{p}}}} \int d\underline{x}\; e^{i(q^0 - p^0)x^0} e^{-i(\underline{q} - \underline{p})\cdot \underline{x}}$$

NOTA: VOLENDO, QUESTO È IL MODO IN CUI SI NORMALIZZA $\phi(x)$.

$$= \frac{(p^0 + q^0)}{\sqrt{4\omega_{\underline{q}} \omega_{\underline{p}}}} e^{i(q^0 - p^0)x^0} \delta(\underline{q} - \underline{p}) = \frac{2p^0\, \delta(\underline{q} - \underline{p})}{2\omega_{\underline{p}}} = \delta(\underline{p} - \underline{q})$$

NOTA: POICHÉ $p^0 = \sqrt{m^2 + p^2}$, IMPORRE $\underline{p} = \underline{q}$ SIGNIFICA ANCHE $p^0 = q^0$. INOLTRE $\delta(x) = \delta(-x)$

SIMILMENTE SI POSSONO MOSTRARE

$$f_{\underline{p}}^{(-)}(x) = f_{\underline{p}}^*(x)$$

$$f_{\underline{p}}^{(+)}(x) = \frac{e^{-ip\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_{\underline{p}}}}$$

$$(f_{\underline{q}}^{(-)}, f_{\underline{p}}^{(+)}) = 0$$

$$(f_{\underline{q}}^{(+)}, f_{\underline{p}}^{(-)}) = 0$$

NOTIAMO CHE (VEDI NOTA)

$$(f_{\underline{q}}, \phi) = \alpha(\underline{q})$$

· **ESEMPIO**: UN PROBLEMA DI CAUCHY

$$\text{C.I}: \begin{cases} \phi(\underline{x}, 0) = \phi_0(\underline{x}) \\ \dot\phi(\underline{x}, x^0)|_{x^0=0} = \dot\phi(\underline{x}) \end{cases}$$

$$(f_{\underline{q}}, \phi) = i \int d\underline{x}\, f_{\underline{q}}^* \overleftrightarrow{\partial_0} \phi \equiv \alpha(\underline{q})$$

NOTA: INFATTI $\alpha(\underline{q})$ NON DIPENDE DAL TEMPO (q^0), QUINDI LA SI PUÒ CALCOLARE A $q^0 = 0$ USANDO LE CONDIZIONI INIZIALI.

NOTA:

$$(f_{\underline{q}}(x), \phi) = \left(f_{\underline{q}}(x), \int d^3\underline{p} \left[f_{\underline{p}}(x)\alpha(\underline{p}) + f_{\underline{p}}^*(x)\beta^*(\underline{p})\right]\right) = \int d^3\underline{p} \left[\alpha(\underline{p})(f_{\underline{q}}(x), f_{\underline{p}}(x)) + \beta^*(\underline{p})(f_{\underline{q}}(x), f_{\underline{p}}^*(x))\right]$$

$$= \int d^3\underline{p}\; \alpha(\underline{p})\, \delta(\underline{p} - \underline{q}) = \alpha(\underline{q})$$

DISCRETIZZAZIONE DELLE SOLUZIONI DI K-G

f E f^* SONO ONDE PIANE, QUINDI NON NORMALIZZABILI SE NON A UNA δ.
UN MODO DI RISOLVERLA È USARE I PACCHETTI D'ONDA, NORMALIZZABILI, MA LA NOTAZIONE È PESANTE.
L'ALTRO MODO È DISCRETIZZARE LO SPETTRO DELL'IMPULSO.
ASSUMIAMO UN VOLUME V CON CONDIZIONI PERIODICHE AL CONTORNO

$$\psi(x,y,z) = \psi(x+L,y,z)$$

E COSÌ PER LE ALTRE COMPONENTI: RITROVO LA FISICA PER $V \to \infty$.
PER LE AUTOFUNZIONI DELL'IMPULSO IN UNA DIMENSIONE AVREMO

$$e^{ip(x+L)} = e^{ipx} \qquad 0 \le x \le L$$

OVVERO

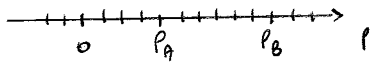
$$e^{ipL} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad pL = 2\pi m$$

OSSIA LO SPETTRO È DISCRETO. INOLTRE NORMALIZZO CALCOLANDO

$$\int_0^L |e^{ipx}|^2 dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ipx}$$

GLI AUTOVALORI DELL'IMPULSO SONO DATI DA

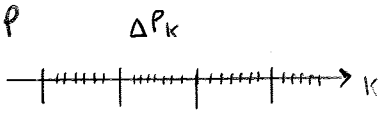
$$p_m = \frac{2\pi}{L} m$$



LA RISPOSTA DI UN SISTEMA O UNA QUALSIASI ALTRA GRANDEZZA CHE ANDREBBE INTEGRATA SUI p ORA VA SOMMATA SUI POSSIBILI STATI DI IMPULSO p_m,

$$\sum_{m:\,(p_A,p_B)} f(p_m)$$

DOVE p_A, p_B SONO DUE ESTREMI TRA CUI È COMPRESO L'IMPULSO; AL CRESCERE DI L SI INFITTISCONO GLI STATI. PRENDO SUI p UN RETICOLATO COSÌ CHE $f(p)$ SIA PRESSOCHÉ COSTANTE IN OGNI INTERVALLO K; RICORDANDO CHE $\Delta p = \frac{2\pi}{L}\Delta m$,



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOMMA SUGLI STATI}}}{\sum_m{}'}\, f(p_m) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOMMA SUGLI INTERVALLI}}}{\sum_K{}'}\, f(p_K) \underbrace{\Delta m_K}_{\substack{\uparrow \\ \text{QUANTI STATI NELL'INTERVALLO } K}} = \frac{L}{2\pi} \sum_K{}' f(p_K)\, \Delta p_K \xrightarrow[\Delta p_K \to 0]{L \to \infty} \frac{L}{2\pi}\int_{p_A}^{p_B} f(p)\, dp$$

IL FATTORE

$$\frac{\Delta n}{\Delta p} = \frac{L}{2\pi}$$

NOTA: A ME STA MANFRINA PARE SUPERFLUA.
$p_n = \frac{2\pi}{L} n$, QUINDI $\Delta p = \frac{2\pi}{L}$ (DISTANZA TRA DUE p_n).
$\sum_p' f(p) = \frac{1}{\Delta p} \sum_p f(p) \Delta p = \frac{L}{2\pi} \sum_p' f(p) \Delta p \to \frac{L}{2\pi} \int f(p) dp$

SI DICE DENSITÀ DEGLI STATI ED È

$$\sum_{p_\pi}' f(p_\pi) \cdot \left(\frac{\Delta n}{\Delta p}\right) \Delta p_\kappa \quad \to \quad \frac{\Delta n}{\Delta p} \int f(p) dp = \frac{L}{2\pi} \int f(p) dp \quad \equiv \quad \sum_n f(p_n)$$

TORNIAMO ALLA SOLUZIONE GENERALE DI K-G, CHE DISCRETIZZIAMO COME

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\underline{p}}}} \left[\alpha(\underline{p}) e^{-i p \cdot x} + \beta^*(\underline{p}) e^{i p \cdot x} \right]$$

$$= \sum_{\underline{p}_n}' \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\underline{p}_n}}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\alpha(\underline{p}_n) e^{-i p_n \cdot x} + \beta^*(\underline{p}_n) e^{i p_n \cdot x} \right]$$

(IL FATTORE $\frac{1}{\sqrt{V}}$ DISCENDE DALLA NORMALIZZAZIONE SU UN VOLUME FINITO).

- <u>LO SCHEMA DI HEISENBERG</u>

CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI COORDINATE LAGRANGIANE q^i. SCRIVIAMO

$L(q, \dot{q})$

E UTILIZZANDO IL FORMALISMO CANONICO CALCOLO I MOMENTI CONIUGATI

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

POICHÉ L È AL PIÙ QUADRATICA, HO TROVATO UNA RELAZIONE LINEARE TRA p_i E $\dot{q}_i$: POSSO ALLORA INVERTIRLA E SCRIVERE L'HAMILTONIANA

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q})$$

NELLO SCHEMA DI SCHRÖDINGER, IN UN SISTEMA ISOLATO GLI OPERATORI SONO INDIPENDENTI DAL TEMPO; VI DIPENDE SOLO LO STATO CHE EVOLVE SECONDO

$$|p, t\rangle_S = e^{-iH_S t} |p, 0\rangle_S$$

NELLO SCHEMA DI HEISENBERG CAMBIO GLI OPERATORI,

$$\mathcal{O}_H(t) = e^{iHt}\mathcal{O}_S e^{-iHt}$$

TRAMITE UNA TRASFORMAZIONE CHE È QUINDI UNITARIA (NEL CASO INDIPENDENTE ESPLICITAMENTE DA t L'HAMILTONIANA È UNA COSTANTE DEL MOTO, QUINDI È LA STESSA NEI DUE SCHEMI DI S. E H.).

PERCHÉ SIANO PRESERVATI I VALORI MEDI (LA FISICA NON PUÒ DIPENDERE DAL MIO MODO DI DESCRIVERLA),

$$|\psi\rangle_H = e^{iHt}|\psi\rangle_S$$

$$\langle\psi_H|\mathcal{O}_H|\psi_H\rangle = \langle\psi_H|e^{iHt}\mathcal{O}_S e^{-iHt}|\psi_H\rangle = \langle\psi_S|\mathcal{O}_S|\psi_S\rangle$$

NELLO SCHEMA DI S. GLI OPERATORI NON DIPENDONO DAL TEMPO E COSÌ GLI STATI, TRANNE QUELLO CHE SI STA EVOLVENDO.

NELLO SCHEMA DI H. QUELLO STATO STA FERMO, MA SI MUOVE TUTTO IL RESTO (STATI E OPERATORI):

$$\mathcal{O}_S|\lambda\rangle_S = \lambda|\lambda\rangle_S$$

$$e^{iHt}\mathcal{O}_S e^{-iHt}e^{iHt}|\lambda\rangle_S = \lambda e^{iHt}|\lambda\rangle_S$$

$$\mathcal{O}_H(t)|\lambda, t\rangle_H = \lambda|\lambda, t\rangle_H$$

NOTA: SI STA MOSTRANDO COME IL SET DI AUTOSTATI DI $\mathcal{O}_H(t)$ DEBBA A SUA VOLTA DIPENDERE DAL TEMPO.

LO SCHEMA DI H SI PRESTA MEGLIO A DESCRIVERE LA MQR E LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ PERCHÉ NON DÀ AL TEMPO t QUELLA RILEVANZA CHE GLI DÀ INGIUSTIFICATAMENTE LO SCHEMA DI S.

SCRIVIAMO I COMMUTATORI CANONICI

$$[p_i, q^j] = -i\delta_i^{\ j}$$

$$[p_i, p_j] = [q^i, q^j] = 0$$

NOTA: POICHÉ $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$, HA SENSO SCRIVERE q^i, p_i.

NELLO SCHEMA DI HEISENBERG INVECE

$$e^{iHt}p_i e^{-iHt}e^{iHt}q^j e^{-iHt} - \ldots = -i\delta_i^{\ j} \quad \Rightarrow \quad [p_i(t), q^j(t)] = -i\delta_i^{\ j}$$

$$[q^i(t), q^j(t)] = 0$$

OSSIA I COMMUTATORI CANONICI SONO PRESERVATI SOLTANTO A TEMPI UGUALI.

NOTA: L'EVOLUZIONE TEMPORALE LI MANTIENE VALIDI A t SUCCESSIVI.

IN UN SISTEMA A INFINITI GRADI DI LIBERTÀ IDENTIFICO

$q^i \equiv \varphi(\underline{x}, 0)$

OVVERO NON MI BASTA UN NUMERO DISCRETO E FINITO DI COORDINATE LAGRANGIANE PER DARE, AD ESEMPIO, LE C.I.. COME FACCIO?

· <u>FORMULAZIONE LAGRANGIANA</u>

VOGLIAMO DEFINIRE UN'AZIONE

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q, \dot{q}, t)$$

NOTA: IL FORMALISMO CHE SEGUE È QUELLO ADOTTATO IN MECCANICA CLASSICA PER DESCRIVERE UN CAMPO INVECE CHE UN INSIEME DI PUNTI MATERIALI.

TALE CHE $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$,

$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad$ EQ. DEL MOTO

VERIFICHIAMO CHE IL CAMPO SCALARE SODDISFA (ϕ REALE, $\phi^* = \phi$)

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

COME CONSEGUENZA DEL PRINCIPIO VARIAZIONALE

$$S = \int_1^2 d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right)$$

NOTA: SI INTEGRA SULLA REGIONE DI $\mathbb{R}^4$ DELIMITATA DALLE IPERSUPERFICI CON $x = x^{(1)}$ E $x = x^{(2)}$.

CALCOLIAMO A TAL SCOPO $\quad (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi)$

$$\delta S = \int_1^2 d^4x \left[\partial^\mu \phi \, \partial_\mu \delta\phi - m^2 \phi \, \delta\phi \right]$$

INFATTI POSSO SCAMBIARE L'ORDINE DI

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi_2 - \partial_\mu \phi_1 = \partial_\mu(\phi_2 - \phi_1) = \partial_\mu(\delta\phi)$$

NOTA: È VERO SOLO PER VARIAZIONI FUNZIONALI.

IL TEOREMA DI GREEN ASSICURA CHE

$$\int_V d^n x \; \partial_\mu f(x) = \int_{\Sigma_V} n_\mu \, f(x) \, d\Sigma$$

PERCIÒ

$$\delta S = \int_1^2 d^4x \left[\partial^\mu(\delta\phi \, \partial_\mu \phi) - \delta\phi \, \partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi \, \delta\phi \right]$$

$$= \int_{\Sigma_V} d\Sigma \; n^\mu \, \delta\phi \, \partial_\mu \phi - \int_1^2 d^4x \left[\delta\phi \, \partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi \, \delta\phi \right]$$

PER USARE IN PIÙ DIMENSIONI IL PRINCIPIO VARIAZIONALE, RICHIEDIAMO CHE $\delta\phi$ SI ANNULLI SUL CONTORNO DELL'IPERVOLUME (4D) SU CUI STUDIAMO LA DINAMICA. SI ANNULLA ALLORA L'INTEGRALE DI FLUSSO E RIMANE

$$\delta S = -\int_{V^4} \left(\Box\phi(x) + m^2\phi(x)\right)\delta\phi \, d^4x \equiv 0$$

PER IL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI, DAL MOMENTO CHE $\delta\phi$ È UNA FUNZIONE ARBITRARIA,

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

(RIMARREBBE DA DIMOSTRARE CHE $\phi(x)$ È CONTINUA, COME SI È IMPLICITAMENTE SUPPOSTO PER POTER APPLICARE IL LEMMA).

DETTA $\mathcal{L}$ LA DENSITÀ DI LAGRANGIANA,

$$S = \int dt \underbrace{\int d\underline{x}\; \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, x)}_{L}$$

NOTA: ϕ_μ CONTIENE SIA $\partial_t\phi$ (GENERALIZZAZIONE DELLE VELOCITÀ) CHE LE DERIVATE SPAZIALI, CHE ACCOPPIANO I GRADI DI LIBERTÀ SPAZIALI. IN UN SISTEMA ISOLATO $\mathcal{L}$ NON DIPENDE ESPLICITAMENTE DALLE x^μ (SAREMMO ALTRIMENTI IN PRESENZA DI UN POTENZIALE E LO SPAZIO NON SAREBBE OMOGENEO).

CON L LA LAGRANGIANA LOCALE. QUESTO È UN FATTO GENERALE; SI PENSI AD ESEMPIO AL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE, VERIFICATO SOLAMENTE ALLO STESSO TEMPO t E PERCIÒ SOLAMENTE A LIVELLO LOCALE, DATA L'IMPOSSIBILITÀ DI DEFINIRE LA SIMULTANEITÀ ALTRIMENTI. L È LOCALE COSÌ CHE LO SIANO LE EQUAZIONI CHE VI DISCENDONO, ALTRIMENTI NON SAREBBERO RELATIVISTICAMENTE COVARIANTI.

★ IN PRESENZA DI PIÙ CAMPI E PER UNA GENERICA DENSITÀ LAGRANGIANA,

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi^{(i)}, \partial_\mu\phi^{(i)})$$

$$\delta S = \sum_i \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^{(i)}}\delta\phi^{(i)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{(i)}}\partial_\mu(\delta\phi^{(i)})\right]$$

$$= \sum_i \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^{(i)}}\delta\phi^{(i)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{(i)}}\right)\delta\phi^{(i)}\right] + \underbrace{\int d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{(i)}}\delta\phi^{(i)}\right)}_{=0}$$

DA CUI OTTENIAMO LE <u>EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE</u>

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^{(i)}} = 0$$

SCEGLIENDO PER IL CAMPO SCALARE LA DENSITÀ LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

RITROVIAMO L'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \partial^\mu \phi$$

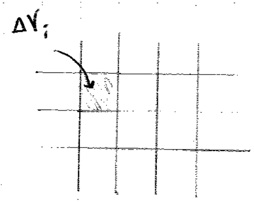
★ DEFINENDO ORA

$$L = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right)$$

CERCHIAMO I MOMENTI CINETICI CONIUGATI $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. MA COME CALCOLO

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\underline{x}, x^0)} = ?$$

DIVIDIAMO LO SPAZIO TRIDIMENSIONALE IN CUBETTI E IN CIASCUNO EFFETTUIAMO UNA MISURA DEL CAMPO MEDIO



$$\bar{\phi}_i(x^0) = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{\Delta V_i} \phi(\underline{x}, x^0)\, d\underline{x}$$

NOTA: OGNI VOLTA CHE HAI CALCOLATO $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ IN MECCANICA RAZIONALE L'HAI FATTO PER UN NUMERO FINITO DI GDL (LE q_i). STIAMO GIUSTIFICANDO COME SI PASSA A INFINITE q_i.

LA LAGRANGIANA SI PUÒ RISCRIVERE, ABBASSANDO IL ∂^μ,

$$L = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right)$$

$$\simeq \sum_j \Delta V_j \Big[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\dot{\bar{\phi}}_j(x^0)\right)^2}_{\text{"ENERGIA CINETICA"}} + \left(\text{TERMINI CHE DIPENDONO DA } \phi_i, \partial_i\phi_i \text{ MA NON DALLE } \dot{\phi}_i\right) \Big]$$

ALLORA

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \left(= \Delta V_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) = \Delta V_i \dot{\bar{\phi}}_i \qquad\qquad \frac{p^i}{\Delta V_i} \to \dot{\bar{\phi}}_i(x^0)$$

POSSO DEFINIRE PERCIÒ, MANDANDO $\Delta V_i \to 0$, UNA DENSITÀ DI IMPULSO CINETICO CONIUGATO.

CALCOLIAMO I COMMUTATORI

$$\left[\bar{\Phi}_i(x^0), \bar{\Phi}_j(x^0)\right] = 0$$

$$\left[\dot{\bar{\Phi}}_i(x^0), \dot{\bar{\Phi}}_j(x^0)\right] = 0$$

MANDANDO $\Delta V_i \to 0$, QUESTI TENDONO SEMPLICEMENTE A

$$\left[\phi(\underline{x}, x^0), \phi(\underline{y}, x^0)\right] = 0$$

$$\left[\dot{\phi}(\underline{x}, x^0), \dot{\phi}(\underline{y}, x^0)\right] = 0$$

NOTA: SI RICORDI CHE L'INDICE i SERVE SOLO A INDIVIDUARE IL VOLUMETTO; ϕ È UNO SCALARE.

PER QUANTO RIGUARDA I COMMUTATORI MISTI,

$$\Delta V_i \left[\dot{\bar{\Phi}}_i(x^0), \bar{\Phi}_j(x^0)\right] = -i\hbar\delta_{ij}$$

$$\left[\dot{\phi}(\underline{x}, x^0), \phi(\underline{y}, x^0)\right] = -i\hbar \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i} = -i\hbar\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

NOTA: LE $\dot{\bar{\Phi}}_i$ SONO I MOMENTI CINETICI CONIUGATI DI $\bar{\Phi}_i$, PERCIÒ VALGONO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE CANONICHE.

NOTA: QUESTO PASSAGGIO È FORMALMENTE GIUSTIFICABILE.

- <u>QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO DI K-G</u>

RIPRENDIAMO LA SOLUZIONE GENERALE DI K-G (CAMPI CLASSICI E REALI),

$$\phi(x) = \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} \left(a_{\underline{p}} e^{-ipx} + a^+_{\underline{p}} e^{ipx}\right)$$

DOVE ABBIAMO SOSTITUITO DEGLI OPERATORI AI COEFFICIENTI a_p E a_p^*.

RICORDIAMO CHE, USANDO IL PS DI KLEIN GORDON,

$$a_{\underline{q}} = \left(f^{(+)}_{\underline{q}}, \phi\right)$$

$$a_{\underline{p}} = \left(f^{(+)}_{\underline{p}}, \phi\right)$$

DIMOSTRIAMO CHE

$$\left[a_{\underline{p}}, a_{\underline{q}}\right] = \left[a^+_{\underline{p}}, a^+_{\underline{q}}\right] = 0$$

$$\left[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{q}}\right] = \delta(\underline{p}-\underline{q})$$

INFATTI

$$\left[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{q}}\right] = -i \cdot i \int d\underline{x} \left[f^{(+)*}_{\underline{p}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0^x \phi(x), f^{(+)}_{\underline{q}}(y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \phi(y)\right] d\underline{y}$$

OVVERO

$$[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{q}}] = \int d\underline{x}\, d\underline{y} \left[f^{(+)*}_{\underline{p}}(x)\, \dot\phi(x) - \partial_0 f^*_{\underline{p}}(x)\phi(x),\ f^{(+)}_{\underline{q}}(y)\dot\phi(y) - \partial_0 f^{(+)}_{\underline{q}}(y)\,\phi(y) \right]$$

USANDO INFINE

$$\left(f^{(+)}_{\underline{p}}, f^{(+)}_{\underline{q}} \right) = \delta(\underline{p} - \underline{q})$$

E I COMMUTATORI SULLE ϕ VISTI POCO FA SEGUE IL RISULTATO.

NEL CASO DISCRETO SU UN VOLUME V FINITO SI ERA VISTA

$$\phi(x) = \sum_{\underline{p}} \frac{1}{\sqrt{V}\sqrt{2\omega_{\underline{p}}}} \left(a_{\underline{p}}\, e^{-ipx} + a^+_{\underline{p}}\, e^{ipx} \right)$$

VALGONO ALLORA

$$[a_{\underline{p}}, a_{\underline{q}}] = [a^+_{\underline{p}}, a^+_{\underline{q}}] = 0$$

$$[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{q}}] = \delta_{\underline{p}\underline{q}}$$

NOTA: IN QUEST'ESPRESSIONE ϕ È OPERATORE MENTRE LE x SONO VARIABILI; ALLORA $a_{\underline{p}}$ E $a^+_{\underline{p}}$ DIVENTANO OPERATORI.

NOTA: È ANALOGA AD a, a^+ PER UN SISTEMA DI OSCILLATORI DISACCOPPIATI. IN CONTINUO DIVENTA $\delta(\underline{p}-\underline{q})$.

È CIOÈ RIPRODOTTA L'ALGEBRA DEGLI OPERATORI DI CREAZIONE E DI DISTRUZIONE NEL CASO DI DIVERSI IMPULSI $\underline{p}_1 \dots \underline{p}_m \dots$

$a_{\underline{p}} |0\rangle_{\underline{p}} = 0$ $\qquad\qquad |0\rangle = \prod_{\underline{p}} |0\rangle_{\underline{p}}$ STATO DI VUOTO

ALLORA, USANDO IL PRODOTTO TENSORIALE TRA INFINITI STATI,

$$|0\rangle = |0\rangle_{\underline{p}_1} \dots |0\rangle_{\underline{p}_m} \dots$$

$$a_{\underline{q}} |0\rangle = a_{\underline{q}} |0\rangle_{\underline{p}_1} \dots |0\rangle_{\underline{p}_m} \dots = 0$$

GLI OSCILLATORI RAPPRESENTANO INFINITI MODI DI OSCILLAZIONE DEL CAMPO.
LO STATO PIÙ GENERALE È DATO DA

$$(a^+_{\underline{p}_1})^{k_1} \dots (a^+_{\underline{p}_m})^{k_m} |0\rangle$$

SONO TUTTI STATI ORTOGONALI. DATI INFATTI $a^+_{\underline{q}}|0\rangle$, $a^+_{\underline{p}}|0\rangle$,

$$\langle 0 | a_{\underline{q}}, a^+_{\underline{p}} |0\rangle \overset{*}{=} \langle 0 | [a_{\underline{q}}, a^+_{\underline{p}}] |0\rangle = \delta_{\underline{p}\underline{q}} \langle 0|0\rangle$$

SONO COSÌ RAPPRESENTATI I QUANTI DEL CAMPO DI KLEIN-GORDON (COME NEL CASO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO SARANNO I FOTONI).

*NOTA: DIFFERISCONO PER IL TERMINE $a^+_{\underline{p}} a_{\underline{q}}$ CHE ANNICHILA $|0\rangle$ E NON DÀ PERCIÒ CONTRIBUTO AL VALOR MEDIO.

SULLE OSSERVABILI ϕ DEFINIAMO QUANTITÀ COME L'ENERGIA. PER I FOTONI

$$E = \frac{1}{2}\int d\underline{x}\left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right) \qquad (I)$$

USANDO IL FORMALISMO CANONICO, DATA LA LAGRANGIANA $L(q, \dot{q}, t)$

SE LA DIPENDENZA DA t NON È ESPLICITA È CONSERVATA L'ENERGIA

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L$$

LAVORANDO ANCORA IN DISCRETO E SOMMANDO SUI VOLUMETTI,

$$H = \sum_i \dot{\phi}_i \, \Delta V_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} - \sum_i \Delta V_i \, \mathcal{L}(\phi)$$

AL LIMITE PER $\Delta V_i \to 0$ E IN PRESENZA DI PIÙ CAMPI ϕ_j,

$$H = \int d\underline{x}\left(\sum_j \dot{\phi}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_j} - \mathcal{L}\right)$$

CHE NEL CASO DEL CAMPO DI K-G SI RIDUCE A

$$H = \int d\underline{x}\left(\dot{\phi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}\right)$$

$$= \int d\underline{x}\left[\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\partial_i\phi\,\partial^i\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$$

$$= \int d\underline{x}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$$

CHE È L'ANALOGO DEL TEOREMA DI POYNTING (I) ED È UNA QUANTITÀ CONSERVATA.

PER RENDERLA QUANTISTICA, SOSTITUISCO AI ϕ GLI OPERATORI, STANDO ATTENTO ALL'ORDINAMENTO. TROVO

$$H_v = \frac{1}{2}\sum_{\{\underline{p}\}}\left(a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}} \omega_{\underline{p}} + a_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}} \omega_{\underline{p}}\right) \overset{[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{p}}]=1}{=} \sum_{\{\underline{p}\}} a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}} \omega_{\underline{p}} + \sum_{\{\underline{p}\}} \frac{1}{2}\omega_{\underline{p}}$$

LE $\omega_{\underline{p}}$ SONO FREQUENZE DEGLI OSCILLATORI FITTIZI CON CUI ABBIAMO QUANTIZZATO IL SISTEMA $\left(\omega_{\underline{p}} = \sqrt{m^2+p^2}\right)$.

SI NOTI CHE L'ULTIMO TERMINE È L'ENERGIA DI PUNTO ZERO $\left(\frac{\hbar\omega_{\underline{p}}}{2}\right)$.

SU UNO SPAZIO CONTINUO E INFINITO

$$H_\infty = \frac{1}{2}\int d^3\underline{p}\,\left(a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}}\,\omega_{\underline{p}} + a_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}}\,\omega_{\underline{p}}\right)$$

IL TERMINE DI PUNTO ZERO SI TROVA APPLICANDO (CASO DISCRETO)

$$a_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}} = a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}} + \left[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{p}}\right] = a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}} + 1$$

POICHÉ L'ENERGIA È DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE, PERÒ, VOGLIAMO RIDEFINIRLA IN MODO CHE SIA NULLA SULLO STATO DI VUOTO.

È UN PRIMO ESEMPIO DI PRODOTTO NORMALE. SE HO

$$(a+a^+)(a+a^+) = a^2 + aa^+ + a^+a + a^+a^+$$

IL LORO PRODOTTO NORMALE SI OTTIENE SPOSTANDO GLI OPERATORI DI CREAZIONE A SINISTRA E QUELLI DI ANNICHILAZIONE A DESTRA:

$$:(a+a^+)(a+a^+): = a^2 + a^{+2} + 2a^+a$$

USANDO IL "BUON ORDINAMENTO" SULL'HAMILTONIANA HO

$$H = \int d\underline{x}\left[\frac{1}{2}:\dot\phi^2: + \frac{1}{2}:(\underline{\nabla}\phi)^2: + \frac{1}{2}m^2:\phi^2:\right]$$

E IL RISULTATO È CHE SCOMPARE IL TERMINE DI PUNTO ZERO. RESTA

$$H_\infty = \int d\underline{p}\,\left(a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}}\,\omega_{\underline{p}}\right)$$

NEL CASO PARTICOLARE DELL'HAMILTONIANA, SCOMPAIONO I TERMINI IN a^2 E a^{+2} (VEDREMO CHE È UNA CONSEGUENZA DELLA SUA CONSERVAZIONE).

NOTIAMO CHE ADESSO LO STATO DI VUOTO HA ENERGIA NULLA:

$$H|0\rangle = \sum_{\underline{p}} \omega_{\underline{p}}\, a^+_{\underline{p}} \underbrace{a_{\underline{p}}|0\rangle}_{=0} = 0$$

SI NOTI CHE IL TERMINE DI PUNTO ZERO È INFINITO MA COSTANTE. TOGLIERLO DÀ PROBLEMI GROSSI IN RELATIVITÀ GENERALE, DOVE L'ENERGIA DI PUNTO ZERO HA EFFETTI SULLO SPAZIOTEMPO, MA NON IN RELATIVITÀ RISTRETTA.

IN PRATICA IL BUON ORDINAMENTO SI TRADUCE NEL SOTTRARRE

DALLE FORMULE IL COMMUTATORE $[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{p}}]$. È UN MODO EURISTICO PER PROVARE A RISOLVERE I PROBLEMI LEGATI ALLA QUANTIZZAZIONE: AD ESEMPIO, CHI È L'OSSERVABILE

$$(p\cdot q)^+ \neq p\cdot q \quad ?$$

NOTA: IL MANDL-SHAW SE NE ESCE DICENDO CHE UNO PUÒ GIOCARE SULL'ORDINE DEI FATTORI PRIMA DI QUANTIZZARE E VERIFICARE A POSTERIORI SE GLI È USCITO QUALCOSA DI SENSATO.

POTEVO USCIRMENE DEFINENDO

$$\frac{pq+qp}{2}$$

CHE È UN'ALTRA OSSERVABILE. MA COME LA MISURO? IL PROBLEMA DELLA MISURA IN MQ NON È CHE SIA RISOLTO.

SIMILMENTE QUI NON STO TRASCURANDO UN TERMINE. SICCOME H NON È BEN DEFINITA, CAMBIO OPERATORE E DEFINISCO UNA NUOVA HAMILTONIANA CON I "PUNTINI" (BEN ORDINATA). NON VUOL DIRE CHE $[a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{p}}] = 0$.

* USIAMO H (D'ORA IN AVANTI BEN ORDINATA) SUL GENERICO STATO

$$|\underline{k}\rangle = a^+_{\underline{k}}|0\rangle$$

$$\sum_{\underline{p}}' \omega_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}} a^+_{\underline{k}}|0\rangle \overset{a_{\underline{p}}|0\rangle = 0}{=} \sum_{\underline{p}}' \omega_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}} [a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{k}}]|0\rangle = \sum_{\underline{p}}' \omega_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}} \delta_{\underline{p}\underline{k}}|0\rangle$$

OVVERO

$$H|\underline{k}\rangle = \omega_{\underline{k}}|\underline{k}\rangle$$

SIMILMENTE

$$H a^+_{\underline{k}_1} a^+_{\underline{k}_2}|0\rangle = (\omega_{\underline{k}_1} + \omega_{\underline{k}_2}) a^+_{\underline{k}_1} a^+_{\underline{k}_2}|0\rangle$$

VALE ANCHE NELLO SPAZIO CONTINUO:

$$\int d^3\underline{p}\ \omega_{\underline{p}} a^+_{\underline{p}} a_{\underline{p}} a^+_{\underline{k}}|0\rangle = \omega_{\underline{k}}|0\rangle$$

SI NOTI CHE $\omega_{\underline{k}} = \sqrt{m^2+k^2}$ È SEMPRE POSITIVO: HO RISOLTO IL PROBLEMA DELLE ENERGIE NEGATIVE. INOLTRE SI DICE <u>OPERATORE NUMERO</u>

$$n_{\underline{k}} = a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}}$$

NOTA: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ E $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

CHE DÀ IL NUMERO DI OSCILLAZIONI IN UN DATO MODO.

I QUANTI DEL CAMPO DI K-G SONO BOSONI

IN MQ POSSO COSTRUIRE, A PRIORI, FUNZIONI D'ONDA SIMMETRICHE PER PARTICELLE DI SPIN $\frac{1}{2}$; IN MQR NON SUCCEDE.

UNO STATO DI DUE PARTICELLE È DESCRITTO DA

$$|\underline{k}_1, \underline{k}_2\rangle = a^+_{\underline{k}_1} a^+_{\underline{k}_2} |0\rangle$$

LO STATO DI VUOTO È NORMALIZZATO, QUINDI LO SONO ANCHE GLI $a^+_{\underline{k}}|0\rangle$:

$$\langle 0| a_{\underline{k}}, a^+_{\underline{k}} |0\rangle = \langle 0| [a_{\underline{k}}, a^+_{\underline{k}}] |0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$$

GLI ALTRI SI NORMALIZZANO USANDO

$$\frac{(a^+_{\underline{k}})^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle$$

(IN UNO SPAZIO CONTINUO SI NORMALIZZA ALLE δ).

IL NUMERO TOTALE DI PARTICELLE N È DATO DA

$$N = \sum_{\underline{k}} a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \qquad \left(= \int d^3k\, a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \right)$$

NOTA: CIASCUN $m_{\underline{k}} = a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}}$ CONTA LE PARTICELLE CON IMPULSO $\underline{k}$.

SE NELL'EQUAZIONE DI K-G

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \qquad \rightarrow \begin{cases} p^0 > 0 \\ p^0 < 0 \end{cases}$$

ORA L'ENERGIA NON È PIÙ p^0 MA H; p^0 DIVENTANO LE FREQUENZE DI OSCILLAZIONE,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{\underline{k}} e^{-ikx} + h.c. \right)$$

LO STATO DI SINGOLA PARTICELLA PIÙ GENERALE CHE POSSO COSTRUIRE È UNA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI STATI DI BASE

$$|\Psi\rangle = \int d\underline{p}\, \Psi(\underline{p}) \underbrace{a^+_{\underline{p}} |0\rangle}_{= |p\rangle}$$

NOTA: PERCHÉ NON $(a^+_{\underline{p}})^m|0\rangle$? PERCHÉ QUELLA NON È UNA SINGOLA PARTICELLA, SONO m.

DOVE

$$|\Psi(p)|^2 dp$$

È LA PROBABILITÀ DI TROVARE UNA PARTICELLA DI IMPULSO p.

LA NORMA DI $|\Psi\rangle$ VALE

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int d\underline{p}\, d\underline{p}'\, \Psi(\underline{p})\Psi^*(\underline{p}')\, \langle 0|\underbrace{[a_{\underline{p}'}, a^+_{\underline{p}}]}_{=\delta(\underline{p}-\underline{p}')}|0\rangle = \int d\underline{p}\, |\Psi(\underline{p})|^2$$

COM'È USUALE IN MQ.

GLI STATI DI DUE PARTICELLE HANNO LA FORMA

$$a^+_{\underline{p}_1} a^+_{\underline{p}_2} |0\rangle$$

E LO STATO PIÙ GENERALE È DATO DA

$$|\Psi_2\rangle = \int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\, \Psi_2(\underline{p}_1, \underline{p}_2)\, a^+_{\underline{p}_1} a^+_{\underline{p}_2} |0\rangle$$

CHE DESCRIVE A TUTTI GLI EFFETTI DUE PARTICELLE IDENTICHE. PER MOSTRARE CHE SI TRATTA DI BOSONI, DEVO FAR VEDERE CHE LA FUNZIONE D'ONDA È SIMMETRICA PER SCAMBIO DEI SUOI DUE ARGOMENTI.

$$\Psi_2(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = \frac{1}{2}\left[\Psi_2(\underline{p}_1, \underline{p}_2) + \Psi_2(\underline{p}_2, \underline{p}_1)\right] + \frac{1}{2}\left[\Psi_2(\underline{p}_1, \underline{p}_2) - \Psi_2(\underline{p}_2, \underline{p}_1)\right]$$

MA

$$a^+_{\underline{p}_1} a^+_{\underline{p}_2} |0\rangle = a^+_{\underline{p}_2} a^+_{\underline{p}_1} |0\rangle$$

QUINDI

$$\int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\, \Psi_A(\underline{p}_1, \underline{p}_2)\, a^+_{\underline{p}_1} a^+_{\underline{p}_2} |0\rangle \overset{\substack{\text{CAMBIO}\\ \text{NOME}}}{=} \int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\, \Psi_A(\underline{p}_2, \underline{p}_1)\, a^+_{\underline{p}_2} a^+_{\underline{p}_1} |0\rangle$$

$$= -\int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\, \Psi_A(\underline{p}_1, \underline{p}_2)\, a^+_{\underline{p}_1} a^+_{\underline{p}_2} |0\rangle$$

DA CUI

$$\Psi_A(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = 0$$

(È VERO OGNI VOLTA CHE SATURO UNA QUANTITÀ SIMMETRICA CON UNA ANTISIMMETRICA).

- TEOREMA DI NOETHER

IN MECCANICA CLASSICA, L'AZIONE SI SCRIVE

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x)$$

PER FISSARE LE IDEE, IN K-G E IN PRESENZA DI UN POTENZIALE

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + V(x) \phi^2(x) \qquad (I)$$

UNA SIMMETRIA È UNA TRASFORMAZIONE DEI CAMPI CHE LASCIA INVARIATA L'AZIONE.

TH. DI NOETHER: AD OGNI SIMMETRIA CONTINUA CORRISPONDE UN INTEGRALE PRIMO DEL MOTO.

AD ESEMPIO TRIIMPULSO, IMPULSO SPAZIALE E ENERGIA SONO 4 QUANTITÀ CONSERVATE SOTTO TRASLAZIONI SPAZIOTEMPORALI

$$x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu$$

I DUE SISTEMI SONO FERMI L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO, INERZIALI; GLI ASSI SONO PARALLELI. I DUE OSSERVATORI DESCRIVONO LO STESSO EVENTO COME

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

QUESTO È BANALE PER CAMPI SCALARI, MA SE MI LIMITO A SPOSTARE L'ORIGINE SENZA CAMBIARE L'ORIENTAMENTO DEGLI ASSI È INTUITIVO ANCHE CHE NON SI MESCOLINO LE COMPONENTI DI UN CAMPO VETTORIALE. QUINDI VALE COMPONENTE PER COMPONENTE

$$A^{\mu'}(x') = A^\mu(x)$$

TORNIAMO A CONSIDERARE (I). IN PRESENZA DI $V(x)$ LO SPAZIO NON È OMOGENEO: SE TRASLO ϕ (SENZA TRASLARE $V(x)$) NON C'È SIMMETRIA.

IN ASSENZA DI $V(x)$ LO SPAZIO È OMOGENEO.

IMPONIAMO

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \underset{\sim}{x}) \rightarrow \text{NON DA } x$$
$$\shortparallel$$
$$S' = \int d^4x'\, \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'\phi'(x'))$$

L'AZIONE RESTA INVARIATA SE

NOTA: IN REALTÀ PER FARE QUESTA AFFERMAZIONE STIAMO GIÀ CONSIDERANDO TRASFORMAZIONI INFINITESIME.

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) = \mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial'\phi'(x'))$$
$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = 0$$
$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0$$

CONSIDERIAMO TRASFORMAZIONI INFINITESIME DEL PRIMO ORDINE (TRASCURIAMO POTENZE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO; POSSIAMO FARLO SE LA SIMMETRIA È CONTINUA). ALLORA PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) = \partial_\mu \mathcal{L}'(x) \cdot a^\mu$$

NOTO: NEL RIQUADRO, VOGLIO DETERMINARE LA VARIAZIONE $\delta\phi$ DEI CAMPI SOTTO TRASLAZIONI $x' = x + a$.

NOTO CHE, SE a È INFINITESIMA,*

$$\phi'(x+a) = \phi(x)$$
$$\phi'(x) = \phi(x-a)$$
$$\phi'(x) = \phi(x) - a^\mu \partial_\mu \phi(x)$$
$$\phi'(x) - \phi(x) = -a^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

NOTA: IN GENERALE, DEFINENDO δ_T TOTALE

$$\delta_T \Phi = \Phi'(x') - \Phi(x) = \Phi'(x') - \Phi'(x) + \Phi'(x) - \Phi(x) = \underbrace{\partial_\mu \Phi(x)\, \delta x^\mu}_{\text{VARIAZIONE COORDINATE}} + \underbrace{\delta\Phi(x)}_{\text{VARIAZIONE FUNZIONALE}}$$

L'INVARIANZA PER TRASLAZIONI IMPLICA $\delta_T \Phi = 0$. QUI AL POSTO DI Φ METTI $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$.

$$\delta\phi = -a^\nu \partial_\nu \phi$$

INOLTRE LA DIFFERENZA TRA $\mathcal{L}'$ E $\mathcal{L}$ È DI ORDINE 1; RISCRIVO

$$\partial_\mu \mathcal{L}'(x)\, a^\mu \simeq \partial_\mu \mathcal{L}(x)\, a^\mu$$

NOTA: $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ SOLO PER LA VARIAZIONE FUNZIONALE DI ϕ, CIOÈ AD ARGOMENTO FERMO.

QUINDI

$$\partial_\mu \mathcal{L}(x)\, a^\mu + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \delta\phi}_{\delta\mathcal{L}\text{, VARIAZIONE FUNZIONALE}} = 0$$

(SE TRASFORMASSI ANCHE IL POTENZIALE COMPARIREBBE $+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}\delta V$; MA $V(x)$ NON È UN CAMPO, TANTO CHE S NON VIENE MINIMIZZATA RISPETTO A V).

RICORDANDO LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

*NOTA: IN ALTERNATIVA (E PIÙ IN GENERALE)

$$\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x) - \phi'(x') + \underbrace{\phi'(x') - \phi(x)}_{=0\ \text{(SCALARE)}} = -\frac{\partial\phi'}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \simeq -\partial_\mu \phi\, a^\mu$$

ABBIAMO

$$a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\right)\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \delta\phi = 0$$

(SI NOTI CHE QUESTO PASSAGGIO NON LO POTREI FARE PER $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}\delta V$, PERCHÉ NON HO EQUAZIONI DEL MOTO PER $V(x)$. HO SUPPOSTO $V=0$ PERCHÉ IN SUA PRESENZA NON C'È SIMMETRIA).

$$a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi\right) = 0$$

MA $\delta\phi = -a^\nu \partial_\nu \phi$, QUINDI

$$a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} - a^\nu \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi\right) = 0$$

$$a^\nu\left[\partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi\right)\right] = 0$$

(È UNA TRASFORMAZIONE RIGIDA, QUINDI LE a^ν SONO COSTANTI).

L'ARBITRARIETÀ DELLE a^ν (COMPONENTI INDIPENDENTI) MI PERMETTE DI TOGLIERLA E DI DIRE CHE, PER CIASCUN VALORE DI ν,

$$\partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi\right) = 0$$

CHE RISCRIVO COME

$$\partial_\nu \mathcal{L} = g^\mu{}_\nu \partial_\mu \mathcal{L}$$

NOTA: HO INTRODOTTO $g^\mu{}_\nu$ E LA COSA NON È GRAVE PERCHÉ SI TRATTA DI UN INVARIANTE SOTTO TRASFORMAZIONI DEL GRUPPO DI POINCARÉ.

$$\partial_\mu\left\{-g^\mu{}_\nu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi\right\} = 0$$

$$\underline{\partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu = 0}$$

OVVERO

$$\partial_0 \Theta^0{}_\nu + \partial_i \Theta^i{}_\nu = 0$$

$$\frac{d}{dx^0}\int_V d^3x\, \Theta^0{}_\nu(x) = \int_V d\underline{x}\, \partial_0 \Theta^0{}_\nu \equiv -\int_V d\underline{x}\, \partial_i \Theta^i{}_\nu = \underbrace{-\int_{\Sigma_V} d\Sigma^i\, n_i \Theta^i{}_\nu}_{V\to\infty\ \to\ 0}$$

IL CHE MI DICE

$$\frac{d}{dx^0}\int_V d^3x\, \theta^0{}_\nu(x) = 0$$

CHE SONO 4 QUANTITÀ ADDITIVE CONSERVATE.

· <u>ESEMPIO</u> (FEYNMAN)

CONSERVAZIONE DEL NUMERO DI GATTI IN UN DATO VOLUME.
UN GATTO POTREBBE SCOMPARIRE IN UN PUNTO E APPARIRE ISTANTANEAMENTE IN UN ALTRO SENZA ROMPERE LA CONSERVAZIONE. MA SU QUESTA SIMULTANEITÀ DUE OSSERVATORI POSSONO ESSERE IN DISACCORDO: IN RELATIVITÀ LA CONSERVAZIONE DEVE AVVENIRE CON CONTINUITÀ.

RISCRIVIAMO, ALZANDO GLI INDICI, IL <u>TENSORE ENERGIA - IMPULSO</u>

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

NOTA: INFATTI PER CONVENZIONE NOI MISURIAMO LE QUANTITÀ CON GLI INDICI IN ALTO E VOGLIAMO SIANO QUESTE A COMPARIRE NELLA LAGRANGIANA.

$$H = \int d\underline{x}\, \theta^{00} = \int d\underline{x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\dot\phi - \mathcal{L}\right)$$

NOTA: $\theta^{0\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\partial^\nu\phi - \delta^{0\nu}\mathcal{L}$.

QUINDI θ^{00} È LA DENSITÀ DI HAMILTONIANA. LE COMPONENTI SPAZIALI DI P^μ DANNO

$$P^i = \int d\underline{x}\, \theta^{0i} = -\int d\underline{x}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\partial_i\phi$$

$$\underline{P} = -\int_{V^\infty} d\underline{x}\, :\dot\phi\, \underline{\nabla}\phi:$$

NOTA: NELL'ULTIMO PASSAGGIO È USATA SPECIFICAMENTE LA LAGRANGIANA DEL CAMPO DI KLEIN-GORDON.
IN QUESTO CASO $\underline{\nabla}\phi \rightarrow \partial_i\phi$.

DOVE SI È NUOVAMENTE INTRODOTTO IL BUON ORDINAMENTO. IN QUESTO MODO SI PUÒ MOSTRARE CHE, UNA VOLTA QUANTIZZATO,

$$\underline{P} = \int d\underline{k}\; \underline{k}\; a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}}$$

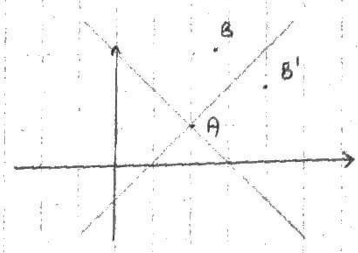
NOTA: LO STATO $|\underline{p}\rangle = a^+_{\underline{p}}|0\rangle$ È AUTOSTATO SIA DELL'ENERGIA CHE DELL'IMPULSO $\underline{P}$.

$$\int d\underline{k}\; \underline{k}\; a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} a^+_{\underline{p}}|0\rangle = \int d\underline{k}\; \underline{k}\; a^+_{\underline{k}}[a_{\underline{k}}, a^+_{\underline{p}}]|0\rangle = \underline{p}\, a^+_{\underline{p}}|0\rangle$$

IL GRUPPO DI LORENTZ DIPENDE DA 6 PARAMETRI (3 SPAZIALI, 3 BOOST) E DARÀ LUOGO A 6 QUANTITÀ CONSERVATE.

· MICROCAUSALITÀ E MATRICE DENSITÀ

DATI 2 EVENTI NELLO SPAZIOTEMPO A, B, $\overline{AB}$ TIMELIKE, A PUÒ ESSERE CAUSA DI B MENTRE NON È VERO PER $\overline{AB'}$ SPACELIKE.



INFATTI

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta \Delta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x^{0'} = \frac{\Delta x^0 - \beta \Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

PER A E B', β PUÒ ESSERE SCELTO IN MODO CHE $\Delta x^{0'} = 0$.

COSA NE È DEL COLLASSO DELLA FUNZIONE D'ONDA? QUANDO AVVIENE?

CONSIDERIAMO UN ENSEMBLE DI SISTEMI PREPARATI NELLO STATO $|\psi\rangle$.
OGNI MISURA RESTITUISCE

$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

SI PARLA DI STATI PURI.

UN'ALTRA OPZIONE È CHE UNA FRAZIONE P_i DEI SISTEMI SIA NELLO STATO $|P_i\rangle$. COSTRUISCO ALLORA L'OPERATORE MATRICE DENSITÀ

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

NEL CASO DI UNO STATO PURO ρ È DIAGONALE E COINCIDE CON IL PROIETTORE $|\psi\rangle\langle\psi|$.

NOTA: DIAGONALE NON SOLO NELLA BASE DELLE $|\psi_i\rangle$, FENOMENO!

IL VALOR MEDIO DI UN OPERATORE B QUALSIASI SI PUÒ CALCOLARE, COME

$$\mathrm{Tr}\, B = \sum_m \langle m|B|m\rangle$$

NOTA: $\langle i|B|j\rangle$ È L'ELEMENTO DI MATRICE B_{ij}.

SU UNA QUALSIASI BASE $|m\rangle$, SE LO APPLICO A ρ,

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_{i,m} p_i \langle m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|m\rangle = \sum_{i,m} p_i \langle\psi_i\underbrace{|m\rangle\langle m|}_{\text{COMPLETEZZA}}\psi_i\rangle = \sum_i p_i = 1$$

DATO IL PRODOTTO DI ρ CON UN ALTRO OPERATORE,

$$\mathrm{Tr}(B\rho) = \mathrm{Tr}(\rho B) = \sum_{i,m} p_i \langle m|B|\psi_i\rangle\langle\psi_i|m\rangle = \sum_{i,m} p_i \langle\psi_i|m\rangle\langle m|B|\psi_i\rangle$$

$$= \sum_i p_i \langle\psi_i|B|\psi_i\rangle$$

OSSIA LA MEDIA DI ENSEMBLE DI B.

DATO UNO STATO PURO $|\psi\rangle$ E UN ENSEMBLE PREPARATO IN $|\psi\rangle$, SE MISURO 'A' SU CIASCUNO DEI SUOI ELEMENTI AVRÒ

$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

DOPO LA MISURA HO OTTENUTO UNA MISCELA STATISTICA

$\lambda \qquad p_\lambda = |\langle\lambda|\psi\rangle|^2$

PRIMA DELLA MISURA LA MATRICE DENSITÀ HA LA FORMA

$\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi|$

DOPO LA MISURA

$$\rho_2 = \sum_\lambda |\langle\lambda|\psi\rangle|^2 |\lambda\rangle\langle\lambda| = \sum_\lambda |\lambda\rangle |\langle\lambda|\psi\rangle|^2 \langle\lambda|$$

$$= \sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle\langle\psi|\lambda\rangle\langle\lambda| = \sum_\lambda P_\lambda |\psi\rangle\langle\psi| P_\lambda$$

$\rightarrow$ PROIETTORE SU $|\lambda\rangle$

$$= \sum_\lambda P_\lambda\, \rho_1\, P_\lambda$$

HO CAMBIATO LO STATO GRAZIE AL COLLASSO DELLA FUNZIONE D'ONDA (CHE, STANDO AI POSTULATI DELLA MQ, È ISTANTANEO).

SI NOTI CHE NEL CASO DI UNO STATO PURO ρ_1 SI RECUPERA

$$\mathrm{Tr}(\rho_1 A) = \sum_m \langle m|\psi\rangle\langle\psi|A|m\rangle = \sum_m \langle\psi|A|m\rangle\langle m|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|A|\psi\rangle$$

CONSIDERIAMO ORA DUE OSSERVATORI LOCALIZZATI IN DUE REGIONI DI SPAZIO (1) E (2). UN ENSEMBLE È PREPARATO IN $|\psi\rangle$ E DIVISO TRA I DUE OSSERVATORI.

(1) $\xleftrightarrow{|\psi\rangle}$ (2)

CIASCUNO PUÒ DECIDERE SE MISURARE O MENO: SE AD ESEMPIO 'A' MISURA, ρ_1 COLLASSA IN

NOTA: È UN ESEMPIO DI "STATO ESTESO".

$$\rho_2 = \sum_\lambda P_\lambda^{(A)} \rho_1 P_\lambda^{(A)}$$

CHE È UNO STATO COMPLETAMENTE DIVERSO.

QUANDO 'A' NON MISURA, 'B' TROVA

$$\bar{B} = \langle \psi | B | \psi \rangle$$

QUANDO 'A' FA LA MISURA, DALL'ALTRA PARTE 'B' TROVA

$$\bar{B} = Tr(\rho_2 B)$$

E, SE I DUE VALORI NON COINCIDESSERO, 'A' E 'B' AVREBBERO UN CANALE CON CUI COMUNICARE ISTANTANEAMENTE.

CALCOLIAMO ALLORA

*NOTA: SE $[B, A] = 0$, ALLORA $[B, P_\lambda^{(A)}] = 0 \ \forall \lambda$. INFATTI
$A|\psi\rangle = A \sum |\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle = \sum \lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle$
$A = \sum_\lambda \lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| = \sum_\lambda \lambda P_\lambda^{(A)}$

$$Tr(\rho_2 B) = \sum_{\lambda, m} \langle m | P_\lambda^{(A)} | \psi \rangle\langle \psi | P_\lambda^{(A)} B | m \rangle$$

$$= \sum_{\lambda, m} \langle \psi | P_\lambda^{(A)} B | m \rangle\langle m | P_\lambda^{(A)} | \psi \rangle = \sum_\lambda \langle \psi | P_\lambda^{(A)} B P_\lambda^{(A)} | \psi \rangle$$

SE B E $P_\lambda^{(A)}$ COMMUTANO, USANDO $P_\lambda^{(A)\,2} = P_\lambda^{(A)}$ (È UN PROIETTORE)

$$Tr(\rho_2 B) = \sum_\lambda \langle \psi | B P_\lambda^{(A)} | \psi \rangle = \sum_\lambda \langle \psi | B | \lambda \rangle\langle \lambda | \psi \rangle = \langle \psi | B | \psi \rangle$$

QUINDI, SE LE DUE QUANTITÀ MISURATE COMMUTANO*, LE CORRELAZIONI CI SONO MA NON SONO ACCESSIBILI AGLI OSSERVATORI.

* LE OSSERVABILI IN QUESTIONE ORA SONO I CAMPI: PER EVITARE PARADOSSI, DEVO SPERARE CHE SU INTERVALLI DI TIPO SPAZIO ($x \sim y$, OSSIA $(x-y)^2 < 0$) SIA SODDISFATTA

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{x \sim y} = 0$$

DOBBIAMO FARE QUESTO CONTROLLO SULLA NOSTRA TEORIA.

RICORDIAMO

$$\varphi(x) = \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\underline{p}}}} \left(a_{\underline{p}}\, e^{-ipx} + a_{\underline{p}}^{+}\, e^{ipx}\right)$$

CON

$$p^0 = \omega_{\underline{p}} = \sqrt{m^2 + \underline{p}^2} \qquad \text{(SENZA } \pm\text{, SOLO POSITIVE)}$$

E VALGONO

$$[a_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}] = [a_{\underline{p}}^{+}, a_{\underline{p}'}^{+}] = 0$$

$$[a_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}^{+}] = \delta(\underline{p}-\underline{p}')\cdot \mathbb{1}$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$[\varphi(x), \varphi(y)]$$

CHE SARÀ PROPORZIONALE ALL'OPERATORE IDENTITÀ (AL PIÙ ZERO). VALE

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$$

$$[\varphi^{(\pm)}(x), \varphi^{(\pm)}(y)] = 0 \qquad \text{PER LE REGOLE SU } a_{\underline{p}}, a_{\underline{p}}^{+}.$$

ALLORA

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] + [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)]$$

$$= \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega_{\underline{p}}\omega_{\underline{p}'}}}\, e^{-ipx} \underbrace{[a_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}^{+}]}_{=\delta(\underline{p}-\underline{p}')} e^{ip'y} - [\varphi^{(+)}(y), \varphi^{(-)}(x)]$$

$$= \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{p}}} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right) := \Delta(x-y)$$

RITROVIAMO CHE LA DIPENDENZA È SOLO DA $(x-y)$, COME CI SI ASPETTA DA UNA TEORIA INVARIANTE PER TRASLAZIONI SPAZIOTEMPORALI.

NOI AVEVAMO RICHIESTO

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

$$[\dot{\varphi}(x), \varphi(y)]_{x^0=y^0} = -i\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

NOTA: QUELLE CHE AFFRONTIAMO ORA NON SONO PROVE, PERCHÉ DI FATTO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE SU $a_{\underline{p}}$ E $a_{\underline{p}}^{+}$ DISCENDONO DA QUELLE SUI CAMPI. È PIÙ UNA VERIFICA DI COERENZA.

IN EFFETTI A TEMPI UGUALI

$$e^{-ip(x-y)} = e^{-ip^0(x^0-y^0)}\, e^{i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{y})} \overset{x^0=y^0}{=} e^{i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{y})}$$

$$\Delta(x-y)\big|_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{p}}} \left(e^{i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{y})} - e^{-i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{y})}\right) = 0$$

INFATTI MANDANDO $\underline{p} \to -\underline{p}$ IL VALORE DELL' INTEGRALE NON CAMBIA, VISTO CHE È ESTESO A TUTTO LO SPAZIO E LA MISURA DIPENDE SOLO DAL MODULO DELLO JACOBIANO.

NOTA: SI OTTIENE DERIVANDO $\partial_0^{(x)} [\varphi(x), \varphi(y)]$

VERIFICHIAMO

$$[\dot\varphi(x), \varphi(y)]_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\underline{p}}} \left(-i\omega_{\underline{p}} e^{-ip\cdot(x-y)} - i\omega_{\underline{p}} e^{ip\cdot(x-y)} \right) \Big|_{x^0=y^0}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2} (-i) \left(e^{+i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{y})} + e^{-i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{y})} \right) = -\frac{i}{2} \left(\delta(\underline{x}-\underline{y}) + \delta(\underline{y}-\underline{x}) \right) = -i\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

DI PRIMO ACCHITO IL COMMUTATORE

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \Delta(x-y)$$

NOTA: IL PUNTO INFATTI ADESSO È CALCOLARE LO STESSO COMMUTATORE SU INTERVALLI DI TIPO SPAZIO, $x \sim y$.

SEMBRA PROBLEMATICO: COME FA L' INTEGRALE TRIDIMENSIONALE A DESTRA AD ESSERE UN INVARIANTE RELATIVISTICO?

RICORDIAMO

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0$$

NOTA: PARTI DAL PRESUPPOSTO CHE DENTRO $\varphi(x)$ È SOTTINTESA UNA $\delta(p^0 - \omega_{\underline{p}})$ CHE DISCENDE DALLA RELAZIONE DI DISPERSIONE; IN QUESTO MODO POSSO INTEGRARE IN d^4p.

APPLICHIAMOLA A

$$p^{0\,2} - \underline{p}^2 - m^2 = (p^0 - \omega_{\underline{p}})(p^0 + \omega_{\underline{p}}) = p^2 - m^2$$

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p^0 + \omega_{\underline{p}})}{2\omega_{\underline{p}}} + \frac{\delta(p^0 - \omega_{\underline{p}})}{2\omega_{\underline{p}}}$$

NOTA: ERA
$p^0 = \omega_{\underline{p}} = \sqrt{\underline{p}^2 + m^2}$
E LA "$f(x)$" IN QUESTIONE È
$f(p^0) = p^2 - m^2 = p^{0\,2} - \omega_{\underline{p}}^2$
$f'(p^0) = 2p^0$
CON $f(p^0)$ CHE SI ANNULLA IN $p^0 = \pm\omega_{\underline{p}}$.

CALCOLIAMO L'IDENTITÀ

$$\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p^0 - \omega_{\underline{p}})}{2\omega_{\underline{p}}}$$

(INFATTI IL SECONDO PEZZO GIACE IN UNA ZONA IN CUI $\theta(p^0) = 0$).

POSSIAMO COSÌ RISCRIVERE

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\}$$

E CI BASTA DIMOSTRARE CHE LA MISURA COSÌ INTRODOTTA È UN INVARIANTE RELATIVISTICO, PARTENDO DA

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^{\nu\prime}$$

NOTA: $\Delta(x-y)$ ERA FINORA DEFINITA COME UN INTEGRALE IN d^3p. L'HO ESTESO A d^4p E QUINDI CI DEVO METTERE UNA δ.

INTANTO

$$d^4 p = d^4 p'$$

PERCHÉ $|\det \Lambda| = 1$. INOLTRE, POICHÉ È UN INVARIANTE,

$$p^2 - m^2 = p'^2 - m^2$$

NOTA: $p^2 = p^\mu p_\mu$ E m È LA MASSA INVARIANTE.

IN GENERALE, INVECE,

$$\theta(p^0) \neq \theta(p^{0\prime})$$

NOTA: IL PUNTO È CHE $\delta(p^2 - m^2)$ SELEZIONA SOLO $p^2 = m^2 > 0$, QUINDI SIAMO SICURI CHE NON SI TRATTI DI VETTORI DI TIPO SPAZIO.

TUTTAVIA IL SEGNO DELLA QUARTA COMPONENTE p^0 È CONSERVATO SE TRATTIAMO VETTORI DI TIPO TEMPO O LUCE (MENTRE CAMBIA IN BASE AL SISTEMA DI RIFERIMENTO PER VETTORI DI TIPO SPAZIO).

RISCRIVIAMO IN FORMA COMPATTA

NOTA: $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0_2 \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ 0_2 & & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$.

$$\Delta(x-y) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} d\mu(p) \left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right)$$

$$d\mu(p) = \delta(p^2 - m^2)\, \theta(p^0)\, d^4 p$$

MOSTRIAMO ALLORA CHE

$$\Delta(x-y) = \Delta(\Lambda(x-y))$$

NOTA: Λ APPLICATO A $(x^\mu - y^\mu)$.

$$\Delta(\Lambda(x-y)) = \int \frac{d\mu(p)}{(2\pi)^3} \left(e^{-ip[\Lambda(x-y)]} - e^{ip[\Lambda(x-y)]} \right)$$

$$= \int \frac{d\mu(p)}{(2\pi)^3} \left(e^{-i(\Lambda p')\cdot[\Lambda(x-y)]} - e^{i(\Lambda p')\cdot[\Lambda(x-y)]} \right) = \Delta(x-y)$$

DOVE SI È USATO IL CAMBIO

$$p = \Lambda p'$$

NOTA: INFATTI IL PRODOTTO SCALARE È UN INVARIANTE.

NOTIAMO INFINE CHE SU VETTORI DI TIPO SPAZIO VALE SEMPRE

$$\Delta(x-y) = 0$$

INFATTI POSSO APPLICARVI UNA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ CHE RENDE $x^0 = y^0$ E ABBIAMO VISTO COME IN QUEL CASO SI ANNULLI IL COMMUTATORE. QUESTO RISOLVE IL PROBLEMA LEGATO ALLA MICROCAUSALITÀ.

PROPAGATORE DEL CAMPO DI K-G

$$i\Delta_F(x-y) := \langle 0| T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle$$ (VALOR MEDIO SUL VUOTO DEL T PRODOTTO)

T È IL PRODOTTO TEMPO ORDINATO:

$$\begin{cases} x^0 > y^0 & \to \quad \varphi(x)\varphi(y) \\ x^0 < y^0 & \to \quad \varphi(y)\varphi(x) \end{cases}$$ (SE Y VIENE PRIMA, LO APPLICO PER PRIMO)

(SE $x^0 = y^0$ È INDIFFERENTE POICHÉ $[\varphi(x),\varphi(y)]_{x^0=y^0} = 0$).

AD ESEMPIO SE $x^0 > y^0$

$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$

LO STATO $\varphi(y)|0\rangle$ SI PUÒ PENSARE CON OTTIMA APPROSSIMAZIONE COME LO STATO DI UNA PARTICELLA (QUANTO DEL CAMPO) LOCALIZZATO IN $\underline{y}$: INFATTI

NOTA: $a_{\underline{p}}|0\rangle = 0$

$$\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\underline{p}}}}\, a^+_{\underline{p}}\, e^{ipy}|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\underline{p}}}}\, e^{ip^0y^0 - i\underline{p}\cdot\underline{y}}|p\rangle$$

CHE AL TEMPO ZERO È UNO STATO LOCALIZZATO*. IN MECCANICA QUANTISTICA NON RELATIVISTICA LO STESSO PROPAGATORE ERA RESO DA

$$\int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\underline{p}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_1)} e^{-iE_{\underline{p}}t} = \Psi(x,t) \qquad \Psi(x,0) = \delta(\underline{x}-\underline{x}_1)$$

CHE È L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ DI TROVARE UNA PARTICELLA IN $\underline{x}$ SE AL TEMPO ZERO STAVA IN $\underline{x}_1$. SIMILMENTE

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\underline{p}}}\, e^{-ip(x-y)}$$

* NOTA: INFATTI

$$|x\rangle = \int d\underline{p}\, |p\rangle\langle p|x\rangle = \int d\underline{p}\, |p\rangle \frac{e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}}}{(2\pi)^3}$$

IL T PRODOTTO SERVE A FAR SÌ CHE LA PARTICELLA IN $\underline{y}$ SIA CREATA PRIMA DI ESSERE OSSERVATA IN $\underline{x}$.

L'UNICO INGHIPPO È IL $2\omega_{\underline{p}}$ A DENOMINATORE, MA

$$\omega_{\underline{p}} = \sqrt{m^2+\underline{p}^2} = m\sqrt{1+\frac{\underline{p}^2}{m^2}} \simeq m\left(1+\frac{1}{2}\frac{\underline{p}^2}{m^2}\right) = m + \underbrace{\frac{\underline{p}^2}{2m}}$$ PICCOLO RISPETTO A m

QUINDI NEL LIMITE NON RELATIVISTICO OTTENGO L'ENERGIA TOTALE, MA DI FATTO DOMINA m CHE È COSTANTE E CHE QUINDI ESCE DALL'INTEGRALE.

COME SI CALCOLA IL T PRODOTTO?

$$i\Delta_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle$$

RICORDIAMO CHE $\theta(x)$ È UNA DISTRIBUZIONE (UN FUNZIONALE LINEARE CHE AGISCE SULLE FUNZIONI DI PROVA C^∞ E A DECRESCITA RAPIDA):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\theta(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

LA SUA DERIVATA È

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x) f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) f'(x)\,dx = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(+\infty) + f(0) = f(0)$$

PERCIÒ SCRIVO IN SENSO DEBOLE

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

CALCOLIAMO ALLORA L'AZIONE SUL PROPAGATORE DI

$$(\Box_x + m^2)\, i\Delta_F(x-y) = (\Box_x + m^2)\left\{\theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle\right\}$$

ANDANDO PER PASSI,

$$\partial_0^x \left\{\theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle\right\}$$

$$= \langle 0|T(\dot\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle + \delta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle - \delta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle$$

$$= \langle 0|T(\dot\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle + \langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle\Big|_{x^0=y^0}$$

$$= \langle 0|T(\dot\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle$$

$$\partial_0^x\left[\partial_0^x\, i\Delta_F(x-y)\right] = \langle 0|T(\ddot\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle + \delta(x^0-y^0)\underbrace{\langle 0|[\dot\varphi(x),\varphi(y)]_{x^0=y^0}|0\rangle}_{-i\delta(\underline{x}-\underline{y})}$$

$$= \langle 0|T(\ddot\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle - i\delta^{(4)}(x-y)$$

MA QUANDO APPLICO PER INTERO $(\Box_x + m^2)$ OTTENGO

$$\ddot\varphi - \Delta\varphi + m^2\varphi = 0$$

INFATTI IL CAMPO $\varphi(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON.

PERCIÒ

$$(\Box_x + m^2)\, i\Delta_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$$

QUESTO DIMOSTRA CHE IL PROPAGATORE DI FEYNMAN È UNA FUNZIONE DI GREEN DEL PROBLEMA

$$(\Box_x + m^2)\varphi(x) = J(x)$$

OSSIA UNA $G(x-y)$ TALE DA RISOLVERE

$$(\Box_x + m^2)\, G(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)$$

CHE È UN PROBLEMA LINEARE (TRASCURO LA REAZIONE DEL CAMPO SULLE SORGENTI). SI HA ALLORA

$$\bar{\varphi}(x) = \int d^4y\; G(x-y)\, J(y)$$

$$(\Box_x + m^2)\,\bar{\varphi}(x) = \int d^4y\; \delta^{(4)}(x-y)\, J(y) = J(x)$$

COME CALCOLO LA FUNZIONE DI GREEN? FACCIO LA TRASFORMATA DI FOURIER,

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \tilde{G}(q)\, e^{-iq(x-y)}$$

(VEDREMO CHE $\tilde{G}(q)$ È UNA FUNZIONE PARI, QUINDI I SEGNI NON CONTANO).

$$(\Box_x + m^2)\, i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \tilde{G}(q)\cdot(-q^2+m^2)\, e^{-iq(x-y)} \equiv -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{-iq(x-y)}$$

(NELL'ULTIMO MEMBRO HO TRASFORMATO LA $\delta^{(4)}(x-y)$). POICHÉ LA TRASFORMATA DI FOURIER È INVERTIBILE,

$$\tilde{f} = \tilde{g} \quad \Rightarrow \quad f = g$$

PERCIÒ

$$(-q^2+m^2)\,\tilde{G}(q) = -i$$

$$\tilde{G}(q) = \frac{i}{q^2 - m^2}$$

INVERTENDO,

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{q^2-m^2}\, e^{-iq(x-y)}$$

L'ESPRESSIONE COSÌ TROVATA È PERÒ SOLAMENTE FORMALE;

INFATTI NON ESISTE, PERCHÉ IL DENOMINATORE SI ANNULLA:

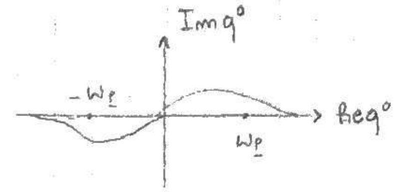
$$q^2 - m^2 = q^{0\,2} - \underline{q}^2 - m^2 = q^{0\,2} - \omega_{\underline{q}}^2 = (q^0 - \omega_{\underline{q}})(q^0 + \omega_{\underline{q}}) .$$

QUESTO POLO RENDE DIVERGENTE L'INTEGRALE

$$\int \frac{dq^0}{(q^0 - \omega_{\underline{q}})(q^0 + \omega_{\underline{q}})}$$

NOTA: STIAMO PER PRENDERNE IL PROLUNGAMENTO ANALITICO.

(DIVERGE LOGARITMICAMENTE). UN MODO CLASSICO PER DEFINIRLO È QUELLO DI ESTENDERLO AL PIANO COMPLESSO, COSÌ DA AGGIRARE LE SINGOLARITÀ. RICORDIAMO CHE



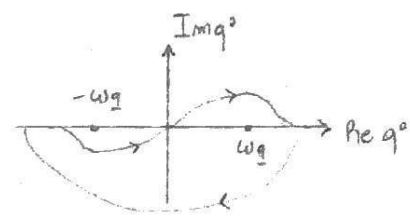
$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int G(x-y)\, J(y)\, d^4y$$

DOVE $\varphi_0(x)$ È SOLUZIONE DELL'OMOGENEA; C'È UNA CERTA LIBERTÀ NELLA SCELTA DI 'G', PERCHÉ LA DIFFERENZA TRA DUE FUNZIONI DI GREEN È ANCORA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA

$$(\Box + m^2)\, \varphi_0 = 0$$

SCEGLIAMO UN CAMMINO APERTO COME IN FIGURA (VI SONO 4 MODI PER EVITARE LE SINGOLARITÀ, MA GLI ALTRI TRE NON DANNO IL T PRODOTTO). PER POTER USARE IL TEOREMA DEI RESIDUI, PERÒ, DOVREI AVERE UN PERCORSO CHIUSO: LO CHIUDO DA SOPRA O DA SOTTO.

SE AD ESEMPIO $x^0 > y^0$, $x^0 - y^0 > 0$,



$$i \int \frac{dq^0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-iq^0(x^0 - y^0)}}{(q^0 - \omega_{\underline{q}})(q^0 + \omega_{\underline{q}})} = -i \frac{(2\pi i)}{2\omega_{\underline{q}}} \cdot \frac{e^{-i\omega_{\underline{q}}(x^0 - y^0)}}{2\pi} = \frac{1}{2\omega_{\underline{q}}} e^{-i\omega_{\underline{q}}(x^0 - y^0)}$$

INTEGRANDO NELLE VARIABILI SPAZIALI RIMANE

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\underline{q}}}\, e^{-iq(x-y)} \qquad \text{con } q^0 = \omega_{\underline{q}} .$$

NOTA: SE f HA UN POLO DI ORDINE 1 IN $z = z_0$,
$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

LUI METTE UN '−' PERCHÉ GIRA IN SENSO ANTIORARIO E IGNORA $-\omega_{\underline{q}}$. SECONDO ME VANNO PRESI ENTRAMBI, UNO CON $+\pi i$ E L'ALTRO $-\pi i$ (QUI FUNZIONA PERCHÉ SONO SIMMETRICI).

IN CUI RICONOSCIAMO

$$i\, \Delta_F(x-y)\big|_{x^0 > y^0} = \langle 0 |\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, | 0 \rangle$$

SE $x^0 < y^0$ IL CAMMINO VA CHIUSO SOPRA E IL PROCEDIMENTO È ANALOGO.

INFINE, COSÌ RISCRITTO APPARE EVIDENTE CHE IL PROPAGATORE

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdot \frac{i}{q^2-m^2} e^{-iq(x-y)}$$

È LORENTZ INVARIANTE. CI STA, PERCHÉ IN

$\langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle$

I CAMPI $\varphi(x), \varphi(y)$ COMMUTANO SU INTERVALLI DI TIPO SPAZIO ED È SOLTANTO IN QUEI CASI CHE UNA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ PUÒ MODIFICARE L'ORDINAMENTO TEMPORALE.

* UN MODO ALTERNATIVO PER SVOLGERE L'INTEGRALE È QUELLO DI INTEGRARE LUNGO L'ASSE REALE E DEFINIRE

$$\frac{1}{q^2-m^2+i\varepsilon}$$

COSÌ CHE I POLI SI SPOSTINO IN $(\varepsilon > 0)$

$$q^2-m^2+i\varepsilon = 0; \quad q^{0^2}-\omega_q^2 = -i\varepsilon; \quad q^{0^2} = \omega_q^2 - i\varepsilon$$

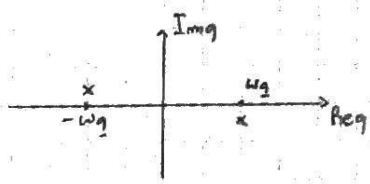
$$q^0_1 = \sqrt{\omega_q^2 - i\varepsilon} = \omega_q\sqrt{1-\frac{i\varepsilon}{\omega_q^2}} \simeq \omega_q\left(1-\frac{i}{2\omega_q^2}\varepsilon\right) = \omega_q - \frac{i\varepsilon}{2\omega_q}$$

$$q^0_2 = -\omega_q + \frac{i\varepsilon}{2\omega_q}$$

MI BASTA ORA RISCALARE $\varepsilon \to \frac{\varepsilon}{2\omega_q}$ (ω_q È UN NUMERO REALE POSITIVO) E HO

$$q^0_1 = \omega_q - i\varepsilon$$

$$q^0_2 = -\omega_q + i\varepsilon$$



QUALE DEI DUE POLI CONSIDERO DIPENDE ANCORA DAL SEMIPIANO COMPLESSO IN CUI SCELGO DI CHIUDERE IL CAMMINO.

QUESTO CONCLUDE LA TRATTAZIONE DEI CAMPI HERMITIANI.

<u>FOCUS</u>: PROPAGATORE IN MQ NON RELATIVISTICA (PATRÌ-TESTA)

$$\langle x|\psi,t\rangle = \langle x|e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|\psi,0\rangle = \int dy \langle x|e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|y\rangle\langle y|\psi,0\rangle = \int dy \langle x|e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|y\rangle\psi_0(y)$$

$$\overset{\shortparallel}{\psi(x,t)} \rightarrow \psi(x,t) = \int \langle x|e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|y\rangle\psi_0(y)dy := \int K(x,y;t)\psi_0(y)dy$$

K È IL PROPAGATORE, CIOÈ L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ CHE UNA PARTICELLA CHE A $t=0$ ERA IN y SIA TROVATA NELLA POSIZIONE x AL TEMPO t. SI HA $K(x,y;t=0) = \delta(x-y)$.

CAMPO SCALARE COMPLESSO

UN MODO DI TRATTARLO È DEFINIRLO COME COMBINAZIONE DI CAMPI REALI

$$\phi(x) = \frac{\phi_1(x) + i\,\phi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

LA PARTICOLARITÀ È CHE, RISPETTO A PRIMA, $\phi \neq \phi^+$. RIPARTIAMO DA

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

PER QUANTIZZARLO, INIZIO SCRIVENDO LA LAGRANGIANA (CAMPI CLASSICI)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi}\, \partial^\mu \phi - m^2 \bar{\phi}\phi$$

(L' $\frac{1}{2}$ È VOLUTAMENTE OMESSO)

DOVE $\bar{\phi}$ È UN SECONDO CAMPO INDIPENDENTE (NON È ϕ^*). ORA IMPONGO

$$0 = \delta S = \int d^4x\ \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[\partial_\mu \delta\bar{\phi}\, \partial^\mu \phi + \partial_\mu \bar{\phi}\, \partial^\mu \delta\phi - m^2 \delta\bar{\phi}\phi - m^2 \bar{\phi}\delta\phi\right]$$

SEPARANDO LE DUE VARIAZIONI INDIPENDENTI $\delta\phi$ E $\delta\bar{\phi}$ POSSO DEDURRE

$$\begin{cases} -\Box\phi - m^2\phi = 0 \\ -\Box\bar{\phi} - m^2\bar{\phi} = 0 \end{cases}$$

CON SOLUZIONE

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} \left(a_{\underline{p}}\, e^{-ipx} + b^+_{\underline{p}}\, e^{ipx}\right)$$

NOTA: E

$$\bar{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} \left(b_{\underline{p}}\, e^{-ipx} + a^+_{\underline{p}}\, e^{ipx}\right)$$

POICHÉ IL CAMPO ϕ NON È PIÙ REALE, NON È NECESSARIO CHE $b^+_{\underline{p}} = a^+_{\underline{p}}$: SI TRATTA DI DUE OGGETTI INDIPENDENTI.

NOTA: EN PASSANT, QUI SOPRA SI VEDE CHE ϕ ANNICHILA UNA PARTICELLA DI TIPO a E NE CREA UNA DI TIPO b, MENTRE $\bar{\phi}$ FA L'OPPOSTO.

PASSIAMO AL FORMALISMO CANONICO:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi}\, \partial^\mu \varphi - m^2 \bar{\varphi}\varphi$$

$$\pi_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\bar{\varphi}} \qquad\qquad \pi_{\bar{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\varphi}}} = \dot{\varphi}$$

CON REGOLE DI COMMUTAZIONE

$$[\varphi(x), \bar{\varphi}(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

$$[\dot{\varphi}(x), \dot{\bar{\varphi}}(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

$$[\varphi(x), \pi_\varphi(y)]_{x^0=y^0} = [\varphi(x), \dot{\bar{\varphi}}(y)]_{x^0=y^0} = i\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

RISCRIVO

$$\Phi(x) = \int d^3p \left(a_{\underline{p}} f_{\underline{p}}^{(+)}(x) + b_{\underline{p}}^{+} f_{\underline{p}}^{(-)}(x) \right)$$

DOVE $f_{\underline{p}}^{(+)}, f_{\underline{p}}^{(-)}$ SONO UN SET ORTONORMALE; QUALCHE CONTO RIVELA CHE

$$[a_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}^{+}] = [b_{\underline{p}}, b_{\underline{p}'}^{+}] = \delta(\underline{p}-\underline{p}')$$

$$[a_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}] = [b_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}] = [b_{\underline{p}}, a_{\underline{p}'}^{+}] = 0$$

CHE DESCRIVE STAVOLTA DUE SET DI OSCILLATORI INDIPENDENTI. DEFINISCO

$$a_{\underline{p}}|0\rangle = b_{\underline{p}}|0\rangle = 0 \qquad \text{(STATO DI VUOTO)}$$

GLI STATI CREATI DA $a_{\underline{p}}^{+}$ E $b_{\underline{p}}^{+}$, CIOÈ

$$a_{\underline{p}}^{+}|0\rangle, \quad b_{\underline{p}}^{+}|0\rangle$$

SONO ORTOGONALI: INFATTI

$$\langle 0| a_{\underline{p}'} b_{\underline{p}}^{+} |0\rangle = \langle 0| [a_{\underline{p}'}, b_{\underline{p}}^{+}] |0\rangle = 0$$

CIÒ SUGGERISCE LA PRESENZA DI UN GRUPPO DI SIMMETRIA INTERNA

$$\begin{cases} \Psi'(x) = e^{i\alpha}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\Psi}(x) \end{cases}$$

NOTA: NEL SENSO CHE POTREMO DISTINGUERE LE PARTICELLE a E b DAL RISPETTIVO AUTOVALORE DELLA CARICA CONSERVATA GRAZIE A QUESTA SIMMETRIA.

CHE LASCIA INVARIATA LA LAGRANGIANA; POICHÉ È UNA SIMMETRIA CONTINUA, SI APPLICA IL TEOREMA DI NOETHER. SI NOTI CHE È "INTERNA" PERCHÉ NON AGISCE SULLE COORDINATE; BASTA QUINDI SCRIVERE

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0$$

NOTA: $\Psi'(x) = e^{i\alpha}\Psi(x) = \Psi(x) + i\alpha\Psi(x) + o(\alpha^2)$

$$\begin{cases} \delta\Psi(x) = i\alpha\Psi(x) \\ \delta\bar{\Psi}(x) = -i\alpha\bar{\Psi}(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}\delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\partial_\mu\delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}}\delta\bar{\Psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}}\partial_\mu\delta\bar{\Psi} = 0$$

OVVERO, USANDO LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}} \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Psi} \end{cases}$$

$$i\alpha\left\{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Psi}\Psi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}}\bar{\Psi}\right)\right\} = 0$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Psi}\Psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\Psi}}\bar{\Psi}\right) = 0$$

CHE RAPPRESENTA UNA CORRENTE CONSERVATA

$$J^\mu(x) = (\partial^\mu \bar{\psi})\psi - (\partial^\mu \psi)\bar{\psi}$$

NOTA: $J^\mu(x) = \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial^\mu} \psi$

LUNGO LE EQUAZIONI DEL MOTO SAPPIAMO PERÒ CHE $\bar{\psi} = \psi^+$ (NON LO ABBIAMO IMPOSTO SUBITO COSÌ DA VARIARE ψ E ψ^+ IN MODO INDIPENDENTE):

$$J^\mu(x) = (\partial^\mu \psi^+)\psi - (\partial^\mu \psi)\psi^+$$

NOTA: LO SAPPIAMO NEL SENSO CHE LA $\mathcal{L}$ CHE ABBIAMO SCRITTO È LA LAGRANGIANA DEL PROBLEMA SOLO SE $\bar{\phi} = \phi^+$.

E RITROVIAMO, CLASSICAMENTE,

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\frac{d}{dx^0} \int_{V^\infty} d^3x \; J^0(x) = 0$$

$$Q = \int d\underline{x} \; J^0(x) = \text{COST.}$$

DALLA LAGRANGIANA SI PUÒ COSTRUIRE L'HAMILTONIANA BEN ORDINATA

$$H = \int d^3x \left(:\dot{\psi}^+ \dot{\psi}: + :\underline{\nabla}\psi^+ \cdot \underline{\nabla}\psi: + m^2 :\psi^+\psi: \right) = \dots$$

$$= \int d^3k \; \omega_{\underline{k}} \left(a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} + b^+_{\underline{k}} b_{\underline{k}} \right)$$

$$H a^+_{\underline{k}} |0\rangle = \omega_{\underline{k}} (\quad)$$

INOLTRE

NOTA: QUESTO SI RICAVA DAL TENSORE ENERGIA-IMPULSO.

$$\underline{P} = -\int d^3x \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} \underline{\nabla}\phi_i = -\int d\underline{x} \left\{ :\dot{\psi}^+ \underline{\nabla}\psi + \dot{\psi}\,\underline{\nabla}\psi^+ : \right\} = \dots$$

$$= \int d^3k \; \underline{k} \left(a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} + b^+_{\underline{k}} b_{\underline{k}} \right)$$

DA CUI SI VEDE CHE SI TRATTA A TUTTI GLI EFFETTI DI PARTICELLE. INFINE

$$Q = \int d^3k \underbrace{\left(a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} - b^+_{\underline{k}} b_{\underline{k}} \right)}_{N^{(a)}_{\underline{k}} - N^{(b)}_{\underline{k}}}$$

$$Q a^+_{\underline{k}} |0\rangle = +(\quad)$$

$$Q b^+_{\underline{k}} |0\rangle = -(\quad)$$

DOVE SI È DEFINITO L'OPERATORE HERMITIANO CARICA (VISTO CHE QUESTO NON È IL CAMPO ELETTROMAGNETICO, QUI NON SI TRATTA DELLA CARICA ELETTRICA). LE DUE PARTICELLE a, b HANNO LA STESSA MASSA MA CARICA OPPOSTA: IDENTIFICHIAMO LE b CON LE ANTIPARTICELLE. NEL CASO DI UN CAMPO REALE LE PARTICELLE COINCIDONO CON LE ANTIPARTICELLE. SONO ANCORA PARTICELLE SCALARI DI SPIN 0.

IL CAMPO ELETTROMAGNETICO

È L'UNICA TEORIA DI CUI CONOSCIAMO SIA IL LATO CLASSICO CHE QUELLO QUANTISTICO. USANDO LE UNITÀ DI GAUSS RAZIONALIZZATE,

$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho$ (1) $\qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$ (2)

$\underline{\nabla} \wedge \underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}}$ (3) $\qquad \underline{\nabla} \wedge \underline{B} = \frac{1}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \dot{\underline{E}}$ (4)

(EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO). SOLO LE DUE CHE NON CONTENGONO ρ E $\underline{J}$ SONO OMOGENEE: LE INTEGRO SUBITO PER OTTENERE

$\underline{B} = \underline{\nabla} \wedge \underline{A}$

NOTA: VALE LA PENA DI PORRE SUBITO $c = 1$.

$\underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{A}} - \underline{\nabla} \phi$ $\qquad \left(\underline{\nabla} \wedge \underline{E} = -\frac{1}{c} \underline{\nabla} \wedge \dot{\underline{A}} \rightarrow \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{A}} \right) = -\underline{\nabla} \phi \right)$

DOVE $\underline{A}, \phi$ SONO SOGGETTI ALL'INVARIANZA DI GAUGE

$$\begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} - \underline{\nabla} \lambda \\ \phi' = \phi + \frac{1}{c} \dot{\lambda} \end{cases}$$

NOTA: TRA POCO RISCRIVIAMO $A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \lambda(t, \underline{x})$

INTRODUCIAMO I QUADRIVETTORI $\qquad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \underline{A} \end{pmatrix}$ E $J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \underline{J} \end{pmatrix}$

E IL TENSORE DI MAXWELL

$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ $\qquad$ (F È ANTISIMMETRICO, $\mu, \nu = 0, \dots, 3$)

$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu / c$ (I) $\qquad$ (SONO QUATTRO EQUAZIONI, $\mu = 0, \dots, 3$)

$\partial_\nu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$ (II) $\qquad$ (PSEUDO - TENSORE DI RICCI $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$)

CHE EQUIVALE A DEFINIRE

$F^{0i} = E^i$

$F^{ik} = \varepsilon^{ikl} B^l$ $\qquad$ ($F^{12} = B^3$ E PERMUTAZIONI CIRCOLARI)

NOTIAMO CHE

NOTA: $$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{i0} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0$

$-E_i = \partial^0 A^i - \partial_i A_0 = \dot{A}^i + \underline{\nabla} A^0$

$F^{12} = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 = -\partial_2 A^1 + \partial_1 A^2 = (\underline{\nabla} \wedge \underline{A})_3$

DALLA (I) RITROVO LA (1) E (4); LE DUE OMOGENEE (2) E (3) DERIVANO DA

$\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$

AD ESEMPIO PER $\mu = 0$ LA (I) DÀ

$\partial_i F^{0i} = J^0 / c \qquad \rightarrow \qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho$

E PER $\mu = 1, 2, 3$ HO LA (4).

NOTIAMO CHE

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{J^\mu}{c}$$

È COVARIANTE SOTTO QUALSIASI TRASFORMAZIONE LINEARE DI J

$$J^{\mu'}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(x) \qquad \partial_\nu = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ \partial/\partial x^i \end{pmatrix}$$

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad F^{\mu\nu'}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x)$$

CHE SONO BEN PIÙ DI QUELLE DI LORENTZ (ANCHE QUELLE DI GALILEO VANNO BENE; TROPPE IN EFFETTI).

NOTA:

$$\Lambda^\mu{}_{\alpha'} J^{\alpha'}/c = \Lambda^{\beta'}{}_\rho \Lambda^{\gamma'}{}_\nu g_{\beta'\gamma'} \Lambda^\rho{}_{\kappa'} \partial^{\kappa'} \Lambda^\mu{}_{i'} \Lambda^\nu{}_{j'} F^{i'j'}$$

POICHÉ PER OGNI Λ INVERTIBILE ($\det\Lambda \neq 0$) SI HA

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\beta{}_\gamma = \delta^\alpha{}_\gamma$$

SEGUE, RINOMINANDO $i' \to \alpha'$ AL SECONDO MEMBRO,

$$\Lambda^\mu{}_{\alpha'} J^{\alpha'}/c = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} g_{\kappa' j'} \partial^{\kappa'} F^{\alpha' j'}$$

NON HO AVANZATO IPOTESI SU Λ, MA PER DEFINIZIONE LO JACOBIANO È L'APPROSSIMAZIONE LINEARE DI UN CAMBIO.

DATO $F^{\mu\nu}$, IL SUO DUALE È $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$ E

$$\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu} := F^{*\rho\sigma}$$

$$\partial_\sigma F^{*\rho\sigma} = 0$$

IL PASSAGGIO DIPENDE DALLA SCELTA DELLA METRICA: SE USO QUELLA DI MINKOWSKI RITROVO LE DUE EQUAZIONI DI MAXWELL OMOGENEE, MENTRE SE SCELGO LA METRICA EUCLIDEA LA LEGGE (3) DI FARADAY NEUMANN ESCE CON IL SEGNO SBAGLIATO.

NOTA: ANCHE $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu/c$ CONTIENE UN PASSAGGIO AL DUALE, MA DI FATTO SE CI METTO LA METRICA EUCLIDEA NON CAMBIA NULLA PERCHÉ PER $\mu = 0$ OTTENGO LA (1) E PER $\mu = 1,2,3$ HO LA (4): LE DUE EQUAZIONI NON SI PARLANO.

RICORDIAMO CHE $g_{\mu\nu}$ RIMANE INVARIATO SOTTO TRASFORMAZIONI DI LORENTZ:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

C'È UN ALTRO TENSORE PER CUI QUESTO È VERO ED È $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\underline{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma'} \det\Lambda = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}$$

CHE È L'EQUIVALENTE IN 4D DI

$$\Lambda^\alpha{}_i \Lambda^\beta{}_j \Lambda^\gamma{}_k \varepsilon^{ijk} = \det\Lambda\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$$

POICHÉ PER TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

$$\det\Lambda = \pm 1$$

NOTA: ε NON È UN VERO TENSORE PERCHÉ COMPARE NELLA DEFINIZIONE DI $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$, CHE NON REGGE SOTTO PARITÀ PERCHÉ $\hat{i} \wedge \hat{j}$ È UN VETTORE ASSIALE. INOLTRE IN 3D SI AVEVA

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \varepsilon^{ijk} \Lambda^1{}_i \Lambda^2{}_j \Lambda^3{}_k$$

CHE È IL CASO PARTICOLARE IN CUI $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1,2,3\}$, E HO CHIAMATO $\Lambda = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

SOTTO TRASFORMAZIONI PROPRIE $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ È INVARIANTE (ALTRIMENTI CAMBIA SEGNO, MA RESTITUISCE LE STESSE EQUAZIONI PERCHÉ SONO OMOGENEE). IN PARTICOLARE SE SATURO

$$\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

OTTENGO UN INVARIANTE IN FORMA.

PONENDO $c=1$,

$$\begin{cases}\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu & \text{(I)}\\ \partial_\mu F^{*\nu\mu} = 0 & \text{(II)}\end{cases}$$

SONO LE EQUAZIONI DI MAXWELL SCRITTE IN FORMA COVARIANTE A VISTA SOTTO TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

INTRODUCIAMO IL POTENZIALE VETTORE $A^\mu = \begin{pmatrix}\phi\\ \underline{A}\end{pmatrix}$ E VERIFICHIAMO

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

INFATTI

$$F_{01} = -F^{01} = -E^1 \equiv \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = \nabla_1 \phi + \partial_0 A^1$$

$$E^1 = -\nabla_1 \phi - \dot{A}^1$$

SI NOTI CHE È SCRITTA "MALE" (INDICI UN PO' IN ALTO E UN PO' IN BASSO, PERDE IL CARATTERE DI COVARIANZA A VISTA). QUELLA SCRITTA "BENE" È

$$F_{01} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1$$

ED È COERENTE CON IL FORMALISMO QUADRIDIMENSIONALE (CHE È VENUTO DOPO: NON È DETTO CHE I DUE SI PARLINO IN TUTTO E PER TUTTO).

QUESTA SCELTA DI $F^{\mu\nu}$ SODDISFA AUTOMATICAMENTE LA (II):

$$\partial_\mu\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\partial_\mu \partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho \partial_\mu A_\sigma\right)$$
$$= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\mu A_\sigma = 0$$

NOTA: INFATTI ε È ANTISIMMETRICO PER SCAMBIO DI QUALSIASI COPPIA DI INDICI, MENTRE $\partial_\alpha \partial_\beta$ È SIMMETRICO.

INOLTRE $F_{\mu\nu}$ È INVARIANTE SOTTO LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

NOTA: $\Lambda(x)$ FUNZIONE SCALARE.

$$F_{\mu\nu}' = \partial_\nu A'_\mu - \partial_\mu A'_\nu = \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) - \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \Lambda) = F_{\mu\nu} + \underbrace{(\partial_\nu\partial_\mu - \partial_\mu\partial_\nu)}_{=0}\Lambda$$

· GAUGE DI LORENZ

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$$

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = J^\nu$$

$$\Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^\nu$$

MOSTRIAMO CHE, DATA A^μ, È SEMPRE POSSIBILE TROVARE $\Lambda(x)$ IN

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$$

IN MODO TALE CHE VALGA

$$\partial_\mu A^{\mu'}(x) = 0$$

INFATTI

$$\partial_\mu A^{\mu'}(x) = \partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda = 0$$

$$\Box\Lambda = -\partial_\mu A^\mu$$

MA NOI AVEVAMO RISOLTO

$$\Box_x G(x-y) = -\delta^4(x-y)$$

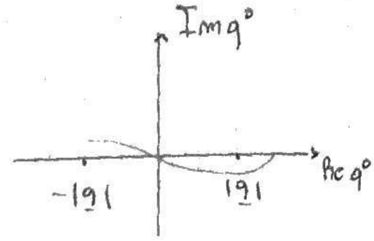
$$G(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2}$$

NOTA: NOI AVEVAMO RISOLTO

$$(\Box_x + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$$

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^{iq(x-y)}}{(q^0)^2 - \omega_q^2}$$

CON $\omega_q^2 = \underline{q}^2 + m^2$.



DATA LA FUNZIONE DI GREEN $G(x-y)$,

$$\Lambda(x) = \int d^4y\, G(x-y)\, \partial_\mu A^\mu(y) + (\quad)$$

SI PARLA ALLORA DI <u>GAUGE DI LORENZ</u> E SI SCRIVE

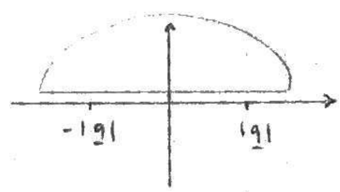
$$\begin{cases} \Box A^\nu(x) = J^\nu(x) & \text{(I)} \\ \partial_\mu A^\mu = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

IL CUI INTEGRALE GENERALE È

$$A^\nu(x) = \underbrace{-\int d^4y\, G(x-y)\, J^\nu(y)}_{\text{INTEGRALE PARTICOLARE}} + A^{(0)\nu} \qquad \text{(III)}$$

LA PARTICOLARE SCELTA DI G NON È COSÌ IMPORTANTE (LA CORREGGO CON $A^{(0)\nu}$); È COMODO USARE I POTENZIALI RITARDATI

$$G(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|} \delta(|\underline{x}-\underline{y}| - y^0 - x^0)$$



VERIFICHIAMO CHE DALLE (I), (III) RITROVO LA (II)*:

$$\partial_\nu A^\nu(x) = -\int d^4y\, \partial_\nu^{(x)}[G(x-y)\, J^\nu(y)] = +\int d^4y \left[\partial_\nu^{(y)} G(x-y)\right] J^\nu(y) - \int d^4y\, G(x-y) \underbrace{\left[\partial_\nu^{(x)} J^\nu(y)\right]}_{=0}$$

CONSIDERO CHE

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$$

$$\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{SIMM.}} \underbrace{F^{\nu\mu}}_{\text{ANTISIMM.}} = \partial_\nu J^\nu = 0$$

*NOTA: A ME QUESTA COSA PUZZA. SE CI METTI UNA $G(x-y)$ CHE NON È LA FUNZIONE DI GREEN LA PROVA FUNZIONA LO STESSO...

SE INTEGRO PER PARTI E IPOTIZZO $J^\nu \to 0$ ALL'INFINITO,

$\partial_\nu A^\nu(x) = 0$

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

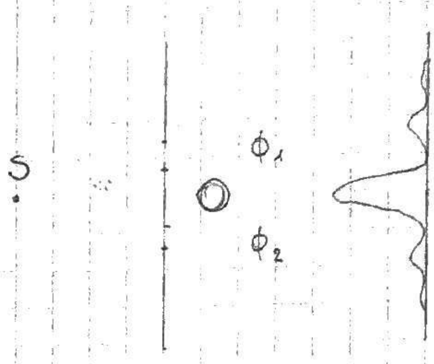
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

NOTA: NEL VUOTO. HO ACCESO LE SORGENTI, POI LE HO SPENTE ED È RIMASTO IL CAMPO. IN GENERALE AGGIUNGO $-J^\mu A_\mu$.

SI PUÒ SCRIVERE SOLO IN TERMINI DI POTENZIALI VETTORI E NON DEI CAMPI (NONOSTANTE SIANO QUESTI AD ESSERE OSSERVABILI, MENTRE GLI ALTRI SONO DEFINITI A MENO DELLA GAUGE).

ESPERIMENTO DI AHARANOV-BOHM

UN SOLENOIDE È POSTO DIETRO LO SCHERMO DI UN ESPERIMENTO ALLA YOUNG. HO FATTO IN MODO CHE I CAMPI SIANO NULLI FUORI DAL SOLENOIDE; CIONONOSTANTE OSSERVO CHE LE FRANGE DI INTERFERENZA SI MODIFICANO SE LO ACCENDO. SE $\underline{E}, \underline{B} = 0$, RIMANE TUTTAVIA $\underline{A} \neq 0$ POICHÉ



$$\oint \underline{A} \cdot d\underline{s} = \int_S (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) \cdot \hat{m} \, d\Sigma = \Phi(\underline{B})$$

QUINDI SE IL SOLENOIDE È ACCESO NON C'È MODO DI ANNULLARE $\underline{A}$.

IN PRESENZA DI UN CAMPO EM, IN MQ RIDEFINISCO

$$\begin{cases} \underline{p} \to \underline{p} - e\underline{A} \\ E \to E - \phi \end{cases}$$

USANDO ANCORA A^μ, NON I CAMPI.

★ VERIFICHIAMO CHE CON QUESTA SCELTA DI $\mathcal{L}$

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^4x \, F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4x \, F_{\mu\nu} (\partial^\nu \delta A^\mu - \partial^\mu \delta A^\nu)$$

MA $F^{\mu\nu}$ È ANTISIMMETRICO, QUINDI

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^4x\left(F_{\mu\nu}\,\partial^\nu \delta A^\mu + F_{\nu\mu}\,\partial^\nu \delta A^\mu\right)$$

$$= +\int d^4x\, F_{\mu\nu}\,\partial^\nu \delta A^\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER PARTI}}}{=} \int d^4x\, \delta A^\mu\, \partial^\nu F_{\mu\nu} \equiv 0$$

DA QUI HO LE 4 EQUAZIONI DEL MOTO OMOGENEE

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

MENTRE ABBIAMO VISTO CHE LE ALTRE 4 SONO IDENTICAMENTE SODDISFATTE DEFINENDO IL TENSORE DI MAXWELL.

NOTIAMO CHE $\mathcal{L}$ È INVARIANTE SOTTO TRASFORMAZIONI DI LORENTZ:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$$

NOTA: VEDREMO PIÙ IN LÀ CHE VI È UNA QUADRICORRENTE CONSERVATA.

A PARTIRE DA $\mathcal{L}$ VOGLIAMO INTRODURRE LE DENSITÀ DI MOMENTO CINETICO CONIUGATO AD A_μ

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$$

PER POI IMPORRE LE REGOLE DI COMMUTAZIONE CANONICHE (A TEMPI UGUALI)

$$\left[\pi^\mu(x),\, A^\nu(y)\right]_{x^0=y^0} = -i\,\delta^{\mu\nu}\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

MA IL PROBLEMA È CHE

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} \equiv 0$$

NOTA: IL TERMINE $\partial^0 A^0$ PUÒ DERIVARE SOLO DA F^{00}, MA $F^{00}=0$ PERCHÉ F È ANTISIMMETRICO.

SEMPRE NULLO PERCHÉ $\mathcal{L}$ NON DIPENDE DA $\dot{A}_0$. QUESTO RENDE SINGOLARE IL PASSAGGIO AL FORMALISMO CANONICO

$$q^i \qquad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}^i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

NOTA: NON ESISTE IL MOMENTO CINETICO CONIUGATO AD A^0, OSSIA A^0 NON HA UNA DINAMICA.

DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY CON ASSEGNATI $A^\mu(\underline{x},0)$, $\dot{A}^\nu(\underline{x},0)$,

TROVO UNA SOLUZIONE E, SE IL SISTEMA FOSSE CANONICO, QUESTA SAREBBE UNICA. MA QUESTO È IMPOSSIBILE, PERCHÉ PER QUALSIASI $t > t_0$ POTREI FARE UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE (CHE NON TOCCA LE C.I., $t > t_0$, E NON MODIFICA LE EQUAZIONI DEL MOTO) E FINIRE SU UN'ALTRA SOLUZIONE.

IL CAMPO DI K-G NON AVEVA QUESTO PROBLEMA; VEDREMO CHE PERÒ LO PRESENTA ANCHE IL CAMPO DI DIRAC (PROBLEMA DELLA INVARIANZA DI GAUGE SUL FORMALISMO CANONICO). NEL CASO CLASSICO BASTAVA EVITARE IL FORMALISMO CANONICO, MA QUI NON POSSIAMO.

★ IMPONIAMO QUINDI UN'ULTERIORE CONDIZIONE SULLE A^μ PER QUELLE OSSERVABILI CHE SONO INVARIANTI DI GAUGE. NON USEREMO LA GAUGE DI LORENZ (BENCHÉ SIA COMODA PERCHÉ MANTIENE LA STESSA FORMA IN TUTTI I SISTEMI INERZIALI), MA LA <u>GAUGE DI COULOMB</u> O DI RADIAZIONE

$$A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

$$\partial_i A^i = 0$$

NOTA: UNA VOLTA FISSATA LA GAUGE, A^μ DIVENTA UN'OSSERVABILE PERCHÉ VI DISCENDONO UNIVOCAMENTE $\underline{E}$ E $\underline{B}$.

CHE OVVIAMENTE NON È INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI DI LORENTZ (MA VEDREMO CHE LE QUANTITÀ FISICHE OSSERVABILI NON SE NE ACCORGONO). DATO A^μ, IN GENERALE $\partial_i A^i \neq 0$; CERCHIAMO QUINDI LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE CHE SODDISFI

$$\begin{aligned} \partial_i A^{i'} &= \partial_i A^i + \partial_i \partial^i \Lambda \\ &= \partial_i A^i - \partial_i \partial_i \Lambda \\ &= \partial_i A^i - \Delta \Lambda \qquad \equiv 0 \end{aligned}$$

OSSIA L'EQUAZIONE DI POISSON

$$\Delta \Lambda = -\operatorname{div} \underline{A}(\underline{x}, x^0)$$

CHE HA SOLUZIONE

$$\Lambda(\underline{x}, x^0) = + \frac{1}{4\pi} \int d\underline{y} \, \frac{\operatorname{div} \underline{A}(\underline{y}, x^0)}{|\underline{x} - \underline{y}|}$$

SCRIVIAMO ALLORA LE EQUAZIONI DEL MOTO

$$\partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = 0$$

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

CHE NELLA GAUGE DI COULOMB DIVENTA IL SET DI 4 EQUAZIONI

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_0 A^0 = 0 \qquad (\partial_i A^i = 0)$$

SE $\mu = 0$,

$$\partial_\nu \partial^\nu A^0 - \partial^0 \partial_0 A^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_i \partial^i A^0 = 0$$

OSSIA, PER UN CAMPO MAGNETICO LIBERO (NIENTE CARICHE O CORRENTI ESTERNE), A^0 È UNA FUNZIONE ARMONICA:

$$\Delta A^0 = 0$$

NOTA: OGNI PUNTO CRITICO DI UNA FUNZIONE ARMONICA È UN PUNTO DI SELLA (LE $\partial^2/\partial x^{i\,2}$ NON POSSONO ESSERE CONCORDI!): GLI ESTREMI SONO SUL BORDO.

E SAPPIAMO CHE LE UNICHE FUNZIONI ARMONICHE CHE SI COMPORTANO BENE (VANNO A ZERO) ALL'INFINITO SONO LE COSTANTI. ALLORA, LUNGO LE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DEL MOTO,

$$A^0 = 0$$

NOTA: QUESTO IMPLICA $\partial_\mu A^\mu = 0$, OSSIA È SODDISFATTA ANCHE LA GAUGE DI LORENZ!

(IL VALORE DELLA COSTANTE È IRRILEVANTE).

NOTA: VOLENDO LA COSTANTE È SCELTA COSÌ CHE A SI ANNULLI ALL'INFINITO.

LE ALTRE 3 EQUAZIONI DIVENTANO

$$\Box A^i = 0$$

ABBIAMO PERCIÒ RISCRITTO LE EQUAZIONI DI MAXWELL COME

$$\begin{cases} \Box A^i = 0 \\ \partial_i A^i = 0 \end{cases}$$

NOTA: SCRIVIAMO SUBITO LA SOLUZIONE GRAZIE ALL'ANALOGIA CON $(\Box + m^2)\phi = 0$, $m = 0$.

NOTA: LA PRESENZA DELL'HERMITIANO CONIUGATO RENDE IL CAMPO REALE.

CON SOLUZIONE

$$A^i(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\underline{p}|}} \left(a^i(\underline{p}) e^{-ip\cdot x} + a^{i*}(\underline{p}) e^{ip\cdot x} \right)$$

$$\partial_i A^i = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\underline{p}|}} \left(p_i a^i(\underline{p}) e^{-ip\cdot x} + c.c. \right) \equiv 0$$

DA CUI SI OTTIENE LA CONDIZIONE

$$\underline{p} \cdot \underline{a}(\underline{p}) = 0$$

- PER OGNI $\underline{p}$, FISSO $\underline{\varepsilon}_1$ E $\underline{\varepsilon}_2$ NEL SUO PIANO ORTOGONALE:

$$\underline{\varepsilon}_1(\underline{p}) \wedge \underline{\varepsilon}_2(\underline{p}) = \hat{p} = \underline{p}/|\underline{p}|$$

POSSIAMO ALLORA ESPRIMERE $\underline{a}$ COME COMBINAZIONE LINEARE

$$\underline{a}(\underline{p}) = \sum_{\lambda=1}^{2} c^{(\lambda)}(\underline{p})\, \underline{\varepsilon}_\lambda(\underline{p})$$

$$\underline{A}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\underline{p}|}} \left(c(\underline{p},\lambda)\, \underline{\varepsilon}_\lambda(\underline{p})\, e^{-ip\cdot x} + h.c. \right)$$

CHE DESCRIVE UN'ONDA ELETTROMAGNETICA CHE SI PROPAGA NEL VUOTO. SE GLI ε_λ SONO REALI, ABBIAMO 2 POSSIBILI POLARIZZAZIONI LINEARI E ORTOGONALI ($\lambda = 1, 2$). SE SCEGLIAMO COEFFICIENTI $\alpha^{(\lambda)}$ COMPLESSI RITROVIAMO LE POLARIZZAZIONI CIRCOLARI O ELLITTICHE. SI DICE PIANO DI POLARIZZAZIONE QUELLO INDIVIDUATO DALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE ($\underline{p}$) E QUELLA DI OSCILLAZIONE DEL CAMPO. IL CAMPO $\underline{A}$ È TRASVERSO; DATO $\underline{A}$ RISALIAMO A

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}}$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \wedge \underline{A}$$

NOTA: IN QUESTA GAUGE $A^0 = 0$.

QUINDI ANCHE $\underline{E}$ È TRASVERSO ($\underline{E} \parallel \underline{A}$); $\underline{B}$ LO È A SUA VOLTA, MA $\underline{B} \perp \underline{A}$.

PER QUANTIZZARLO, c E c^+ DIVENTANO OPERATORI:

$c^+ \to$ CREAZIONE $\qquad \dots c^+(\underline{p},\lambda)|0\rangle$

$c \to$ ANNICHILAZIONE $\qquad c(\underline{p},\lambda)|0\rangle = 0$

QUANDO CREO UNA PARTICELLA DEVO SPECIFICARE λ, CHE CLASSICAMENTE ERA LA POLARIZZAZIONE DEL CAMPO: VEDREMO CHE ORA RAPPRESENTA LO SPIN.

IN ANALOGIA CON IL CAMPO SCALARE,

$$[c(\underline{p},\lambda), c(\underline{p}',\lambda')] = 0$$

$$[c(\underline{p},\lambda), c^+(\underline{p}',\lambda')] = \delta(\underline{p}-\underline{p}')\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

NOTA: CON IL CAMPO SCALARE IN REALTÀ IMPONEVAMO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE CANONICA SUI CAMPI E QUESTE VI DISCENDEVANO. QUI LE IMPONIAMO NOI, NON AVENDO IL FORMALISMO CANONICO.

★ RIPRENDIAMO LA DENSITÀ LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij}F^{ij}$$

INFATTI $F_{\mu\nu}$ È ANTISIMMETRICO E $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ È QUADRATICO. RICONOSCENDO LE COMPONENTI DEL CAMPO ELETTRICO (F_{0i}) E MAGNETICO (F_{ij}),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{2}B^2$$

NOTA: $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$

CALCOLIAMO L'ENERGIA (NON È PROPRIO L'HAMILTONIANA PERCHÉ NON LA ESPRIMIAMO IN TERMINI DI q^i E p^i):

$$H = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} \dot{A}^i - \mathcal{L} \right) d\underline{x}$$

POICHÉ $\partial_i A^0 = 0$ (INFATTI $A^0 = 0$) E LA DIPENDENZA DA $\dot{A}^i$ È SOLTANTO IN E^2,

$$\frac{1}{2}E^2 \overset{*}{=} -\frac{1}{2}\left(\partial_0 A_i \partial^0 A^i\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_0 A^i\right)^2 = \frac{1}{2}\dot{A}^i \dot{A}^i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i}\dot{A}^i - \mathcal{L} = \dot{A}^i \dot{A}^i - \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2 = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2$$

*NOTA: STO EGUAGLIANDOLO A
$$\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} = +\frac{1}{2}(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i)(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = -\frac{1}{2}(\partial_i A^0 + \dot{A}^i)^2$$
CON $\partial_i A^0 = 0$.

QUINDI

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right)$$

PER QUANTIZZARE (VOLUME FINITO CON CONDIZIONI PERIODICHE AL BORDO E BUON ORDINAMENTO),

$$H = \sum_{\lambda, \underline{p}} |\underline{p}|\, c^+(\lambda, \underline{p})\, c(\lambda, \underline{p})$$

O, SU UN VOLUME INFINITO,

$$H = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3p\, |\underline{p}|\, c^+(\lambda, \underline{p})\, c(\lambda, \underline{p})$$

È SEMPLICE MOSTRARE CHE

$$H c^+(\lambda_1, \underline{p}_1) c^+(\lambda_2, \underline{p}_2)|0\rangle = \left(|\underline{p}_1| + |\underline{p}_2|\right)(\ldots)$$

CON

$$p^0 = \omega_{\underline{p}} = |\underline{p}|$$

COM'È FATTO L'IMPULSO SPAZIALE? LO COSTRUIAMO USANDO IL TEOREMA DI NOETHER.

AVEVAMO VISTO $(\nabla_i \leftrightarrow \partial_i)$

NOTA: È CONSERVATA LA QUADRICORRENTE

$$J^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A^i} \partial_\nu A^i - \mathcal{L} g^\mu{}_\nu$$

OSSIA

$$J^0{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} \partial_\nu A^i - \mathcal{L} g^0{}_\nu$$

$$P^i = -\int d^3x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^k} \nabla_i A^k \quad (= -P_i)$$

$$\underset{\underline{E}=-\dot{\underline{A}}}{=} + \int d\underline{x} \, E^k \nabla_i A^k = + \int d\underline{x} \, E^k (\nabla_i A^k - \nabla_k A^i)$$

DOVE NELL'ULTIMO PASSAGGIO HO AGGIUNTO $\nabla_k A^i$, PERCHÉ $E^k \nabla_k A^i$ INTEGRATO IN $d\underline{x}$ PER PARTI FA ZERO $(\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0)$. ALLORA

$$P^i = + \int d\underline{x} \, E^k \varepsilon_{ik\ell} B_\ell = \int d\underline{x} \, (\underline{E} \wedge \underline{B})_i$$

NOTA: VEDI DIMOSTRAZIONE SOTTO.

OSSIA P^i È L'INTEGRALE DEL VETTORE DI POYNTING.

QUANTIZZANDOLO,

$$\underline{P} = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d\underline{k} \, \underline{k} \, c^\dagger(\lambda, \underline{k}) c(\lambda, \underline{k})$$

$$\underline{P} \, c^\dagger(\lambda, \underline{p}) c(\lambda, \underline{p}) |0\rangle = (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)(\ldots)$$

NOTA:

$$B_\ell = (\underline{\nabla} \wedge \underline{A})_\ell = \varepsilon_{\ell ab} \partial^a A^b$$

$$(\underline{E} \wedge \underline{B})_i = \varepsilon_{ik\ell} E_k B_\ell$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{k\ell}$$

QUINDI, USANDO LA PROPRIETÀ CICLICA DI ε_{ijk},

$$(\underline{E} \wedge \underline{B})_i = \varepsilon_{ik\ell} E_k (\varepsilon_{\ell ab} \partial^a A^b) = \varepsilon_{\ell ik} \varepsilon_{\ell ab} E_k \partial^a A^b = (\delta_{ia} \delta_{kb} - \delta_{ib} \delta_{ka}) E_k \partial^a A^b$$

$$= E_k (\partial^i A^k - \partial^k A^i) = E^k (\partial_i A^k - \partial_k A^i)$$

★ RICAPITOLANDO, SI È SCELTA LA GAUGE DI COULOMB

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$$

DA CUI $A^0 = 0$. SI È TROVATA

NOTA: DOPO AVER COSTATATO CHE $A^0 = 0$, SEGUE $\partial_\mu A^\mu = 0 - \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$, OVVERO SE SI IMPONE LA GAUGE DI COULOMB È SODDISFATTA ANCHE LA GAUGE DI LORENZ.

$$\underline{A}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\underline{p}|}} \left(c(\underline{p}, \lambda) \underline{\varepsilon}_\lambda(\underline{p}) e^{-ipx} + h.c. \right)$$

CON $c(\underline{p}, \lambda)$, $c^\dagger(\underline{p}, \lambda)$ OPERATORI DI CREAZIONE E DISTRUZIONE (PARTICELLE CON $m = 0$).

IN SENSO CLASSICO ε_λ INDICA LA POLARIZZAZIONE. DAL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO UN FOTONE È POLARIZZATO CIRCOLARMENTE:

$$|\underline{\ell}+\rangle = \left[c^+(\underline{\ell},1)+i\,c^+(\underline{\ell},2)\right]|0\rangle$$
$$|\underline{\ell}-\rangle = \left[c^+(\underline{\ell},1)-i\,c^+(\underline{\ell},2)\right]|0\rangle$$

SONO STATI CON POLARIZZAZIONE DESTRORSA O SINISTRORSA ATTORNO ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE $\underline{\ell}$. UNA PARTICELLA DI MASSA NULLA NON PUÒ MAI ESSERE A RIPOSO, QUINDI IL SUO "SPIN" È PER FORZA PARALLELO O ANTIPARALLELO A $\underline{\ell}$.

SUPPONIAMO ORA DI AVERE UN GRAN NUMERO N DI FOTONI: RAPPRESENTANO UN'ONDA ELETTROMAGNETICA? LA RISPOSTA È NO. SO CHE

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}}$$

SE GLI N FOTONI SONO DESCRITTI DA $|N\rangle$ (NON PER FORZA POLARIZZATI UGUALI),

$$\langle N|\,\underline{E}(x)\,|N\rangle = 0$$

NOTA: LO STESSO VALE PER IL CAMPO $\underline{B} = \underline{\nabla}\wedge\underline{A}$.

INFATTI $\underline{E}$ CONTIENE c E c^+, IL CUI VALOR MEDIO È NULLO.

L'ANALOGO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO CLASSICO SONO SOLO GLI STATI COERENTI. RICORDANDO

$$c|0\rangle = 0$$
$$c^+|0\rangle = 1 \qquad\qquad |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}\,c^{+m}|0\rangle$$

SI DICONO COERENTI GLI AUTOSTATI DELL'OPERATORE DI ANNICHILAZIONE

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

L'OPERATORE DI CREAZIONE NON HA AUTOSTATI. MOSTRIAMO CHE

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle$$

NOTA: $|\alpha\rangle$ NON È UNO STATO CON UN NUMERO DI FOTONI DEFINITO, MA UNA SOMMA SU STATI CON UN NUMERO CRESCENTE DI PARTICELLE.

INFATTI

NOTA: PER RICORDARTELO, DEVE RESTITUIRE $a|0\rangle = \sqrt{0}|0\rangle = 0$.

$$a|m\rangle = \sqrt{m}\,|m-1\rangle \qquad\qquad a^+|m\rangle = \sqrt{m+1}\,|m+1\rangle$$

$$a|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\,a|m\rangle = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\sqrt{m}\,|m-1\rangle = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}|k\rangle$$

IL FATTORE ESPONENZIALE È LA NORMALIZZAZIONE.

COSTRUIAMO QUINDI LO STATO COERENTE CON

$\alpha = \alpha_{\underline{k}}$

$$|\alpha_{\underline{k}}\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{\underline{k}}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\underline{k}}^m}{\sqrt{m!}} |m, \underline{k}\rangle$$

DOVE

$$|m_{\underline{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_{\underline{k}}!}} c^{+\, m_{\underline{k}}}(\lambda, \underline{k}) |0\rangle$$

VERIFICHIAMO CHE IL VALOR MEDIO DI $\underline{A}$ VALE

$$\langle \alpha_{\underline{k}} | \underline{A}(x) | \alpha_{\underline{k}} \rangle = (\ \ ) \cdot \left[\alpha_{\underline{k}}\, \underline{\varepsilon}_\lambda(\underline{k})\, e^{-ikx} + h.c. \right] \qquad \text{(I)}$$

INFATTI $\underline{A}$ È UNA SOMMA SU TUTTI I POSSIBILI $\underline{p}$, MA DI FATTO IN

$$\underline{A}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\underline{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\underline{p}|}} \left[c(\underline{p}, \lambda)\, \underline{\varepsilon}_\lambda(\underline{p})\, e^{-ipx} + h.c. \right]$$

CONTA SOLO $\underline{p} = \underline{k}$ (PRENDO SOLO UNO DEI DUE λ ALLA VOLTA). USIAMO PER L'h.c.

$\langle \alpha | a^+ = \alpha^* \langle \alpha |$

E NOTIAMO CHE LA (I) RIPRODUCE IL RISULTATO CLASSICO (POTREBBE ESSERE LA LUCE DI UN LASER; PER DESCRIVERE QUELLA NATURALE, INCOERENTE, USO LA MATRICE DENSITÀ). TUTTO QUESTO FUNZIONA SOLO SE HO MOLTI FOTONI.

NOTA: $\alpha_{\underline{k}}$ AL SECONDO MEMBRO DELLA (I) FA LA PARTE DELL'AMPIEZZA DELL'ONDA.

NOTA: UNO STATO COME $\psi = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ NON DÀ VALOR MEDIO NULLO DEGLI OPERATORI c E c^+: IN EFFETTI NON È UNO STATO CON UN NUMERO BEN DEFINITO DI FOTONI, PERCHÉ NE SOVRAPPONE 1 e 2.

EQUAZIONE DI DIRAC

DIRAC, FINE ANNI '20. PARTE DA

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \underline{p}^2}\, \psi \qquad \underline{p} = -i\hbar \underline{\nabla}$$

CHE AVEVAMO QUADRATO PER OTTENERE L'EQUAZIONE DI K-G

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(m^2c^4 + c^2 \underline{p}^2\right) \psi$$

IN CUI COMPARIVANO LE ENERGIE NEGATIVE, PROVENIENTI APPUNTO DALLA QUADRATURA. PER EVITARLA, DIRAC SCRIVE IN FORMA LINEARIZZATA

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c\, \underline{p} \cdot \underline{\alpha} + mc^2 \beta\right) \psi \qquad (\mathrm{I})$$

CON $\underline{\alpha}$ E β ADIMENSIONALI E TALI DA RENDERE L'EQUAZIONE INVARIANTE. DEVONO ESSERE AUTOAGGIUNTI (COSÌ CHE L'EVOLUZIONE TEMPORALE SIA UNITARIA):

$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^+, \quad \beta = \beta^+$

E SONO OPERATORI CHE AGISCONO IN QUALCHE "NUOVO" SPAZIO: $\underline{p}$ E $\underline{\alpha}$ OPERANO IN SPAZI DIVERSI. PROVIAMO A IDENTIFICARLI CON LE MATRICI IN DIMENSIONE d

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_d(x) \end{pmatrix}$$

NOTA: IN ALTRI TERMINI, $\underline{p}$ E $\underline{\alpha}$ COMMUTANO IN MODO NON BANALE, NON PERCHÉ $\underline{\alpha}$ SIA FUNZIONE DI $\underline{p}$ MA PERCHÉ $\underline{\alpha}$ OPERA SU GRADI DI LIBERTÀ DIVERSI (TIPO LO SPIN).
QUESTO MI DICE ANCHE CHE $\underline{\alpha}$ E β DEVONO ESSERE HERMITIANI: COMPAIONO NELL'HAMILTONIANA E NON SI COMBINANO CON $\underline{p}$.

L'EQUAZIONE DI K-G MI DICEVA CHE

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\underline{p}^2}$$

$$E^2 = c^2 \underline{p}^2 + m^2c^4$$

VOGLIO RIOTTENERE QUESTO STESSO RISULTATO ITERANDO LA (I):

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(c\, \underline{p}\cdot\underline{\alpha} + mc^2\beta\right)^2 \psi$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \left(c\, \underline{p}\cdot\underline{\alpha} + mc^2\beta\right)^2_{ij} \psi_j$$

(OSSIA COMPONENTE PER COMPONENTE).

SVOLGENDO IL QUADRATO,

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 (\underline{p}\cdot\underline{\alpha})^2 + m^2c^4\beta^2 + mc^3 \{\underline{p}\cdot\underline{\alpha}, \beta\}$$

POICHÉ IN K-G MANCA IL TERMINE mc^3, DEVONO ANTICOMMUTARE

$$\{\underline{p}\cdot\underline{\alpha}, \beta\} = 0$$

$$p_i\{\alpha^i, \beta\} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \{\underline{\alpha}, \beta\} = 0$$

(INFATTI $\underline{p}$ COMMUTA CON $\underline{\alpha}$ E β).

SIMILMENTE DEVE ESSERE

$$\beta^2 = \mathbb{1}$$

E RIMANE DA IMPORRE

$$c^2 \alpha^i p_i \alpha^j p_j = c^2 p_i p_j \cdot \left\{\frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) + \frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i)\right\}$$

MA p_i E p_j COMMUTANO, PERCIÒ p_ip_j È SIMMETRICO E

$$p_ip_j(\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i) = 0 \qquad (S_{ij}A^{ij} = S_{ji}A^{ji} = -S_{ij}A^{ij})$$

SI TROVA COSÌ

$$c^2(\underline{p}\cdot\underline{\alpha})^2 = \frac{c^2}{2} p_ip_j\{\alpha^i, \alpha^j\}$$

IDENTIFICO ALLORA

$$\frac{1}{2}\{\alpha^i, \alpha^j\} = \delta^{ij}\cdot\mathbb{1}$$

PERCIÒ $\underline{\alpha}$ E β SONO TALI DA SODDISFARE

$$\begin{cases} \{\underline{\alpha}, \beta\} = 0 \\ \beta^2 = \mathbb{1} \\ \{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}\cdot\mathbb{1} \qquad \Rightarrow \qquad {\alpha^i}^2 = \mathbb{1} \end{cases}$$

SEGUE CHE LE 4 MATRICI $\underline{\alpha}$ E β SONO HERMITIANE, ANTICOMMUTANO TRA LORO E HANNO AUTOVALORI ± 1. POSSO SCRIVERE

$$\alpha^i = -\beta\alpha^i\beta$$

NOTA: HO MOLTIPLICATO A DESTRA PER β $\alpha^i\beta = -\beta\alpha^i$

$$\mathrm{Tr}\,\alpha^i = -\mathrm{Tr}(\beta\alpha^i\beta) = -\mathrm{Tr}(\beta^2\alpha^i) = -\mathrm{Tr}(\alpha^i)$$

DA CUI, VISTA LA GENERALITÀ DELL'ARGOMENTO,

$$\mathrm{Tr}\,\alpha^i = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\beta = 0$$

NOTA: SI È USATA ANCHE LA PROPRIETÀ CICLICA DELLA TRACCIA DI UN PRODOTTO DI MATRICI.

QUINDI $\underline{\alpha}$ E β VIVONO IN UNO SPAZIO DI DIMENSIONE PARI (HO TANTI 1 QUANTI −1 LUNGO LA DIAGONALE). $d=0$ È BANALE; SE $d=2$, POTREI USARE LE MATRICI DI PAULI E L'IDENTITÀ

σ_i, I (INFATTI: ① $\{\sigma_i, \sigma_j\}=0$; ② $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ E PERM. CICLICHE; ③ $Tr\,\sigma_i=0$; ④ $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ E $(\hat{n}\cdot\sigma)^2 = \mathbb{1}$)

MA NON ANTICOMMUTANO TUTTE E 4 TRA LORO (L'IDENTITÀ COMMUTA CON TUTTI). SI PUÒ FARE SE $m=0$, NEL QUAL CASO IN (I) SPARISCE β E MI BASTANO 3 MATRICI (EQUAZIONE DI WEILLE, SI USAVA PER NEUTRINI A MASSA NULLA).

CI METTIAMO ALLORA NEL CASO $d=4$ (SPAZIO DI DIRAC, È SOLO UN CASO CHE SIANO 4 COME NELLO SPAZIOTEMPO). SCRIVIAMO

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & O_2 \\ O_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha^i = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma^i \\ \sigma^i & O_2 \end{pmatrix}$$

DOVE LE σ^i SONO MATRICI DI PAULI. VERIFICHIAMO AD ESEMPIO

$$\{\alpha^i, \beta\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TUTTE LE POSSIBILI ALTRE RAPPRESENTAZIONI SONO UNITARIAMENTE EQUIVALENTI A QUESTA, QUINDI TALE SCELTA NON HA EFFETTI VISIBILI SULLA FISICA.

★ È DAVVERO UN'ESPRESSIONE COVARIANTE?

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\underline{p}\cdot\underline{\alpha} + \beta m)\,\psi$$

$$i\beta\frac{\partial\psi}{\partial x^0} = (p^i\beta\alpha_i + m)\,\psi$$

NOTA: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ -\underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$.

CHIAMIAMO γ^i LE MATRICI

$$\beta\alpha^i = \gamma^i \qquad \beta = \gamma^0$$

$$\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \qquad \gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$$

E RISCRIVIAMO

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = -i\gamma^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + m\psi$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - m\psi = 0$$

NOTA: USANDO LA NOTAZIONE $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$,

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

CHE È L'EQUAZIONE DI DIRAC IN FORMA COVARIANTE.

★ VERIFICHIAMO CHE

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

NOTA: OCCHIO CHE VUOL DIRE $2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$. γ^μ È UNA MATRICE MENTRE $g^{\mu\nu}$ È UN NUMERO.

INFATTI, AD ESEMPIO,

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \{\beta\alpha^i, \beta\alpha^j\} = -\{\alpha^i, \alpha^j\} = -2\delta^{ij}$$

NOTA:
$= \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i = -\alpha^i\beta\beta\alpha^j - \alpha^j\beta\beta\alpha^i$
$= -\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i$

★ MOSTRIAMO L'IDENTITÀ

$$\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0 = \gamma^\mu$$

INFATTI

$$\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 \qquad (\mu = 0)$$

$$-\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = \gamma^i \qquad (\mu = 1,2,3)$$

· <u>COVARIANZA DELL'EQUAZIONE DI DIRAC</u>

SIANO O, O' DUE SISTEMI INERZIALI CONNESSI DALLA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}$$

COME SI TRASFORMA $\psi(x)$? $\qquad$ $\cdot\, P$

O': $\psi'_a(x')$

COME SEMPRE, IL CAMPO $\psi(P)$ È ASSOLUTO: CAMBIANO LE SUE COMPONENTI NEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO SECONDO LA TRASFORMAZIONE LINEARE

$$\psi'_a(x') = S_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

ALLORA (LA MASSA È UN INVARIANTE)

O: $(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$

O': $(i\not{\partial}' - m)\psi'(x') = 0$

CERCHIAMO ALLORA $S(\Lambda)$ TALE PER CUI

$$x' = \Lambda x$$
$$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x)$$

LA $S(\Lambda)$ È UNA RAPPRESENTAZIONE DEL GRUPPO DI LORENTZ (NON È DIFFICILE DIMOSTRARE CHE SI TRATTA DI UN GRUPPO): INFATTI

NOTA: È UN OMOMORFISMO.

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3 \quad \Rightarrow \quad S(\Lambda_1) S(\Lambda_2) = S(\Lambda_3)$$

SE SUPPONGO DI NON PERDERE INFORMAZIONI SULLA DINAMICA DOPO LA TRASFORMAZIONE, DEVE ESISTERE $S^{-1}(\Lambda)$ E SCRIVO

$$0 = (i\not\partial - m)\psi(x) = (i\not\partial - m) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$$
$$S(i\not\partial - m) S^{-1}\psi'(x') = 0$$
$$i S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\partial_\mu \psi'(x') - m\psi'(x') = 0$$

NOTA: $[S, \partial_\mu] = 0$. INFATTI ∂_μ AGISCE SULLE COORDINATE E S SULLO "SPIN": IMMAGINA $\psi = \psi_{\text{spaziale}} \otimes \psi_{\text{dirac}}$

MA

$$\partial_\mu \psi'(x') = \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^{\nu'}}$$

CHE SOSTITUITA DÀ (OCCHIO CHE S AGISCE SUGLI INDICI DI DIRAC, QUINDI NON COMMUTA CON LE γ^μ, MENTRE COMMUTANO γ E Λ)

$$i S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu'}{}_{\mu} \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^{\nu'}} - m\psi'(x') = 0$$

RITROVIAMO LA FORMA DELLA EQUAZIONE DI PARTENZA SE

$$\underline{S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu'}{}_{\mu} = \gamma^{\nu'}} \qquad (\mathrm{I})$$

QUESTO RISULTATO È SUBORDINATO AL FATTO CHE LE γ^μ SONO DETERMINATE A MENO DI UNA TRASFORMAZIONE UNITARIA CHE LASCIA INALTERATI I VALORI MEDI, QUINDI LE POSSO PRENDERE UGUALI NEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO (LE RAPPRESENTAZIONI DIFFERISCONO PER TRASF. UNITARIE).

LA (I) PUÒ ESSERE RISCRITTA COME

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu'} S(\Lambda) = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\gamma^\mu \qquad (\mathrm{II})$$

AMMETTE UNA SOLUZIONE? VEDREMO CHE LA AMMETTE.

NOTA: (SPOILER ALERT) SI TROVERÀ $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{8}\varepsilon_{\alpha\beta}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$

SE APPLICO A γ^ν LA TRASFORMAZIONE $S(\Lambda)$ (OSSIA $\gamma^{\nu\prime} = S^{-1}\gamma^\nu S$), DALLA (II) OTTENGO

$$\gamma^{\nu\prime} = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$$

CHE NON SONO QUELLE VISTE DA O', PERCHÉ $\Lambda^\nu{}_\mu$ MISCHIA LE COMPONENTI HERMITIANE E ANTIHERMITIANE. RESTA VALIDA, TUTTAVIA,

$$\{\gamma^{\nu\prime}, \gamma^{\mu\prime}\} = \{\Lambda^\nu{}_\alpha \gamma^\alpha, \Lambda^\mu{}_\beta \gamma^\beta\}$$
$$= \Lambda^\nu{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\beta \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}\Lambda^\nu{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\beta = 2g^{\mu\nu}$$

È UNA SIMILITUDINE: È CONSERVATA LA PROPRIETÀ DI ANTICOMMUTAZIONE MA NON QUELLA DI CONIUGIO. LA TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE NON PUÒ ESSERE UNITARIA, ALTRIMENTI MANDEREBBE MATRICI HERMITIANE IN ALTRE MATRICI HERMITIANE; FA ECCEZIONE IL SOTTOGRUPPO DELLE ROTAZIONI TRIDIMENSIONALI, CHE SONO UNITARIE.

NOTA: SIGNIFICA CHE $S(\Lambda)$ NON È UNA RAPPRESENTAZIONE UNITARIA DEL GRUPPO DI LORENTZ (VEDI P. 155 PATRÌ).

* DIMOSTRIAMO CHE

$$\underline{\gamma^0 S^{-1}(\Lambda)\gamma^0 = S^\dagger(\Lambda)} \qquad \text{(III)}$$

INFATTI DALLA (II) SEGUE

$$S^\dagger \gamma^{\nu\dagger}(S^{-1})^\dagger = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^{\mu\dagger}$$

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger}(S^{-1})^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^{\mu\dagger}\gamma^0$$

$$\underbrace{\gamma^0 S^\dagger \gamma^0}_{A} \gamma^\nu \underbrace{\gamma^0 S^{-1\dagger}\gamma^0}_{\text{È L'INVERSA DELLA } A \text{ PERCHÉ } \gamma^0\gamma^0 = 1} = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$$

NOTA:
$\{\gamma^\mu, \gamma^0\} = 0 \rightarrow \gamma^\mu\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^\mu$
$\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij} \rightarrow \gamma^i\gamma^j = -\gamma^j\gamma^i \quad i \neq j$

NOTA: SI È USATA $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$

PER ANALOGIA CON LA (II) SEGUE IL RISULTATO.

NOTA: OVVERO ASSOCIO $S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$, $S = \gamma^0 S^{-1\dagger}\gamma^0$

* CONSIDERIAMO ORA IL SOTTOGRUPPO DELLE ROTAZIONI TRIDIMENSIONALI

$$x^{0\prime} = x^0$$
$$x^{i\prime} = R_{ij}x^j$$

NOTA: QUESTO INVECE È UN GRUPPO DI LIE COMPATTO, QUINDI AMMETTE SEMPRE UNA RAPPRESENTAZIONE UNITARIA.

CHE NON MESCOLANO IL TEMPO CON LO SPAZIO. ALLORA

$$S^{-1}(R)\gamma^0 S(R) = \gamma^0$$

OVVERO $S(R)$ COMMUTA CON γ^0 E DI CONSEGUENZA ANCHE $S^{-1}(R)$ COMMUTA CON γ^0. DALLA (III) SEGUE ALLORA CHE $S(R)$ È UNITARIA:

$$S^{-1}(R) = S^\dagger(R)$$

* COSTRUIAMO I <u>COVARIANTI DI DIRAC</u> (UNA BASE NELLO SPAZIO DI DIRAC, IN CUI ABBIAMO 4-VETTORI E 16 MATRICI FONDAMENTALI).

$$1 \quad + \quad 4 \qquad + 1 \qquad + \left[(16-4)/2 = 6\right] \qquad + \quad 4$$

$$I \qquad \gamma^\mu \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \qquad \gamma^5\gamma^\mu$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. LA TRACCIA DEL PRODOTTO DI UN NUMERO DISPARI DI MATRICI È NULLA:

$$Tr(\gamma\gamma\gamma\ldots\gamma)^{DISPARI} = 0$$

NOTA: $\sigma^{\mu\nu}$ E γ^5 SONO HERMITIANI. γ^5 SI DICE OPERATORE CHIRALE. INOLTRE $\sigma^{ij} = \varepsilon^{ijk}\sigma_k \cdot \mathbb{1} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}$.

INTRODUCIAMO QUINDI LA NOTAZIONE

$$\bar{\Psi}(x) = \Psi^+(x)\gamma^0$$

$$\bar{\Psi}_a(x) = \gamma^0_{ba}\Psi^+_b(x)$$

NOTA: POICHÉ, COME SI È VISTO, $S(\Lambda)$ NON È UNITARIA, IN GENERALE $\Psi^+(x)\Psi(x) \neq \Psi'^+(x')\Psi'(x')$, OSSIA NON È UNO SCALARE. NE DOBBIAMO CERCARE UN ALTRO.

DOVE SI RICORDI CHE

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4\end{pmatrix} \qquad \Psi^+ = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$$

1) CHIEDIAMOCI COME SI TRASFORMA L'OGGETTO

$$\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$$

OSSIA VEDIAMO QUANTO VALE

$$\bar{\Psi}'(x')\Psi'(x') = \bar{\Psi}(x)S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\Psi(x) = \bar{\Psi}(x)\Psi(x)$$

È CIOÈ UNA QUANTITÀ <u>SCALARE</u>. INFATTI

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$$

$$\Psi'^+(x') = \Psi^+(x)S^+(\Lambda)$$

NOTA: $S^{-1} = \gamma^0 S^+ \gamma^0$

$$\bar{\Psi}'(x') = \Psi^+(x)S^+(\Lambda)\gamma^0 = \Psi^+(x)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \bar{\Psi}(x)S^{-1}(\Lambda)$$

2) ORA STUDIAMO

$$\bar{\Psi}'(x')\gamma^\mu\Psi'(x') = \bar{\Psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\Psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\Psi(x)$$

OVVERO SI TRASFORMA COME UN <u>QUADRIVETTORE</u>.

3) E ANCORA, RICORDIAMO LA DEFINIZIONE DI DETERMINANTE

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu\Lambda^\gamma{}_\rho\Lambda^\delta{}_\sigma = \det\Lambda\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

INFATTI

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \sum_{i} (-1)^{i} A_{11'} A_{22'} \cdots \quad \begin{matrix} \to 1,2,\dots m \\ \to 1,2,\dots m' \end{matrix}$$

POSSIAMO ESPRIMERE ALLORA

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

NOTA: PER OGNI SEQUENZA FISSATA $\{\mu,\nu,\rho,\sigma\}$ L'ESPRESSIONE A FIANCO RESTITUISCE γ^5, QUINDI DIVIDO PER LE 4! POSSIBILI PERMUTAZIONI.

SI PUO' ALLORA VERIFICARE CHE SI TRASFORMA COME UNO PSEUDOSCALARE

$$\bar{\Psi}'(x')\gamma^5\Psi'(x') = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \underset{SS^{-1}}{\gamma^\mu} \underset{SS^{-1}}{\gamma^\nu} \underset{SS^{-1}}{\gamma^\rho} \gamma^\sigma S(\Lambda)\Psi(x)$$

$$= \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \bar{\Psi}(x) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \Psi(x)$$

$$= \frac{i}{4!} \det\Lambda \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\Psi}(x) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \Psi(x)$$

$$= \det\Lambda \, \bar{\Psi}(x)\gamma^5\Psi(x)$$

4) SI POSSONO MOSTRARE INFINE

$$\bar{\Psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\Psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \bar{\Psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\Psi(x)$$

$$\bar{\Psi}'(x')\gamma^5\gamma^\mu\Psi'(x') = (\det\Lambda)\, \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\Psi(x)$$

QUEST'ULTIMA È LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE DI UNO PSEUDO-4-VETTORE*

$$V^{\mu'}(x') = (\det\Lambda)\, \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x)$$

MENTRE IL PEZZO IN $\sigma^{\mu\nu}$ SI TRASFORMA COME UN TENSORE DOPPIO.

*NOTA: SI RICORDI CHE $\det\Lambda = \pm 1$ E CHE, PER DEFINIZIONE, UN VETTORE ASSIALE NON CAMBIA SEGNO SOTTO PARITA' (COME UNO SCALARE). APPLICANDO P, $\gamma^5\gamma^\mu$ VA A FINIRE IN $-(\text{SE STESSO}) \cdot \det P = (\text{SE STESSO})$.

LIMITE NON RELATIVISTICO

RIPRENDIAMO L'EQUAZIONE DI DIRAC

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta m c^2 \right) \psi$$

CHE DIRAC STESSO INTRODUSSE NELLA SPERANZA DI LIBERARSI DELLE ENERGIE NEGATIVE. STUDIAMO A IMPULSO NULLO UNA GENERICA SOLUZIONE

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \qquad p \equiv \left(\frac{E}{c}, \underline{0}\right)$$

SPEZZANDO IL VETTORE A 4 COMPONENTI IN DUE BLOCCHI DA 2,

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$E\varphi = mc^2 \varphi$$
$$E\chi = -mc^2 \chi$$

E SIAMO ROVINATI: ABBIAMO DI NUOVO SOLUZIONI A ENERGIA NEGATIVA. CE NE FACCIAMO UNA RAGIONE E LE USIAMO PER DESCRIVERE L'ANTIMATERIA.

★ COME INTERAGISCE UNA PARTICELLA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO ESTERNO (CHE SUPPONIAMO IMPERTURBATO DALLA PARTICELLA)?

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \left[c\underline{\alpha} \cdot \left(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}\right) + \beta m c^2 \right] + e\phi \right\} \psi$$

NOTA: LA SOSTITUZIONE MINIMALE CONSISTE IN $p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu = \left(\frac{1}{c}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi), \underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)$

(SOSTITUZIONE MINIMALE). SPEZZEREMO QUEST'ULTIMA IN DUE EQUAZIONI, UNA PER IL BLOCCO SUPERIORE E UNA PER QUELLO INFERIORE

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \qquad \text{(A BLOCCHI COME } \underline{\alpha} \text{ E } \beta\text{)}$$

PIÙ IN GENERALE, LA SOSTITUZIONE MINIMALE PRESCRIVE

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\underline{\alpha} \cdot \underline{\pi} + \beta m c^2 + e\phi \right] \psi \qquad \underline{\pi} = \underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}$$

IN TERMINI DEI BLOCCHI 2x2,

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varphi}} \\ \dot{\tilde{\chi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 + e\phi & c\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi} \\ c\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi} & -mc^2 + e\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

OVVERO

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\tilde{\varphi}} = (mc^2 + e\phi)\tilde{\varphi} + c\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi}\,\tilde{\chi} \\ i\hbar\dot{\tilde{\chi}} = c\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi}\,\tilde{\varphi} + (-mc^2 + e\phi)\tilde{\chi} \end{cases}$$

EQUIVALENTI ALL'EQUAZIONE DI DIRAC DI PARTENZA.

ORA RISCRIVO, SEMPRE IN MANIERA ESATTA, LO SPINORE COME AUTOSTATO DELL'ENERGIA (u È LO STATO AL TEMPO $t=0$)

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\, e^{-i\frac{E'}{\hbar}t}\, u = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\, u$$

AGGIUNGIAMO INVECE UNA FASE CHE TRASLA 'E' DELL'ENERGIA DI RIPOSO

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\,\Psi \qquad \Psi := e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\,\tilde{\Psi}$$

NOTA: IN REALTÀ QUESTO CONTO È EVITABILE SOTTRAENDO SEMPLICEMENTE IL TERMINE DI MASSA A RIPOSO DALL'HAMILTONIANA,
$H_D \to H_D - mc^2$

OTTENGO

$$i\hbar\dot{\tilde{\varphi}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\varphi\right) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\dot{\varphi} + mc^2 e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}}\varphi$$

AVENDO SOTTRATTO IL TERMINE DI MASSA (È UNA TRASFORMAZIONE CANONICA SULL'EQUAZIONE DI DIRAC) AVRÒ UN'ENERGIA PICCOLA PER BASSI IMPULSI E QUESTO PERMETTERÀ DI FARE APPROSSIMAZIONI.

OTTENGO

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\varphi} = e\phi\varphi + c\,\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi}\,\chi \\ i\hbar\dot{\chi} = c\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi}\,\varphi + (-2mc^2 + e\phi)\chi \end{cases} \tag{I}$$

RICORDIAMO CHE IL PROBLEMA "LIBERO" AMMETTEVA COME SOLUZIONI

$$\underbrace{mc^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad mc^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{ENERGIE POSITIVE}} \quad -mc^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad -mc^2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

IL NOSTRO RISCALAMENTO È EFFICACE SULLE SOLUZIONI A ENERGIA POSITIVA, QUINDI ORA PONIAMO L'ATTENZIONE SU QUELLE.

NEL LIMITE NON RELATIVISTICO VOGLIO APPROSSIMARE LE (I).
NELLA SECONDA, IN

$$(-2mc^2 + \underset{\sim}{e\phi})\chi$$

VINCE SICURAMENTE IL PRIMO TERMINE E ANCHE SU $i\hbar\dot{\chi}$ (LA DERIVATA TIRA QUÌ L'ENERGIA PERCHÉ IL TEMPO COMPARE SOLO IN $e^{-i\frac{H'}{\hbar}t}$). RIMANE

$$\chi = \frac{\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi}\,\varphi}{2mc}$$

NEL LIMITE NON RELATIVISTICO χ È PICCOLA:

$$\chi \sim \frac{mv}{mc} = \frac{v}{c} \ll 1$$

NELLA PRIMA OTTENGO, SOSTITUENDO QUANTO TROVATO,

$$i\hbar\dot{\varphi} = \frac{c(\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi})^2}{2mc}\varphi + e\phi\,\varphi = \left[\frac{(\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi})^2}{2m} + e\phi\right]\varphi$$

SE LA PARTICELLA FOSSE LIBERA (SENZA CAMPO MAGNETICO),

$$\underline{\pi} \to \underline{p}$$

$$(\underline{\sigma}\cdot\underline{p})^2 = p_i p_j \sigma_i \sigma_j \overset{*}{=} \frac{1}{2} p_i p_j \{\sigma_i, \sigma_j\} = p_i p_j \delta_{ij} = \underline{p}^2$$

$$i\hbar\dot{\varphi} \to \left(\frac{\underline{p}^2}{2m} + e\phi\right)\varphi$$

*NOTA: SI È MANGIATO IL COMMUTATORE $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ MA TANTO È ANTISIMMETRICO MENTRE $p_i p_j$ È SIMMETRICO. SOTTO LO SI FA PER ESTESO.

NEL CASO DI INTERAZIONE,

$$\underline{\pi} = \underline{p} - e\underline{A}$$

E LE COMPONENTI $\pi_i \pi_j$ NON COMMUTANO: ALLORA ($[\underline{\sigma}, \underline{\pi}] = 0$)

$$
\begin{aligned}
(\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi})^2 &= \pi_i \pi_j \sigma^i \sigma^j \\
&= \pi_i \pi_j \left(\frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\} + \frac{1}{2}[\sigma_i, \sigma_j]\right) \\
&= \pi_i \pi_j (\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) \\
&= \underline{\pi}^2 + i\varepsilon_{ijk}\pi_i \pi_j \sigma_k \\
&= \underline{\pi}^2 + i\varepsilon_{ijk}\Big(\frac{1}{2}[\pi_i, \pi_j] + \underbrace{\frac{1}{2}\{\pi_i, \pi_j\}}_{\text{SIMMETRICO}}\Big)\sigma_k \\
&= \underline{\pi}^2 + \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}[\pi_i, \pi_j]\sigma_k
\end{aligned}
$$

VEDIAMO QUANTO VALE

$$[\pi_i, \pi_j] = \left[p_i - \frac{e}{c}A_i, p_j - \frac{e}{c}A_j\right] = -\frac{e}{c}[p_i, A_j] - \frac{e}{c}[A_i, p_j]$$

DOVE

$$[p_i, A_j] = -i\hbar[\nabla_i, A_j] = -i\hbar \nabla_i A_j$$

INFATTI

$$\left[\frac{d}{dx}, A(x)\right]\psi = \frac{d}{dx}[A(x)\psi] - A\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{d}{dx}A(x)\right)\psi$$

ALLORA

$$[\pi_i, \pi_j] = -\frac{e}{c}(-i\hbar)\partial_i A_j + \frac{e}{c}(-i\hbar)\partial_j A_i = i\hbar\frac{e}{c}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$$

E INFINE

$$(\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi})^2 = \underline{\pi}^2 - \frac{\hbar e}{2c}\varepsilon_{ijk}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\sigma_k$$

$$= \underline{\pi}^2 - \frac{\hbar e}{2c}2(\nabla \wedge \underline{A})\cdot\underline{\sigma}$$

$$= \underline{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c}\underline{B}\cdot\underline{\sigma}$$

ABBIAMO OTTENUTO

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\pi^2}{2m} + e\phi\varphi - \frac{e\hbar}{2mc}\underline{B}\cdot\underline{\sigma}\varphi$$

$$= \frac{\left(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2}{2m} + e\phi\varphi - \frac{e}{mc}\underline{B}\cdot\underline{S}\varphi \qquad \underline{S} = \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}$$

NEL LIMITE DI BASSE ENERGIE L'EQUAZIONE DI DIRAC SI RIDUCE A UN'EQUAZIONE A DUE COMPONENTI (EQUAZIONE DI PAULI).

RICONOSCIAMO IL MOMENTO MAGNETICO DELL'ELETTRONE

$$\underline{\mu} = \frac{e}{mc}\underline{S}$$

DOVE $\underline{S}$ È LO SPIN: NON È INTERPRETABILE COME UN MOMENTO ANGOLARE, PERCHÉ IL RAPPORTO GIROMAGNETICO È IL DOPPIO DI QUELLO CLASSICO. SPERIMENTALMENTE, TALE RAPPORTO È CIRCA 2 E NON ESCE DALLA TEORIA PERCHÉ ABBIAMO TRASCURATO LA CONTROREAZIONE DELL'ELETTRONE SUL CAMPO (SI VEDE IN QED).

LA TEORIA PREVEDE CHE I LIVELLI NON DIPENDANO DALL' ORIENTAZIONE DELLO SPIN, MENTRE SAPPIAMO CHE NON È VERO: VEDREMO CHE CIÒ È DOVUTO ALL' EFFETTO SPIN-ORBITA, CHE NON È ELETTROMAGNETICO.

★ NELL' EQUAZIONE DI PAULI SONO CONSERVATI CONTEMPORANEAMENTE IL MOMENTO ANGOLARE ORBITALE E QUELLO DI SPIN; INVECE NELL' EQUAZIONE DI DIRAC NON SI CONSERVA

$\underline{L} = \underline{r} \wedge \underline{p}$

PER VEDERLO, BASTA MOSTRARE CHE NON COMMUTA CON H:

$$[\underline{r} \wedge \underline{p}, (c\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta mc^2)]$$
$$= [\underline{r} \wedge \underline{p}, c\underline{\alpha} \cdot \underline{p}] = c[\underline{r} \wedge \underline{p}, \underline{\alpha} \cdot \underline{p}] = c[\underline{r}, \underline{\alpha} \cdot \underline{p}] \wedge \underline{p}$$

INFATTI NEL CASO LIBERO LE p_i COMMUTANO. DETTE x_i LE COMPONENTI DI $\underline{r}$,

$$[x_i, \alpha_j p_j] = \alpha_j [x_i, p_j] = i\hbar \alpha_j \delta_{ij} = i\hbar \alpha_i$$
$$[\underline{L}, H_D] = i\hbar c(\underline{\alpha} \wedge \underline{p})$$

INTRODUCIAMO LO SPIN

$$\underline{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{\sigma} \end{pmatrix}$$

NOTA:
1) NON È $\propto \underline{\sigma}$, PERCHÉ $\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$
2) È LA GENERALIZZAZIONE A 4 COMPONENTI DI $\underline{S} = \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}$.

E VERIFICHIAMO SE

$$[\underline{S}, H_D] = [\underline{S}, c\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta mc^2] = [\underline{S}, c\underline{\alpha} \cdot \underline{p}] = c[\underline{S}, \underline{\alpha} \cdot \underline{p}]$$

NON È DIFFICILE DIMOSTRARE CHE

$$\underline{J} = (\underline{r} \wedge \underline{p} + \underline{S})$$
$$[\underline{J}, H_D] = 0$$

NOTA:
$$[S_i, \alpha_j p_j] = \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}\right\} p_j$$
$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix} p_j = i\hbar \varepsilon_{ijk} \alpha_k p_j = i\hbar (\underline{p} \wedge \underline{\alpha})_i$$

QUINDI SEPARATAMENTE NON SI CONSERVANO NÉ $\underline{L}$, NÉ $\underline{S}$: SI CONSERVA INVECE $\underline{J}$.

NOTA: SE $\underline{J}$ È CONSERVATO E $\underline{L}$ NO, EVIDENTEMENTE NON LO È NEANCHE $\underline{S}$.

★ CHE COSA SUCCEDE SE AGGIUNGO ALL' HAMILTONIANA UN POTENZIALE

$V = V(\underline{r})$

NOTA: RIMUOVO PERÒ IL CAMPO ELETTROMAGNETICO.

(COME QUELLO COULOMBIANO)?

NEL LIMITE NON RELATIVISTICO AVREI $[\underline{S}, H] = 0$, MA IN REALTÀ I LIVELLI ENERGETICI DIPENDONO DA $\underline{S}$: CERCHIAMO UN'APPROSSIMAZIONE CHE LO SPIEGHI.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta mc^2 \right) \psi + V(\underline{r}) \psi$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varphi}} \\ \dot{\tilde{\chi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 + V & c(\underline{\sigma} \cdot \underline{p}) \\ c(\underline{\sigma} \cdot \underline{p}) & -mc^2 + V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\tilde{\varphi}} = (mc^2 + V)\tilde{\varphi} + c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \tilde{\chi} \\ i\hbar \dot{\tilde{\chi}} = c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \tilde{\varphi} + (-mc^2 + V)\tilde{\chi} \end{cases}$$

COME PRIMA, FACCIO UNA TRASFORMAZIONE CANONICA PER SOTTRARRE L'ENERGIA A RIPOSO E OTTENGO

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\varphi} = V\varphi + c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \chi \\ i\hbar \dot{\chi} = c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \varphi + (-2mc^2 + V)\chi \end{cases}$$

POICHÉ

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

CERCO GLI AUTOVALORI DELL'EQUAZIONE DI DIRAC

$$\begin{cases} E\varphi = V\varphi + c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \chi \\ E\chi = c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \varphi + (-2mc^2 + V)\chi \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

STAVOLTA IL TERMINE IN V NON LO IGNORO, ALTRIMENTI MI PERDO DI NUOVO SPIN-ORBITA. SCRIVO INVECE

$$(2mc^2 + E - V)\chi = c\underline{\sigma} \cdot \underline{p}\, \varphi$$

$$\chi = (2mc^2 + E - V)^{-1} c(\underline{\sigma} \cdot \underline{p})\varphi = \frac{1}{2mc^2}\left(1 + \frac{E - V}{2mc^2}\right)^{-1} c(\underline{\sigma} \cdot \underline{p})\varphi$$

$$\simeq \frac{1}{2mc}\left(1 - \frac{(E - V)}{2mc^2}\right)(\underline{\sigma} \cdot \underline{p})\varphi$$

NOTA: $(E-V)$ È UN OPERATORE, NON STO DIVIDENDO A DESTRA E A SINISTRA DELL'UGUALE, MA PIUTTOSTO MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER L'OPERATORE INVERSO.

ABBIAMO TROVATO

$$\chi = \frac{1}{2mc}(\underline{\sigma} \cdot \underline{p})\varphi - \frac{1}{4m^2c^3}(E - V)(\underline{\sigma} \cdot \underline{p})\varphi$$

SOSTITUENDOLA NELLE (II)

$$E\varphi = V\varphi + \frac{1}{2m}\underline{p}^2\varphi - \frac{1}{4m^2c^2}(\underline{\sigma}\cdot\underline{p})(E-V)(\underline{\sigma}\cdot\underline{p})\varphi$$

$$= V\varphi + \frac{1}{2m}\underline{p}^2\varphi - \frac{1}{4m^2c^2}\left\{(E-V)\underline{p}^2 + \left[(\underline{\sigma}\cdot\underline{p})(E-V)\right](\underline{\sigma}\cdot\underline{p})\right\}\varphi$$

DOVE SI È USATO

$$(\underline{\sigma}\cdot\underline{p})^2 = \underline{p}^2$$

· <u>RICAPITOLANDO</u>

$$\underline{J} = \underline{r}\wedge\underline{p} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{\sigma}\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\underline{p}\cdot\underline{\alpha} + \beta mc^2\right)\psi$$

$$H_D = c\underline{p}\cdot\underline{\alpha} + \beta mc^2$$

SE CI LIMITIAMO A CONSIDERARE $E>0$, QUESTA DESCRIVE UNA PARTICELLA LIBERA MASSIVA. IN PRESENZA DI UN POTENZIALE INVARIANTE PER ROTAZIONI,

$$H_D = c\underline{p}\cdot\underline{\alpha} + \beta mc^2 + V(r)$$

I SUOI AUTOVALORI (e.g. ATOMO DI H) COMPRENDONO IL TERMINE DI ENERGIA A RIPOSO. LO POSSIAMO SOTTRARRE E OTTENIAMO

$$H_D = c\underline{p}\cdot\underline{\alpha} + \beta mc^2 + V(r) - mc^2$$

$$H_D = \begin{pmatrix} V & c\underline{p}\cdot\underline{\sigma} \\ c\underline{p}\cdot\underline{\sigma} & -2mc^2+V\end{pmatrix}$$

PER UN e^- NON RELATIVISTICO, IL TERMINE 'E' IN

$$H_D\psi = E\psi$$

È PICCOLO. RISOLVIAMO IL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

$$\begin{pmatrix} V & c\underline{p}\cdot\underline{\sigma} \\ c\underline{p}\cdot\underline{\sigma} & -2mc^2+V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$$

CIOÈ (SENZA APPROSSIMAZIONI)

$$\begin{cases} V\varphi + c(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\chi = E\varphi \\ c(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi + (-2mc^2 + V)\chi = E\chi \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

SI È VISTO CHE χ È PICCOLA E φ È GRANDE NEL CASO NON RELATIVISTICO: INFATTI (OCCHIO CHE $\underline{p}\cdot\underline{\sigma}$ NON COMMUTA CON $V(r)$)

$$\chi = \frac{1}{(2mc^2 - V + E)} c(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{E-V}{2mc^2}} \frac{c\,\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{2mc^2}\varphi \simeq \left(1 + \frac{V-E}{2mc^2}\right)\frac{\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{2mc}\varphi$$

SOSTITUITA NELLA PRIMA DELLE (I) HO, RICORDANDO $(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})^2 = p^2$,

$$E\varphi = V\varphi + (\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\left(1 + \frac{V-E}{2mc^2}\right)\frac{\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{2m}\varphi$$

$$= \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\varphi + (\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\frac{(V-E)}{4m^2c^2}(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi$$

CHE DIFFERISCE DALL'EQUAZIONE DI S. SOLO PER IL SECONDO TERMINE. POICHÉ $(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})$ È UN OPERATORE DIFFERENZIALE, APPLICO LA REGOLA DI LEIBNIZ (DERIVATA DI UN PRODOTTO) E OTTENGO

$$E\varphi = \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\varphi + \frac{V-E}{4m^2c^2}\underline{p}^2\varphi + \frac{(\underline{p}\cdot\underline{\sigma}\,V)}{4m^2c^2}(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi$$

POICHÉ AL PRIMO ORDINE (AL DENOMINATORE HO $4m^2c^2$, PERDO GLI ORDINI SUCCESSIVI)

$$V - E \simeq -\frac{p^2}{2m}$$

NOTA: ALTRIMENTI AVREI DOVUTO RISOLVERE PER 'E' DI NUOVO.

$$E\varphi = \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\varphi - \frac{\underline{p}^2\cdot\underline{p}^2}{8m^3c^2}\varphi + \frac{(\underline{p}\cdot\underline{\sigma}\,V)}{4m^2c^2}\underline{p}\cdot\underline{\sigma}\,\varphi$$

E RICONOSCIAMO

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\underline{p}^2} - mc^2 \simeq \frac{\underline{p}^2}{2m} - \frac{\underline{p}^2\cdot\underline{p}^2}{8m^3c^2}$$

NOTA:
$$mc^2\sqrt{1 + p^2/m^2c^2} \simeq mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^2 p^2}{m^4c^4}\right)$$

CHI È L'ULTIMO TERMINE?

CALCOLIAMO

$$[(\underline{\ell}\cdot\underline{\sigma})V]\,\underline{\ell}\cdot\underline{\sigma} = -\hbar^2(\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}V)\,\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}$$

MA

$$\underline{\nabla}V(r) = V'(r)\,\underline{\nabla}r = V'(r)\,\hat{r} = \frac{V'(r)}{r}\,\underline{r}$$

QUINDI

$$[(\underline{\ell}\cdot\underline{\sigma})V]\,\underline{\ell}\cdot\underline{\sigma} = -\hbar^2\frac{V'(r)}{r}(\underline{r}\cdot\underline{\sigma})(\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla})$$

DOVE

$$(\underline{r}\cdot\underline{\sigma})(\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}) = x_i\sigma_i\sigma_j\nabla_j = x_i\nabla_j\left\{\frac{\{\sigma_i,\sigma_j\}+[\sigma_i,\sigma_j]}{2}\right\}$$

$$= x_i\nabla_j\frac{1}{2}\left\{2\delta_{ij}+2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right\} = \underline{x}\cdot\underline{\nabla}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k x_i\nabla_j$$

INFATTI $\underline{\sigma}$ COMMUTA CON $\underline{\nabla}$ E $\underline{x}$. TROVIAMO

$$[(\underline{\ell}\cdot\underline{\sigma})V]\,\underline{\ell}\cdot\underline{\sigma} = -\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{V'}{r}\left[\underline{x}\cdot\underline{\nabla}+i(\underline{x}\wedge\underline{\nabla})\cdot\underline{\sigma}\right]$$

IN CUI RICONOSCIAMO IL TERMINE DI INTERAZIONE <u>SPIN-ORBITA</u>.

SI NOTI CHE

$$\frac{\underline{x}\cdot\underline{\nabla}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \quad \left(= \hat{r}\cdot\underline{\nabla},\ \text{O ANCHE } \frac{x^i}{r}\partial_i f(r) = \frac{x^i}{r}f'(r)\frac{x_i}{r} = \underbrace{\frac{x^ix_i}{r^2}}_{=1}f'(r)\right)$$

PERCIO' NELL' HAMILTONIANA COMPARE

$$H_{LS} = -\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}V'(r)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2m^2c^2}\cdot\frac{V'(r)}{r}(\underline{L}\cdot\underline{S})$$

ED È QUESTO A NON PERMETTERE LA CONSERVAZIONE INDIPENDENTE DI $\underline{L}$ E $\underline{S}$.

METRICA INDOTTA DALL' EQUAZIONE DI DIRAC

SIA I FOTONI CHE I QUANTI DEL CAMPO DI K-G ERANO BOSONI:
STUDIEREMO ORA I QUANTI DEL CAMPO DI DIRAC.

RICORDIAMO, DALLO STUDIO DEI COVARIANTI BILINEARI, CHE

$\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$

SI TRASFORMA COME UN QUADRIVETTORE.

MOSTRIAMO ORA CHE

$$\partial_\mu\left(\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\right) = 0$$

RICORDANDO

$$\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0$$

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi = 0$$

$$-i\partial_\mu\Psi^+\gamma^{\mu+} - m\Psi^+ = 0$$

$$-i\partial_\mu\underbrace{\Psi^+}_{\gamma^0\gamma^0}\gamma^{\mu+}\gamma^0 - m\bar{\Psi} = 0$$

$$i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0$$

(EQUAZIONE DI DIRAC CONIUGATA)

NOTA: OCCHIO CHE $\partial_\mu^+ \neq -\partial_\mu$. ERA VERO USANDO LA METRICA TRIDIMENSIONALE (LO SI VERIFICA INTEGRANDO PER PARTI), $\int\psi^*\psi\,dx$. QUI LA METRICA È QUELLA DEL PRODOTTO RIGA PER COLONNA, QUINDI QUANDO SCRIVO $+$ INTENDO SEMPLICEMENTE IL TRASPOSTO CONIUGATO.

NOTA: $[\partial_\mu, \gamma^\mu] = 0$ MA $[\gamma^\mu, \Psi] \neq 0$.

$$\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0 = \gamma^\mu$$

O ANCHE, IN FORMA COMPATTA,

$$\bar{\Psi}\, i\overleftarrow{\not{\partial}} + m\bar{\Psi} = 0$$

CALCOLIAMO ALLORA

$$i\partial_\mu\left(\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\right) = \bar{\Psi}\, i\not{\partial}\Psi + i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi$$

$$= \bar{\Psi}m\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = 0$$

ABBIAMO TROVATO LA CORRENTE CONSERVATA $J^\mu = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$, CIOÈ

$$\frac{d}{dt}\int_\infty d^3x\,\bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \frac{d}{dt}\int_\infty d\underline{x}\,\Psi^+\gamma^0\gamma^0\Psi = \frac{d}{dt}\int_\infty d\underline{x}\,\Psi^+\Psi$$

$$\shortparallel$$

$$\int_\infty d^3x\,\partial_0(\bar{\Psi}\gamma^0\Psi) = -\int_{V^\infty} d^3x\,\partial_i(\bar{\Psi}\gamma^i\Psi) = 0$$

PERCIÒ LA NORMA DI DIRAC

NOTA: RICHIEDERE UNA NORMA INDIPENDENTE DAL TEMPO IMPLICA CHE L'EVOLUZIONE TEMPORALE SIA UNITARIA.

$$\int_{\infty} d\underline{x}\, \psi^{+}\psi$$

È INDIPENDENTE DAL TEMPO. È SEMPRE POSITIVA:

$$\psi_a^* \psi_a = \sum_a |\psi_a|^2$$

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI DIRAC LIBERA

SCEGLIAMO

$$\psi(x) = e^{-ipx}\, w(p)$$

DOVE $w(p)$ È UN OGGETTO A 4 COMPONENTI (SPINORE) CHE DIPENDE SOLO DALL'IMPULSO. LA DIPENDENZA DA x È SOLO IN

$$e^{-ipx} = e^{-ip_0x^0 - ip_ix^i} = e^{-ip^0x^0}\, e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}}$$

NOTA: TI ERI MAI ACCORTO CHE $e^{-ip^0x^0} \sim e^{-iE_it} \sim e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$?

(L'ULTIMA È LA FORMA TRIDIMENSIONALE). SOSTITUITA NELL'EQUAZIONE DI DIRAC DÀ (p^μ SONO 4 NUMERI, γ^μ 4 MATRICI E QUINDI COMMUTANO)

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{-ip_\mu x^\mu} = i(-i)\, p_\mu \gamma^\mu e^{-ipx} = p_\mu \gamma^\mu e^{-ipx}$$

NOTA: POICHÉ $w = w(p)$, $\not\partial$ LO TRATTA COME UNA COSTANTE.

PERCIÒ HO SOLO

$$\underline{(\not p - m)\, w(p) = 0}$$

RICORDANDO $\gamma^0 = \mathrm{diag}(1,-1)$, $\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ -\underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ $(\gamma^i = \beta\alpha^i)$,

NOTA: CERCO LA RELAZIONE DI DISPERSIONE PER p^μ.

$$(p_0\gamma^0 - p^i\gamma^i - m)\, w(p)$$

$$= \begin{pmatrix} p^0 - m & -\underline{p}\cdot\underline{\sigma} \\ \underline{p}\cdot\underline{\sigma} & -p^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \qquad (I)$$

$$\begin{cases} (p^0 - m)\varphi - (\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\chi = 0 \\ (\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi - (p^0 + m)\chi = 0 \end{cases}$$

NOTA: φ, χ SONO SPINORI BIDIMENSIONALI.

SI NOTI CHE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE (I) NON SI CALCOLA IN MODO NAÏF PERCHÉ SONO BLOCCHI 2x2. AGGIRIAMO IL PROBLEMA RICAVANDOCI χ E SOSTITUENDOLA NELLA PRIMA EQUAZIONE.

SI HA ALLORA

$$\chi = \frac{(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi}{p^0+m}$$

$$(p^0-m)\varphi - \frac{\underline{p}^2}{p^0+m}\varphi = 0$$

$$\frac{(p^{0\,2}-m^2-\underline{p}^2)}{p^0+m}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad p^0 = \pm\sqrt{m^2+\underline{p}^2} := \pm E_{\underline{p}}$$

CIASCUNA SOLUZIONE HA INOLTRE MOLTEPLICITÀ 2 (LA SOLUZIONE STA SU UN MANIFOLD BIDIMENSIONALE, SPIN $\uparrow$ E $\downarrow$, DA CUI L'ENERGIA NON DIPENDE). PER CONVENZIONE, USEREMO (ENERGIE POSITIVE)

$$p^0 > 0$$

$$e^{-ip\cdot x}\, u(\underline{p})$$

MENTRE PER LE ENERGIE NEGATIVE USEREMO

$$e^{ipx}\, v(\underline{p})$$

DOVE p^0 È ANCORA POSITIVO; u E v SONO SPINORI. SI NOTI CHE HO CAMBIATO ANCHE IL SEGNO DI $\underline{p}$ SPAZIALE, MA TANTO SI INTEGRA SU TUTTI I $\underline{p}$. NOTIAMO CHE u E v SODDISFANO

$$\begin{cases} (\not{p} - m)\, u = 0 \\ (\not{p} + m)\, v = 0 \end{cases}$$

QUEST'ULTIMA RICAVATA INSERENDO NELL'EQUAZIONE DI DIRAC

$$(i\not{\partial} - m)\, e^{ipx} = 0$$

ALLORA, SCEGLIENDO LA SOLUZIONE CON $p^0 = E_{\underline{p}}$,

$$\chi = \frac{(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})}{E_{\underline{p}}+m}\varphi \qquad u(\underline{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{E_{\underline{p}}+m}\varphi \end{pmatrix}$$

DOVE $u(\underline{p})$ È SOLUZIONE PER φ SPINORE ARBITRARIO.

UNA POSSIBILE BASE PER φ (CHE FISSO TRAMITE LE CONDIZIONI INIZIALI) È

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NOTA: φ È LA POLARIZZAZIONE DELLA PARTICELLA ED È UNO SPINORE BIDIMENSIONALE.

PRENDENDO LA SOLUZIONE CON ENERGIA NEGATIVA

$$p^0 = -E_{\underline{p}}$$

$$-(E_{\underline{p}}+m)\varphi = (\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\chi$$

$$\varphi = -\frac{\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{E_{\underline{p}}+m}\chi$$

PERCIÒ GLI SPINORI A ENERGIA NEGATIVA SONO

$$v(\underline{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{E_{\underline{p}}+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

PER χ ARBITRARIO.

*COME NORMALIZZO LE SOLUZIONI? POTREI USARE LA METRICA DI DIRAC MA IN GENERE FACCIO UNA NORMALIZZAZIONE INTERMEDIA.

PRENORMALIZZO

$$\bar{u}u = u^+\gamma^0 u$$

$$\bar{v}v = v^+\gamma^0 v$$

NOTA: LA PRENORMALIZZAZIONE AVVIENE A $\underline{p}$ FISSATO E SUGLI SPINORI USANDO LA METRICA γ^0: $(Au,v)=(Au)^+\gamma^0 v$. IN UN SECONDO MOMENTO NORMALIZZO LE $\psi(x)$ CON LA METRICA DI DIRAC.

CHE DI PER SÈ NON SONO DEFINITI POSITIVI; TUTTAVIA

$$\bar{u}u = \left(\varphi^+, \frac{\varphi^+\underline{p}\cdot\underline{\sigma}}{E_{\underline{p}}+m}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \frac{(\underline{p}\cdot\underline{\sigma})\varphi}{E_{\underline{p}}+m}\end{pmatrix}$$

$$= \varphi^+\varphi - \frac{\varphi^+\underline{p}^2\varphi}{(E_{\underline{p}}+m)^2} = \varphi^+\varphi\left(1-\frac{\underline{p}^2}{(E_{\underline{p}}+m)^2}\right) > 0$$

$$\bar{v}v < 0$$

NOTA: QUESTA NORMA NON È DEFINITA POSITIVA, QUELLA DI DIRAC SÌ, PERCIÒ $\varphi^+\varphi > 0$.

PERCIÒ NORMALIZZERÒ A

$$\bar{u}u = 1$$

$$\bar{v}v = -1$$

E LO FACCIO IMPONENDO ($\lambda = 1,2$, GLI INDICI DI φ_1 E φ_2

$$\bar{u}(\underline{p},\lambda)\,u(\underline{p},\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\bar{v}(\underline{p},\lambda)\,v(\underline{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\bar{u}_\lambda(\underline{p})\,v_{\lambda'}(\underline{p}) = 0$$

VEDREMO CHE SI RITROVA LA FORMA

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3 p}{(\quad)} \left(\alpha(\underline{p}, r) u(p,r) e^{-ip\cdot x} + \beta(\underline{p}, r) v(p,r) e^{ip\cdot x} \right)$$

DEFINIAMO, PER LA NORMALIZZAZIONE INTERMEDIA, LA METRICA

$$(u_1, u_2)_{INT} = u_1^+ \gamma^0 u_2 = \bar{u}_1 u_2$$ (LORENTZ INVARIANTE)

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE IN QUESTA METRICA $\not p$ È HERMITIANO.

QUINDI

NOTA: SEGUONO $\bar{u}v = \bar{v}u = 0$. u E v SONO AUTOVETTORI DI $\not p$ CON AUTOVALORI DISTINTI $\pm m$, PERCIÒ SONO ORTOGONALI (P. 168 (ATRI)). BASTA MOSTRARE CHE $(\not p \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \not p \psi_2)$

$$E_{\underline{p}} = \sqrt{m^2 + \underline{p}^2}$$

$$u_\lambda(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_\lambda \\ \frac{\sigma \cdot p}{E_p + m} \varphi_\lambda \end{pmatrix} \qquad v_\lambda(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot p}{E_p + m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

PER CONVENZIONE,

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LE ONDE PIANE NORMALIZZATE CON LA METRICA DI DIRAC

$$\int \psi_1^+(x) \psi_2(x) \, d\underline{x}$$

SONO INVECE

(PROPRIO QUELL' $\frac{1}{\sqrt{E_p}}$ GARANTISCE LA COVARIANZA DELLA TEORIA, COME SI VEDRÀ IN CORSI PIÙ AVANZATI)

$$\psi^{(+)}_{\underline{p},\lambda}(x) = \sqrt{\frac{m}{E_p}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_\lambda(\underline{p}) e^{-ipx}$$

$$\int \psi^{(+)+}_{\underline{p},\lambda}(x) \psi^{(+)}_{\underline{p}',\lambda'}(x) \, d\underline{x} = \delta(\underline{p} - \underline{p}') \delta_{\lambda\lambda'}$$

E INFINE LA FORMA PIÙ GENERALE È DATA DALLA SOVRAPPOSIZIONE

$$\psi(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_\lambda(\underline{p}) u_\lambda(\underline{p}) e^{-ipx} + c^*_\lambda(\underline{p}) v_\lambda(\underline{p}) e^{ipx} \right)$$

* LE u_λ E LE v_λ FORMANO UNA BASE COMPLETA PER LE SOLUZIONI A OGNI $\underline{p}$ (QUINDI E_p) FISSATO. DATA LA MATRICE 4×4 $u\bar{u}$ (È UN PROIETTORE, $|u\rangle\langle u|$, MENTRE $\bar{u}u$ È UN NUMERO), QUESTO SI ESPRIME TRAMITE LA RELAZIONE DI COMPLETEZZA PER GLI SPINORI

DI DIRAC

NOTA: VISTO CHE LAVORIAMO A $\underline{p}$ FISSATO, VALE LA PENA DI SOTTINTENDERLO OVUNQUE.

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \left(u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p}) \oplus v_\lambda(\underline{p})\bar{v}_\lambda(\underline{p}) \right) = \mathbb{1}_4 \qquad (I)$$

DOVE L'OPERAZIONE $\oplus$ È DA DEFINIRSI; LA SI CONFRONTI CON

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = \mathbb{1}$$

DETTA I LA MATRICE IN (I), VERIFICHIAMO

$$I\, u_{\lambda'}(\underline{p}) = \sum_{\lambda=1}^{2} u_\lambda(\underline{p}) \underbrace{\bar{u}_\lambda(\underline{p}) u_{\lambda'}(\underline{p})}_{=\delta_{\lambda\lambda'}} \oplus \underbrace{0}_{} \quad \bar{u}_\lambda(\underline{p})v_{\lambda'}(\underline{p}) = 0$$

$$I\, v_{\lambda'}(\underline{p}) = \sum_{\lambda=1}^{2} 0 \oplus v_\lambda(\underline{p}) \underbrace{\bar{v}_\lambda(\underline{p}) v_{\lambda'}(\underline{p})}_{} = -\delta_{\lambda\lambda'}$$

PERCIÒ AL POSTO DI $\oplus$ METTIAMO UN SEGNO '$-$'. ALLORA

$$I = \sum_{\lambda=1}^{2} \left(u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p}) - v_\lambda(\underline{p})\bar{v}_\lambda(\underline{p}) \right)$$

DI QUESTI 4 PROIETTORI, I 2 u_λ RIGUARDANO LE ENERGIE POSITIVE E SODDISFANO

NOTA: CONTINUA A PENSARE $u\bar{u}$ COME $|u\rangle\langle u|$. $\not{p}|u\rangle = m|u\rangle$, QUINDI $\not{p}|u\rangle\langle u| = m|u\rangle\langle u|$.

$$(\not{p} - m)\, u_\lambda(\underline{p}) = 0$$

$$\not{p} \sum_{\lambda=1}^{2} u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p}) = m \sum_{\lambda=1}^{2} u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p})$$

$$(\not{p} - m) \sum_{\lambda=1}^{2} u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p}) = 0$$

NOTA: DEFINISCITI I DUE PROIETTORI
$\Lambda^{(+)}(\underline{p}) = \sum_\lambda u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p})$
$\Lambda^{(-)}(\underline{p}) = -\sum_\lambda v_\lambda(\underline{p})\bar{v}_\lambda(\underline{p})$

ALLORA QUESTA MATRICE È PROPORZIONALE A $(\not{p} + m)$: ANCHE LEI SODDISFA

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = \not{p}^2 - m^2 = p_\mu \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu - m^2$$

$$= p_\mu p_\nu \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu}} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Big) - m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = p^2 - m^2 = 0$$

NOTA: CI SAREBBE QUALCOSA DA RIDIRE SULLA PRESUNTA UNICITÀ DELLA SOLUZIONE CHE PERMETTE DI AFFERMARE QUESTA PROPORZIONALITÀ. UNO PERÒ PUÒ DIMOSTRARLO "PER ESAUSTIONE" PROVANDOLO SULLE 16 MATRICI DI DIRAC.

ALLORA INTRODUCO LA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ α E SCRIVO

$$\sum_{\lambda=1}^{2} u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p}) = \alpha(\not{p}+m)$$

PERCHÉ SIA UN PROIETTORE,

$$\alpha^2(\not{p}+m)^2 = \alpha(\not{p}+m)$$

$$\alpha^2(m^2+m^2+2m\not{p}) = \alpha(\not{p}+m)$$

NOTA: SI È VISTO CHE $\not{p}^2 = p^2 = m^2$.

$$\alpha^2 2m(\not{p}+m) = \alpha(\not{p}+m) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2m}$$

RIPETENDO IL RAGIONAMENTO PER v,

NOTA: CHE SODDISFA $(\not{p}+m)v = 0$

$$\sum_\lambda v_\lambda(\underline{p})\bar{v}_\lambda(\underline{p}) = \frac{\not{p}-m}{2m}$$

$$I = \underbrace{\frac{\not{p}+m}{2m}}_{\sum_\lambda u_\lambda(\underline{p})\bar{u}_\lambda(\underline{p})} - \underbrace{\frac{\not{p}-m}{2m}}_{\sum_\lambda v_\lambda(\underline{p})\bar{v}_\lambda(\underline{p})}$$

NOTA: SONO I DUE OPERATORI DI PROIEZIONE SUGLI STATI AD ENERGIA RISPETTIVAMENTE POSITIVA E NEGATIVA.

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO DI DIRAC

LA DENSITÀ LAGRANGIANA DELL'EQUAZIONE DI DIRAC È

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\Psi$$

$$S = \int d^4x\, \bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\Psi$$

NOTA: IN EFFETTI USANDO EULERO-LAGRANGE È MENO IMMEDIATO.

PER VERIFICARLO USO LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE, OPPURE VARIO IN MODO INDIPENDENTE Ψ E $\bar{\Psi}$ (CHE PER ORA NON È $\Psi^+\gamma^0$) E

$$\delta S = \int d^4x\left(\delta\bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\Psi + \bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\delta\Psi\right) \equiv 0$$

IL PRIMO PEZZO MI DÀ $(i\not{\partial}-m)\Psi = 0$, MENTRE INTEGRANDO PER PARTI IL SECONDO

$$\int\bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\delta\Psi = \int\bar{\Psi}\, i\gamma^\mu\partial_\mu\delta\Psi - \int m\bar{\Psi}\delta\Psi = -\int\partial_\mu\bar{\Psi}\, i\gamma^\mu\delta\Psi - m\int\bar{\Psi}\delta\Psi \equiv 0$$

VERO SE

$$i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}}+m) = 0$$

I MOMENTI CANONICI CONIUGATI SONO

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^+\gamma^0\gamma^0 = i\psi^+$$

(L'IDENTIFICAZIONE $\bar{\psi}\gamma^0 = \psi^+$ SI FA DOPO AVER SCRITTO LE EQUAZIONI DEL MOTO). INVECE

$$\Pi_{\bar{\psi}} = 0$$

MA NON È COSÌ GRAVE, UNA VOLTA COLLEGATE ψ E $\bar{\psi}$.

I COMMUTATORI VALGONO

$$[\psi_a(x), \psi_b(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

$$[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\gamma^0]_{x^0=y^0} = [\psi_a(x), \psi_b^+(y)]_{x^0=y^0} = i\,\delta(\underline{x}-\underline{y})\,\delta_{ab}$$

DENTRO

$$\psi(x) = \sum_{\lambda=1}^{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\left(b_\lambda(\underline{p})\,u_\lambda(\underline{p})\,e^{-ipx} + c_\lambda^+(\underline{p})\,v_\lambda(\underline{p})\,e^{ipx}\right) \qquad (I)$$

I COEFFICIENTI $b_\lambda(\underline{p})$ E $c_\lambda(\underline{p})$ DIVENTANO OPERATORI CON REGOLE DI COMMUTAZIONE

$$[b_\lambda(\underline{p}), b^+_{\lambda'}(\underline{p}')] = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\underline{p}-\underline{p}')$$

NOTA: COME POSSO OTTENERE TUTTE LE REGOLE SE MANCA $\Pi_{\bar{\psi}}$? IN REALTÀ RICAVO QUELLE DA Π_ψ E POI PRENDO GLI HERMITIANI.

CALCOLABILI INVERTENDO LE RELAZIONI DI ORTONORMALITÀ SULLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI DIRAC.

L'ENERGIA VALE (SOTTINTENDENDO LA SOMMA SU α INDICE DI DIRAC)

$$H = \int d\underline{x}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi}\;\Big(+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}}_{=0}\dot{\bar{\psi}}\Big) - \bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi\right]$$

$$= \int d\underline{x}\left[i\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \bar{\psi}\,i\gamma^0\partial_0\psi - \bar{\psi}\,i\gamma^i\partial_i\psi + m\bar{\psi}\psi\right]$$

$$= \int d\underline{x}\left[-i\,\psi^+\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + m\,\psi^+\gamma^0\psi\right]$$

RICORDANDO

$$\gamma^i = \beta\alpha^i$$

$$\gamma^0 = \beta$$

SI HA LA QUANTITÀ CONSERVATA (DAL TEOREMA DI NOETHER)

$$H = \int d\underline{x}\, \psi^+ (\underline{\alpha}\cdot\underline{p} + \beta m)\psi \qquad (\mathrm{II})$$

SE ψ FOSSE UN NUMERO E NON UN OPERATORE, QUESTO SAREBBE IL VALOR MEDIO DELL' HAMILTONIANA DI DIRAC.

IN PRATICA IL PRODOTTO $\psi^+\psi$ PUÒ RESTITUIRE 4 PEZZI: 2 OPERATORI DI CREAZIONE, 2 DI ANNICHILAZIONE O UNO PER TIPO. MA PERCHÉ H SIA CONSERVATA, I PRIMI DUE CASI SONO INAMMISSIBILI:

$$\psi^+\psi \sim (b^+ e^{ipx} + c e^{-ipx})(b e^{-ipx} + c^+ e^{ipx})$$

QUINDI LE FASI DEVONO NECESSARIAMENTE CANCELLARSI, PERCHÉ QUEST' OGGETTO NON DEVE DIPENDERE DAL TEMPO; SE AVESSI INSIEME b^+ E c^+ QUELLA FASE NON LA COMPENSA NESSUNO. IN EFFETTI INTEGRANDO IN $d\underline{x}$ SI VEDREBBE CHE TALI TERMINI SPARISCONO.

C'È $(\underline{\alpha}\cdot\underline{p} + m\beta)$ TRA ψ^+ E ψ: COSA CAMBIA? IN REALTÀ I DUE PEZZI DI CUI È COMPOSTA ψ SONO AUTOFUNZIONI DI H_D:

$$H_D\, b_\lambda(\underline{p}) u_\lambda(\underline{p}) e^{-ipx} = E_{\underline{p}}\,(\quad)$$

$$H_D\, c^+_\lambda(\underline{p}) v_\lambda(\underline{p}) e^{ipx} = -E_{\underline{p}}\,(\quad)$$

NOTA: VOGLIO SOSTITUIRE I CAMPI ψ E ψ^+ (VEDI (I)) NELL' ENERGIA (II).

$$H = \int d\underline{x} \sum_{\lambda=1}^{2} \left[E_{\underline{p}}\, b^+_\lambda(\underline{p}) b_\lambda(\underline{p}) - E_{\underline{p}}\, c_\lambda(\underline{p}) c^+_\lambda(\underline{p}) \right]$$

→ CON IL BUON ORDINAMENTO È C^+C.

CHE È CATASTROFICA: NON È DEFINITA POSITIVA!

CON K-G NON SUCCEDEVA: IN SECONDA QUANTIZZAZIONE $H \geq 0$, RISOLVENDO IL PROBLEMA DELLE ENERGIE NEGATIVE.

PROVIAMO A CAMBIARE LE REGOLE DI COMMUTAZIONE METTENDOCI GLI ANTICOMMUTATORI:

$$\{b_\lambda(\underline{p}), b^+_{\lambda'}(\underline{p}')\} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\underline{p}-\underline{p}') \qquad \{c_\lambda(\underline{p}), c_{\lambda'}(\underline{p}')\} = 0$$

$$\{\psi_a(x), \psi^+_b(y)\}_{x^0=y^0} = \delta(\underline{x}-\underline{y})\delta_{ab} \qquad \{b_\lambda(\underline{p}), c_{\lambda'}(\underline{p}')\} = 0$$

COSÌ NON POSSO AVERE INFINITE PARTICELLE DI TIPO C CHE RENDONO $H<0$ (E CON ENERGIE NEGATIVE INDEFINITAMENTE GRANDI).

INFATTI

$$C_\lambda^+(\underline{p})\,C_\lambda^+(\underline{p})\,|0\rangle = 0 \qquad \{c^+, c^+\} = c^{+2} + c^{+2} = 0 \Rightarrow c^{+2} = 0$$

CON IL BUON ORDINAMENTO,

$$H = :\int d\underline{p} \sum_{\lambda=1}^{2} \left[E_p\, b_\lambda^+(\underline{p})\, b_\lambda(\underline{p}) + E_p\, C_\lambda^+(\underline{p})\, C_\lambda(\underline{p}) \right]:$$

DOVE HO DI NUOVO SOTTRATTO IL PEZZO INFINITO E IL SEGNO CAMBIA:

$$\{a, a^+\} = 1$$

$$a a^+ = \underbrace{1}_{\text{COSTANTE INFINITA}} - a^+ a \qquad :a a^+: = -a^+ a$$

NOTA: IL BUON ORDINAMENTO NON È "METTERE GLI OPERATORI DI CREAZIONE A DESTRA", MA SOTTRARRE I TERMINI DI ENERGIA INFINITA.

COSTRUIAMO QUINDI L'IMPULSO

NOTA: $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - m)\Psi$, QUINDI $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}} = \bar{\Psi} i\gamma^0 = i\Psi^+\gamma^0\gamma^0 = i\Psi^+$

$$p^i = -\int d\underline{x}\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}}\, \partial_i\Psi = -i\int \Psi^+ \nabla_i \Psi$$

SI NOTI CHE QUESTI OGGETTI NON HANNO UN ANALOGO CLASSICO: LA Ψ NON È CLASSICAMENTE UN'OSSERVABILE PERCHÉ NON SODDISFA LE REGOLE DI COMMUTAZIONE CANONICHE.

* RICORDANDO CHE u, v SONO SPINORI, POSSIAMO SCRIVERE

$$\Psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_r(\underline{p})\, u_r^\alpha(\underline{p})\, e^{-ipx} + c_r^+(\underline{p})\, v_r^\alpha(\underline{p})\, e^{ipx} \right)$$

$$\bar{\Psi}_\beta(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_r^+(\underline{p})\, \bar{u}_r^\beta(\underline{p})\, e^{ipx} + c_r(\underline{p})\, \bar{v}_r^\beta(\underline{p})\, e^{-ipx} \right)$$

CALCOLIAMO L'UNICO VALOR MEDIO NON NULLO

NOTA: IL VALOR MEDIO DI $\Psi(x)\Psi(y)$ È NULLO PERCHÉ GLI STATI CREATI DA b^+ E c^+ SONO ORTOGONALI. SI SALVA bb^+.

$$\langle 0|\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)|0\rangle = \sum_{r,r'} \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, u^\alpha(\underline{p}, r)\, e^{-ipx}\, \frac{d\underline{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\, \bar{u}^\beta(\underline{p}', r')\, e^{+ip'y} \cdot (*)$$

(INFATTI $C_r(\underline{p})|0\rangle = 0$, $\langle 0|C_r^+(\underline{p}) = 0$), DOVE

NOTA: $\Psi\bar{\Psi}$ È UNA MATRICE, QUINDI $\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y) = [\Psi(x)\bar{\Psi}(y)]_{\alpha\beta}$.

$$(*) = \langle 0|\, b(\underline{p}', r')\, b^+(\underline{p}, r)\,|0\rangle = \delta(\underline{p} - \underline{p}')\,\delta_{rr'}$$

INDIPENDENTEMENTE DALLE REGOLE DI COMMUTAZIONE SCELTE.

NOTA: INFATTI $bb^+ = \{b, b^+\} - b^+b = [b, b^+] + b^+b$ E OVVIAMENTE $\langle 0|b^+b|0\rangle = 0$.

ALLORA

$$\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = \sum_r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{E_p}\right) u_\alpha(\underline{p},r)\bar{u}_\beta(\underline{p},r)e^{-ip(x-y)}$$

MA L'ELEMENTO DI MATRICE DEL PROIETTORE $u\bar{u}$ VALE

$$\sum_r \left(u_\alpha(\underline{p},r)\bar{u}_\beta(\underline{p},r)\right) = \sum_r \left(u(\underline{p},r)\bar{u}(\underline{p},r)\right)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$

QUINDI

$$\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{E_p}\right)\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x+m)_{\alpha\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip(x-y)} = (i\not{\partial}_x+m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x-y)$$

DOVE SI È RICONOSCIUTA LA FUNZIONE DI GREEN A DUE PUNTI DEL CAMPO SCALARE. SIMILMENTE

NOTA: $i\not{\partial}_x e^{-ip(x-y)} = \gamma^\mu p_\mu e^{()} = \not{p}e^{()}$

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle = \int\frac{dp}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_p}e^{+ip(x-y)}\sum_{r=1}^{2}\bar{v}_\beta(\underline{p},r)v_\alpha(\underline{p},r)$$

ANCORA, NON DIPENDE DALLE REGOLE DI COMMUTAZIONE IMPOSTE.

RICONOSCIAMO IL PROIETTORE

NOTA: $\bar{\psi}(y)\psi(x)$ NON È UNA MATRICE. LA PUOI SCAMBIARE SOLO COMPONENTE PER COMPONENTE.

$$\sum_{r=1}^{2}\bar{v}_\beta(\underline{p},r)v_\alpha(\underline{p},r) = \left(\frac{\not{p}-m}{2m}\right)_{\alpha\beta} = \sum_r v_\alpha(\underline{p},r)\bar{v}_\beta(\underline{p},r)$$

QUINDI

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle = -(i\not{\partial}_x+m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(y-x)$$

NOTA: ERANO

$$\Delta^{(+)}(x-y) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}e^{-ip(x-y)}$$

$$\Delta^{(-)}(x-y) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}e^{ip(x-y)} = \Delta^{(+)}(y-x)$$

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = \Delta^{(+)}(x-y)-\Delta^{(-)}(x-y)$$

SE $x^0=y^0$ (QUINDI SU OGNI INTERVALLO SPACELIKE, VISTO CHE È COVARIANTE) SI HA $\Delta^{(+)}(x-y)=\Delta^{(-)}(x-y)$

- <u>MICROCAUSALITÀ</u>

CALCOLIAMOCI

$$\langle 0|[\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(y)]|0\rangle = (i\not{\partial}_x+m)\left[\Delta^+(x-y)+\Delta^+(y-x)\right]$$

CHE NON È ZERO: QUESTI DUE OGGETTI NON COMMUTANO, MA ANTICOMMUTANO SU DISTANZE DI TIPO SPAZIO,

$$\langle 0|\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(y)\}\Big|_{x^0=y^0}|0\rangle = (i\not{\partial}_x+m)\left[\Delta^+(x-y)-\Delta^+(y-x)\right]\Big|_{x^0=y^0} = 0$$

QUESTO NON SALVA LA MICROCAUSALITÀ.

DOVREMO INTRODURRE UNA REGOLA DI SUPERSELEZIONE: NON TUTTI GLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI SARANNO ASSOCIATI A UN'OSSERVABILE, MA SOLO QUELLI CHE COMMUTANO CON L'OPERATORE $(-1)^F$, *

$$[O(x), (-1)^F] = 0$$

PER ESEMPIO Ψ NON È UN'OSSERVABILE:

$$(-1)^F \Psi(x)|0\rangle = -\Psi(x)|0\rangle$$ NOTA: INVECE $\Psi(x)(-1)^F|0\rangle = \Psi(x)|0\rangle$.

$$\{(-1)^F, \Psi(x)\} = 0$$

CIÒ IMPLICA CHE NON È POSSIBILE COSTRUIRE STATI CON NUMERO VARIABILE DI FERMIONI**. AD ESEMPIO

$$(\langle 1| + \langle 2|) O (|1\rangle + |2\rangle) = \langle 1|O|1\rangle + \langle 2|O|2\rangle + 2\underbrace{\langle 1|O|2\rangle}_{=0}$$

$$(\langle 1|\alpha^* + \langle 2|\beta^*) O (\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle) = \langle 1|1\rangle|\alpha|^2 + \langle 2|2\rangle|\beta|^2$$

INFATTI $\hat{O}$ COMMUTA CON $(-1)^F$, PERCIÒ I DUE OPERATORI HANNO UNA BASE IN COMUNE: GLI AUTOSTATI DI $\hat{O}$ SONO ANCHE AUTOSTATI DI PARITÀ FERMIONICA. SE $\hat{O}$ È NON DEGENERE, PERDO OGNI EFFETTO DI COERENZA E LO STATO SOPRA RISULTA INDISTINGUIBILE DA

$$\rho = |\alpha|^2 |1\rangle\langle 1| + |\beta|^2 |2\rangle\langle 2|$$

BENCHÉ LA Ψ NON SIA UN'OSSERVABILE, LO SONO $\Psi\Psi$, $\Psi\bar{\Psi}$:

$$[(-1)^F, \Psi\Psi] = 0$$

E COSÌ PER OGNI PRODOTTO DI UN NUMERO PARI DI Ψ o $\bar{\Psi}$.

*NOTA: $(-1)^F$ È L'OPERATORE DI PARITÀ FERMIONICA E CONTA IL NUMERO DI FERMIONI,

$$(-1)^F|0\rangle = |0\rangle, \qquad (-1)^F b^+|0\rangle = -b^+|0\rangle$$

**NOTA: SENZA METTERE IN MEZZO LE MISCELE STATISTICHE, IL PUNTO È CHE SE $[\hat{O}(x), (-1)^F] = 0$ ($\hat{O}(x)$ NON DEGENERE) ALLORA OGNI AUTOSTATO DI $\hat{O}$ LO È ANCHE DI $(-1)^F$: DEVO QUINDI POTER DIRE DA QUANTI FERMIONI È FORMATO (È IL SUO AUTOVALORE).

FERMIONI

GLI STATI DI DUE PARTICELLE SONO FATTI COSÌ:

$$b^+(\underline{p}_1, r_1)\, b^+(\underline{p}_2, r_2)|0\rangle$$

$$\sum_{r_1,r_2} \int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\; f(\underline{p}_1, \underline{p}_2)\, b^+(\underline{p}_1, r_1)\, b^+(\underline{p}_2, r_2)|0\rangle$$

SE SCAMBIO I NOMI $\underline{p}_1 \leftrightarrow \underline{p}_2$, USANDO LE REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE

$$\sum_{r_1,r_2} \int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\; f(\underline{p}_2, \underline{p}_1)\, b^+(\underline{p}_2, r_2)\, b^+(\underline{p}_1, r_1)|0\rangle$$

$$= -\sum_{r_1,r_2} \int d\underline{p}_1\, d\underline{p}_2\; f(\underline{p}_2, \underline{p}_1)\, b^+(\underline{p}_1, r_1)\, b^+(\underline{p}_2, r_2)|0\rangle$$

DA CUI SI VEDE CHE $f(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ È ANTISIMMETRICA. DEDUCIAMO CHE QUESTE PARTICELLE SONO FERMIONI; IL PRINCIPIO DI ESCLUSIONE VI IMPONE

$$b^+(\underline{p}, r)\, b^+(\underline{p}, r)|0\rangle = 0$$

NEL CALCOLO DEI VALORI MEDI SUL VUOTO È POSSIBILE USARE

$$\langle 0| b(\underline{p}, r)\, b^+(\underline{p}', r')|0\rangle = \delta(\underline{p}-\underline{p}')\delta_{rr'}$$

INDIPENDENTEMENTE DAL FATTO CHE COMMUTINO O ANTICOMMUTINO. TUTTAVIA, A CONTI ULTIMATI, È IMMEDIATO VERIFICARE CHE

$$\langle 0| \left[\bar{\Psi}_\beta(x), \Psi_\alpha(x)\right\}_{x^0=y^0} |0\rangle = 0$$

NOTA: DUE OGGETTI NON POSSONO SIA COMMUTARE CHE ANTICOMMUTARE.

SE FOSSI PARTITO DA $[\bar{\Psi}_\beta, \Psi_\alpha] = 0$ SAREI GIUNTO ALLO STESSO RISULTATO, CONTRADDICENDO L'IPOTESI.

PROPAGATORE DEL CAMPO DI DIRAC

$$i S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \langle 0| T(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y))|0\rangle := \begin{cases} \langle 0|\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)|0\rangle & x^0 > y^0 \\ -\langle 0|\bar{\Psi}_\beta(y)\Psi_\alpha(x)|0\rangle & x^0 < y^0 \end{cases}$$

OSSIA

$$i S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \theta(x^0-y^0)(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x-y) + \theta(y^0-x^0)(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(y-x)$$

NOTA: COSÌ DEFINITO, IL T-PRODOTTO È COMPATIBILE CON LE REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE. SU INTERVALLI SPACELIKE, POSTO $x^0 = y^0$ HO $T(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)) = \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y) = -\bar{\Psi}_\beta(y)\Psi_\alpha(x)$, CHE VA BENE PERCHÉ $\{\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\underline{x}-\underline{y})$. NON MI È CHIARO COSA SUCCEDE SE $\underline{x} = \underline{y}$, MA A QUEL PUNTO È ANCHE INUTILE CERCARE UN PROPAGATORE.

SUPPONIAMO DI SCAMBIARE LE DUE θ CON $(i\not\partial_x+m)$:

$$\theta(x^0-y^0)(i\not\partial_x+m)\Delta^{(+)}(x-y)+\theta(y^0-x^0)(i\not\partial_x+m)\Delta^{(+)}(y-x)$$

$$=(i\not\partial_x+m)\theta(x^0-y^0)\Delta^{(+)}(x-y)\quad+(i\not\partial_x+m)\theta(y^0-x^0)\Delta^{(+)}(y-x)\quad-$$

$$\underbrace{\left[+i\delta(x^0-y^0)\Delta^{(+)}(x-y)-i\delta(y^0-x^0)\Delta^{(+)}(y-x)\right]}_{*=0}$$

COME SI ERA VERIFICATO PER IL CAMPO SCALARE.

ALLORA, IN MODO ANALOGO,

*NOTA: INFATTI SE NELL'INTEGRALE MANDO $\underline{p}\to-\underline{p}$ ...

$$iS_F(x-y)_{\alpha\beta}=(i\not\partial_x+m)_{\alpha\beta}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,i\,\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2}$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\cdot\frac{i(\not p+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\epsilon}\,e^{-ip(x-y)}$$

NOTA: RICORDA CHE

$$i\Delta_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\cdot\frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2}$$

(AI TEMPI $\omega_q^2=\underline{q}^2+m^2$, QUINDI $p^2-m^2=p_0^2-\omega_p^2$).

$$\overset{**}{=}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\cdot\frac{ie^{-ip(x-y)}}{(\not p-m)_{\alpha\beta}}$$

**NOTA: INFATTI SI È VISTO $\not p^2=p^2$ E QUINDI $(\not p+m)(\not p-m)=p^2-m^2$

(SONO FORME EQUIVALENTI).

· <u>TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INFINITESIME</u>

CONSIDERIAMO LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ INFINITESIMA

$$x^{\mu'}=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu\simeq\delta^\mu{}_\nu+\epsilon^\mu{}_\nu$$

COME DEV'ESSERE FATTA $\epsilon^\mu{}_\nu$? LA METRICA DEVE RIMANERE INVARIATA,

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu=g_{\mu\nu}$$

$$g_{\alpha\beta}(\delta^\alpha{}_\mu+\epsilon^\alpha{}_\mu)(\delta^\beta{}_\nu+\epsilon^\beta{}_\nu)=g_{\mu\nu}+g_{\alpha\beta}\epsilon^\alpha{}_\mu\delta^\beta{}_\nu+g_{\alpha\beta}\delta^\alpha{}_\mu\epsilon^\beta{}_\nu\equiv g_{\mu\nu}$$

$$g_{\alpha\nu}\epsilon^\alpha{}_\mu+g_{\mu\beta}\epsilon^\beta{}_\nu=0$$

NOTA: ANCHE $\Lambda^\mu{}_\nu$ INFATTI NON È UN TENSORE!

SI NOTI CHE ϵ NON È UN TENSORE DOPPIO (VIVE A CAVALLO TRA DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO); TUTTAVIA SCRIVO IN MODO FORMALE

$$\epsilon_{\nu\mu}+\epsilon_{\mu\nu}=0\qquad\qquad\epsilon_{\mu\nu}=-\epsilon_{\nu\mu}$$

CHE, BENCHÉ SIMBOLICO, È MNEMONICAMENTE UTILE.

* COME SI TRASFORMANO I CAMPI?

$$\varphi'(x') = S(\Lambda)\,\varphi(x)$$

NOTA: CERCHIAMO NELLO SPAZIO DEGLI OPERATORI LA TRASFORMAZIONE $S(\Lambda)$ CHE CORRISPONDE ALL'AZIONE DI Λ NELLO SPAZIO DI MINKOWSKI (OSSIA SULLE COORDINATE).

PER UN QUADRIVETTORE, AD ESEMPIO,

$$A^{\mu'}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

PER I CAMPI DI DIRAC SI ERA OTTENUTA LA RELAZIONE

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^{\mu}\,S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\gamma^{\nu} \qquad (I)$$

CALCOLIAMOCI QUINDI $S(\Lambda)$ PER UN CAMPO SPINORIALE. SCRIVIAMO

$$\varphi'(x') \simeq \varphi(x) + \frac{1}{2} M^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu}\,\varphi(x)$$

OSSIA

$$S(\Lambda) = I + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

$$S_{ab} = \delta_{ab} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}{}_{ab}$$

NOTA: $\phi^{a} = S^{a}{}_{b}\phi^{b}$, $S^{a}{}_{b} = \delta^{a}{}_{b} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu a}{}_{b}$

LA $\epsilon_{\mu\nu}$ È ANTISIMMETRICA, QUINDI I SUOI PARAMETRI INDIPENDENTI SONO

$$\begin{matrix} 0 & i & \rightarrow & 3 \\ i & j & \rightarrow & 3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & (\,) \\ & 0 & \\ -(\,) & & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: OCCHIO CHE QUINDI $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$, MA $(M^{\mu\nu})_{ab} \neq -(M^{\mu\nu})_{ba}$. LA MATRICE $M^{\mu\nu}$ NON È ANTISIMMETRICA: LO È LA FAMIGLIA $M^{\mu\nu}$.

(INFATTI IL GRUPPO DI LORENTZ HA 6 PARAMETRI).

NEL CASO DEL CAMPO DI DIRAC, SI TROVA (IMPONENDO LA (I))

$$S(\Lambda) \simeq I + \frac{1}{8}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\,\epsilon_{\mu\nu}$$

NOTA: È A P. 156 DEL PATRÌ MA LASCIA PERDERE, È BRUTTA.

PER IL CAMPO DI K-G QUESTA $M^{\mu\nu}$ È NULLA (E INFATTI $S(\Lambda) = I$).
ITERANDOLA, TROVO UNA SOLUZIONE DELLA (I) ANCHE PER TRASFORMAZIONI FINITE (COME LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI TRASFORMAZIONI INFINITESIME).

NOTA: $\Lambda = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\theta}{m}A\right)^{m} = e^{\theta A}$. PER NOI $\epsilon = \frac{\theta}{m}$.

* COME SONO FATTE LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ?

1) ROTAZIONI

NOTA: PER APPROFONDIRE VAI A P. 47 PATRÌ.

$\epsilon^{1}{}_{2} \neq 0$

(GLI ALTRI NULLI A PARTE OVVIAMENTE $\epsilon^{2}{}_{1}$)

$$\begin{cases} x^{0'} = x^{0} \\ x^{3'} = x^{3} \\ x^{1'} = x^{1} + \epsilon^{1}{}_{2}\,x^{2} \\ x^{2'} = x^{2} + \epsilon^{2}{}_{1}\,x^{1} \end{cases}$$

COM'È FATTA $\epsilon^2{}_1$?

$$\epsilon^2{}_1 = -\epsilon^{21} = \epsilon^{12} = -\epsilon^1{}_2$$

DETTO ALLORA $\theta = \epsilon^1{}_2$,

$$\begin{cases} x^{1'} = x^1 + \theta x^2 \\ x^{2'} = x^2 - \theta x^1 = -\theta x^1 + x^2 \end{cases}$$

CON x^0, x^3 INALTERATE.

NOTA: HO USATO $g_{ik} = -\delta_{ik}$. NOTA CHE $\epsilon^\mu{}_\nu$ NON È ANTISIMMETRICA, LO È $\epsilon_{\mu\nu}$.

NOTA: IN QUESTO CASO θ È INFINITESIMO. SE LO VOGLIO FINITO SCELGO $\epsilon^1{}_2 = \theta/m$ E MANDO $m \to \infty$ (VEDI NOTA PAGINA PRIMA).

NOTA: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta)$

2) BOOST

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$$

SIA $\epsilon^1{}_0 \neq 0$, TUTTI GLI ALTRI NULLI. ALLORA

$$\begin{cases} x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \\ x^{0'} = x^0 + \epsilon^0{}_\nu x^\nu = x^0 + \epsilon^0{}_1 x^1 \\ x^{1'} = x^1 + \epsilon^1{}_\nu x^\nu = x^1 + \epsilon^1{}_0 x^0 \end{cases}$$

DOBBIAMO COLLEGARE $\epsilon^0{}_1$ A $\epsilon^1{}_0$:

$$\epsilon^0{}_1 = -\epsilon^{01} = \epsilon^{10} = \epsilon^1{}_0$$

DETTO $\beta = \epsilon^0{}_1$,

$$\begin{cases} x^{0'} = x^0 + \beta x^1 \\ x^{1'} = x^1 + \beta x^0 \end{cases}$$

NOTA: CONFRONTALA CON IL BOOST

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DOVE RICONOSCIAMO UN BOOST AL PRIMO ORDINE.

RITROVIAMO CHE UNA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ GENERICA È INDIVIDUATA DA 6 PARAMETRI (LE COMPONENTI DI $\epsilon^\mu{}_\nu$).

TEOREMA DI NOETHER E CORRENTE CONSERVATA

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$$

UN CAMPO SI TRASFORMA COME

$$\varphi'(x') = S(\Lambda)\,\varphi(x)$$

E MI ASPETTO

$$S(\epsilon) \sim I + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

$$S_{ab} \sim \delta_{ab} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}{}_{ab}$$

NOTA: LA FORMA DI $S(\Lambda)$ DIPENDE DAL TIPO DI CAMPO,
- SCALARE: $S(\Lambda) = \mathbb{1}$
- VETTORIALE: $S(\Lambda) = \Lambda$
- SPINORIALE: L'ABBIAMO TROVATA IMPONENDO LA COVARIANZA,
  $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu$
  VEDREMO CHE È
  $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{8}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\epsilon_{\mu\nu}$

ALLORA

$$\varphi'(x+\epsilon x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi(x) \qquad (I)$$

TEOREMA DI NOETHER: LA DENSITÀ LAGRANGIANA È UNO SCALARE DI LORENTZ.

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$$

$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0 \qquad (II)$$

DOVE

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\varphi'(x'))$$

NOTO CHE, PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE,

$$\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) = \partial_\mu \mathcal{L}'(x) \underbrace{\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu}_{\text{DIFFERENZIALE}}$$
$$= \partial_\mu \mathcal{L}(x) \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$$

NOTA: È LA VARIAZIONE DELLE X A CAMPI FISSATI.

(INFATTI $\mathcal{L}'$ E $\mathcal{L}$ DIFFERISCONO PER TERMINI DI ORDINE 1). INVECE

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\mu \delta\varphi$$

NOTA: È LA VARIAZIONE DEI CAMPI A COORDINATE FISSATE.

LE EQUAZIONI DEL MOTO DANNO

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$$

NOTA: SONO LE EQUAZIONI DI EULERO - LAGRANGE.

QUINDI RICOSTRUISCO LA (II) SCRIVENDO

$$\partial_\mu \mathcal{L}(x) \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) = 0 \qquad (III)$$

DOVE $(\partial_\mu \mathcal{L})\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu = \partial_\mu(\mathcal{L}\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu)$: INFATTI I DUE DIFFERISCONO SOLO SE $\mu=\nu$, NEL QUAL CASO $\epsilon^\mu{}_\mu = 0$. LO STESSO SUCCEDE CON UN MOMENTO ANGOLARE.

DALLA (I) RICAVO L'ESPRESSIONE DI $\delta\phi$:

$$\varphi'(x) + \partial_\mu \varphi\, \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu = \varphi(x) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi(x)$$

$$\delta\varphi = -\partial_\mu \varphi\, \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi(x)$$

NOTA: VIENE PIÙ SEMPLICE COSÌ:

$$\delta\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x)$$
$$= \varphi'(x) - \varphi'(x') + \varphi'(x') - \varphi(x)$$
$$= -\partial_\mu \varphi\, \delta x^\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi(x)$$

E CON

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$$

DALLA (III),

$$\partial_\lambda \mathcal{L}\, g^\lambda{}_\mu\, \epsilon^\mu{}_\nu\, x^\nu + \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda \varphi} \delta\varphi \right) = 0$$

NOTA: SE NON CAMBIASSI INDICE ADESSO CON $g^\lambda{}_\mu$ LO DOVREI FARE NEL PROSSIMO PASSAGGIO. INFATTI SE μ È OCCUPATO NON LO POSSO USARE IN $\delta\varphi$, CHE SCRIVEREI AD ESEMPIO IN TERMINI DI $\epsilon_{\lambda\nu}$; MA LO SCOPO È METTERE IN EVIDENZA $\epsilon_{\mu\nu}$.

$$\partial_\lambda \left\{ \mathcal{L}\, g^\lambda{}_\mu\, x^\nu \epsilon^\mu{}_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \varphi)} \left(-\partial_\mu \varphi\, \epsilon^\mu{}_\nu\, x^\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi \right) \right\} = 0$$

$$\partial_\lambda \left\{ \mathcal{L}\, g^{\lambda\mu} x^\nu \epsilon_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \varphi)} \left(-\partial^\mu \varphi\, \epsilon_{\mu\nu}\, x^\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \varphi \right) \right\} = 0$$

SI RICORDI CHE, SE SATURO $\epsilon_{\mu\nu}$ ANTISIMMETRICO SU UN GENERICO $A^{\mu\nu}$,

$$\epsilon_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0$$

$$\epsilon_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{2} \left[(A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu}) + (A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}) \right] = 0$$

$$\epsilon_{\mu\nu} \frac{1}{2} (A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}) = 0$$

$$A^{[\mu,\nu]} = 0$$

*NOTA: SE USI L'ESPRESSIONE CON $T^{\lambda\nu}$ QUI SOTTO IL CALCOLO VIENE PIÙ SNELLO.

OSSIA È NULLA SOLO LA PARTE ANTISIMMETRICA DI $A^{\mu\nu}$. ALLORA*

$$\partial_\lambda \left\{ \mathcal{L} \frac{1}{2} (g^{\lambda\mu} x^\nu - g^{\lambda\nu} x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda \varphi} \left[\frac{1}{2} (-\partial^\mu \varphi x^\nu + \partial^\nu \varphi x^\mu) + \frac{1}{2} M^{\mu\nu} \varphi \right] \right\} = 0$$

$$\partial_\lambda \left\{ \mathcal{L} (g^{\lambda\mu} x^\nu - g^{\lambda\nu} x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda \varphi} \left(-\partial^\mu \varphi x^\nu + \partial^\nu \varphi x^\mu + M^{\mu\nu} \varphi \right) \right\} = 0 \quad (IV)$$

$$\underline{\partial_\lambda \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = 0}$$

NOTA: $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ (ANCHE SE $(M^{\mu\nu})_{ab}$ NON È UNA MATRICE ANTISIMMETRICA).

CHE È UNA LEGGE DI CONSERVAZIONE RELATIVISTICA. INTEGRANDOLA,

$$\text{COST.} = \int d\underline{x}\, \mathcal{M}^{0\mu\nu}$$

NOTA: POICHÉ $T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$,

$$\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\nu} x^\mu - T^{\lambda\mu} x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \varphi)} M^{\mu\nu} \varphi$$

CHE SONO 6 QUANTITÀ CONSERVATE (COME I PARAMETRI DEL GRUPPO DI LORENTZ).

SCEGLIENDO $\epsilon^1{}_2$ DI UNA ROTAZIONE, RITROVO IL MOMENTO ANGOLARE

$$L_2 = \int d\underline{x}\, \mathcal{M}^{012}$$

NOTA: LE ALTRE 3 COMPONENTI DI $\mathcal{M}^{0\mu\nu}$ CONSERVANO IL MOTO DEL BARICENTRO.

NOTA: IN NESSUN CASO $\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu}$ SI RIDUCE AL TENSORE ENERGIA-IMPULSO $T^{\mu\nu}$, PERCHÉ QUI ABBIAMO STUDIATO L'INVARIANZA SOTTO TRASFORMAZIONI DI LORENTZ E NON DI POINCARÉ. LE DUE SONO LEGATE SOLO ALLA LONTANA (PRODOTTO SEMI-DIRETTO): SE SPOSTO IL CENTRO DI ROTAZIONE ALL'INFINITO, UNA ROTAZIONE DIVENTA UNA TRASLAZIONE.

MOMENTO ANGOLARE

SE SCELGO $\lambda = 0$, μ, ν SPAZIALI, NELLA (IV)

$$g^{0i}x^j - g^{0j}x^i = 0$$

*NOTA: NON È VERO CHE IL PEZZO IN M^{ij} È LO SPIN E L'ALTRO PEZZO È $\underline{L}$. LUNGO IL MOTO SI CONSERVA SOLO $\underline{J}$.

($g^{\mu\nu}$ È DIAGONALE). LA STESSA SI RIDUCE ALLORA A*

$$\underline{M}^{ij} := \int m^{0ij} d\underline{x} = \int d\underline{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \left[(x^i \partial^j - x^j \partial^i) \varphi + M^{ij} \varphi \right]$$

DA NON CONFONDERE CON M^{ij}, QUELLA CHE COMPARE IN

$$\varphi'(x') = S(\Lambda)\varphi(x)$$

NOTA: SUL PATRÌ $\underline{M}^{ij}$ È $\mathcal{L}^{\nu\lambda}$ DELLA (5.40 a).

* PER IL CAMPO SCALARE $M = 0$ (INFATTI $\varphi'(x') = \varphi(x)$, $S(\Lambda) = \mathbb{1}$) E

$$\underline{M}^{ij} = \int d\underline{x}\, \dot{\varphi} \,(x^i \partial^j - x^j \partial^i) \varphi$$

NOTA: $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2$

OGNI ELEMENTO DI VOLUME PORTA CON SÈ UNA DENSITÀ DI MOMENTO ANGOLARE (CHE NON È CONSERVATO VOLUMETTO PER VOLUMETTO, MA GLOBALMENTE). QUANTIZZANDOLO, SI CANCELLANO I TERMINI CHE CONTENGONO DUE OPERATORI DI CREAZIONE O DUE DI ANNICHILAZIONE (UNA VOLTA INTEGRATO SUL VOLUME):

NOTA: INFATTI $\int d\underline{x}\, a_p a_{p'} e^{-ipx} e^{-ip'x} \propto \delta(p-p')$

$$\varphi \propto a e^{-ipx} + a^+ e^{ipx}$$

$$x^i \partial^j e^{-ipx} = -i p^j x^i e^{-ipx} = -i p^j \frac{\partial}{\partial p^i} e^{ipx}$$

INTEGRANDO PER PARTI, PORTO $\frac{\partial}{\partial p^i}$ SULL'OPERATORE a O a^+. RIMANE

$$\underline{M}^{ij} = \int d^3p \left[\left(p^j \frac{\partial}{\partial p^i} - p^i \frac{\partial}{\partial p^j} \right) a^+_{\underline{p}} \right] a_{\underline{p}}$$

NELLA RAPPRESENTAZIONE DEGLI IMPULSI, IL TERMINE TRA PARENTESI TONDE È PROPRIO $\underline{x} \wedge \underline{p}$.

UNA PARTICELLA SCALARE FERMA

$$a^+_{\underline{0}} |0\rangle$$

NOTA: INVECE UNA GENERICA PARTICELLA IN MOTO $|\psi\rangle = \int d\underline{p}\, f(\underline{p}) a^+_{\underline{p}} |0\rangle$ HA MOMENTO ANGOLARE TOTALE $\underline{M}^{ij}|\psi\rangle = \int d\underline{p} \left[(p^i x^j - p^j x^i) f(\underline{p}) \right] a^+_{\underline{p}} |0\rangle$

HA MOMENTO ANGOLARE NULLO:

$$\int d^3p \left[(p^i x^j - p^j x^i) a^+_{\underline{p}} \right] \underbrace{a_{\underline{p}} a^+_{\underline{0}} |0\rangle} \rightarrow = [a_{\underline{p}}, a^+_{\underline{0}}] |0\rangle = \delta_{\underline{p},\underline{0}} |0\rangle = 0$$

QUINDI PER UNA PARTICELLA SCALARE A RIPOSO IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE È NULLO (LE PARTICELLE SENZA MASSA NON LE POSSO METTERE A RIPOSO): POICHÉ A RIPOSO È NULLO IL M.A. ORBITALE, DEDUCO CHE È NULLO LO SPIN.

★ PER IL CAMPO DI DIRAC, SI È VISTO CHE $\underline{x} \wedge \underline{p}$ NON COMMUTA CON L'HAMILTONIANA: SI CONSERVA SOLO IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE $\underline{J}$ (ED È SOLTANTO QUESTO CHE SI QUANTIZZA).

DALLA CONDIZIONE DI COVARIANZA,

NOTA: SI TRATTA DI SOSTITUIRE $S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ NELLA (I) E RISOLVERE PER $M^{\mu\nu}$. (PATRÌ P. 154)

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \qquad (I)$$

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{4}\epsilon_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad M^{\mu\nu} = \frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{4}$$

AD ESEMPIO (VEDI NOTA IN FONDO)

$$M^{12} = \frac{1}{4}[\gamma^1, \gamma^2] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -2i\sigma_3\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \frac{\sigma_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_3}{2}\end{pmatrix}$$

LO SPIN COINCIDE CON M^{ij} CALCOLATO A MOMENTO ANGOLARE ORBITALE NULLO

$$M^{ij} = \int d\underline{x}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\left[\underbrace{(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\varphi}_{=0 \text{ A M.A. ORBITALE NULLO}} + M^{ij}\varphi\right]$$

NOTA: SOPRA SI È USATA $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

NOTA: $J_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \Rightarrow \underline{J} = \underline{r} \wedge \underline{p} + \frac{1}{2}\underline{\Sigma}$.

QUESTA È UN'ULTERIORE CONFERMA CHE IL CAMPO DI DIRAC NON È UN'OSSERVABILE. QUANDO RUOTO DI 2π UNA QUANTITÀ SPINORIALE, OSSIA

$$e^{i\theta\frac{\sigma_3}{2}}\varphi = \varphi_{(\text{RUOTATO})}$$

NOTA: $\frac{\sigma_3}{2}$ È PER IL CAMPO DI DIRAC IL GENERATORE DI TALE ROTAZIONE.

CON $\theta = 2\pi$, QUESTA CAMBIA DI SEGNO: È CHIARO ALLORA CHE NON È OSSERVABILE. LE OSSERVABILI SONO GAUGE INVARIANTI, QUINDI ANCHE INVARIANTI SOTTO ROTAZIONI DI 2π.

NOTA:

$\mathcal{L}_{DIRAC} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \psi^+\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - m)\psi$. QUINDI $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^+$ E $M_{12} = \frac{1}{2}\int d\underline{x}\,\psi^+\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}\psi$.

PER UNA PARTICELLA DI DIRAC, $\underline{J} = (\underline{r}\wedge\underline{p})\mathbb{1} + \frac{1}{2}\Sigma$ CON $\Sigma = \begin{pmatrix}\underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{\sigma}\end{pmatrix}$ (SI ERA CHIAMATO $\underline{S} = \frac{\hbar}{2}\Sigma$)

IN GENERALE

$$M^{ij} = \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = (-i)\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{ij} = \frac{1}{2}\int d\underline{x}\,\psi^+\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\psi$$

· FOTONE

SI DICE ELICITÀ

$\underline{J} \cdot \hat{p}$

BEN DEFINITA ANCHE PER UNA PARTICELLA IN MOTO. USANDO

$J^k = \varepsilon_{ijk} M^{ij}$

COSTRUISCO ($\underline{\Sigma}$ DIPENDE DAL CAMPO CONSIDERATO)

$\underline{J} = \underline{x} \wedge \underline{p} + \underline{\Sigma}$

$$\underline{J} \cdot \hat{p} = \underbrace{\hat{p} \cdot (\underline{x} \wedge \underline{p})}_{=0} + \hat{p} \cdot \underline{\Sigma} \qquad \text{(I)}$$

*NOTA: IL MOTIVO È CHE NON LA POSSO METTERE A RIPOSO.

QUESTO PORTERÀ ALLA CONSEGUENZA CHE UNA PARTICELLA DI MASSA NULLA HA AL PIÙ DUE STATI DI POLARIZZAZIONE (PER SPIN 'O' UNO SOLO, PER SPIN 1 NE HA 2 INVECE CHE 3)*.

RICORDIAMO CHE PER IL CAMPO ELETTROMAGNETICO

$A^{\alpha'}(x') = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta(x) = A^\alpha(x) + \epsilon^\alpha{}_\beta A^\beta(x)$

IN CUI VOGLIAMO RICONOSCERE LA $M^{\mu\nu}$ CHE COMPARE IN

$\varphi'^\alpha(x') = \varphi^\alpha(x) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \varphi^\beta(x)$

POSTO $\varphi^\alpha(x) = A^\alpha(x)$, BASTA EGUAGLIARE

$$\epsilon^\alpha{}_\beta \equiv \epsilon_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^\nu{}_\beta = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} \underbrace{\left[g^{\mu\alpha} g^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha} g^\mu{}_\beta\right]}_{\to (M^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta}$$

NOTA: SI È ANTISIMMETRIZZATO $g^{\mu\alpha} g^\nu{}_\beta$ PERCHÉ VOGLIAMO $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$. TRA L'ALTRO $\epsilon_{\mu\nu}$ È ANTISIMMETRICO.

CHE PUÒ ESSERE INSERITA IN

$$\underline{M}^{ij} = \int d\underline{x} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} (x^i \partial^j - x^j \partial^i + M^{ij}) \varphi$$

IN CUI RICONOSCIAMO I DUE PEZZI ORBITALE + SPIN. I FOTONI HANNO $m=0$, QUINDI NON LI POSSO METTERE A RIPOSO: DEFINISCO INVECE L'ELICITÀ COME NELLA (I).

GLI OPERATORI DI CREAZIONE/DISTRUZIONE SI POSSONO COMBINARE PER DARE

$a^+_{1\pm i2}(\underline{p}) = a^+_{R/L}(\underline{p})$

CHE SONO I DUE POSSIBILI STATI DI POLARIZZAZIONE R, L.

CARICA DEL CAMPO DI DIRAC

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi$$

NOTO CHE È INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI DI FASE GLOBALE

$$\begin{cases} \Psi'(x) = e^{i\alpha}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\Psi}(x) \end{cases}$$

NOTA: È UNA SIMMETRIA INTERNA, CIOÈ NON COINVOLGE LE COORDINATE SPAZIOTEMPORALI NELLA (3.12) $\delta x^\mu = 0$.

QUESTO PORTA PER IL TEOREMA DI NOETHER LA CORRENTE CONSERVATA

$$J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i$$

NOTA: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi}_i)} = 0$ PER $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi$.

SOTTINTENDENDO LA SOMMA SUI 4+4 CAMPI DI DIRAC,

$$\delta\Psi(x) = i\alpha\Psi$$

NOTA: $\Psi'(x) - \Psi(x) \simeq i\alpha\Psi(x)$.

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Psi}\delta\Psi = \bar{\Psi} i\gamma^\mu i\alpha\Psi = -\alpha\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

QUINDI SI CONSERVA

$$\tilde{J}^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

NOTA: UNO LA INTEGRA SU $\mathbb{R}^3$, QUANTIZZA E TROVA L'OPERATORE DI CARICA. LE PARTICELLE CREATE DAGLI OPERATORI c^+ E d^+ SONO SUOI AUTOSTATI CON AUTOVALORI ± 1.

L'INTERAZIONE TRA IL CAMPO DI DIRAC E QUELLO EM. È DATA DA

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$$

DOVE L'ULTIMO È UN TERMINE DI ACCOPPIAMENTO; VEDREMO ORA COME TRATTARLO.

SCHEMA DI INTERAZIONE E MATRICE S

IN MECCANICA QUANTISTICA

$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$

$A' = UAU^{+}$

$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle$

LA FISICA RIMANE INVARIATA SE APPLICO LA TRASFORMAZIONE UNITARIA U SUGLI OPERATORI E SUGLI STATI.

SONO IN USO TRE POSSIBILI SCHEMI:

1) SCHRÖDINGER

GLI OPERATORI SONO COSTANTI NEL TEMPO E COSÌ I LORO AUTOSTATI. UNO SOLO SI EVOLVE DINAMICAMENTE:

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle_S = H_S|\psi\rangle_S$$

CHE È QUELLO CHE SEGUIAMO LUNGO L'EVOLUZIONE DEL MOTO SENZA EFFETTUARE MISURE (A QUEL PUNTO COLLASSEREBBE).

2) HEISENBERG

APPLICO A TUTTI I VETTORI DELLO SPAZIO

$e^{iHt}|\psi_S\rangle = |\psi_H\rangle$

CHE È UNITARIA E METTE IN MOTO TUTTI I VETTORI TRANNE QUELLO CHE SEGUO:

$|\psi_0\rangle$ COST.

$A_H(t) = e^{iHt}A_S e^{-iHt}$

LE OSSERVABILI A_H DIPENDONO QUINDI DAL TEMPO.

3) SCHEMA DI INTERAZIONE

$e^{iH_0t}|\psi_S\rangle = |\psi_I\rangle$

$A_I(t) = e^{iH_0t}A_S e^{-iH_0t}$

IN CUI SI EVOLVONO TUTTI.

SI SPEZZA CIOÈ H NELLE SUE PARTI LIBERA E DI INTERAZIONE

$H = H_0 + H_I$

SI EVOLVE ANCHE LO STATO CHE OSSERVIAMO SECONDO

$e^{iH_0 t} |\Psi_S, t\rangle = e^{iH_0 t} e^{-i(H_0 + H_I)t} |\Psi_0\rangle$

E RICORDIAMO CHE, SE $[A, B] \neq 0$,

$e^A e^B \neq e^{A+B}$

QUINDI QUANTO SCRITTO È NON BANALE SE $[H_0, H_I] \neq 0$.

COME SCRIVO IN QUESTO SCHEMA L'EQUAZIONE DEL MOTO?

$|\Psi_I, t\rangle = e^{iH_0 t} |\Psi_S, t\rangle$

$$i\frac{d}{dt} |\Psi_I, t\rangle = -H_0 e^{iH_0 t} |\Psi_S, t\rangle + e^{iH_0 t} \frac{d}{dt} |\Psi_S, t\rangle$$

$$= -H_0 e^{iH_0 t} |\Psi_S, t\rangle + e^{iH_0 t} H_S |\Psi_S, t\rangle$$

$$= -H_0 e^{iH_0 t} |\Psi_S, t\rangle + e^{iH_0 t} (H_0 + H_I) |\Psi_S, t\rangle$$

$$= e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} |\Psi_S, t\rangle$$

NOTA: SI È USATO $[e^{iH_0 t}, H_0] = 0$, MENTRE IN GENERALE $[e^{iH_0 t}, H_I] \neq 0$. STIAMO ANCHE SUPPONENDO H_0 INDIPENDENTE DAL TEMPO.

PERCIÒ

$$i\frac{d}{dt} |\Psi, t\rangle_I = H_I^I(t) |\Psi, t\rangle_I$$

DOVE $H_I^I(t)$ È L'HAMILTONIANA DI INTERAZIONE SCRITTA NELLO SCHEMA DI INTERAZIONE.

NOTA CHE NELLO SCHEMA 1 L'HAMILTONIANA IN GENERALE NON DIPENDEVA DAL TEMPO. QUI INVECE

$H_I^I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$

$g A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \rightarrow g A_\mu e^{iH_0 t} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi e^{-iH_0 t}$

COME SI RISOLVE

NOTA: SOTTINTENDIAMO $H_I(t) = H_I^I(t)$ E $|\psi, t\rangle = |\psi_I, t\rangle$, OSSIA CHE SI STA USANDO LO SCHEMA DI INTERAZIONE.

$$i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = H_I(t) |\psi, t\rangle \quad ?$$

$$i \int_0^t dt' \frac{d}{dt'} |\psi, t'\rangle = \int_0^t H_I(t') |\psi, t'\rangle \, dt'$$

$$|\psi, t\rangle - |\psi, 0\rangle = -i \int_0^t H_I(t_1) |\psi, t_1\rangle \, dt_1$$

SE LA PERTURBAZIONE È PICCOLA,

$|\psi, 0\rangle$

È UN TERMINE ALL'ORDINE ZERO E L'ALTRO È UNA CORREZIONE DI ORDINE ALMENO 1. SE NELL'INTEGRALE AL POSTO DI $|\psi, t_1\rangle$ INSERISCO L'ESPRESSIONE DELLA APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE E POI ITERO OTTENGO:

$$|\psi, t\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{m-1}} dt_m \, H_I(t_1) \dots H_I(t_m) |\psi_0\rangle \qquad t \geq t_1 \geq t_2 \dots \geq t_m$$

AD ESEMPIO

$$|\psi, t\rangle = |\psi_0\rangle - i \int_0^t H_I(t_1) \left[|\psi_0\rangle + (-i) \int_0^{t_1} dt_2 \, H_I(t_2) |\psi, t_2\rangle \right] dt_1$$

$$= |\psi_0\rangle - i \int_0^t dt_1 \, H_I(t_1) |\psi_0\rangle + (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \, H_I(t_1) H_I(t_2) |\psi, t_2\rangle$$

IL PROBLEMA È COSÌ RISOLTO ITERATIVAMENTE.

SI NOTI CHE IL PRODOTTO $H_I(t_1) \dots H_I(t_m)$ NON È COMMUTATIVO (H_I NON COMMUTA CON SÈ STESSA A TEMPI DIVERSI). SE CI METTO

$T(H_I(t_1) \dots H_I(t_m))$

NON CAMBIA NULLA, PERCHÉ SI ERA GIÀ SUPPOSTO $t \geq t_1 \geq \dots \geq t_m$.

IL VANTAGGIO È PERÒ CHE ADESSO POSSO SCAMBIARE LE $H_I(t_i)$:

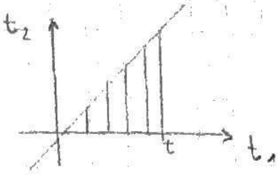
AD ESEMPIO

$$T(H_I(t_1) H_I(t_2)) = \theta(t_1 - t_2) H_I(t_1) H_I(t_2) + \theta(t_2 - t_1) H_I(t_2) H_I(t_1)$$

$$= \theta(t_2 - t_1) H_I(t_2) H_I(t_1) + \theta(t_1 - t_2) H_I(t_1) H_I(t_2) = T(H_I(t_2) H_I(t_1))$$

INFATTI IL T-PRODOTTO È SIMMETRICO PER SCAMBIO $t_1 \leftrightarrow t_2$.

NOI INTEGRIAMO SU $t_1 \geq t_2$ COME NEL DISEGNO:



POSSO ESTENDERE PERCIÒ

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \rightarrow \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdot \frac{1}{2}$$

IN PIÙ DIMENSIONI POSSO FARE LO STESSO DIVIDENDO PER $m!$:

$$|\Psi, t\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_m \, T\left(H_I(t_1) \dots H_I(t_m)\right) |\Psi, 0\rangle$$

CHE È UNA DELLE FORME DELL' EQUAZIONE DI DYSON.

UNA SUA APPLICAZIONE È IL CALCOLO DELLE SEZIONI D'URTO PER ESPERIMENTI DI SCATTERING: SE $|i\rangle = |\Psi, t=-\infty\rangle$,

$$|\Psi, t\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^t dt_m \, T\left(H_I(t_1) \dots H_I(t_m)\right) |i\rangle$$

TIPICAMENTE ATTENDO UN TEMPO GRANDE E OTTENGO

$$|+\infty\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_m \, T\left(H_I(t_1) \dots H_I(t_m)\right) |i\rangle$$

E CALCOLO

$$|\langle f|+\infty\rangle|^2$$

PER AVERE LA PROBABILITÀ CHE IL MIO APPARATO MISURI $|f\rangle$:

$$\langle f|+\infty\rangle = \langle f| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_m \, T\left(H_I(t_1) \dots H_I(t_m)\right) |i\rangle$$

DEFINIAMO SIMBOLICAMENTE LA MATRICE S:

$$S := T e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, H_I(\tau)} \qquad |+\infty\rangle = S|i\rangle$$

★ LA LAGRANGIANA PRESENTERÀ UNA PARTE DI INTERAZIONE

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

E SE $\mathcal{L}_I$ NON DIPENDE DALLE DERIVATE DEI CAMPI $(\partial\phi)$

$$H_I = -\int \mathcal{L}_I \, dV = -L_I$$

INFATTI

$$H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\dot\phi - L = \sum \frac{\partial L_0}{\partial \dot\phi}\dot\phi - L_0 - L_I = H_0 - L_I$$

ALLORA

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_m \, T\left(L_I(t_1) \dots L_I(t_m)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int d^4x_1 \dots d^4x_m \, T\left(\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_m)\right)$$

VALE COMUNQUE IN GENERALE, SE $\mathcal{H}$ È LA DENSITÀ DI HAMILTONIANA,

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \dots d^4x_m \, T\left(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_m)\right)$$

· <u>LAGRANGIANA DI INTERAZIONE IN CAMPO EM</u>

COME SI SCRIVE QUESTA $\mathcal{H}$ IN CAMPO EM? INIZIAMO TRASCURANDO LA CONTROREAZIONE DELLA PARTICELLA SUL CAMPO. DATO UN CAMPO ESTERNO*,

$$\mathcal{L} = \bar\Psi(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi - eA_\mu\bar\Psi\gamma^\mu\Psi$$

DOVE $\mathcal{L}$ È UNA DENSITÀ DI LAGRANGIANA PERCHÉ DEVE ESSERE LOCALE (IL PRINCIPIO DI AZIONE-REAZIONE VALE PUNTO PER PUNTO, PERCHÉ CAMBI DI COORDINATE RELATIVISTICHE POSSONO CAMBIARE L'ORDINAMENTO TEMPORALE DEGLI EVENTI). INOLTRE $\mathcal{L}$ DEVE ESSERE GAUGE INVARIANTE:

$$A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)$$

BASTA ALLORA RIDEFINIRE

$$\Psi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)}\Psi(x)$$

*NOTA: DA DOVE È USCITA $\mathcal{L}$? HO APPLICATO ALL'HAMILTONIANA DI DIRAC LA SOSTITUZIONE MINIMALE $p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$, COSÌ CHE $(c=1)$
$i\partial\!\!\!/ \to i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/$
(NELLA SOSTITUZIONE MINIMALE $e = |e| > 0$).

PERCHÉ IN $\mathcal{L}$ I TERMINI AGGIUNTIVI SIANO SOLO

$$i(-ie\partial_\mu\Lambda)\bar\Psi\gamma^\mu\Psi - e(\partial_\mu\Lambda)\bar\Psi\gamma^\mu\Psi = 0$$

RIDEFINENDO $e = -$(CARICA DELL'ELETTRONE), COSÌ CHE SIA UN NUMERO POSITIVO,

$$\mathcal{L} = \bar\Psi(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi + eA_\mu\bar\Psi\gamma^\mu\Psi \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

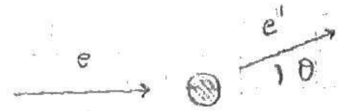
POICHÉ $\mathcal{L}_I$ NON CONTIENE DERIVATE DEI CAMPI,

$$\mathcal{H}_I = -e\bar\Psi A\!\!\!/\Psi = -e :\bar\Psi A\!\!\!/\Psi:$$

DOVE SI È INTRODOTTO IL BUON ORDINAMENTO.

IN UNITÀ NATURALI, e È UN NUMERO PURO PICCOLO:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$



CIÒ GIUSTIFICA LO SVILUPPO PERTURBATIVO.

NELL'EQUAZIONE DI DYSON, IL TERMINE ALL'ORDINE ZERO RAPPRESENTA QUELLA PARTE DEL FASCIO DI PARTICELLE CHE NON INTERAGISCE CON IL BERSAGLIO. IN GENERE SI CONSIDERA PERCIÒ

$$S - I = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \dots d^4x_m \, T\left(\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_m)\right)$$

(IN PRATICA UNO NON METTE MAI UN RILEVATORE A $\theta = 0°$). AL PRIMO ORDINE,

$$S - I = ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \, :\bar{\Psi}_x \not{A}_x \Psi_x:$$

NOTA: QUI E SEMPRE, Ψ E $\bar{\Psi}$ SONO SPINORIALI MENTRE A_μ NO, QUINDI COMMUTANO.

DIFFUSIONE DI UN e^- SU DI UN NUCLEO

ASSIMILIAMO LO STATO INIZIALE A UN'ONDA PIANA; IN REALTÀ È UN LIMITE SINGOLARE (NON È NORMALIZZABILE: LO STATO VERO È, PER QUANTO STRETTO, UN PACCHETTO D'ONDA), MA QUANDO PORTA ERRORI CI ESCE '0' O '∞', QUINDI È "SICURO". PER UTILIZZARLO, LAVORIAMO SU UN VOLUME V FINITO (MA GRANDE A PIACERE) COSÌ DA RENDERE DISCRETI GLI IMPULSI E NORMALIZZABILI GLI STATI. IL CAMPO È ALLORA

$$\Psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{\underline{p}} \sqrt{\frac{m}{E_{\underline{p}}}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left(b(\underline{p}, r) u(\underline{p}, r) e^{-ip\cdot x} + d^\dagger(\underline{p}, r) v(\underline{p}, r) e^{ip\cdot x} \right)$$

($1/\sqrt{V}$ FA LA PARTE DI $1/(2\pi)^3$). MANDEREMO POI $V \to \infty$.

RICORDIAMO CHE $b, b^\dagger$ SONO OPERATORI SU SPAZIO DISCRETO t.c.

$$[b(\underline{p}, r), b^\dagger(\underline{p}', r')\} = \delta_{rr'} \delta_{\underline{p}\underline{p}'}$$

(VERO CON LA CONVENZIONE CHE e^{-ipx} SIA L'ELETTRONE). LO STATO INIZIALE SIA UN ELETTRONE

$$|i\rangle = b^\dagger(\underline{k}, r) |0\rangle$$

LA CUI NORMA È

NOTA: SIAMO IN DISCRETO!

$$\langle 0 | b(\underline{k},r)\, b^{+}(\underline{k},r) |0\rangle = \langle 0 | \{ b(\underline{k},r), b^{+}(\underline{k},r) \} |0\rangle = \delta_{\underline{k}\underline{k}}\, \delta_{rr} = 1$$

SOTTINTENDENDO LA POLARIZZAZIONE DI CIASCUN FERMIONE, LO STATO FINALE SARÀ

$$S | \underline{k} \rangle$$

E LA PROBABILITÀ DI TROVARE $|\underline{k}'\rangle$ È IL $|\cdot|^2$ DELL'AMPIEZZA DI TRANSIZIONE

$$\langle \underline{k}' | S | \underline{k} \rangle$$

SE IL BERSAGLIO È UN NUCLEO PESANTE E L'e^- POCO ENERGETICO,

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \qquad A^0(\underline{x}) = \frac{Ze}{4\pi |\underline{x}|}$$

NOTA: $A^{\mu} = (\phi, \underline{A})$ CON ϕ POTENZIALE SCALARE.

VEDIAMO QUANTO VALGONO GLI ELEMENTI DI MATRICE

$$\langle 0 | b(\underline{k}') : \bar{\Psi}(x) \not{A}(x) \Psi(x) : b^{+}(\underline{k}) |0\rangle$$

CON IL BUON ORDINAMENTO,

$$d^{+} d\, b^{+} |0\rangle = d^{+} \{ d, b^{+} \} |0\rangle = 0$$

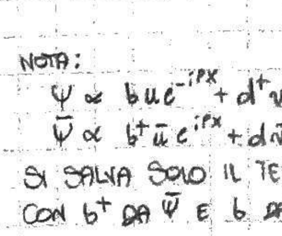
$$\langle 0 | b\, b^{+} d^{+} b^{+} |0\rangle = 0$$

È NON NULLO SOLAMENTE IL TERMINE $b^{+} b$, COSÌ CHE

NOTA:
$\Psi \propto b u e^{-ipx} + d^{+} v e^{ipx}$
$\bar{\Psi} \propto b^{+} \bar{u} e^{ipx} + d \bar{v} e^{-ipx}$
SI SALVA SOLO IL TERMINE CON b^{+} DA $\bar{\Psi}$ E b DA Ψ.
FALLO COI DIAGRAMMI DI FEYNMAN :)

$$\langle 0 | b(\underline{k}') : \bar{\Psi}(x) \not{A}(x) \Psi(x) : b^{+}(\underline{k}) |0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2 \sqrt{\frac{m}{E_{\underline{k}}}} \sqrt{\frac{m}{E_{\underline{k}'}}}\, \bar{u}(\underline{k}') \not{A}(x) u(\underline{k})\, e^{ik'x} e^{-ikx}$$

QUESTO È UN PRIMO ESEMPIO DI DIAGRAMMA DI FEYNMAN, DOVE QUESTO È DA PENSARE NELLO SPAZIOTEMPO.



A ORDINI PIÙ ALTI TROVEREMMO ANCHE IL PROPAGATORE DELL'ELETTRONE. QUI SI HA INVECE

$$\langle \underline{k}' | S - I | \underline{k} \rangle = \frac{ie}{V} \frac{m}{\sqrt{E_{\underline{k}} E_{\underline{k}'}}}\, \bar{u}(\underline{k}') \gamma^{\mu} u(\underline{k}) \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\mu}(x)\, e^{-i(k-k')\cdot x}\, d^4 x$$

$$\underset{A^{\mu} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \underline{0} \end{pmatrix}}{=} \frac{ie}{V} \frac{m}{\sqrt{E_{\underline{k}} E_{\underline{k}'}}}\, \bar{u}(\underline{k}') \gamma^{0} u(\underline{k})\, (2\pi)\, \delta(E - E') \int d^3x\, A_0(\underline{x})\, e^{i(\underline{k}-\underline{k}')\cdot \underline{x}}$$

NOTA: K È UN QUADRIMPULSO, K^0 L'ENERGIA.

DOVE LA $\delta(E-E')$ RAPPRESENTA LA CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA (INFATTI $\mathcal{L}$ DIPENDE DAL TEMPO SOLO ATTRAVERSO I CAMPI). CAMBIA INVECE L'IMPULSO. POSSO ANCHE SCRIVERE

$$\langle \underline{k}' | S - I | \underline{k} \rangle = \frac{ie}{V}\frac{m}{E}\, \bar{u}(\underline{k}')\gamma^0 u(\underline{k})\, 2\pi\, \delta(E-E')\, \tilde{A}_0(\underline{q})$$

CON

$$\tilde{A}_0(\underline{q}) = \int d^3x\, A_0(\underline{x})\, e^{-i\underline{q}\cdot\underline{x}} \qquad \underline{q} = \underline{k}' - \underline{k}$$

QUESTA È L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ. LA PROBABILITÀ VALE INVECE

$$|S_{fi}|^2 = \frac{e^2}{V^2}\left(\frac{m}{E}\right)^2 |\bar{u}(\underline{k}')\gamma^0 u(\underline{k})|^2 \underbrace{\delta^2(E-E')}_{??} |\tilde{A}_0(\underline{q})|^2$$

CHE SI FA?

SI FA IL PACCHETTO D'ONDA INVECE DELL'ONDA PIANA. TUTTAVIA SI ARRIVA AL RISULTATO INTUITIVO

$$\delta(E-E')^2 = \delta(E-E')\,\delta(0) \qquad \left(f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)\right)$$

$$\delta(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0$$

NOTA: CHIARO CHE A RIGORE FA ∞, È IL VALORE CHE ASSUME $\delta(x)$ NELL'ORIGINE.

CHE È UN TEMPO: LO INTERPRETO COME LA DURATA DELL'ESPERIMENTO,

$$2\pi\,\delta(0) = T$$

("HAI VOLUTO USARE UN'ONDA PIANA?"). TROVIAMO ALLORA

$$|S_{fi}|^2 = \frac{e^2}{V^2}\left(\frac{m}{E}\right)^2 |\bar{u}(\underline{k}')\gamma^0 u(\underline{k})|^2\, 2\pi\,\delta(E-E')\, T\, |\tilde{A}_0(\underline{q})|^2$$

PER DEFINIRE LA SEZIONE D'URTO, CI INTERESSA LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE PER UNITÀ DI TEMPO, $|S_{fi}|^2/T$. MA CHE CI FA QUELL' $1/V^2$? SEMBRA CHE PER $V\to\infty$ LA SEZIONE D'URTO VADA A ZERO. IL FATTO È CHE VA NORMALIZZATA PER IL FLUSSO DI PARTICELLE INCIDENTI, $\Phi = \rho v$:

$$\frac{\rho A v\, dt}{A\, dt} = \rho v \equiv \Phi$$

$$\frac{|\underline{k}|}{E_k} = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} = v \qquad (c=1)$$

$\rho = 1/V$ (1 PARTICELLA INCIDENTE)

$$\Rightarrow \Phi = \frac{v}{V} \qquad [\Phi] \doteq \frac{1}{m^2\cdot s}$$

QUINDI DOVRÒ MOLTIPLICARE PER V E DIVIDERE PER v.

INOLTRE GLI IMPULSI (DISCRETI) CHE IL RILEVATORE PUÒ MISURARE SONO

$$p = \frac{2\pi n}{L} \qquad dp = \frac{2\pi}{L} dn$$

$$d^3 n = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p$$

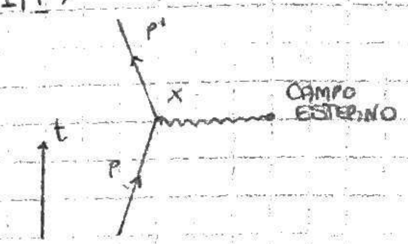
NOTA: E BASTA CON STA FARSA DEL RILEVATORE. IL VOLUME FINITO PORTA A UNO SPETTRO DISCRETO; IN $d\Omega$ VI SONO d^3n POSSIBILI STATI FINALI, LEGATI A d^3p DALLA REGOLA DI QUANTIZZAZIONE QUI SOPRA. FINE.

AVREMO

$$dn \frac{V}{v} \frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{e^2}{V} \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{|\bar{u}(\underline{k}') \gamma^0 u(\underline{k})|^2}{v} 2\pi \delta(E-E') |\tilde{A}_0(\underline{q})|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p$$

DOVE SI PERDE LA DIPENDENZA DA V. NOTA: VEDI DOPO, SARÀ PIÙ CHIARO.

<u>RICAPITOLANDO</u>: CALCOLO DELL'ELEMENTO DI MATRICE $\langle \underline{p}' | S - I | \underline{p} \rangle$



REGOLA: LA LINEA FERMIONICA VA DA $-\infty$ A $+\infty$ PERCHÉ SI DEVE CONSERVARE LA CARICA.

$$S_{fi} - \delta_{fi} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\sqrt{\frac{m}{E'}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ip' \cdot x} \bar{u}(\underline{p}')\right] (ie \not{A}(x)) \left[\sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ipx} u(\underline{p})\right]$$

NEL NOSTRO CASO SPECIFICO, $A^\mu = (A^0, \underline{0})$, QUINDI

$$\not{A}(x) = \gamma^0 A_0(\underline{x})$$

NOTA: OCCHIO CHE CON I DIAGRAMMI DI FEYNMAN AVRESTI $(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i)$, MENTRE A QUESTO LIVELLO SI CONSERVA L'ENERGIA MA NON L'IMPULSO.

E SI ERA TROVATO

$$\mathbb{P} = |S_{fi} - \delta_{fi}|^2 = \frac{e^2 m^2}{E^2} \cdot \frac{1}{V^2} |\tilde{A}_0(\underline{q})|^2 |\bar{u}(\underline{p}') \gamma^0 u(\underline{p})|^2 2\pi \delta(E-E') \, T$$

SI NOTI CHE, SE AVESSIMO SCELTO DI USARE UN PACCHETTO D'ONDE, L'INTEGRALE DI $e^{i(\underline{p}' - \underline{p}) \cdot \underline{x}}$ NON AVREBBE DATO UNA DELTA DIRAC, PERCHÉ SI SAREBBE DOVUTO SVOLGERE SOLO SUL VOLUME SU CUI IL PACCHETTO È DIVERSO DA ZERO E NON SU TUTTO $\mathbb{R}^3$. NOTA: È L'INTEGRALE CON CUI CALCOLO $\tilde{A}^0(\underline{q})$.

INVECE IL TEMPO T DI INTERAZIONE CON IL CENTRO SCATTERATORE SAREBBE STATO INFINITO ANCHE USANDO IL PACCHETTO A CAUSA DELL'ANDAMENTO DEL POTENZIALE COULOMBIANO ALL'INFINITO.

LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE VALE

$$d\sigma = \frac{\rho \, d^3 m}{\Phi T} = \frac{\rho}{\Phi T} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p'$$

NOTA: $d\sigma = \frac{N_d(d\Omega)/T}{(N_i/T)\cdot(C_d/A)} = \frac{N_d(d\Omega)}{\Phi \cdot T}$ } NUMERO DI EVENTI RILEVATI IN $d\Omega$

SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE.

$d^3 m$ È IL NUMERO DI POSSIBILI STATI FINALI IN $d\Omega$.

INFINE $\Phi = v/V$.

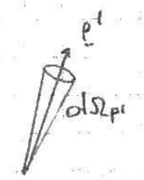
DOVE ΦT PRENDE IL NOME DI "LUMINOSITÀ INTEGRATA" E CONSISTE NEL NUMERO DI PARTICELLE PRODOTTE DURANTE IL T DELL' ACCELERATORE

SEZIONE D'URTO DI RUTHERFORD

PER ELIMINARE LA δ VOGLIAMO INTEGRARE IN dE. OSSERVIAMO CHE

$$d^3 p' = d\Omega_{p'} \, |\underline{p}'|^2 \, d|\underline{p}'|$$

$$d\Omega_{p'} = d\varphi' \, d\cos\theta'$$



INOLTRE

$$E' = \sqrt{m^2 + |\underline{p}'|^2}$$

NOTA:
$E'^2 = m^2 + |\underline{p}'|^2 \rightarrow 2E'dE' = 2|\underline{p}'|d|\underline{p}'|$

$$dE' = \frac{|\underline{p}'| \, d|\underline{p}'|}{\sqrt{m^2 + |\underline{p}'|^2}} \quad \Rightarrow \quad |\underline{p}'| \, d|\underline{p}'| = E' dE'$$

INTEGRANDO ALLORA SU TUTTE LE ENERGIE INIZIALI (E FINALI, VISTO CHE $E = E'$) CHE IL FASCIO INCIDENTE PUÒ ASSUMERE,

$$\int_{\mathbb{R}} E' \, \delta(E - E') \, dE' = E$$

NOTA: $d^3 p' = E' dE' |\underline{p}'| d\Omega_{p'}$

INOLTRE USIAMO

$\Phi = v/V$

DUNQUE

$$d\sigma = e^2 \frac{m^2}{E^2} |\hat{A}_0(\underline{q})|^2 \, |\bar{u}(\underline{p}') \gamma^0 u(\underline{p}')|^2 \frac{2\pi}{v} \frac{|\underline{p}'| E}{(2\pi)^3} d\Omega_{p'}$$

IL FATTORE

$$|\bar{u}(\underline{p}', r') \gamma^0 u(\underline{p}, r)|^2$$

DIPENDE CHIARAMENTE DALLE CONDIZIONI INIZIALI. TUTTAVIA AI FINI SPERIMENTALI CONSIDERIAMO LA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA: HA SENSO ASSUMERE CHE LO STATO INIZIALE NON SIA PURO, BENSÌ UNA MISCELA STATISTICA DI SPIN UP E SPIN DOWN

$$\rho = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

PRESENTI IN EGUAL PROPORZIONE. ALLA MEDIA SULLE POLARIZZAZIONI INIZIALI CORRISPONDE LA SOSTITUZIONE

$$|\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)|^2 \rightarrow \frac{1}{2}\sum_r |\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)|^2$$

SE IL RILEVATORE NON È SENSIBILE ALLA POLARIZZAZIONE, VANNO SOMMATE LE PROBABILITÀ DI TROVARE $r'=1,2$ COME STATO FINALE:

$$\frac{1}{2}\sum_r |\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)|^2 \rightarrow \frac{1}{2}\sum_{r,r'} |\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)|^2$$

CALCOLIAMO ALLORA LA SOMMATORIA $(\bar{u}=u^+\gamma^0,\ \gamma^{0+}=\gamma^0)$

$$\sum_{r,r'} |\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)|^2 = \sum_{r,r'} [\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)][\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)]^\dagger$$

$$= \sum_{r,r'} [\bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)]\,[\underbrace{u^+(\underline{p},r)\,\gamma^{0+}}_{\bar{u}(\underline{p},r)}(u^+(\underline{p}',r')\gamma^0)^+]$$

$$= \sum_{r,r'} \bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 u(\underline{p},r)\,\bar{u}(\underline{p},r)\gamma^0 u(\underline{p}',r')$$

$$= \sum_{r'} \bar{u}(\underline{p}',r')\gamma^0 \left[\sum_r u(\underline{p},r)\bar{u}(\underline{p},r)\right]\gamma^0 u(\underline{p}',r')$$

$$= \sum_{r'} \bar{u}(\underline{p}',r')\,\underbrace{\gamma^0 \frac{\not{p}+m}{2m}\gamma^0}_{:=A}\, u(\underline{p}',r') = \sum_{r'} \bar{u}_\alpha(\underline{p}',r')A_{\alpha\beta}u_\beta(\underline{p}',r')$$

$$= \left[\sum_{r'} u_\beta(\underline{p}',r')\bar{u}_\alpha(\underline{p}',r')\right]A_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p}'+m}{2m}\right)_{\beta\alpha} A_{\alpha\beta}$$

$$= \left(\frac{\not{p}'+m}{2m}A\right)_{\beta\beta} = \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'+m}{2m}A\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'+m}{2m}\gamma^0\frac{\not{p}+m}{2m}\gamma^0\right)$$

$$= \frac{1}{4m^2}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}'+m)\gamma^0(\not{p}+m)\gamma^0\right]$$

ANALIZZIAMO ALCUNE REGOLE PER CALCOLARE LA TRACCIA DI PRODOTTI DI MATRICI γ.

1) LA TRACCIA DEL PRODOTTO DI UN NUMERO DISPARI DI MATRICI γ È SEMPRE NULLA:

$$Tr\left(\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{2m+1}\right) = Tr\left(\prod_{i=1}^{2m+1} \gamma^{\alpha_i}\right) = 0$$

NOTA: $\gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

CON $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$, $\{\gamma^5, \gamma^{\alpha_i}\} = 0$

INFATTI

$$Tr\left(\prod_{i=1}^{2m+1} \gamma^{\alpha_i} (\gamma^5)^2\right) = Tr\left(\gamma^5 \prod_{i=1}^{2m+1} \gamma^{\alpha_i} \gamma^5\right)$$

È PIÙ SEMPLICE SE USI m GENERICO E NOTI ALLA FINE COSA SUCCEDE SE m È DISPARI. SI È USATA LA PROPRIETÀ CICLICA DELLA TRACCIA DI UN PRODOTTO.

$$= Tr\left(\gamma^5 \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2m+1}} \gamma^5\right) = Tr\left[(-1)^{2m+1}\left(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2m+1}}\right)\right]$$

$$= (-1)^{2m+1} Tr\left(\prod_{i=1}^{2m+1} \gamma^{\alpha_i}\right) = -Tr\left(\prod_{i=1}^{2m+1} \gamma^{\alpha_i}\right)$$

2) LA TRACCIA DEL PRODOTTO DI DUE MATRICI γ È

$$Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu\right) = 4 g^{\mu\nu}$$

INFATTI BASTA PRENDERE LA TRACCIA DI ENTRAMBI I MEMBRI DI

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) + Tr(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 2 g^{\mu\nu} Tr(\mathbb{1})$$

$$2 Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2 g^{\mu\nu} \cdot 4$$

NOTA: OCCHIO CHE γ^μ È UNA MATRICE 4x4 E COSÌ $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$. INVECE $g^{\mu\nu}$ È UN NUMERO, QUINDI LO MOLTIPLICO PER $\mathbb{1}_4$.

NOTA: LA TRACCIA DI UN PRODOTTO DI MATRICI È INVARIANTE PER LORO PERMUTAZIONI CICLICHE, QUINDI $Tr(AB) = Tr(BA)$

3) LA TRACCIA DEL PRODOTTO

$$Tr(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = Tr(a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu c_\rho \gamma^\rho d_\sigma \gamma^\sigma)$$

$$= 4\left[(a^\mu b_\mu)(c^\nu d_\nu) - (a^\mu c_\mu)(b^\nu d_\nu) + (a^\mu d_\mu)(b^\nu c_\nu)\right]$$

$$= 4\left[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)\right]$$

(NON LA DIMOSTRIAMO).

POSSIAMO ALLORA CALCOLARCI

NOTA: $Tr(x)$ È LINEARE!

$$\frac{1}{4m^2} Tr\left[(\not{p}'+m)\gamma^0(\not{p}+m)\gamma^0\right] = \frac{1}{4m^2} Tr\left[(\not{p}'+m)(\gamma^0\not{p}\gamma^0 + \gamma^0 m \gamma^0)\right]$$

$$= \frac{1}{4m^2}\left[Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0) + m\underbrace{Tr(\not{p}'\gamma^0\gamma^0)}_{=0} + m\underbrace{Tr(\gamma^0\not{p}\gamma^0)}_{=0} + m^2 Tr(\gamma^0\gamma^0)\right]$$

$$= \frac{1}{4m^2}\left[Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0) + 4m^2\right]$$

NOTA: $Tr(\not{p}) = Tr(p_\mu\gamma^\mu) = p_\mu Tr(\gamma^\mu) = 0$.
OCCHIO CHE $\not{p}^2 = p^2 = m^2$, MA
$Tr(\not{p}^2) \neq (Tr\not{p})^2$ PERCHÉ È UNA SOMMA DI QUADRATI.

SI NOTI CHE IL FATTORE $\frac{1}{4m^2}$ ASSICURA CHE LA SEZIONE D'URTO RIMANGA FINITA ANCHE NEL LIMITE $m \to 0$ (C'ERA m^2 COME PREFATTORE). INVECE IL $4m^2$ A NUMERATORE VA A ZERO NEL CASO DI FERMIONI A MASSA NULLA.

CALCOLIAMO ORA

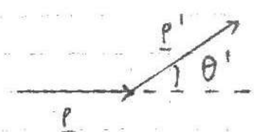
$$Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0) = 4\left[p'^0 p^0 - p'^\mu p_\mu + p'^0 p_0\right]$$

NOTA: PUOI PENSARLA COME
$Tr(\not{p}'\not{b}\not{p}\not{d})$ CON $b^\mu = d^\mu = (1,0,0,0)$
E APPLICARE LA REGOLA (3).

$$= 4\left[2E'E - (E'E - \underline{p}'\cdot\underline{p})\right] \quad \left(= 4\left[E'E + \underline{p}'\cdot\underline{p}\right]\right)$$

$$Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0)\delta(E-E') = 4\left[2E^2 - (E^2 - |\underline{p}|^2\cos\theta')\right]$$

$$= 4\left(E^2 + |\underline{p}|^2\cos\theta'\right)$$



★ CALCOLIAMO QUANTO VALE $\tilde{A}_0(\underline{q})$ PER UNA GENERICA CARICA DISTRIBUITA SECONDO $Ze\rho(\underline{x})$, CON

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\underline{x})\, d^3x = 1$$

E TALE DA SODDISFARE

$$\nabla^2 A_0(\underline{x}) = -Ze\rho(\underline{x})$$

NOTA: È LA PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL,
$\rho/\varepsilon_0 = \nabla\cdot\underline{E} = \nabla\cdot(-\nabla\phi) = -\nabla^2\phi$

AD ESEMPIO, NEL CASO DI UNA CARICA PUNTIFORME NELL'ORIGINE

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi|\underline{x}|} = -\delta(\underline{x})$$

IN GENERALE INVECE

$$A_0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, e^{i\underline{q}\cdot\underline{x}}\, \tilde{A}_0(\underline{q})$$

$$\nabla^2 A_0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\nabla^2 e^{i\underline{q}\cdot\underline{x}}\right) \tilde{A}_0(\underline{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (-|\underline{q}|^2)\, e^{i\underline{q}\cdot\underline{x}}\, \tilde{A}_0(\underline{q})$$

$$\equiv -Ze\,\rho(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[-Ze\,\tilde{\rho}(\underline{q})\right] e^{i\underline{q}\cdot\underline{x}}$$

POICHÉ LA TRASFORMATA DI FOURIER È INVERTIBILE, RICONOSCIAMO

$$\tilde{A}_0(\underline{q}) = \frac{Ze\,\tilde{\rho}(\underline{q})}{|\underline{q}|^2}$$

(NEL CASO DI UN NUCLEO PUNTIFORME, $\rho(\underline{x}) = \delta(\underline{x})$ E $\tilde{\rho}(\underline{q}) = 1$). ALLORA

$$|\tilde{A}_0(\underline{q})|^2 = Z^2 e^2 \frac{|\tilde{\rho}(\underline{q})|^2}{|\underline{q}|^4}$$

SI ERA DEFINITO

$$\underline{q} = \underline{p}' - \underline{p}$$

E NEL CASO DI SCATTERING ELASTICO $(E = E')$

$$|\underline{q}|^2 = 2|\underline{p}|^2(1-\cos\theta) = 4|\underline{p}|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|\underline{q}|^4 = 16\,|\underline{p}|^4 \sin^4\frac{\theta}{2}$$

NEL CASO IN CUI $\rho(\underline{x}) = \delta(\underline{x})$ SI HA QUINDI

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} \overset{*}{=} \frac{m^2}{16E^2} Z^2 e^4 \frac{1}{|\underline{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{2} \frac{1}{4m^2} \left[4\left(E^2 + |\underline{p}|^2\cos\theta\right) + 4m^2\right] \frac{|\underline{p}|E}{(2\pi)^2} \frac{1}{v}$$

$$= \frac{Z^2 e^4}{32\,E^2 |\underline{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \left[E^2 + |\underline{p}|^2\cos\theta + E^2 - |\underline{p}|^2\right] \frac{|\underline{p}|E}{(2\pi)^2 v}$$

NOTA: $\frac{|\underline{p}|}{E} = v$

$(\underline{p} = \gamma m \underline{v})$

$$= \frac{Z^2 e^4 E^2}{16\,E^2 |\underline{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 - v^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \frac{|\underline{p}|E}{(2\pi)^2 v}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{Z^2 e^4 E^2}{16\,|\underline{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

* NOTA: PESSIMA ESECUZIONE, PUOI PARTIRE DA $\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{e^2 E^2}{2(2\pi)^2}\left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)|\tilde{A}_0(\underline{q})|^2$

E ANCORA

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p.i}} = \frac{Z^2 e^4}{16(2\pi)^2 E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{(Z\alpha)^2}{4E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

NOTA: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

CHE SI DICE <u>SEZIONE D'URTO DI MOTT</u>.

NOTIAMO CHE QUESTA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE DÀ ∞ UNA VOLTA INTEGRATA:

NOTA: DIVERGE IN $\theta = 0$.

$$\int_\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \propto \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sin^4(\theta/2)} \propto \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^3\theta} \sim \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\theta^3} = \infty$$

LA DIVERGENZA È DOVUTA AL FATTO CHE L'INTERAZIONE COULOMBIANA

$$\Phi(\underline{x}) \propto \frac{1}{|\underline{x}|}$$

È A LUNGO RAGGIO; UNA A CORTO RAGGIO ANDREBBE A ZERO IN MODO ESPONENZIALE, COME IL POTENZIALE ALLA YUKAWA

$$\Phi(\underline{x}) \propto \frac{1}{|\underline{x}|} e^{-m|\underline{x}|}$$

IN EFFETTI IL TEOREMA DI GAUSS AFFERMA CHE IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA CENTRATA SU DI UNA CARICA PUNTIFORME È PROPORZIONALE ALLA CARICA STESSA (INDIPENDENTEMENTE DA QUANTO GRANDE SIA LA SFERA, QUINDI AL LIMITE ANCHE PER $R \to \infty$). SI TRATTA TUTTAVIA DI UNA SITUAZIONE DIFFICILMENTE OSSERVABILE IN NATURA PERCHÉ LA CARICA DI UN NUCLEO È SCHERMATA DAGLI ELETTRONI CIRCOSTANTI.

INVECE SE

$$\tilde{A}_0(\underline{q}) = \frac{Ze\,\tilde{\rho}(\underline{q})}{|\underline{q}|^2}, \quad |\tilde{A}_0(\underline{q})|^2 = \frac{(Ze)^2 |\tilde{\rho}(\underline{q})|^2}{|\underline{q}|^4}$$

LA SINGOLARITÀ DIVENTA INTEGRABILE QUALORA

$$|\tilde{\rho}(\underline{q})|^2 \sim \theta^{2+\varepsilon} \qquad \theta \to 0$$

QUESTO IMPLICA CHE PER $\theta = 0$ (CIOÈ $\underline{q} = \underline{p}' - \underline{p} = 0$) SIA $\tilde{\rho}(\underline{0}) = 0$:

$$\tilde{\rho}(\underline{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \rho(\underline{x}) = 0$$

CONDIZIONE NECESSARIA È PERCIÒ CHE IL CENTRO SCATTERATORE ABBIA CARICA NULLA (MA NON SUFFICIENTE: SERVE $\tilde{\rho}(\underline{q}) \sim \theta^{1+\delta}$, $\theta \to 0$).

È SUFFICIENTE, AD ESEMPIO, CHE $\rho(\underline{x})$ SIA A SUPPORTO COMPATTO*: IN QUESTO MODO $\tilde{\rho}(\underline{q})$ SARÀ IDENTICAMENTE NULLA IN UN INTORNO DI $\underline{q} = \underline{0}$.

SE CONSIDERIAMO INFINE IL LIMITE DI BASSE ENERGIE PER LA SEZIONE D'URTO DI MOTT, PER CUI

$$1 - v^2 \sin^2(\theta/2) \simeq 1$$

RITROVIAMO LA SEZIONE D'URTO DI RUTHERFORD

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{4E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

*NOTA: SE $\rho(x)$ È A SUPPORTO COMPATTO,

$$\tilde{\rho}(q) = \int_V e^{iqx} \rho(x) dx$$

È ANALITICA. POSSO INFATTI SVILUPPARE e^{iqx} IN SERIE DI POTENZE E NESSUNA DI QUESTE DIVERGE, PERCHÉ IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE NON È INFINITO.

$$e^{iqx} = 1 + iqx - q^2x^2/2 \dots$$

IL PRIMO TERMINE È NULLO SE LA DISTRIBUZIONE È GLOBALMENTE NEUTRA, IL SECONDO LO È SE LA DISTRIBUZIONE PRESENTA SIMMETRIA RADIALE. DAL SUCCESSIVO IN POI NON HO PIÙ DIVERGENZE ($\theta \sim |q|$).

FOCUS: LAGRANGIANA DI INTERAZIONE

NELLA PROSSIMA PAGINA SCRIVIAMO $\mathcal{L}$. PERCHÉ È FATTA COSÌ? $H_I = -A_\mu J^\mu$ QUALSIASI, QUINDI CHI LO DICE CHE QUELLA J^μ È PROPRIO LA CORRENTE DEL CAMPO DI DIRAC? PER L'INVARIANZA DI GAUGE,

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)$$

SE VOGLIO CHE $\mathcal{L}$ SIA INVARIANTE, L'UNICO MODO È SOSTITUIRE

$$\psi \to e^{ie\Lambda(x)} \psi$$

E IL TERMINE CHE SALTA FUORI È PROPRIO $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu$.

ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

CONSIDERIAMO ORA L'INTERAZIONE TRA IL CAMPO DI DIRAC E IL CAMPO ELETTROMAGNETICO:

NOTA: RICORDA LA SOSTITUZIONE MINIMALE $p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$. VEDI FOCUS UNA PAGINA INDIETRO.

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\not{A}\Psi \qquad q = +e = -|e|$$

STAVOLTA $\not{A}$ NON È QUELLO ESTERNO, MA SARÀ DETERMINATO DALLA DISTRIBUZIONE DI CARICA DELL'ELETTRONE E DOVRÀ PERCIÒ ESSERE TRATTATO IN TEORIA DELLE PERTURBAZIONI (q È UN PARAMETRO PICCOLO).

NON POTREMO USARE $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$, PERCHÉ QUELLO ELETTROMAGNETICO NON È UN CAMPO CANONICO.

RICORDIAMO CHE VARIANDO RISPETTO AD A_μ SI OTTENGONO DA $\mathcal{L}$ LE EQUAZIONI DI MAXWELL. DATO IL TERMINE AGGIUNTIVO

$$-q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu := -q J^\mu A_\mu$$

NOTA: PER IL CAMPO DI DIRAC, $J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ È UNA CORRENTE CONSERVATA (DALL'INVARIANZA PER TRASFORMAZIONI DI FASE GLOBALE). LA CARICA J^0, UNA VOLTA QUANTIZZATA, È APPUNTO L'OPERATORE DI CARICA (AUTOVALORI ± 1).

VARIANDO RISPETTO AD A_μ, Ψ SI HANNO

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu} = q J^\mu \\ (i\not{\partial} - m)\Psi = q\not{A}\Psi \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

NOTA: Ψ CONTIENE GRADI DI LIBERTÀ SPINORIALI E PER QUESTO COMMUTA CON A^μ.

★ DALLA (I) PER $\mu = 0$, POICHÉ $F^{00} = 0$

NOTA: $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$

$$\partial_\nu F^{0\nu} = q J^0$$
$$\partial_i F^{0i} = \partial_i(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)$$

SCEGLIENDO LA GAUGE DI COULOMB ($\partial_i A^i = 0$),

$$q J^0 = \partial_i \partial^i A^0 = -\Delta A^0$$
$$\Delta A^0 = -q J^0$$

CHE COINCIDE CON L'EQUAZIONE DI POISSON PER UNA DISTRIBUZIONE STATICA DI CARICA (ANCHE SE QUI STIAMO STUDIANDO IL CASO DINAMICO), CON SOLUZIONE

NOTA: $A^\mu = (\phi, \underline{A})$ E $J^\mu = (\rho c, \underline{J})$. LA DIFFERENZA CON IL CAMPO EM NEL VUOTO È TUTTA QUI: SE $J^\mu = 0$ TROVO $\Delta A^0 = 0 \Rightarrow A^0 = 0$.

$$A^0(\underline{x}, x^0) = q\int d^3y \, \frac{J^0(\underline{y}, x^0)}{4\pi|\underline{x} - \underline{y}|}$$

CHE È ORRIBILE DAL PUNTO DI VISTA RELATIVISTICO: È UN'AZIONE A DISTANZA E RISPECCHIA LA SCELTA DI GAUGE NON COVARIANTE. VEDREMO CHE I RISULTATI FISICI CHE NE DERIVANO PERÒ LO SONO.

* COME TROVO L'HAMILTONIANA DI INTERAZIONE?

PER LA PARTE DI DIRAC, TROVO SENZA PROBLEMI L'HAMILTONIANA DI DIRAC LIBERA

$$H = \int d\underline{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right)$$

NOTA: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0$, MA π_ψ ESISTE SENZA PROBLEMI E $H = \int d\underline{x}\, \bar{\psi} (\underline{\alpha} \cdot \underline{\nabla} + \beta m) \psi$
L'HAMILTONIANA INTERA COMPRENDE LA SOMMA SUI DUE CAMPI ϕ E A_μ.

QUINDI LA IGNORIAMO E LA RIMETTEREMO ALLA FINE.

RICORDANDO CHE $F^{\mu\nu}$ È ANTISIMMETRICO, RISCRIVO

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - qA^\mu J_\mu = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{2} \underline{B}^2 - qA^\mu J_\mu$$

NOTA: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij}$ E $F_{ij} F^{ij} = 2\underline{B}^2$.

RISPETTO AL CASO DEL VUOTO, STAVOLTA

$$-\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} = -\frac{1}{2} \left[-(\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \right] \left[-(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} (-\dot{A}^i - \partial_i A_0)(\dot{A}^i + \partial_i A^0) = \frac{1}{2} (\dot{A}^i + \partial_i A^0)^2$$

QUINDI

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{A}^i + \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{2} \underline{B}^2 - qA^\mu J_\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \dot{A}^i + \partial_i A_0$$

NOTA: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0$ PERCHÉ $F^{\mu\nu}$ È ANTISIMMETRICO, $F^{00} = 0$.

$$H = \int d\underline{x} \left[(\dot{A}^i + \partial_i A_0) \dot{A}^i - \mathcal{L} \right]$$

NOTA: PER IL CAMPO EM ERA $\frac{1}{2} E^2 = \frac{1}{2} (\dot{A}^i)^2$, DA CUI $\mathcal{H} = \frac{1}{2} (E^2 + \underline{B}^2)$

IN CUI IL SECONDO TERMINE SVANISCE INTEGRANDO PER PARTI E USANDO $\partial_i A^i = 0$. RIMANE

NOTA: ANCHE SE NON FAI QUESTO PASSAGGIO, IL TERMINE SI ELIDE CON LO SVILUPPO DEL QUADRATO $(\dot{A}^i + \partial_i A^0)^2$.

$$H = \int d\underline{x} \left[\dot{A}^{i2} - \frac{1}{2} (\dot{A}^i + \partial_i A^0)^2 + \frac{1}{2} \underline{B}^2 + qA^\mu J_\mu \right]$$

RICONOSCIAMO L'HAMILTONIANA LIBERA DEL CAMPO EM (SONO I TERMINI SENZA ZERO, PERCHÉ IN QUEL CASO ERA $A^0 = 0$).

NOTA: HO INTEGRATO PER PARTI $-\partial_i A^i A^i$ DOPO AVER SVILUPPATO IL QUADRATO, QUINDI HO USATO $\partial_i A^i = 0$.

SCRIVIAMO

$$H = H_0 - \frac{1}{2}\int d\underline{x}\, \partial_i A^0 \partial_i A^0 + \int q A^\mu J_\mu \, d\underline{x}$$

IL SECONDO TERMINE SI PUÒ INTEGRARE PER PARTI A DARE

$$-\frac{1}{2}\int d\underline{x}\, \partial_i A^0 \partial_i A^0 = \frac{1}{2}\int d\underline{x}\, A^0 \Delta A^0$$

USANDO L'EQUAZIONE DI POISSON,

NOTA: H_0 CONTIENE SIA L'HAMILTONIANA DI DIRAC CHE QUELLA DEL CAMPO EM.

$$H = H_0 - \frac{1}{2}\int q A_0 J^0 \, d\underline{x} + q\int d\underline{x}\, A_\mu J^\mu$$

$$= H_0 + q\int d\underline{x}\left(\frac{1}{2}A^0 J^0 - \underline{A}\cdot\underline{J}\right) = H_0 + \int d\underline{x}\left[q\frac{A^0 J^0}{2} - q\,\underline{A}\cdot\underline{J}\right]$$

RICONOSCIAMO PERCIÒ

$$H_I = q^2\int \frac{d\underline{x}\, d\underline{y}}{8\pi|\underline{x}-\underline{y}|} J_0(\underline{x}, x^0) J_0(\underline{y}, x^0) - q\int d\underline{x}\, \underline{A}\cdot\underline{J}$$

ANCORA TERRIBILMENTE NON LOCALE.

· TEOREMA DI WICK

$$T(ABC \dots XYZ)$$

$$= N(ABC\dots XYZ) + N(\underline{AB}C\dots XYZ) + N(\underline{ABC}\dots XYZ)$$

$$+ N(\underline{AB}\,\underline{CD}\dots) + \dots$$

NOTA: QUI HO CONTRATTO A CON C, NON ABC.

DOVE N È IL PRODOTTO NORMALE (OPERATORI DI CREAZIONE A DESTRA E A OGNI SCAMBIO CAMBIO DI SEGNO), MENTRE LA QUADRA INDICA LA CONTRAZIONE DEFINITA DA

$$\underline{AB} := \langle 0 | T(AB) | 0 \rangle$$

NEL CASO DELLA QED AVREMO DUE TIPI DI PROPAGATORE: QUELLO DEL FERMIONE E QUELLO DEL FOTONE. LE CONTRAZIONI TRA CAMPO DI MAXWELL E CAMPO DI DIRAC SONO SEMPRE NULLE:

$$\langle 0 | T(A^i(x)\psi(y)) | 0 \rangle = 0$$

PROCESSI DI DIFFUSIONE AL PRIMO ORDINE

$$S - I = -i\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, dt_2\, T\big(H_I(t_1) H_I(t_2)\big) + \dots$$

IL PRIMO TERMINE DÀ

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, H_I(t_1) = -iq^2 \int \frac{dx^0 d\underline{x}\, d\underline{y}}{8\pi|\underline{x}-\underline{y}|} J_0(\underline{x}, x^0) J_0(\underline{y}, x^0) - iq \int dx^0 d\underline{x}\, \underline{A}\cdot\underline{J}$$

DOVE $\underline{A}$, $\underline{J}$ SONO OPERATORI CHE CONTENGONO GLI OPERATORI DI CREAZIONE E DISTRUZIONE TRAMITE I CAMPI $\underline{A}(x)$ E $\underline{J} = \bar{\Psi}(x)\underline{\gamma}\Psi(x)$:

$$\int d^4x : \underline{A}(x)\bar{\Psi}(x)\underline{\gamma}\Psi(x) :$$

IL CONTRIBUTO ALL'ORDINE q È SEMPRE NULLO SE È COINVOLTO UN γ. AD ESEMPIO IN

$$\langle e^+_{k_2} e^-_{k_1} | -q \int \underline{A}\cdot\underline{J}\, d\underline{x} | \gamma_k \rangle \propto \int e^{ik_2 x} e^{ik_1 x} e^{-ikx} d^4x \propto \delta^4(k_1 + k_2 - k)$$

QUESTA δ NON È MAI SODDISFATTA. INFATTI

$\gamma \to e^+ e^-$

$k = k_1 + k_2$

È IMPOSSIBILE (COME SI VEDE NEL SISTEMA DEL BARICENTRO). ANCHE

$\gamma e^- \to e^-$

È IMPOSSIBILE: NEL SISTEMA A RIPOSO DI e^- SI VEDE CHE L'ENERGIA NON È CONSERVATA. NEMMENO

$e^+ e^- \to \gamma$

È AMMESSA AL PRIMO ORDINE (MENTRE LO È $\gamma\gamma \to e^+ e^-$, MA AL PRIMO ORDINE SONO NON NULLI SOLTANTO ELEMENTI DI MATRICE TRA TRE PARTICELLE).

NOTA: PARTICELLE DIVERSE SONO ORTOGONALI. PERCHÉ NON SIA NULLO L'ELEMENTO DI MATRICE CI VOGLIONO I CAMPI IN MEZZO E QUI NE HO UNO FERMIONICO E UNO EM.

AL SECONDO ORDINE SUBENTRA IL TERMINE IN q^2 CHE ABBIAMO GIÀ VISTO PIÙ UN ALTRO DERIVANTE DAL TERMINE CON $H_I(t_2)$:

$$(S - I) = (1^\circ \text{ ORD. } q) - iq^2 \int \frac{dx^0 d\underline{x}\, d\underline{y}}{8\pi|\underline{x}-\underline{y}|} J_0(\underline{x}, x^0) J_0(\underline{y}, x^0)$$

$$+ \frac{(-iq)^2}{2}\int d^4x\, d^4y\, T\big((\underline{A}\cdot\underline{J})(x)\ (\underline{A}\cdot\underline{J})(y)\big)$$

CHE FACCIAMO? USIAMO IL TEOREMA DI WICK:

$$T\left(\underline{A}(x)\cdot\underline{J}(x)\ \ \underline{A}(y)\cdot\underline{J}(y)\right) = T\left(A^i(x)\bar{\Psi}(x)\gamma^i\Psi(x)\ \ A^j(y)\bar{\Psi}(y)\gamma^j\Psi(y)\right)$$

IL PRIMO TERMINE (PRODOTTO NORMALE), COME SI È VISTO, NON CONTA.
IL SUCCESSIVO DÀ I PROPAGATORI

$$\langle 0|T(A^i(x)A^j(y))|0\rangle\, N\left(\bar{\Psi}(x)\gamma^i\Psi(x)\ \ \bar{\Psi}(y)\gamma^j\Psi(y)\right)$$

$$\langle 0|T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))|0\rangle\, N\left(A^i\bar{\Psi}\gamma^i\ A^j\gamma^j\Psi\right)$$

PROCESSI TIPICI SONO

$$e^+e^- \to e^+e^-$$

$$e^+e^+ \to e^+e^+$$

NOTA: QUEST'ULTIMO È IL PROPAGATORE DEL CAMPO DI DIRAC,

$$i S_F(x-y) = \langle 0|T(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y))|0\rangle = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i e^{-iq(x-y)}}{\not{q}-m+i\varepsilon}$$

MA CHI È IL PROPAGATORE DEL FOTONE?

PROPAGATORE DEL FOTONE

VOGLIAMO STUDIARE

$$\langle 0|T(A^i(x)A^j(y))|0\rangle$$

NOTA: CONFRONTA $A^i(x)$ CON IL CAMPO DI K-G.

$$\varphi(x) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}}\left(a(\underline{q})e^{-iqx} + h.c.\right)$$

DOVE

$$A^i(x) = \sum_\lambda\int\frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\underline{q}|}}\left(a(\underline{q},\lambda)\,\varepsilon^i(\underline{q},\lambda)e^{-iqx} + a^+(\underline{q},\lambda)\,\varepsilon^i(\underline{q},\lambda)e^{iqx}\right)$$

CON $\underline{\varepsilon}$ REALE E ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE,

$$\underline{q}\cdot\underline{\varepsilon} = 0$$

NOTA: PER IL CAMPO SCALARE $\omega_{\underline{p}} = \sqrt{m^2+|\underline{p}|^2}$ E

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2\omega_{\underline{p}}}e^{-ip(x-y)}$$

GUARDATI IL CALCOLO A P. 227 DEL PATRÌ.

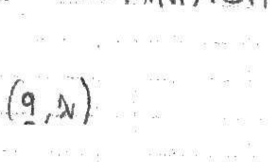
CALCOLIAMO DIRETTAMENTE

$$\langle 0|A^i(x)A^j(y)|0\rangle = \sum_\lambda\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2|\underline{q}|}e^{-iq(x-y)}\,\varepsilon^i(\underline{q},\lambda)\varepsilon^j(\underline{q},\lambda)$$

CHE È IDENTICO A QUELLO DEL CAMPO SCALARE SE NON PER LA SOMMA SULLE POLARIZZAZIONI. ALLORA ($m^2 = 0$ A DENOMINATORE)

$$\underbrace{\langle 0|T(A^i(x)A^j(y))|0\rangle}_{=\, i D_F^{ij}(x-y)} = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i e^{-iq(x-y)}}{q^2}\sum_\lambda\varepsilon^i(\underline{q},\lambda)\varepsilon^j(\underline{q},\lambda)$$

CHE È IL PROPAGATORE DEL FOTONE.



RICAPITOLANDO

$$H_I(x) = \frac{q^2}{8\pi}\int \frac{d\underline{x}\,d\underline{y}}{|\underline{x}-\underline{y}|} J_0(x^0,\underline{x})\,J_0(x^0,\underline{y}) - q\int d\underline{x}\ \underline{A}\cdot\underline{J}$$

$$S - I = -i\frac{q^2}{8\pi}\int\frac{d\underline{x}\,d\underline{y}}{|\underline{x}-\underline{y}|} J^0(x^0,\underline{x})J^0(x^0,\underline{y}) + \frac{(-i)^2}{2}q^2\int dx_1^4\,dx_2^4\ T\left(\underline{A}\cdot\underline{J}(x_1)\ \underline{A}\cdot\underline{J}(x_2)\right) + O(q)$$

INFATTI IL TERMINE AL PRIMO ORDINE $\underline{A}\cdot\underline{J}$ NON CONTRIBUISCE IN QUEI PROCESSI IN CUI SONO ASSORBITI O EMESSI FOTONI. USANDO IL TEOREMA DI WICK,

$$S - I = -iq^2\int\frac{dx^0\,d\underline{x}\,d\underline{y}}{8\pi|\underline{x}-\underline{y}|}J_0(\underline{x},x^0)J_0(\underline{y},x^0) - \frac{q^2}{2}\int dx_1^4\,dx_2^4\ i D_F^{ki}(x_1-x_2) N\left(J^k(x_1)J^i(x_2)\right)$$

DOVE

$$i D_F^{ki}(x_1-x_2) = \langle 0|\,T(A^k(x_1)A^i(x_2))\,|0\rangle = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2+i\varepsilon}\sum_\lambda \varepsilon^k(\lambda,\underline{q})\varepsilon^i(\lambda,\underline{q})$$

È IL PROPAGATORE DEL FOTONE.

VOGLIAMO INNANZITUTTO RENDERE QUADRIDIMENSIONALE LA FORMA

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon^k(\underline{q},\lambda)\varepsilon^i(\underline{q},\lambda) \qquad \text{(I)}$$

RISCRIVO

$$\underline{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon^\mu(\underline{q},\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\varepsilon}(\underline{q},\lambda)\end{pmatrix} \qquad \varepsilon^\mu\varepsilon_\mu = -1$$

PER RENDERE LA (I) UNA RELAZIONE DI COMPLETEZZA, AGGIUNGO

$$\hat{q}^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\underline{q}}\end{pmatrix} \qquad m^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{0}\end{pmatrix}$$

(SONO A DUE A DUE ORTOGONALI COME QUADRIVETTORI). VERIFICHIAMO SE

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon^\mu(\underline{q},\lambda)\varepsilon^\nu(\underline{q},\lambda) + \hat{q}^\mu\hat{q}^\nu\ (+)\ m^\mu m^\nu \stackrel{?}{=} -g^{\mu\nu}$$

OSSERVO CHE, MOLTIPLICANDO I DUE MEMBRI PER $\varepsilon_\mu(\underline{q},\lambda')$,

$$\varepsilon_\mu(\underline{q},\lambda')\varepsilon^\mu(\underline{q},\lambda) = -\underline{\varepsilon}(\underline{q},\lambda)\cdot\underline{\varepsilon}(\underline{q},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$-\varepsilon_\mu(\underline{q},\lambda')g^{\mu\nu} = -\varepsilon^\nu(\underline{q},\lambda') \quad\Rightarrow\quad -\sum_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}\varepsilon^\nu(\underline{q},\lambda) = -\varepsilon^\nu(\underline{q},\lambda')$$

MOLTIPLICANDO INVECE PER $\hat{q}_\mu$, m_μ,

NOTA: SI STANNO USANDO $\hat{q}^\mu\hat{q}_\mu = -1$, $m^\mu m_\mu = 1$.

$$0 - \hat{q}^\nu \equiv -g^{\mu\nu}\hat{q}_\mu = -\hat{q}^\nu$$

$$m^\nu \equiv -g^{\mu\nu}m_\mu = -m^\nu$$

QUINDI CI VA MESSO IL SEGNO '−'.

ABBIAMO PERCIO' VERIFICATO LA RELAZIONE DI COMPLETEZZA

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon^\mu(\underline{q},\lambda)\varepsilon^\nu(\underline{q},\lambda) + \hat{q}^\mu\hat{q}^\nu - m^\mu m^\nu = -g^{\mu\nu}$$

NOTA: ORA VOGLIO ESPRIMERE $\hat{q}$ IN TERMINI DI q, m^μ.

IMPONGO ORA CHE $q^\mu = \begin{pmatrix} q^0 \\ \underline{q} \end{pmatrix}$ E $\hat{q}^\mu$ SIANO LEGATI DA

$$\hat{q}^\mu = \frac{q^\mu - (m\cdot q)m^\mu}{\sqrt{(m\cdot q)^2 - q^2}}$$

NOTA: $\hat{q}^\mu$ È IL VERSORE DELLA PROIEZIONE DI q^μ SUI SOLI GRADI SPAZIALI (E SOLO AD ESSI NORMALIZZATO). ESSENDO DI TIPO SPAZIO, HA UNA NORMA NEGATIVA (DA CUI IL "−" SOTTO RADICE).

POICHÉ IL DENOMINATORE VALE

$$\left[q^{0^2} - q^{0^2} + \underline{q}^2\right]^{1/2} = \sqrt{|\underline{q}|^2} = |\underline{q}| \quad \Rightarrow \quad \hat{q}^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{q}/|\underline{q}| \end{pmatrix}$$

RISCRIVO QUINDI (ALLEGGERISCO LA NOTAZIONE TRALASCIANDO LA DIPENDENZA DA $\underline{q}$)

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda) = -g^{\mu\nu} + m^\mu m^\nu - \frac{[q^\mu - (m\cdot q)m^\mu][q^\nu - (m\cdot q)m^\nu]}{(m\cdot q)^2 - q^2}$$

RICORDIAMO CHE NELLA GAUGE DI COULOMB $A^0 = 0$, QUINDI POSSO RISCRIVERE

$$iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \langle 0|T(A^\mu(x_1)A^\nu(x_2))|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2 + i\varepsilon} + (\dots)$$

NOTO CHE SVANISCONO I PEZZI CON UN q^μ: INFATTI

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon} \dots q^\mu = i\partial_x^\mu \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon}$$

MA IL PROPAGATORE INTERVIENE NELL' ELEMENTO S-I COME

$$\int d^4x_1 d^4x_2\, iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) N(J_\mu(x_1)J_\nu(x_2))$$

$$\rightarrow \int d^4x_1 d^4x_2 \left(\partial_x^\mu \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2 + i\varepsilon}\right) N(J_\mu(x_1)J_\nu(x_2))$$

SE ORA INTEGRO PER PARTI, SCARICO ∂_x^μ SULLE CORRENTI E POICHÉ $\partial_\mu J^\mu = 0$

L'INTERO TERMINE SI ANNULLA (IL PEZZO AL BORDO FA COME SEMPRE ZERO). ABBIAMO DEDOTTO CHE I TERMINI CON UN q^μ NON DANNO CONTRIBUTO UNA VOLTA CHE SI INSERISCE $i D_F(x_1 - x_2)$ NELLA FORMULA DI DYSON. RIMANGONO

$$i D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu} e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2 + i\varepsilon} - m^\mu m^\nu \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2+i\varepsilon} \cdot \frac{q^2}{(m\cdot q)^2 - q^2}$$

DA

$$m^\mu m^\nu \left(1 - \frac{(m\cdot q)^2}{(m\cdot q)^2 - q^2}\right) = - m^\mu m^\nu \frac{q^2}{(m\cdot q)^2 - q^2}$$

SI ELIDONO QUINDI I DUE q^2 ($+i\varepsilon$ NON CONTA) E SI TROVA

$$i D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \to \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu} e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2+i\varepsilon} - i m^\mu m^\nu \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x_1-x_2)}}{|\underline{q}|^2}$$

SI NOTI CHE COSÌ FACENDO HO FISSATO IL VALORE DI q^0 (PRIMA ERA ARBITRARIO): L'HO SCELTO IN MODO CHE SIA LA QUARTA COMPONENTE DI q^μ E COSÌ L'HO USATO PER INTEGRARE IN d^4q. HO FATTO QUALCOSA DI SIMILE PER J^0.

NOTA: $\Delta \frac{1}{|\underline{x}|} = -4\pi\delta(\underline{x})$. APPLICO F (CON $1/(2\pi)^3$),

$$\Delta \int \frac{d^3\underline{q}}{(2\pi)^3} F^{-1}\left[\frac{1}{|\underline{x}|}\right](\underline{q})\, e^{-i\underline{q}\cdot\underline{x}} = -4\pi \int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^3} e^{-i\underline{q}\cdot\underline{x}}$$

$$F \circ F^{-1}\left[\frac{1}{|\underline{x}|}\right] = \frac{1}{|\underline{x}|} = F\left[\frac{4\pi}{|\underline{q}|^2}\right]$$

IN (S-I) IL SECONDO TERMINE DÀ LUOGO A

$$i \frac{1}{2} e^2 \int d^4x_1 d^4x_2\, m^\mu m^\nu \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^{-iq(x_1-x_2)}}{|\underline{q}|^2} N(J_\mu(x_1) J_\nu(x_2))$$

$$= i\frac{1}{2} e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x_1-x_2)}}{|\underline{q}|^2} N(J_0(x_1) J_0(x_2))$$

$$= \frac{i}{2} e^2 \int d^4x_1 d^4x_2\, \delta(x_1^0 - x_2^0) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\underline{q}\cdot(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)}}{\underline{q}^2} N(J_0(x_1) J_0(x_2))$$

$$= i\frac{e^2}{2} \cdot \int \frac{d^4x_1 d^4x_2\, \delta(x_1^0 - x_2^0)}{4\pi|\underline{x} - \underline{y}|} N(J_0(x_1) J_0(x_2))$$

CHE ELIDE ESATTAMENTE IL TERMINE

$$-i q^2 \int \frac{dx^0 d\underline{x} d\underline{y}}{8\pi|\underline{x} - \underline{y}|} J_0(\underline{x}, x^0) J_0(\underline{y}, x^0)$$

AI FINI DEL CALCOLO POSSO RIDEFINIRE SIA $\mathcal{H}_I$ CHE IL PROPAGATORE COSÌ:

$$\mathcal{H}_I := q :\bar{\Psi}\not{A}\Psi:$$

$$\langle 0|T(A^\mu(x)A^\nu(y))|0\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}e^{-iq(x-y)}}{q^2+i\varepsilon}$$

NOTA: IL PROPAGATORE VERO ERA TRA A^i E A^j TRIDIMENSIONALI, MENTRE ORA C'È $g^{\mu\nu}$.

E L'ELEMENTO DI MATRICE S SI SEMPLIFICA COME

$$S-I = -i\int \mathcal{H}_I\, d^4x + \frac{(-i)^2}{2} e^2 \int d^4x_1 d^4x_2\, T\left(\bar{\Psi}\not{A}\Psi(x_1)\, \bar{\Psi}\not{A}\Psi(x_2)\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{i^2}{2!}e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} e^{-iq(x_1-x_2)} N\left(J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)\right)$$

(PER I PROCESSI AL PRIMO ORDINE $\mathcal{H}_I$ NON CONTRIBUISCE. SONO SEMPRE PROCESSI A 3 PARTICELLE E COMPARE UNA δ CHE NON È MAI SODDISFATTA, QUINDI SALTA IL TERMINE $\underline{A}$-$\underline{J}$; INOLTRE SI È VISTO CHE SI ELIDE IL TERMINE CON LE CORRENTI).

• IL PROCESSO $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

IL MUONE HA LE STESSE PROPRIETÀ DI e^- MA UNA MASSA MOLTO PIÙ GRANDE. ANCHE LUI INTERAGISCE CON IL CAMPO EM SECONDO

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\Psi + \bar{\Psi}_{(\mu)}(i\not{\partial}-m)\Psi_{(\mu)} - q\bar{\Psi}\not{A}\Psi - q\bar{\Psi}_{(\mu)}\not{A}\Psi_{(\mu)} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO SOPRA, SI AVRÀ LA SEMPLIFICAZIONE

$$\mathcal{H}_I = -e\left(\bar{\Psi}\not{A}\Psi + \bar{\Psi}_{(\mu)}\not{A}\Psi_{(\mu)}\right)$$

$$S-I = \frac{(-i)^2}{2!}e^2 \int T\left([\bar{\Psi}\not{A}\Psi + \bar{\Psi}_{(\mu)}\not{A}\Psi_{(\mu)}]_x [\bar{\Psi}\not{A}\Psi + \bar{\Psi}_{(\mu)}\not{A}\Psi_{(\mu)}]_y\right) d^4x\, d^4y$$

IL T-PRODOTTO È COMMUTATIVO PER SCAMBIO $x \leftrightarrow y$ E CONSISTE NEI TERMINI

$(\bar{\Psi}\not{A}\Psi)_x\ (\bar{\Psi}\not{A}\Psi)_y \to$ SOLO e^+, e^- E γ

$(\bar{\Psi}_{(\mu)}\not{A}\Psi_{(\mu)})_x\ (\bar{\Psi}_{(\mu)}\not{A}\Psi_{(\mu)})_y \to$ SOLO μ^+, μ^- E γ

MA NOI STIAMO CERCANDO

$\langle \mu^+\mu^- | (S-I) | e^+e^- \rangle$.

QUINDI CI INTERESSANO SOLO I PRODOTTI MISTI, CHE SONO UGUALI PERCHÉ T È COMMUTATIVO. OTTENIAMO AL II ORDINE ED ESSENDOCI RISTRETTI A QUESTO PROCESSO

$$(S-I) = -e^2 \int T(\bar{\Psi} \not{A} \Psi_x \quad \bar{\Psi}_{(\mu)} \not{A} \Psi_{(\mu)\, y})\, d^4x\, d^4y$$

ORA NOTO CHE NEI MIEI STATI INIZIALI E FINALI NON CI SONO FOTONI. APPLICANDO IL TEOREMA DI WICK, OTTENGO:

1) PRODOTTO NORMALE DI TUTTI. COME PRIMA, NON CONTRIBUISCONO.
2) TERMINI CON UNA CONTRAZIONE. CI INTERESSANO QUELLE CHE ELIMINANO GLI $\not{A}$ E LASCIANO SOLO OPERATORI FERMIONICI.

PERCIO'

$$(S-I) \rightarrow -e^2 \int d^4x\, d^4y \; iD_F^{\mu\nu}(x-y)\, N\big(J_\mu(x)\, \underbrace{J_\nu^{(\mu)}(y)}_{\text{CORRENTE MUONICA}}\big)$$

DOVE

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{-iq(x-y)}$$

NOTO CHE

$$\langle \mu^+\mu^- | N(J_\mu(x) J_\nu^{(\mu)}(y)) | e^+e^- \rangle$$

FATTORIZZA, AI FINI DEL CALCOLO, IN

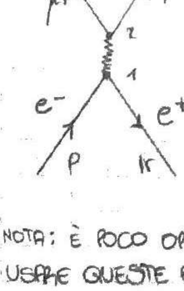
$$\langle 0 | J_\mu(x) | e^+e^- \rangle \langle \mu^+\mu^- | J_\nu^{(\mu)}(y) | 0 \rangle$$

INFATTI GLI OPERATORI PER e E μ COMMUTANO *:

$$\langle 0 | \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi(x)\, c^+ b^+ | 0 \rangle$$

* NOTA: IN REALTÀ ANTICOMMUTANO. ANCHE $c^+b^+|0\rangle \neq b^+c^+|0\rangle$ PERCHÉ ESCE UN SEGNO '-'. TUTTAVIA, SE UNO È COERENTE NEL CONTO, CIÒ NON VA A INFICIARE L'ELEMENTO DI MATRICE.

DOPO UN PO' DI ALGEBRA DI OPERATORI, UNO TROVA LA REGOLA DIAGRAMMATICA DI FEYNMAN COME A FIANCO.



IL VERTICE 1 È

$$\bar{v}(k)\gamma^\mu u(p)$$

MENTRE IL 2 È

$$\bar{u}(p')\gamma^\nu v(k')$$

NOTA: È POCO ORTODOSSO, MA PUOI USARE QUESTE REGOLE:
- SE LA FRECCIA ESCE DAL VERTICE IL SUO SPINORE HA LA BARRA, ALTRIMENTI NO.
- L'ORDINE SI TROVA PERCORRENDO AL CONTRARIO OGNI LINEA FERMIONICA.
- IN OGNI VERTICE HAI UNA γ^μ E $(-ie)$.
- IL VERSO DELLE FRECCE DELLE ANTIPARTICELLE È AL CONTRARIO.

VEDIAMO IL CONTO UN PO' PIÙ NEI DETTAGLI.

$$\psi(x) = \sum_{\underline{p},r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[c(\underline{p},r)\, u(\underline{p},r)\, e^{-ipx} + d^+(\underline{p},r)\, v(\underline{p},r)\, e^{ipx} \right]$$

$$\bar\psi(x) = \sum_{\underline{p},r} \sqrt{\frac{m}{E_p V}} \left[c^+(\underline{p},r)\, \bar u(\underline{p},r)\, e^{ipx} + d(\underline{p},r)\, \bar v(\underline{p},r)\, e^{-ipx} \right]$$

LA MATRICE DI DYSON AL II ORDINE DEL PROCESSO DÀ UN ELEMENTO

$$\langle \mu^+\mu^- | S | e^+e^- \rangle = \langle (-ie)^2 \int d^4x_1\, d^4x_2\, N\left(A_\mu J^\mu(x_1)\; A_\nu J^\nu_{(\mu)}(x_2)\right) \rangle$$

$$= \langle \mu^+\mu^- | -e^2 \int dx_1 dx_2\; i D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)\, N(J^\mu(x_1) J^\nu_{(\mu)}(x_2)) | e^+e^- \rangle$$

VISTA L'AZIONE DEI CREATORI E ANNICHILATORI CONTENUTI IN $\psi(x)$ E $\bar\psi(x)$ CHE COMPAIONO NELLE CORRENTI

$J^\mu = \bar\psi \gamma^\mu \psi$

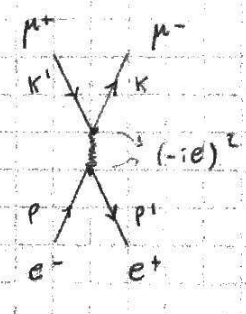
OTTENIAMO (SOTTINTENDO LE POLARIZZAZIONI, CONTENUTE NEGLI SPINORI)

$$\langle \mu^+\mu^- | N(J^\mu(x_1) J^\nu_{(\mu)}(x_2)) | e^+e^- \rangle = \langle 0 | \bar\psi\gamma^\mu\psi(x_1) | \underset{p'}{e^+} \underset{p}{e^-} \rangle \langle \underset{k'}{\mu^+} \underset{k}{\mu^-} | \bar\psi_{(\mu)}\gamma^\nu\psi_{(\mu)}(x_2) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \bar\psi\gamma^\mu\psi(x_1) c^+(p) d^+(p') | 0 \rangle \langle 0 | c(k) d(k')\, \bar\psi_{(\mu)}\gamma^\nu\psi_{(\mu)}(x_2) | 0 \rangle$$

$$\overset{*}{=} \bar v(p')\gamma^\mu u(p)\, e^{-ipx_1} e^{-ip'x_1}\; \bar u^{(\mu)}(k)\gamma^\nu v^{(\mu)}(k')\, e^{i(k'+k)x_2} \sqrt{\frac{m}{E_p V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'} V}}\sqrt{\frac{M}{E_k V}}\sqrt{\frac{M}{E_{k'} V}}$$

DOVE M È LA MASSA DEL MUONE. NON RESTA CHE INTEGRARE DOPO AVER MOLTIPLICATO PER $iD_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$:



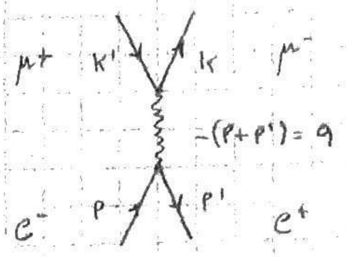
$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2\, e^{-i(p+p')\cdot x_1} e^{i(k+k')\cdot x_2} \frac{-ig_{\mu\nu} e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2+i\varepsilon}$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \underbrace{\delta^{(4)}(-(p+p')-q)}_{=\delta^{(4)}(p+p'+q)} (2\pi)^8\, \delta^{(4)}(k+k'+q) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$$

$$= \int d^4q\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p'+q) \underbrace{\delta^{(4)}(p+p'-k-k')}_{\text{CONSERVAZIONE DEL QUADRIMPULSO}} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$$

*NOTA: SI SALVANO SOLTANTO I TERMINI CON cc^+ O dd^+. AD ESEMPIO, $\langle 0 | d^+ d^+ | 0 \rangle = \langle 0 | \{d^+, d^+\} | 0 \rangle = 0$

CON LE REGOLE DI FEYNMAN,



2° ORDINE → 2 VERTICI (IN OGNI VERTICE SI CONSERVA IL QUADRIMPULSO)

L'AMPIEZZA INVARIANTE $\mathcal{M}$ È t.c.

$$\mathcal{M} = (-ie)^2\, \bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\ \bar{u}(k)\gamma^\nu v(k')\ \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p+p')^2+i\varepsilon}\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

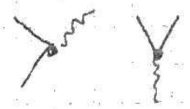
L'ELEMENTO DI MATRICE S È PERCIÒ

$$\mathcal{M} \cdot \sqrt{\frac{m}{E_p V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'} V}}\sqrt{\frac{M}{E_k V}}\sqrt{\frac{M}{E_{k'} V}} = S_{fi}$$

NOTA: LA REGOLA È CHE OGNI VERTICE CONTRIBUISCE CON UN $(-ie)$, OGNI LINEA FERMIONICA CON UN $1/q^2$, OGNI LINEA FOTONICA CON $-ig^{\mu\nu}/q^2$.

* SI ERA VISTO CHE IN

$$T(AJ\ AJ) = N(AJ\ AJ) + \dots$$



$\langle e\gamma e e^- | e\gamma \rangle$

QUESTO PRIMO ADDENDO NON CONTRIBUISCE:
ORA CE LO SPIEGHIAMO CON IL FATTO CHE PORTA A UNA δ CHE CINEMATICAMENTE NON È MAI SODDISFATTA.

SI NOTI CHE NEL DIAGRAMMA IN CIMA QUEL FOTONE È SOLO VIRTUALE: SE FOSSE REALE, NON SI CONSERVEREBBE IL QUADRIMPULSO IN QUEL VERTICE. SI DICE CHE NON STA SULLA SHELL (IL SUO $q^2 \neq 0$).
IN QUESTO SECONDO CASO, INVECE, IL FOTONE È REALE PERCHÉ COMPARE NELLO STATO FINALE.

* NEL SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA SI PUÒ SCRIVERE

$$(p+p') = \begin{pmatrix} 2E \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

PERCIÒ IN $\frac{ig_{\mu\nu}}{(p+p')^2+i\varepsilon}$ IL DENOMINATORE NON SI ANNULLA MAI. INOLTRE

$$\left[(2\pi)^4 \delta(p_i - p_f)\right]^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$$

DA INTERPRETARE COME

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x \simeq V \cdot T$$

PER CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO, DATO IL FLUSSO TOTALE

$$\frac{v_{e^-}}{V} + \frac{v_{e^+}}{V} = \Phi$$

$\rightarrow | \leftarrow$

($1e^-$ CHE SI SCONTRA CON $1e^+$), SE P È LA PROBABILITÀ SI HA

$$\frac{1}{\Phi} \frac{P}{T} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k'$$

NEL SISTEMA DEL BARICENTRO,

$$E + E' = E_{(\mu)} + E'_{(\mu)}$$

$$2\sqrt{m^2 + \underline{p}^2} = 2\sqrt{M^2 + \underline{k}^2}$$

$$M = \sqrt{m^2 + \tilde{\underline{p}}^2}$$

DOVE $\tilde{\underline{p}}$ È L'IMPULSO DI SOGLIA (I PRODOTTI SONO FERMI). L'ENERGIA DI e^+e^- SI TRAMUTA IN MASSA A RIPOSO DI $\mu^+\mu^-$.

OTTENGO

$$d\sigma = \frac{V}{v_1 + v_2} \cdot \frac{M^2}{E^2} \cdot \frac{m^2}{E^2} \cdot \frac{e^4}{16E^4} \cdot \frac{|(\text{SPINORI})|^2}{V^4} V \cdot \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{V d^3k'}{(2\pi)^3}$$

$$= (\quad) (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) d^3k\, d^3k'$$

CHE VA INTEGRATA USANDO

$$\delta^{(4)}(p + p' - k - k') = \delta(\underline{0} - \underline{k} - \underline{k}') \delta(2E - 2E')$$

E PASSANDO IN POLARI

$$|\underline{k}|^2 d|\underline{k}| d\Omega_k = |\underline{k}||\underline{k}'| d|\underline{k}'| d\Omega_k = |\underline{k}| E' dE' d\Omega_k$$

RICAPITOLANDO, $P_i = \begin{pmatrix} 2E_i \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ E

$$(\quad) d^3k\, d^3k'\, \delta^{(4)}(P_i - P_f) = (\quad) d^3k\, d^3k'\, \delta[2E_i - 2E_k]\, \delta(\underline{k} + \underline{k}')$$

USO L'ULTIMA δ PER INTEGRARE IN d^3k': OTTENGO $\underline{k}' = -\underline{k}$.

ALLA FINE, AVENDO INTEGRATO SULLE ENERGIE RIMANE

$$d\sigma = (\ldots)\, d\Omega$$

IN UN ESPERIMENTO DI SCATTERING NON POLARIZZATO, CONSIDERO

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sum_{POL}\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

NOTA: HO UN FATTORE $\frac{1}{2}$ PER CIASCUNA PARTICELLA NELLO STATO INIZIALE.

CALCOLIAMO QUINDI IL CONTRIBUTO SPINORIALE ALL'AMPIEZZA DI SCATTERING:

$$\left| \bar{v}(p')\gamma_\mu u(p) \quad \bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') \right|^2$$

NOTA: USO $(A_\mu B^\mu)^2 = A_\mu B^\mu A_\nu B^\nu$.

$$\overset{*}{=} \bar{v}(p')\gamma_\mu u(p)\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') \quad [\bar{v}(p')\gamma_\nu u(p)]^* [\bar{u}(k)\gamma^\nu v(k')]^*$$

$$\sum_{POL}\left\{ \bar{v}(p')\gamma_\mu u(p)[\bar{v}(p')\gamma_\nu u(p)]^* \quad \bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')[\bar{u}(k)\gamma^\nu v(k')]^* \right\}$$

IL PRIMO PEZZO (e^+e^-) SI CALCOLA AD ESEMPIO COME

$$\sum_{POL} \bar{v}(p')\gamma_\mu u(p) u^+(p)\gamma_\nu^+\gamma^0 v(p')$$

*NOTA: I PEZZI IN p, p' SONO ELETTRONICI E QUELLI IN k, k' SONO MUONICI, PERCIÒ FATTORIZZANO.

$$= \sum_{POL} \bar{v}(p')\gamma_\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma_\nu v(p')$$

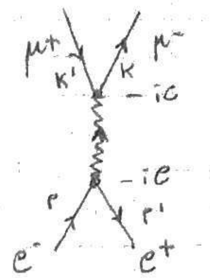
$$= \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu \frac{\not{p}+m}{2m}\gamma_\nu \frac{\not{p}'-m}{2m}\right)$$

NOTA: RICORDA CHE PER LA TRACCIA VALE LA PROPRIETÀ CICLICA, POCO MALE SE ESCONO IN DISORDINE.

· RICAPITOLANDO

$\langle \mu^+\mu^- | T(\bar\Psi(x) \not{A}(x) \Psi(x) \, \bar\Psi_{(\mu)}(y) \not{A}(y) \Psi_{(\mu)}(y)) | e^+ e^- \rangle$

L'UNICO CONTRIBUTO NON NULLO È QUELLA CONTRAZIONE CHE DÀ IL PROPAGATORE DEL FOTONE; POSSO QUINDI RIASSUMERE IL PROCESSO NEL DIAGRAMMA DI FEYNMAN A FIANCO.



L'HAMILTONIANA DI INTERAZIONE DELLA QED È

$$\mathcal{H}_I = -e\bar\Psi \not{A} \Psi$$

$$S = T\left(\exp -i\int \mathcal{H}_I\right)$$

I VERTICI DANNO PERCIÒ UN'AMPIEZZA $\mathcal{M}$ t.c.

$$2\,\frac{(-ie)^2}{2}\int d^4x_1\, d^4x_2 \langle \mu^+\mu^- | T\left(\bar\Psi_{(\mu)} \not{A} \Psi_{(\mu)}(x)\ \bar\Psi \not{A} \Psi(y)\right) | e^+ e^- \rangle$$

$$= (-ie)^2\ \bar v(p')\gamma^\mu u(p)\ \bar u_{(\mu)}(k)\gamma^\nu v(k')\ \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$$

$\hookrightarrow = (p+p')^2$ (+iε NON SERVE, p+p' NON SI ANNULLA MAI)

POICHÉ $g_{\mu\nu}$ SATURA γ^μ, γ^ν, SI OTTIENE UNO SCALARE DI LORENTZ.

RESTANO DA AGGIUNGERE

$$S_{fi} = \sqrt{\frac{M}{E_{k'}}}\sqrt{\frac{M}{E_k}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\ (-ie)^2\,\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\,\bar u_{(\mu)}(k)\gamma^\nu v(k')\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p+p')^2}(2\pi)^4\delta(p_i-p_f)$$

$$|S_{fi}|^2 = \frac{M^2}{E_{k'}E_k}\frac{m^2}{E_pE_{p'}}\,e^4\left|\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\,\bar u_{(\mu)}(k)\gamma_\mu v(k')\right|^2\frac{1}{(p+p')^4}(2\pi)^4\delta(p_i-p_f)\,VT$$

DIVIDENDO PER IL FLUSSO E PER L'UNITÀ DI TEMPO SI ELIDONO GLI ULTIMI FATTORI. LA SOMMA SULLE POSSIBILI POLARIZZAZIONI DÀ UN FATTORE $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ (SONO DUE PARTICELLE INIZIALI!). CALCOLANDOLA COME L'ALTRA VOLTA,

$$\sum_{pol}\left(\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\,\bar u(p)\gamma^\nu v(p')\right) = \sum_{pol}\bar v(p')\gamma^\mu\frac{\not{p}+m}{2m}\gamma^\nu v(p')$$

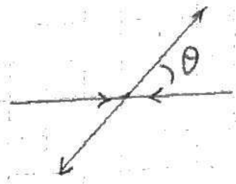
$$= \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\frac{\not{p}+m}{2m}\gamma^\nu\frac{\not{p}'-m}{2m}\right)$$

USANDO

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a\cdot b\; c\cdot d + a\cdot d\; b\cdot c - a\cdot c\; b\cdot d)$$

E RIPETENDO CALCOLI SIMILI PER I CAMPI MUONICI, DETTA $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ HO

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \frac{\alpha^2}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{NEL CDM}}}{4E^2}} \sqrt{1-\frac{M^2}{E^2}} \left[\left(1+\frac{M^2}{E^2}\right) + \left(1-\frac{M^2}{E^2}\cos^2\theta\right) \right]$$



SI NOTI CHE φ NON COMPARE; LA SEZIONE D'URTO TOTALE SI OTTIENE QUINDI INTEGRANDO IN $d\theta$ A DARE

$$\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{E^2}\left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)^{1/2} \frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{M^2}{E^2}\right) \xrightarrow[E\to\infty]{} \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^2}{E^2}$$

CHE È IMPORTANTE, PERCHÉ CI PERMETTE DI FARE UN CONTROLLO DIMENSIONALE. RICORDIAMO CHE, AVENDO POSTO $\hbar = c = 1$,

$$S = \int d^4x \left(\bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + e\bar{\Psi}\not{A}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right)$$

S HA LE DIMENSIONI DI $\hbar$ E PERCIÒ È ADIMENSIONALE. ALLORA

$$\int d^4x\, \bar{\Psi}\partial\Psi = \text{ADIM.} \quad \Rightarrow \quad [\Psi]^2 L^3 = 1$$

$$\Rightarrow \quad [\Psi] = L^{-3/2} = E^{3/2}$$

FISSIAMO INOLTRE

$$\int d^4x\, (\partial A)^2 = \text{ADIM.} \quad \Rightarrow \quad \frac{L^4}{L^2}[A]^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad [A] = \frac{1}{L} = E$$

IL CAMPO FERMIONICO HA DIMENSIONE '$E^{3/2}$' E IL CAMPO FOTONICO 'E'. ALLORA

$$\int e\bar{\Psi}\not{A}\Psi = \text{ADIM} \quad \Rightarrow \quad [e] = \text{ADIM.}$$

QUINDI È ADIMENSIONALE ANCHE α. DEDUCO CHE $[\sigma] = L^2$, CHE COINCIDE CON $[1/E^2]$.

· SCATTERING COMPTON

STUDIAMO CON I DIAGRAMMI IL PROCESSO

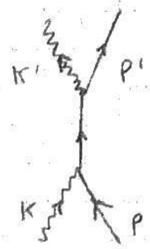
$\gamma e \to \gamma e$

$H_I = -e\bar{\Psi} A\!\!\!/ \Psi$

PERCIO'

$$\frac{(-ie)^2}{2}\int T(\bar{\Psi} A\!\!\!/ \Psi_{(x)}\ \bar{\Psi} A\!\!\!/ \Psi_{(y)})\, d^4x\, d^4y$$

È UN PROCESSO CHE AVVERRA' IN PRESENZA DI UN PROPAGATORE FERMIONICO (ELETTRONE VIRTUALE). SCRIVO



$$(-ie)^2\ \bar{u}(p')\gamma^\mu \frac{i}{q\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\gamma^\nu u(p)\ \varepsilon_\nu(k)\varepsilon_\mu(k')$$

DOVE SI SONO INSERITE LE POLARIZZAZIONI DEI FOTONI

$a\,\underline{\varepsilon} + h.c.$

E DOVE

$q\!\!\!/ = k\!\!\!/ + p\!\!\!/$

(ANCORA, $i\varepsilon$ NON SERVE PERCHÉ NON SI ANNULLA MAI). RISCRIVO

$$(-ie)^2\,\bar{u}(p')\,\varepsilon\!\!\!/'\,\frac{i}{k\!\!\!/ + p\!\!\!/ - m}\,\varepsilon\!\!\!/\,u(p)$$

SI NOTI CHE IL TERMINE $\frac{1}{N!}$ DELLA MATRICE DI DYSON NON SI VEDE MAI, PERCHÉ CONTANO SOLO I DIAGRAMMI TOPOLOGICAMENTE DISTINTI E PER CIASCUNO CONTO LE VARIE PERMUTAZIONI.

UN ESEMPIO DI DIAGRAMMA DISTINTO È QUESTO:

$$(-ie)^2\,\bar{u}(p')\,\varepsilon\!\!\!/\,\frac{i}{p\!\!\!/' - k\!\!\!/ - m}\,\varepsilon\!\!\!/'\,u(p)$$

NOTA: POTEVA TENERE IL DIAGRAMMA DI PRIMA E SCAMBIARE K CON K'.

INFATTI

$\tilde{p} + k' = p$

$\tilde{p} = p - k' = p' - k$

E L'AMPIEZZA TOTALE SARÀ LA SOMMA DI QUESTE DUE. CORRISPONDONO A DUE DIVERSE CONTRAZIONI DAL TEOREMA

DI WICK, MENTRE L' $\frac{1}{N!}$ È CANCELLATO DA CONTRAZIONI CHE SONO IDENTICHE PER SIMMETRIA.

ORA SI AGGIUNGE $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)$ E SI CALCOLANO LE TRACCE; LA SEZIONE D'URTO SI CALCOLA RAGIONEVOLMENTE IN QUALCHE ORA.

L'AMPIEZZA INVARIANTE TOTALE È

$$\bar{u}(p')\,\not{\varepsilon}(k')\,\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\,\not{\varepsilon}(k)\,u(p) + \bar{u}(p')\,\not{\varepsilon}(k)\,\frac{1}{\not{p}'-\not{k}-m}\,\not{\varepsilon}(k')\,u(p)$$

★ SUPPONIAMO DI SOSTITUIRE

$$\varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu + k_\mu$$

NOTA: K_μ È IL QUADRIMPULSO. DI FATTO SIGNIFICA EFFETTUARE UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE (VEDI P. 234).

OTTENIAMO IL TERMINE AGGIUNTIVO

$$\bar{u}(p')\,\not{\varepsilon}(k')\,\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\,\not{k}\,u(p)$$

DOVE POSSO SOSTITUIRE A $\not{k} \to \not{k} + \not{p} - m$, VISTO CHE $(\not{p}-m)\,u(p) = 0$

MA ALLORA IL DENOMINATORE SI SEMPLIFICA E RIMANE

$$\bar{u}(p')\,\not{\varepsilon}(k')\,u(p)$$

IL SECONDO TERMINE È

$$-\bar{u}(p')\underbrace{(-\not{k})}_{-\not{k}+\not{p}'-m}\,\frac{1}{\not{p}'-\not{k}-m}\,\not{\varepsilon}(k')\,u(p)$$

DOVE SI USA

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-m) = 0$$

EVIDENTEMENTE LA SOMMA TRA I DUE TERMINI DÀ ZERO. QUESTA PROPRIETÀ DISCENDE DALLE TRASFORMAZIONI DI GAUGE,

$$A \to A + \partial_\mu \Lambda = \underline{\varepsilon} + \underline{k}$$

NOTA: QUESTO DIMOSTRA L'INVARIANZA DI GAUGE DELL'AMPIEZZA DI SCATTERING.

E SI È COSÌ VISTO ESPLICITAMENTE CHE LA FISICA RIMANE INALTERATA (IN REALTÀ VIENE DALLA CONSERVAZIONE DELLA CORRENTE).

RICONOSCIAMO INFINE LA STRUTTURA

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mu \, \epsilon^\mu(k)$$

CHE RICORRE OGNI VOLTA CHE È PRESENTE UN FOTONE, ALLORA

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$$

INCONTREREMO UN PROBLEMA: QUESTI FOTONI SONO REALI, NON VIRTUALI E VEDREMO CHE, PER PARTICELLE VETTORIALI, LA SOMMA SULLE POLARIZZAZIONI VA SVILUPPATA CON UN'APPOSITA TECNICA.

· ESEMPIO: $e^+e^- \to \gamma\gamma$

$$(ie)^2 \bar{v}(p') \not{\epsilon}' \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \not{\epsilon}\, u(p) + (ie)^2 \bar{v}(p') \not{\epsilon} \frac{i}{\not{k}' - \not{p} - m} \not{\epsilon}' u(p)$$

IL SECONDO PEZZO GARANTISCE LA SIMMETRIA PER SCAMBIO

$k \leftrightarrow k'$

(I FOTONI SONO BOSONI).

★ TORNIAMO ALLO SCATTERING COMPTON DESCRITTO DA

$$\bar{u}(p') \not{\epsilon}(k') \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \not{\epsilon}(k) u(p) + \dots$$

DOVE

$$\epsilon^\mu(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\epsilon}(k) \end{pmatrix} \qquad \underline{k} \cdot \underline{\epsilon}(k) = 0 \quad \text{(GAUGE DI COULOMB)}$$

SI È VISTO CHE NON CAMBIA NULLA SE AGGIUNGO A ϵ^μ

$\epsilon^\mu + \alpha k^\mu$

SUPPONIAMO CHE LO STESSO PROCESSO SIA VISTO DA DUE OSSERVATORI. SO CHE $\epsilon^\mu(k)$ NON MANTIENE LA STESSA FORMA IN UN ALTRO S.R. E NON SO TRATTARLO.

$O: \quad k \qquad \epsilon^{\nu}(k) \qquad k^{\nu}\epsilon_{\nu}(k) = 0$

$O': \quad k' = \Lambda k \qquad \epsilon^{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \epsilon^{\nu} \qquad k^{\mu'}\epsilon_{\mu'}(k) \stackrel{?}{=} 0$

SCELGO ALLORA

$\tilde{\epsilon}^{\mu'}(k') = \epsilon^{\mu'}(k') + \alpha k^{\mu}$

IN MODO TALE CHE LA QUARTA COMPONENTE (TEMPORALE) DI $\tilde{\epsilon}^{\mu'}(k')$ SIA NULLA. OTTENIAMO COSÌ

$\underline{k}' \cdot \underline{\tilde{\epsilon}}' = 0$

SE AVESSI SCELTO LA GAUGE DI LORENZ (CHE È COVARIANTE) IL PROBLEMA NON SI SAREBBE POSTO, MA SAREBBERO COMPARSI GRADI DI LIBERTÀ SPURII (FOTONI NON FISICI) CHE COMPLICANO I CALCOLI.

* TORNIAMO AL CALCOLO DELLA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA.

PARTO SEMPRE DA QUALCOSA NELLA FORMA

$\mathcal{M} = \epsilon_{\mu}(k)\epsilon_{\nu}(k')\mathcal{M}^{\mu\nu}$

CON

$k_{\mu}\epsilon_{\nu}(k')\mathcal{M}^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(INVARIANZA DI GAUGE)}$

INGLOBANDO DI NUOVO $\epsilon_{\nu}(k')$,

$\mathcal{M} = \epsilon_{\mu}(k)\mathcal{M}^{\mu}$

STUDIAMO (IL CALCOLO È ANALOGO PER OGNI FOTONE NEL DIAGRAMMA)

$$|\mathcal{M}|^2 = \epsilon_{\mu}(k)\mathcal{M}^{\mu}\,\epsilon_{\nu}(k)\mathcal{M}^{\nu *}$$

$$= \epsilon_{\mu}(k)\epsilon_{\nu}(k)\mathcal{M}^{\mu}\mathcal{M}^{\nu *}$$

COME FACEVO PER LE POLARIZZAZIONI DEI FERMIONI,

$$\sum_{pol.} \epsilon_{\mu}(k)\epsilon_{\nu}(k)\mathcal{M}^{\mu\rho}\mathcal{M}^{\nu\sigma *}\epsilon_{\rho}(k')\epsilon_{\sigma}(k')$$

(SE MAI CON UN FATTORE $\frac{1}{2}$ DAVANTI). RICORDO PERÒ CHE

$$\sum_{pol.} \epsilon^{\mu}(k)\epsilon^{\nu}(k) + \frac{(k^{\mu} - (k\cdot m)m^{\mu})(k^{\nu} - (k\cdot m)m^{\nu})}{(k\cdot m)^2 - k^2} - m^{\mu}m^{\nu} = -g^{\mu\nu}$$

DOVE I NOSTRI SONO FOTONI FISICI, PER CUI $K^2=0$. CALCOLO

$$\mathcal{M} = \sum_{pol} \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k')\mathcal{M}^{\mu\nu}$$

$$= \sum_{pol} \epsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{pol}\epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k)\mathcal{M}^\mu\mathcal{M}^{\nu *}$$

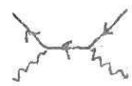
MA SI È VISTO CHE SE MOLTIPLICO PER k_μ HO CONTRIBUTO NULLO: AGLI EFFETTI DEL CALCOLO,

$$\sum_{pol}\epsilon^\mu(k)\epsilon^\nu(k) = -g^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{k^2}{(k\cdot m)^2-k^2}}_{=0} m^\mu m^\nu \quad \to \quad -g^{\mu\nu}$$

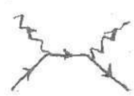
POSSO QUINDI SCRIVERE S AL II° ORDINE PER PROCESSI COME

$\gamma e^- \to \gamma e^-$

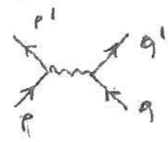
$\gamma\gamma \to e^+e^-$



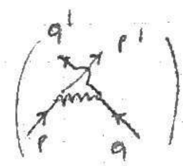
$e^+e^- \to \gamma\gamma$



$e^-e^- \to e^-e^-$



IN TUTTI I CASI DEVO SOMMARVI GLI ALTRI POSSIBILI DIAGRAMMI. AD ESEMPIO PER $e^-e^- \to e^-e^-$ HO



$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'-p)^2}\bar{u}(q')\gamma^\nu u(q) - \dots$$

INFATTI SONO FERMIONI, QUINDI ME LO ASPETTO ANTISIMMETRICO.

E SE HO PIÙ CONTRAZIONI?

$$T(\bar\psi \not{A}\psi\ \bar\psi \not{A}\psi)$$

SE PROVASSI A CALCOLARLI DANNO CONTRIBUTO INFINITO: RICHIEDONO LA RINORMALIZZAZIONE. MA QUESTA È UN'ALTRA STORIA.