

APPUNTI DEL CORSO DI

MECCANICA
STATISTICA
E
FENOMENI CRITICI

ANNO 2018/2019
DAVIDE VENTURELLI
PROF. E. MARINARI

Per informazioni o segnalazioni:
venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

Ho corredato gli appunti del corso con note (ai limiti dell'irritante), approfondimenti (*Focus*, non conservo memoria del perché né di quando abbia iniziato a chiamarli così) e rimandi a paragrafi specifici di vari testi ogniqualvolta sentissi l'esigenza di leggere più a fondo per capire davvero (ma al contempo non la sentissi al punto da prendermi la briga di ricopiarli a mano). Ho cercato di limitare a questi spazi le mie ingerenze, lasciando il resto degli appunti fedeli a quanto ascoltato in classe. Mi assumo quindi la responsabilità del loro contenuto, ma non degli esiti, in sede d'esame, di un'eccessiva fiducia che doveste decidere di riporvi: tenete a mente che in questo campo sono solo un novellino!

Davide Venturelli

Bibliografia:

G. Parisi, *Statistical Field Theory*

C. Itzykson, J. Drouffe, *Statistical Field Theory*

J. J. Binney et al., *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*

M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*

M. Testa, Appunti del corso di Teoria dei Campi tenuto alla Sapienza nel 2018/2019

SOMMARIO: MECCANICA STATISTICA E FENOMENI CRITICI

I. CLASSICAL EQUILIBRIUM S.M.

- ASSUNZIONE P_{eq}
- MODELLO DI ISING, MISURA
- ENTROPIA
- LEGAME CON IL TEOREMA DI SHANNON
- DERIVAZIONE DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN
- LEGAME TRA P_{MS} E T_{EAM}
- RELAZIONI UTILI TRA U, F, S

II. MAGNETIC SYSTEMS

- DERIVAZIONE FUNZIONALE
- SISTEMI MAGNETICI: F, m, χ
- FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA
- TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE
- ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA
- CLASSIFICAZIONE EHRENFEST DELLE TLF
- SINGOLARITA' DELL'ENERGIA LIBERA
- CONDIZIONI AL BORDO
- STATI PURI E MISCELE STATISTICHE
- PROPRIETA' DI CLUSTERING

III. THE ISING MODEL

- MODELLO DI ISING
- CAMPO MEDIO (P_q FATTORIZZATA SUI SITI)
- CAMPO MEDIO (UGUAGLIANZE DLR)
- UGUAGLIANZE DLR IN $D=2$
- ISING MF: $\chi(m), T \rightarrow T_c, T \rightarrow 0, h \neq 0$
- CAMPO MEDIO (RELAZIONE DI CONNESSITA')
- MODELLO WEAK LONG-RANGE FORCES
- FUNZIONE DI CORRELAZIONE (FOLC)
- DENSITA' DI ENERGIA, CALORE SPECIFICO
- FOLC VICINO ALLA TRANSIZIONE
- C_v AL PUNTO CRITICO
- LIMITE $D \rightarrow \infty$ (FUNZIONI DI BESSEL)
- DECADIMENTO ESPONENZIALE DELLE FOLC
- FOLC CONNESSA
- χ DIVERGE A T_c , ARGOMENTO ENERGETICO
- χ DIVERGE A T_c , ARGOMENTO VARIATIONALE
- IL LIMITE DI VOLUME INFINITO

IV. THE LOW-T AND HIGH-T EXPANSIONS

- SVILUPPO A BASSE T
- χ_N NON DIPENDE DA N NEI SISTEMI SHORT-RANGE
- IL MODELLO GAUSSIANO
- CALCOLO DELLE FOLC
- APPROCCIO DIAGRAMMATICO
- FOLC CONNESSE (DEFINIZIONE RICORDATA)

- MODELLO GAUSSIANO AD ALTE T
- INTERPRETAZIONE DIAGRAMMATICA
- MODELLO DI ISING AD ALTE T
- STIMA DEI COEFFICIENTI CRITICI (CENNI)

V. THE LANDAU-GINSBURG MODEL

- DAL DISCRETO (RETICOLO) AL CONTINUO
- HAMILTONIANA DEL MODELLO DI L-G
- CONSIDERAZIONI SUL PUNTO CRITICO (μ_c)
- REGOLARIZZAZIONE ULTRAVIOLETTA
- RISCALAMENTO E LIMITE GAUSSIANO $\alpha \rightarrow 0$
- ANALISI DIMENSIONALE
- ESPANSIONE PERTURBATIVA: FOLC A 2 PUNTI
- CALCOLO DEGLI INTEGRALI NELLO SPAZIO P
- REGOLA DI SOMMA PER LE MOLTEPLICITA'
- RISOMMAZIONE PARZIALE DELLA SERIE π_i ($\Sigma_i(p)$)
- FOLC A 4 PUNTI (1° E 2° ORDINE, $\Gamma_i(p)$)
- PARAMETRY DI FEYNMAN, MANIPOLAZIONE DI INTEGRALI
- CLASSIFICAZIONE DEI DIAGRAMMI DIVERGENTI
- RIMOZIONE DELLE DIVERGENZE UV

VI. NEAR THE TRANSITION

- DIVERGENZE INFRAROSSE
- APPROSSIMAZIONE DI HARTREE-FOCK
- ESPANSIONE IN $1/m$

VIII. PERTURBATIVE EVALUATION OF THE CRITICAL EXPONENTS

- GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE (GdR) NELLO SPAZIO P
- CONTO A D FISSATA
- CALCOLO DI γ A 1 LOOP

IX. NEAR FOUR DIMENSIONS

- DIMENSIONI D NON INTERE
- TEOREMA DI CARLSON
- EQUAZIONI DEL MOTO
- RINORMALIZZABILITA', TEOREMA BPH
- ϵ -EXPANSION

X. ON SPONTANEOUS SYMMETRY BREAKING

- MODELLO DI L-G IN PRESENZA DI $h > 0$
- DISCONTINUITA' DI $\chi(h)$
- SVILUPPO PERTURBATIVO (VERTICI A 3)

SOMMARIO (CONTINUA)

- SIMMETRIE CONTINUE
- ESEMPIO: $m=2$
- TEOREMA DI MERMIN E WEGNER
- BOSONI DI GOLDSTONE: χ_L E χ_T
- CALCOLO DI G_L E G_T

VII. THE RENORMALIZATION GROUP

- LE LEGGI DI SCALING: $G(r)$
- IPOTESI DI HYPERSCALING
- CALORE SPECIFICO, $\alpha(\nu)$
- SUSCETTIVITA', $\chi(\nu, m)$
- MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA, $\chi(p, \delta)$
- GOLB NELLO SPAZIO REALE: BLOCK SPIN
- $\chi^0(\theta) \approx \chi(\theta_\lambda)$
- $\chi(\theta) \sim \lambda \sim \theta^{-1/\nu} \sim \theta^{-\gamma}$, FORMULA PER γ
- CASO CON $h > 0$, COEFFICIENTE γ_h
- SCALING FIELDS E PUNTI FISSI
- LEGGE DI SCALA PER LE FOLC A m PUNTI
- MODELLO DI POTTS
- MATRICE DI TRASFERIMENTO
- PROCESSO DI DECIMAZIONE ESATTA
- APPROSSIMAZIONE DI MIGDAL-KADANOFF
- M-K SUL MODELLO DI ISING
- MAJORITY RULE, RETICOLO TRIANGOLARE
- MAJORITY RULE, $\lambda = \sqrt{3}$

MS E FENOMENI CRITICI

TESTI: PARRIS, DROUFFE-ITZYKSON, ZINN JUSTIN, AMIT-MARTIN MAYOR

RAPPORTO TRA TERMODINAMICA E MECCANICA STATISTICA

TERMODINAMICA $\rightarrow$ APPROCCIO FENOMENOLOGICO

MECCANICA STATISTICA $\rightarrow H[q, p] \rightarrow$ DIPENDENZA FUNZIONALE + TANTI (TLC, LGN)

DERIVO LE LEGGI MACROSCOPICHE DI UN SISTEMA A PARTIRE DALLE LEGGI DEL MOTO DELLE SUE COMPONENTI.

CHIAMIAMO LA PROBABILITA' DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA

$$P_{eq}[q, p]$$

$$P_{eq}[q, p] \geq 0, \quad \int [dq dp] P_{eq}[q, p] = 1$$

IL PERCORSO SARA' :

1. DETERMINARE $P_{eq}[q, p]$

2. DATA $P_{eq}[q, p]$, DETERMINARE LE PROPRIETA' MACROSCOPICHE.

ASSUMIAMO INNANZITUTTO CHE P_{eq} ABBA LA FORMA DI UNA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN (CANONICA):

$$P_{eq}[q, p] = \frac{1}{Z} e^{-\beta H[q, p]}$$

$$Z = \int [dq dp] e^{-\beta H[q, p]}$$

DOVE Z E' LA FUNZIONE DI PARTIZIONE. IN GENERE SI PONE

$$\beta_{MS} = \frac{1}{k T_{term}}$$

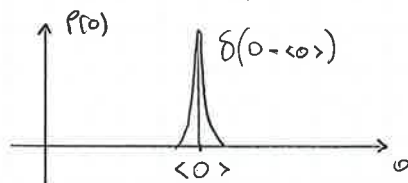
$$k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/GRADO}$$

OGGI VEDREMO CHE COSA SIGNIFICA.

IN QUESTO CORSO PORREMO $k=1$, i.e. $[E] = [T]$.

SEMBRA CI SIA UN PROBLEMA: BENCHÉ L'ENERGIA SIA CONSERVATA, STIAMO ASSOCIANDO PROBABILITA' NON NULLA A CONFIGURAZIONI CON ENERGIE DIVERSE!

SAPPIAMO PERO' CHE, NEL LIMITE DI VOLUME INFINITO, LA DISTRIBUZIONE TENDE A UNA DELTA (IL LIMITE VA FATTO A DENSITA' COSTANTE).



VEDREMO ANCHE CHE

$$\langle \cdot \rangle_{\text{CAN}} = \langle \cdot \rangle_{\mu_{\text{CAN}}}$$

E QUESTO DA' VALORE ALLA NOSTRA ASSUNZIONE.

• ENTROPIA

A $T=0$ IL SISTEMA STA NEL SUB STATO A ENERGIA MINIMA.

A $T>0$, STATI A ENERGIA MAGGIORE POSSONO ESSERE OCCUPATI.

INTRODUIAMO, A TITOLO DI ESEMPIO, IL MODELLO DI ISING:

$$\sigma_i = \pm 1, \quad i = (i_x, i_y), \quad i_x \in [1, L], \quad V = L^D$$

D = PLI

ASSEGNO

$$H = -J \sum_{\langle i, k \rangle} \sigma_i \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i$$

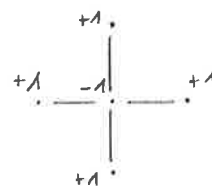


*NOTA: $V = \# \text{ SITI}$, $D = \# \text{ LEGAMI}$
PER SITO (COME IN UN RETICOLO DI SPIN).

SI A $h=0$. SE $J>0$ IL MATERIALE E' FERROMAGNETICO E GLI SPIN
TENDONO A ALLINEARSI: VI SONO DUE CONFIGURAZIONI PER CUI $H_{\text{MIN}} = -JD$,
OSSIA TUTTI $\uparrow$ O TUTTI $\downarrow$.

SE MUOVO UNO SPIN, PASSO DA $H_{\text{MIN}} = E_0$ A

$$E_1 = E_0 + 2D(2J) = E_0 + 4DJ$$



VI SONO $O(V)$ CONFIGURAZIONI SIFATTE, PERCIO'

NOTA: $2D = \# \text{ LEGAMI}$, $\Delta E_{\text{LEGAME}} = 2J$.

QUESTA CONFIGURAZIONE E' PIU' PROBABILE: PER MISURARE QUESTA
PROBABILITA' INTRODURREMO L'ENTROPIA.

* PONIAMO $L=2$, $D=2$. ALLORA PER IL SISTEMA

$$V = L^D = 4$$

E LE CONFIGURAZIONI POSSIBILI SONO $2^4 = 16$: LE INDICHIAMO CON $\{c\}$.

DEFINIAMO UNA MISURA

$$d\mu[c] = \frac{1}{2} [\delta(\sigma+1) + \delta(\sigma-1)] d\sigma$$

$$\text{NOTA: } = \delta(1-\sigma^2) d\sigma$$

POICHE' $\sigma_i = \pm 1$, INFATTI, MI RICONDUKO AL DISCRETO TRAMITE

$$\int d\sigma (\delta(\sigma+1) + \delta(\sigma-1)) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{\sigma_i = \pm 1}$$

DEFINIAMO

$$dP_\beta[c] = \frac{e^{-\beta H[c]}}{Z_\beta} d\mu[c] = p_\beta[c] d\mu[c]$$

LA FUNZIONE DI PARTIZIONE VALE QUINDI

$$Z_\beta = \int d\mu[c] e^{-\beta H[c]}$$

COSÌ CHE IL VALORE DI ASPETTATIVA DI UNA GRANDEZZA 'A' SIA

$$\langle A \rangle_\beta = \int d\mu[c] A[c] p_\beta[c]$$

DEFINIAMO IL FUNZIONALE ENTROPIA (PER UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA $P[c]$)

$$S[P] = - \int d\mu[c] P[c] \log P[c] = - \langle \log P[c] \rangle$$

PIÙ È ORDINATO IL SISTEMA (i.e. LA P_β SOMIGLIA A UNA DELTA),

PIÙ PICCOLA È L'ENTROPIA. A $T=0$, P_β È UNA δ (O SOMMA DI δ).

MENO SAPPIAMO DEL SISTEMA E PIÙ $S[P]$ È GRANDE.

NEL FORMALISMO DISCRETO,

$$C_j \quad j = 1, 2, \dots, M$$

(CONFIGURAZIONI POSSIBILI)

$$P_j = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_j}$$

(PROBABILITÀ DELLA CONFIGURAZIONE j)

$$Z = \sum_{j=1}^M e^{-\beta H_j}$$

(FUNZIONE DI PARTIZIONE)

$$\langle A \rangle = \sum_{j=1}^M A_j P_j$$

(VALORE DI ASPETTATIVA)

$$S[P] = - \sum_{j=1}^M P_j \log P_j \geq 0$$

(ENTROPIA)

DATA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA, POSSO PENSARE SEMPRE A UN PROCEDIMENTO CON CUI LA DISCRETIZZO E POI PRENDENDO UN LIMITE IN CUI LA DISCRETIZZAZIONE TENDE A ZERO.

NOTIAMO CHE $S[P] \geq 0$. NEL CASO PIÙ ORDINATO POSSIBILE,

$$P_a = 1, \quad P_{j \neq a} = 0$$

POICHÉ LO ZERO DÀ LUOGO A FORME INDETERMINATE, PONGO $P_{j \neq a} = \epsilon$

E OTTENGO

$$S[P] = 0 - \sum_{j \neq \infty} \varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

OSSIA $S_{\min} = 0$.

• ESEMPIO: NEL CONTINUO NON È VERO CHE $S[P] \geq 0$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-x^2/2A} \xrightarrow{A \rightarrow 0} \delta(x)$$

$$S = +\frac{1}{2} (1 + \log 2\pi A) \xrightarrow{A \rightarrow 0} -\infty$$

NOTA:

$$S[P] = \int \frac{e^{-x^2/2A}}{\sqrt{2\pi A}} \left(\frac{1}{2} \log 2\pi A + \frac{x^2}{2A} \right) dx$$

$$\langle x^{2m} \rangle = (2m-1)!! \sigma^{2m}$$

È UN PROBLEMA CHE SI PRESENTA CON DISTRIBUZIONI CONTINUE; È ANCHE PER EVITARLO CHE IN QUESTO CORSO LAVOREREMO NEL DISCRETO.

• ESEMPIO: CONNESSIONE CON LA TEORIA DELL'INFORMAZIONE

SISTEMA CON M CONFIGURAZIONI, DI CUI SOLO $L < M$ POSSIBILI ED EQUIPROBABILI:

$$P_j = \begin{cases} \frac{1}{L} & j \leq L \\ 0 & j > L \end{cases}$$

SE $L=M$ HO IL DISORDINE COMPLETO (UNIFORME); SE $L=1$ HO ORDINE. QUANTO VALE S ? HO DI NUOVO UN PROBLEMA DI REGOLARIZZAZIONE:

$$P_j = \begin{cases} \frac{1}{L} - \frac{M-L}{L} \varepsilon & j \leq L \\ \varepsilon & j > L \end{cases}$$

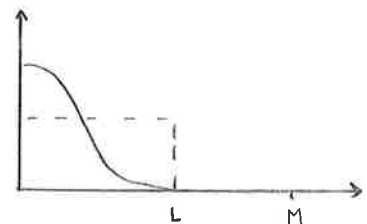
NOTA: IN QUESTO MODO È PRESERVATA LA NORMALIZZAZIONE.

PER $L=M$ DEVO FITTOVARE, INOLTRE, $P_j = \frac{1}{M} \forall j$.

DA CUI $S = \log L$.

SI NOTI CHE

$$e^{S[P]} = L$$



OSSIA IL NUMERO DELLE CONFIGURAZIONI IN CUI IL SISTEMA PUÒ TROVARSI. E SE AVESSI UNA DISTRIBUZIONE PIÙ COMPLICATA? $e^{S[P]}$ MI DAREBBE IL NUMERO DI CONFIGURAZIONI IN CUI IL SISTEMA PUÒ TROVARSI CON PROBABILITÀ NON TROPPO PICCOLA, COME ORA CERCHEREMO DI CONVINCERCI.

PRENDIAMO UN SISTEMA CON 2^k CONFIGURAZIONI POSSIBILI. PER

TRASMETTERE LO STATO DEL SISTEMA DEVO DARE UN NUMERO TRA
 $0, \dots, 2^K - 1$

IN BINARIO, CIO' SIGNIFICA K BIT.

DARE N COPIE DI QUESTO SISTEMA, MI SERVONO NK BIT.

MA SE E' NOTA p_{eq} , POSSO RISPARMIARE QUALCOSA?

SE FOSSE $p_{eq} = 0$, SAPREI DOVE SONO TUTTI AD ESEMPIO; SE FOSSE UNIFORME, NON RISPARMIEREI NULLA.

IN ALTRI TERMINI, NOTA p_{eq} , QUAL E' IL NUMERO MINIMO DI BIT B_N CHE DEVO TRASMETTERE AFFINCHÉ LA PROBABILITA' DI INTERPRETARE MALE IL MESSAGGIO TENDA A ZERO PER $N \rightarrow \infty$?

LA RISPOSTA E' DATA DAL TEOREMA DI SHANNON:

$$\frac{B_N}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{S[P]}{\ln 2}$$

NOTA: NEL CASO UNIFORME,
 $S[P] = \log L = \log 2^K = K \log 2 \Rightarrow \frac{B_N}{N} \sim \frac{N K}{\ln 2^K} = \frac{N K}{N K \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$
 $B_N \rightarrow NK$

PER CONOSCERE LA CONFIGURAZIONE DI N SISTEMI CI SERVONO LO STESSO NUMERO DI BIT CHE NEL CASO IN CUI SOLO $e^{S[P]}$ CONFIGURAZIONI HANNO $P \neq 0$, $P_i = P_j \forall i, j$.

DERIVAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN

SUPPONIAMO DI CONOSCERE DEL MIO SISTEMA SOLAMENTE L'ENERGIA U .

RICHIEDIAMO CHE P SIA TALE DA MASSIMIZZARE L'ENTROPIA COMPATIBILMENTE

CON IL VINCOLO SU

$$E[P] = \langle H \rangle_P$$

NOTA: QUESTO VUOL DIRE CERCARE LA DISTRIBUZIONE PIU' PROBABILE.

OVVERO, CERCHIAMO IL MASSIMO DI S SOTTO I VINCOLI:

$$U = E[P] = \sum_{j=1}^M P_j H_j$$

$$\sum_{j=1}^M P_j = 1$$

USIAMO I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE: MASSIMIZZIAMO LA FUNZIONE

$\psi[P]$ CON IL VINCOLO $\nu[P] = 0$. CONSIDERO LA FUNZIONE MODIFICATA

$$\psi_\lambda[P] = \psi[P] + \lambda \nu[P]$$

MASSIMIZZO QUINDI $\psi_\lambda[P]$ E SCELGO IL MOLTIPLICATORE λ t.c. $\psi_\lambda[P]$ SODDISFA IL VINCOLO SUL MASSIMO.

CE NE SERVONO DUE:

$$\psi_1[P] = \sum_{j=1}^M p_j - 1$$

$$\psi_2[P] = \sum_{j=1}^M p_j E_j - U$$

NOTA: OCCHIO AL CAMBIO DI NOTAZIONE, ORA CHIAMA E_j QUELLA CHE PRIMA ERA H_j .

$$\psi[P] = S[P] = - \sum_k p_k \log p_k$$

PERCIO'

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}[P] = - \sum_k p_k \ln p_k + \lambda_1 \left(\sum_k p_k - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_k p_k E_k - U \right)$$

CALCOLO

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_j} = - \ln p_j - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 E_j \equiv 0$$

DA CUI

$$\ln p_j = -1 + \lambda_1 + \lambda_2 E_j \Rightarrow p_j = c \cdot e^{\lambda_1} e^{\lambda_2 E_j}$$

HO GIÀ VINTO. ORA λ_1 SARÀ t.c.

$$\sum_j p_j = 1 \Rightarrow p_j = \frac{e^{\lambda_2 E_j}}{\sum_k e^{\lambda_2 E_k}}$$

MENTRE λ_2 SARÀ t.c.

$$\sum_k p_k E_k = U \Rightarrow U = \frac{\sum_j e^{\lambda_2 E_j} E_j}{\sum_j e^{\lambda_2 E_j}}$$

E CHIAMO $\lambda_2 = -\beta$: CIO' FISSA β ($\beta = \frac{1}{T}$).

QUINDI LA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN PUO' ESSERE DERIVATA DA UN PRINCIPIO VARIAZIONALE. SPERIMENTALMENTE, SE CONTROLLU U SO CHE LO STATO CHE E' PIU' PROBABILE CHE IL SISTEMA ASSUMA E' PROPRIO QUELLO DI EQUILIBRIO.

DERIVAZIONE ALTERNATIVA

LA DISTRIBUZIONE DI BOLTZMANN E' QUELLA CHE MINIMIZZA L'ENERGIA LIBERA (CON $\sum_i p_i = 1$)

$$\Phi[P] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P]$$

NOTA: PUOI VEDERLO COME UN COROLLARIO DI QUANTO APPENA DIMOSTRATO.

• LEGAME TRA β_{MS} E T_{TEAM}

1^a LEGGE DELLA TERMODINAMICA:

$$\delta Q = dU - \delta L$$

2^a LEGGE DELLA TERMODINAMICA:

$$\frac{\delta Q}{T_{TEAM}} = dS_{TEAM}$$

dU DIFFERENZIALE ESATTO

NOTA: δL E δQ SONO RISPETTIVAMENTE IL LAVORO E IL CALORE FORNITI AL SISTEMA.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE IN MECCANICA STATISTICA

$$\beta_{MS} \delta Q = \beta_{MS} (dU_{MS} - \delta L_{MS}) = dS_{MS}$$

OVVERO

$$\beta_{MS} \approx \frac{1}{T_{TEAM}}$$

$$S_{MS} = S_{TEAM}$$

CI SERVE INNANZITUTTO CAPIRE COME SI COMPIE LAVORO IN MECCANICA STATISTICA. CONSIDERIAMO UN' HAMILTONIANA

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

FORNISCO ENERGIA AL SISTEMA VARIANDO IL PARAMETRO DI CONTROLLO λ .
DATA UNA VARIAZIONE INFINITESIMA

$$\lambda \rightarrow \lambda + \delta \lambda$$

$$\beta \rightarrow \beta + \delta \beta$$

IL LAVORO DIPENDE SOLO DA λ E NON DA β :

$$\delta L = \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle \delta \lambda$$

CALCOLIAMO ALLORA

NOTA: VALE LA PENA DI PARTIRE DAL FONDO,
 $S = \beta(U - F) \Rightarrow dS = d(\beta U) - d(\beta F)$
A QUEL PUNTO A UNO VIENE VOGLIA DI CALCOLARE $d(\beta F)$.

$$d(\beta F) = d(-\ln Z) = \frac{d}{d\beta}(-\ln Z) d\beta + \frac{d}{d\lambda}(-\ln Z) d\lambda$$

MA VALGONO

$$\frac{d}{d\beta}(-\ln Z) = U = \langle E \rangle$$

$$\text{NOTA: } = -\frac{1}{Z} \int d\mu \frac{d}{d\beta} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \int d\mu H e^{-\beta H}.$$

$$\frac{d}{d\lambda}(-\ln Z) = -\frac{1}{Z} \int d\mu e^{-\beta H} (-\beta) \frac{dH}{d\lambda} = \beta \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle = \beta \langle H_1 \rangle$$

PERCIO'

$$d(\beta F) = U dp + \beta \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle d\lambda = U dp + \beta \delta L$$

IN MECCANICA STATISTICA, L'ENTROPIA SI CALCOLA COME

$$S = \beta (U - F)$$

PERCIO'

$$dS = \beta dU + U dp - d(\beta F) = \beta dU - \beta \delta L$$

SI E' COSI' DIMOSTRATO CHE

$$dS_{MS} = \beta (dU_{MS} - \delta L_{MS})$$

ALCUNE RELAZIONI UTILI

L'ENERGIA LIBERA SODDISFA

$$\Phi[p_{eq}] = F_p = U - \frac{S}{\beta} = -\frac{1}{\beta} \log Z_p \quad (\text{I})$$

INFATTI

$$p_i^{eq} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

$$F_{eq} = E - \frac{1}{\beta} S$$

$$= \sum_j p_j E_j + \frac{1}{\beta} \sum_j p_j \log p_j$$

$$= \frac{1}{Z} \left\{ \sum_j e^{-\beta E_j} E_j + \frac{1}{\beta} \sum_j e^{-\beta E_j} \log \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_j} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{Z} \left\{ \sum_j e^{-\beta E_j} E_j - \frac{1}{\beta} \sum_j e^{-\beta E_j} (\log Z) + \frac{1}{\beta} \sum_j e^{-\beta E_j} (-\beta E_j) \right\}$$

$$= \frac{1}{Z} \left(-\frac{1}{\beta} \log Z \right) \sum_j e^{-\beta E_j}$$

$$= -\frac{1}{\beta} \log Z$$

UNA SECONDA RELAZIONE UTILE È

$$S[p_{eq}] = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (\text{II})$$

INFATTI

$$= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \log Z_p \right) = \log Z_p - \beta \frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

$$= \log Z_p + \beta U = \beta(U - F) = S$$

DOVE SI È USATA LA (I),

$$U = E[p_{eq}] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_p = F_p + \beta \frac{\partial F_p}{\partial \beta} \quad (\text{III})$$

DERIVAZIONE FUNZIONALE

DEF: FUNZIONALE

COME UNA FUNZIONE $f(\cdot)$ ASSOCIA UN NUMERO A UN ALTRO,
 $y = f(x)$

COSÌ UN FUNZIONALE $F[\cdot]$ ASSOCIA A UNA FUNZIONE g UN NUMERO
 $y = F[g]$

ESEMPIO

$$F_{AB}^{(I)}[g(x)] = \int_A^B g(x) dx$$

$$F_{AB}^{(M)}[g(x)] = \max_{A \leq x \leq B} g(x)$$

$$F^{(\bar{x})}[g] = g(\bar{x})$$

$$S[g] = - \int dx g(x) \log(g(x))$$

DERIVAZIONE

NOTA: QUESTA NOTAZIONE FA SCHIFO, VEDI SOTTO.
NEL SEGUITO CORREGGERÒ TUTTO BASANDOMI SULLA (Ic).

CONSIDERIAMO

$$F[g(x) + \varepsilon h(x)] := F[g(x)] + \varepsilon \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} h(x) + O(\varepsilon^2) \quad (I)$$

TALE RELAZIONE DEFINISCE LA DERIVATA FUNZIONALE

$$\frac{\delta F[g]}{\delta g(x)}$$

NOTA: IN EFFETTI UNA DEFINIZIONE ALTERNATIVA È

$$\frac{\delta F[g(x)]}{\delta g(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ F[g(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[g(x)] \}$$

$$\frac{\delta g(y)}{\delta g(x)} = \delta(x-y)$$

ESEMPIO

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y) = 1$$

SI NOTI CHE LA DERIVATA ELIMINA NON SOLO g , MA ANCHE UN ELEMENTO DI VOLUME.

NOTA: TRUO LA NOTAZIONE DELLA (I) FUORVIANTE. I CASI SONO DUE: O LO SI PENSA COME UN FUNZIONALE,

$$F[g + \varepsilon h] = F[g] + \varepsilon \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} h(x) + O(\varepsilon^2) \quad (Ib)$$

O PERLOMENO SI CAMBIA IL NOME ALLA VARIABILE MUTA DI INTEGRAZIONE (MODO PIÙ FISICO, CONFONDO FUNZIONALE E FUNZIONE),

$$F[g(x) + \varepsilon h(x)] = F[g(x)] + \varepsilon \int dy \frac{\delta F[g(y)]}{\delta g(x)} h(y) + O(\varepsilon^2) \quad (Ic)$$

DALLA (I) SI RICAHA

$$\frac{F[g(x) + \varepsilon h(x)] - F[g(x)]}{\varepsilon} = \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} h(x)$$

AD ESEMPIO, PER IL FUNZIONALE INTEGRALE DEFINITO,

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx (g(x) + \varepsilon h(x)) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx h(x)$$

PERCIO' (GRAZIE ALLA LINEARITA' DELL'INTEGRALE) RITROVO

$$\frac{\delta F^{(1)}[g]}{\delta g} = 1$$

• DERIVATA COMPOSTA

NOTA: QUANDO CI HAI PRESO LA MANO,

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(y)) dy = f'(g(x))$$

$$\frac{\delta f(g(x))}{\delta g(x)} = f'(g(x)) \delta(x-x)$$

AD ESEMPIO

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy g^2(y) = 2g(x) \frac{\delta}{\delta g(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y) = 2g(x)$$

• FOCUS: DIMOSTRAZIONE. DALLA DEFINIZIONE (Ib), SCEGLIENDO $F[g] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(x)) dx$,

$$\varepsilon \int dx \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} h(x) + O(\varepsilon^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f(g(x) + \varepsilon h(x)) - f(g(x)) \} dx$$

$$\stackrel{\text{TAYLOR}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f(g(x)) + \varepsilon h(x) \cdot f'(g(x)) + O(\varepsilon^2) - f(g(x)) \} dx = \varepsilon \int dx f'(g(x)) h(x)$$

SI NOTI CHE HO SVILUPPATO USANDO DERIVATE DI FUNZIONI ORDINARIE, NON DERIVATE FUNZIONALI.

TIENI ANCHE A MENTE CHE, DATO IL FUNZIONALE

$$F[p] = \int f(r, p(r), \nabla p(r)) dr$$

SI AVRA'

$$\frac{\delta F}{\delta p} = \frac{\partial f}{\partial p} - \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla p}$$

SISTEMI MAGNETICI

UNA CONFIGURAZIONE C E' DEFINITA DA $C = \{\sigma_i\}$, DOVE σ_i SONO VARIABILI DI SPIN.

UNA VARIABILE COME LA TEMPERATURA CRITICA T_c PUO' VARIARE DA SISTEMA A SISTEMA, MA VI SONO VARIABILI (COME GLI ESPONENTI CRITICI) UNIVERSALI. INFATTI, VICINO AI PUNTI CRITICI, LE CORRELAZIONI DIVENTANO LONG-RANGED: LE COSE IMPORTANTI ACCADONO SU GRANDI DISTANZE E I DETTAGLI DEL RETICOLO NON CONTANO.

PRENDIAMO AD ESEMPIO UNA PROTEINA (ETEROPOLIMERO): E' UN "FILO" CHE SI PUO' APRIRE O CHIUDERE VARIANDO T . A BASSA T , ESSO SI RAGGOMITOLA.

UNA PROTEINA E' ETEROGENEA E QUESTO LA DISTINGUE DA UN POLIMERO DI UN MAGLIONE. IL "DISORDINE" E' RESPONSABILE DEL FATTO CHE LA PROTEINA ASSUMA SEMPRE LA STESSA FORMA. [etc.]

IL MODELLO

VARIABILI DI SPIN $\underline{S}(x)$.

POSSO SCEGLIERE x COME UNA D-PLA E $\underline{S}$ E' DETTATO DAL SINGOLO CASO (CI POTREI DESCRIVERE LA QCD). PER NOI, $\underline{S}$ E' UNA VARIABILE $\sigma_i = \pm 1$.

L'HAMILTONIANA SI SCRIVE

$$H[C] = \underbrace{H_0[C]}_{\text{HAMILTONIANA LIBERA}} - \underbrace{\int d^D x \ h(x) \cdot \underline{S}(x)}_{\text{TERMINE DI ACCOPPIAMENTO CON IL CAMPO MAGNETICO}}$$

DEFINISCO L'ENERGIA LIBERA

$$F[h] = F[h(x)] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[h]$$

$$f(h) = \frac{F[h]}{V}$$

DATA UN' OSSERVABILE, IL SUO VALORE D'ASPETTATIVA SARA'

$$\langle \cdot \rangle = \int (\cdot) d[C] P[C]$$

NOTA: SE $h(x) \equiv h$ (UNIFORME), SI HA COME SOPRA $f = f(h) = f[h]_{h(x)=h}$.

AD ESEMPIO, LA MAGNETIZZAZIONE È DEFINITA COME

$$m_v(\underline{x}) \equiv \langle S_v(\underline{x}) \rangle$$

$$M_v = \langle \int_v d^3x S_v(\underline{x}) \rangle = \langle S_v^T \rangle$$

NOTA: IN S_v^T LA T STA PER "TOTALE", NON INDICA UNA DIPENDENZA DALLA TEMPERATURA.

E SI AVRA'

$$m_v(\underline{x}) = - \frac{\delta F[h]}{\delta h_v(\underline{x})}$$

SI NOTI CHE, INFATTI,

$$\frac{\delta}{\delta h_v(\underline{x})} \log Z = \frac{1}{Z} \int e^{+\beta \int d^3x h \cdot S(\underline{x}) - \beta H_0[C]} (+\beta) S_v(\underline{x}) d[C]$$

NOTA: NON SONO BANALI, ME LI SVOLGO CON CALMA IN UN FOCUS TRA UN PAIO DI PAGINE. TIENI PERO' A MENTE CHE F È ESTENSIVA MENTRE f È LA SUA VERSIONE INTENSIVA, CHE HA SENSO DEFINIRE SOLO SE LO SPAZIO È OMOGENEO. LA DERIVATA FUNZIONALE SI MANGIA UN ELEMENTO DI VOLUME.

SE IL CAMPO NON DIPENDE DAL SITO, AVRO' PER QUALSIASI $\underline{x}$

$$m_v = - \frac{\partial f(h)}{\partial h_v}$$

NOTA: SE È VERA LA RELAZIONE PER $m_v(\underline{x})$, QUI HO UNA DERIVATA PARZIALE INVECE DI QUELLA FUNZIONALE CHE, COME SI È VISTO, SI MANGIA ANCHE UN ELEMENTO DI VOLUME.

UN'ALTRA PROPRIETÀ IMPORTANTE (PERCHÉ MISURABILE) È LA SUSCETTIVITÀ MAGNETICA

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{\partial m_\mu}{\partial h_\nu}$$

SE IL MATERIALE È ISOTROPICO,

$$\chi_{\mu\nu} = \chi \delta_{\mu\nu}$$

SE NON È NÉ ISOTROPICO, NÉ OMOGENEO, POSSO DEFINIRE

$$\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\delta m_\mu(\underline{x})}{\delta h_\nu(\underline{y})} = - \frac{\delta^2 F[h]}{\delta h_\nu(\underline{y}) \delta h_\mu(\underline{x})}$$

IN UN SISTEMA INVARIANTE PER TRASLAZIONE,

$$\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y}) = \chi_{\mu\nu}(\underline{x} - \underline{y})$$

NOTA: OGGI OMOGENEO. SE FOSSE ISOTROPICO, $\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y}) = \chi_{\mu\nu}(\underline{x} - \underline{y})$

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{1}{V} \int d^3x \chi_{\mu\nu}(\underline{x})$$

NOTA: SBAGLIATA, VEDI SOTTO. $\chi_{\mu\nu} = \int d^3x \chi_{\mu\nu}(\underline{x})$

NOTA: NEL SEGUITO DO PER ASSODATO CHE CI SIA UN ERRORE E CHE QUEL FATTORE $\frac{1}{V}$ NON CI VADA. IN EFFETTI $\chi_{\mu\nu}(\underline{x}, \underline{y})$ È DEFINITA PER UNITÀ DI $[V]^2$, QUINDI SE LA INTEGRO UNA VOLTA OTTENGONO QUALCOSA CHE È GIÀ PER UNITÀ DI VOLUME. VEDI ANCHE IL FOCUS TRA UN PAIO DI PAGINE.

• FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA

$$\langle AB \rangle_c = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

DETTO V IL VOLUME DEL SISTEMA, SI OTTIENE

$$V\chi_{\mu\nu} = \beta \langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle_c = \beta [\langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle - \langle S_\mu^T \rangle \langle S_\nu^T \rangle] = \beta \langle (S_\mu^T - \langle S_\mu^T \rangle) (S_\nu^T - \langle S_\nu^T \rangle) \rangle$$

INOLTRE

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle_c$$

NOTA: ANCHE QUESTE LE ENVOJO PER ESEMPIO NEL FOCUS QUA A FIANCO.

QUELLE VISTE SONO UN ESEMPIO DEL TEOREMA DI FLUTTUAZIONE - DISSIPAZIONE. IO MISURO UNA FUNZIONE RISPOSTA IN UN SISTEMA PERTURBATO E HO UNA STIMA DELLA QUANTITA' A DESTRA, CHE E' CALCOLATA SUL SISTEMA IN EQUILIBRIO* (QUESTA E' PIU' SEMPLICE DA SIMULARE NUMERICAMENTE, L'ALTRA DA MISURARE).

• TEOREMA DI FLUTTUAZIONE - DISSIPAZIONE

LA RISPOSTA LINEARE DEL SISTEMA E' DATA DALLE SUE FLUTTUAZIONI ALEATORIE.

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = \langle A H_1 \rangle_c$$

*NOTA: SE $P_{eq}[C]$ E' CONCENTRATA SU UNA SOLA CONFIGURAZIONE (OSSIA SE E' UNA DELTA), NON VI SONO FLUTTUAZIONI TERMODINAMICHE E LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE $\langle AB \rangle_c$ SONO NULLE.

DIM:

$$\langle A \rangle = \frac{\int d[C] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A}{\int d[C] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = -\frac{1}{Z^2} \left(\int d[C] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} A \right) \left(\int d[C] e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)} (-\beta H_1) \right)$$

$$+ \frac{1}{Z} \int d[C] e^{-\beta[H_0 + \lambda H_1]} A (-\beta H_1)$$

$$= \beta (\langle A H_1 \rangle - \langle A \rangle \langle H_1 \rangle) = -\beta \langle A H_1 \rangle_c$$

NOTA: ORA DO BASTI CONSIDERARE CHE $e^{-\beta \lambda H_1} = 1 + O(\lambda)$ PER POTERE INTERPRETARE TALI VALORI MEDI COME CALCOLATI SULLA DISTRIBUZIONE IMPERTURBATA.

• FOCUS: CONTI PER ESTESO, SISTEMI MAGNETICI

USO LE DEFINIZIONI

$$F[h] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[h]$$

$$Z[h] = \int d[c] e^{-\beta H[c]}$$

CON

$$H[c] = H_0[c] - \int dx \underline{h}(x) \cdot \underline{\sigma}(x)$$

RICORDO LA REGOLA PER LE VARIAZIONI FUNZIONALI COMPOSITE,

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \int f(g(y)) dy = f'(g(x))$$

QUINDI VERIFICO CHE VALE

$$\begin{aligned} m_{\sigma}(x) &= -\frac{\delta}{\delta h_{\sigma}(x)} F[h] = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z[h]} \frac{\delta}{\delta h_{\sigma}(x)} Z[h] \\ &= \frac{1}{\beta Z[h]} \int d[c] \frac{\delta}{\delta h_{\sigma}(x)} e^{-\beta(H_0[c] - \int dx' \underline{h}(x') \cdot \underline{\sigma}(x'))} \\ &= \frac{1}{\beta Z[h]} \int d[c] e^{-\beta H[c]} \beta \frac{\delta}{\delta h_{\sigma}(x)} \left(\int dx' \underline{h}(x') \cdot \underline{\sigma}(x') \right) \\ &= \int d[c] P[c] \sigma_{\sigma}(x) = \langle \sigma_{\sigma}(x) \rangle \end{aligned}$$

SIMILMENTE,

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu}(x, y) &= -\frac{\delta^2 F[h]}{\delta h_{\mu}(x) \delta h_{\nu}(y)} = \frac{\delta}{\delta h_{\nu}(y)} m_{\mu}(x) \\ &= \int d[c] \sigma_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta h_{\nu}(y)} P[c] = \int d[c] \sigma_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta h_{\nu}(y)} \frac{e^{-\beta H[c, h]}}{Z[h]} \\ &= \int \frac{d[c]}{Z[h]} \sigma_{\mu}(x) \frac{\delta}{\delta h_{\nu}(y)} e^{-\beta H[c, h]} - \int \frac{d[c]}{Z^2[h]} \sigma_{\mu}(x) e^{-\beta H[c, h]} \frac{\delta}{\delta h_{\nu}(y)} Z[h] \\ &= \beta \int d[c] \frac{e^{-\beta H[c]}}{Z[h]} \sigma_{\mu}(x) \sigma_{\nu}(y) - \int \frac{d[c]}{Z^2[h]} \sigma_{\mu}(x) e^{-\beta H[c]} \int d[c'] \frac{\delta}{\delta h_{\nu}(y)} e^{-\beta H[c']} \\ &= \beta \int d[c] P[c] \sigma_{\mu}(x) \sigma_{\nu}(y) - \left(\int d[c] P[c] \sigma_{\mu}(x) \right) \left(\int d[c'] P[c'] \beta \sigma_{\nu}(y) \right) \\ &= \beta \left(\langle \sigma_{\mu}(x) \sigma_{\nu}(y) \rangle - \langle \sigma_{\mu}(x) \rangle \langle \sigma_{\nu}(y) \rangle \right) = \beta \langle \sigma_{\mu}(x) \sigma_{\nu}(y) \rangle_c \end{aligned}$$

ORA MI BASTA INTEGRARLA DUE VOLTE:

$$\int d^4x d^4y \chi_{\mu\nu}(x, y) = \beta \langle \int d^4x S_\mu(x) \int d^4y S_\nu(y) \rangle_c = \beta \langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle_c$$

II (OMOGENEO)

$$\int d^4x d^4y \chi_{\mu\nu}(x-y) \stackrel{z=x-y}{=} \int d^4y d^4z \chi_{\mu\nu}(z, 0) = V \int d^4z \chi_{\mu\nu}(z, 0) = V \cdot \chi_{\mu\nu}$$

* IN TEORIA DEI CAMPI, È STANDARD DEFINIRE IL FUNZIONALE GENERATORE (EUCLIDEO)

$$Z(j) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\phi) + \int d^4x j(x)\phi(x)}$$

$$S_E(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}[\phi](x)$$

FOCUS:
FUNZIONALE
GENERATORE
(FONTE: PESKIN)

DAL QUALE SI RICEVONO LE FUNZIONI DI GREEN TRAMITE DERIVAZIONE FUNZIONALE:

$$\left. \frac{\delta^m Z(j)}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_m)} \right|_{j=0} = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \rangle$$

SI OSSERVI L'ANALOGIA CON LA FUNZIONE DI PARTIZIONE Z , DOVE IL TERMINE DI ACCOPPIAMENTO CON IL CAMPO MAGNETICO GIOCA IL RUOLO DI SORGENTE.

IL CALCOLO DI $\chi_{\mu\nu}(x, y)$ ESEMPLIFICA UN ALTRO RISULTATO GENERALE (VEDI AD ESEMPIO BINNEY, APPENDICE D): $F[h]$ È IL FUNZIONALE GENERATORE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE. IN SODONI, LA PRIMA VOLTA CHE SI DERIVA $\ln Z$ COMPARE UN FATTORE $\frac{1}{Z[h]}$ DI CUI VA TENUTO CONTO IN TUTTE LE DERIVATE SUCCESSIVE; I NUOVI TERMINI CHE EMERGONO (RISPETTO ALLE DERIVATE DI Z) SONO ESATTAMENTE QUELLI CHE SOTTORRAGGO A $\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_m) \rangle$ QUANDO DEFINISCO RICORSIVAMENTE LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE (COME VEDREMO PIÙ AVANTI).

PROVA, INFINE, A RIVEDERE IN QUESTI TERMINI IL TEOREMA DELLA RISPOSTA LINEARE.

AVREMO, IN GENERALE,

$$\langle \sigma_1 \dots \sigma_m \rangle_c = \left(\frac{1}{\beta} \right)^m \frac{\partial^m}{\partial h_1 \dots \partial h_m} \ln Z(h)$$

$$\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_m) \rangle_c = \left(\frac{1}{\beta} \right)^m \frac{\delta^m}{\delta h(x_1) \dots \delta h(x_m)} \ln Z[h]$$

ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

I SISTEMI MAGNETICI SVILUPPANO UNA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA A BASSE TEMPERATURE. SUPPONIAMO

$$h=0, T < T_c, m > 0$$

IN ASSENZA DI PERTURBAZIONI, QUESTO E' UNO STATO STABILE DEL SISTEMA. APPLICO PER UN TEMPO BREVISSIMO UN CAMPO ESTERNO E, DOPO AVERLO SPENTO, TROVO

$$h=0, T < T_c, \tilde{m} < 0$$

$$\tilde{m} = -m$$

IL CHE SIGNIFICA CHE ESISTONO DUE STATI STABILI $|+\rangle, |-\rangle$.

DAL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO, PER OGNI CONFIGURAZIONE C NE ESISTE UN'ALTRA, $\tilde{C}$, t.c.

$$E[\tilde{C}] = E[C]$$

$$S_{\text{Tot}}[\tilde{C}] = -S_{\text{Tot}}[C]$$

NOTA: QUESTA SIMMETRIA SI DICE TIME REVERSAL E IMPLICA L'INVERSIONE ANCHE DELLE VELOCITA' DELLE PARTICELLE CHE COMPRENDONO IL SISTEMA.
 S_{Tot} E' LO SPIN TOTALE.

NOI SAPPIAMO CHE L'HAMILTONIANA E' INVARIANTE PER $S \rightarrow -S$.

AD ESEMPIO NEL MODELLO DI ISING

$$H = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i'} - h \sum_i \sigma_i$$

NOTA: H E' SIMMETRICA QUANDO $h=0$.

DOVE $J > 0$ E $\sum_i$ E' LA SOMMA SUI PRIMI VICINI NEL RETICOLO.

LA SIMMETRIA PER INVERSIONE DI SPIN E' DESCRITTA DAL GRUPPO DI SIMMETRIA DISCRETA Z_2 . SI PARLA DI ROTTURA SPONTANEA QUANDO L'HAMILTONIANA HA QUESTA SIMMETRIA, MA NON $P_{eq}[C]$.

MA

$$P_{eq}[C] = \frac{e^{-\beta H[C]}}{\int d[C] e^{-\beta H[C]}}$$

NOTA: SI PARLA INVECE DI ROTTURA ESPLICITA DI SIMMETRIA IN PRESENZA DI UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO.

SE $H[C]$ E' INVARIANTE, COME PUO' $P_{eq}[C]$ NON ESSERLO?

VEDREMO CHE IL PROBLEMA SI RISOLVERA' SOLO NEL LIMITE $V \rightarrow \infty$.

IN EFFETTI NON ESISTONO TRANSIZIONI DI FASE SE IL VOLUME E' FINITO.

NOTA: SE $V \rightarrow \infty$ L'ESPRESSIONE DI P_{eq} E' SOLO FORMALE, PERCHE' Z E' INFINITA'.

AD ESEMPIO, IN UNA SIMULAZIONE LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE NON DIVERGE: NON PUO' SUPERARE LA DIMENSIONE DEL SISTEMA.

POSSONO INVECE NASCERE SINGOLARITA' NEL LIMITE DI VOLUME INFINITO.

NOTA: P_{eq} E' PARI MENTRE m E' DISPARI ...
 $\int P_{eq} m d\Omega = 0$

SE $h=0$ E $V \rightarrow \infty$, ALLORA TROVO SEMPRE $m=0$.

SE PRENDO h PICCOLO MA FINITO, STUDIO $f(h)$ NEL LIMITE $V \rightarrow \infty$ E POI MANDO $h \rightarrow 0$: OVVERO, CALCOLO

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} m_h$$

* NOTA: NON DELL' HAMILTONIANA, MA DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE:

$$Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{-\beta [(\dots) + h \sum_i \sigma_i]}$$

SOMMO SU CONFIGURAZIONI CON $\sigma_i = \pm 1$ CHE HANNO LO STESSO PESO.

L'ORDINE E' IMPORTANTE!

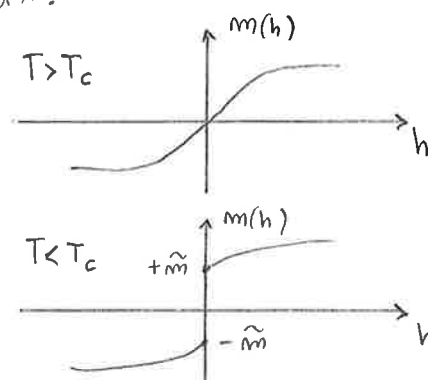
PER SIMMETRIA DELL' HAMILTONIANA*, DOVRA' ESSERE SEMPRE

$$f(h) = f(-h)$$

OSSIA L'ENERGIA LIBERA E' UNA FUNZIONE PARI DI h . SEGUE CHE LA MAGNETIZZAZIONE E' UNA FUNZIONE DISPARI:

$$m(h) = - \frac{\partial f(h)}{\partial h} = -m(-h)$$

CIO' E' VERIFICATO IN ENTRAMBI I CASI RAPPRESANTATI A FIANCO.



SI NOTI CHE LA MAGNETIZZAZIONE MEDIA

E' NULLA IN AMBEDUE I CASI; MA NEL PRIMO CASO CIO' SIGNIFICA CHE GLI SPIN SONO DISALLINEATI (T ALTA), MENTRE NEL SECONDO E' NULLA SOLO LA MEDIA SU UN ENSEMBLE DI SISTEMI.

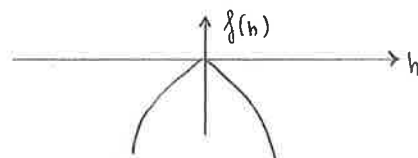
PER $T > T_c$, f E' DIFFERENZIABILE IN $h=0$ E m E' CONTINUA:

$$f(h) = f(0) + O(h^\alpha)$$

$$\alpha > 1$$

PER $T < T_c$, f NON E' DIFFERENZIABILE IN $h=0$ E m E' DISCONTINUA:

$$f(h) = f(0) - \tilde{m} |h| + O(h^\alpha)$$



AVREMO

$$m^+ \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = \tilde{m}$$

$$m^- \equiv \lim_{h \rightarrow 0^-} m(h) = -\tilde{m}$$

SE $T > T_c$,

$$h = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$h = \varepsilon \Rightarrow m = \varepsilon$$

SE $T < T_c$, INVECE,

$$h = \varepsilon \Rightarrow m = O(1)$$

*NOTA: IL PARAMETRO D'ORDINE E':

- LA QUANTITA' TERMODINAMICA CHE SUBISCE UNA DISCONTINUITA' ATTRAVERSO UNA TRANSIZIONE DEL PRIMO ORDINE (PESKIN).
- LA QUANTITA' CHE IN MEDIA SVANISCE DA UN LATO DELLA TRANSIZIONE (DEL II° ORDINE), MENTRE SI ALLONTANA DA ZERO DALL' ALTRO LATO (BINNEY).

ESEMPI SONO M PER I FERROMAGNETI

$$\phi(x) = \rho(x) - \rho_{\text{gas}}(x)$$

PER UN SISTEMA ACQUA/VAPORE.

**NOTA: LA LORO PARTICOLARITA' E' CHE HANNO UN "PNEUMOSCH". AD ESEMPIO, χ DIVERGE SE MI AVVICINO AL PUNTO CRITICO, SEGNALANDOLO.

CLASSIFICAZIONE DI EHRENFEST

SE L'ENERGIA LIBERA F E' DIFFERENZIABILE $(k-1)$ VOLTE MA NON k VOLTE, SI PARLA DI TRANSIZIONE DI FASE DI ORDINE k .

SE $k=1$, IL PARAMETRO D'ORDINE* FA UN SALTO E HO UNA TRANSIZIONE DI FASE DEL I° ORDINE.

SE $k=2$, IL PARAMETRO D'ORDINE NON FA SALT E HO UNA TRANSIZIONE DI FASE DEL II° ORDINE**.

NEL GRAFICO, IN 'A' SI HA UNA TRANSIZIONE DEL II° ORDINE IN T .

NEI PUNTI 'B' SI HANNO TRANSIZIONI DEL I° ORDINE IN h .

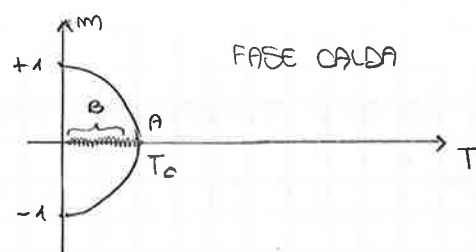
VEDREMO CHE PER $T=T_c$ LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE $\xi = \infty$.

IN CASO SI ABBAIA UNA TRANSIZIONE DEL I° ORDINE IN T (e.g. ACQUA-GHIACCIO)

$$u^+ = \lim_{T \rightarrow T_c^+} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta f) \neq u^- = \lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta f)$$

E SI PARLA DI CALORE LATENTE.

NOTA: SE $k > 2$ SI DICONO DEL II° ORDINE COMUNQUE



$$\text{NOTA: } u = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z, \quad Z = e^{-\beta F}$$

NOTA: $f(\beta)$ E' SEMPRE CONTINUA PERCHÉ E' CONVESSA (VEDI P.20 PARISI).

SINGOLARITA' DELL' ENERGIA LIBERA

PER DISCUTERE DI SINGOLARITA', DOBBIAMO ESTENDERE AL PIANO COMPLESSO I VALORI CHE β PUO' ASSUMERE.

PRENDIAMO UNO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI COMPATTO. CHIAMIAMO

$$V_c = \int d[c]$$

(VOLUME DELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI)

$$|H|_{\max} = \max_{\{c\}} |H[c]|$$

ALLORA Z E' UNA FUNZIONE INTERA SE V E' FINITO. INFATTI

$$|Z(\beta)| = \left| \int d[c] e^{-\beta H[c]} \right| \leq V_c e^{|\beta| \cdot |H|_{\max}}$$

UNA FUNZIONE DI PARTIZIONE Z RAGIONEVOLMENTE E' ANALITICA (ANCHE SE LO SPAZIO NON FOSSE COMPATTO), ALMENO NEL SEMIPIANO $\text{Re}(\beta) > 0$,

ANCHE PER $V \rightarrow \infty$. ALLORA

NOTA: SE $\text{Re}(\beta) \leq 0$, E' CHIAMA CHE L'INTEGRALE CHE DEFINISCE Z DIVERGE PER $V \rightarrow \infty$.

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta V} \ln Z(\beta)$$

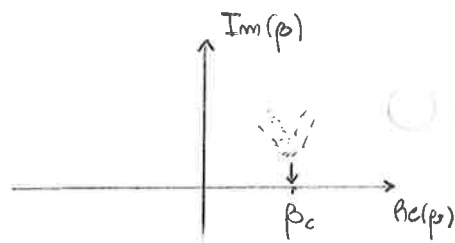
PUO' PRESENTARE SINGOLARITA' SOLO IN CORRISPONDENZA DEGLI ZERI DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE.

SIANO $T, h \in \mathbb{R}^+$.

Z E' UNA SOMMA DI TERMINI POSITIVI, QUINDI

NON PUO' AVERE ZERI SULL'ASSE REALE. PUO'

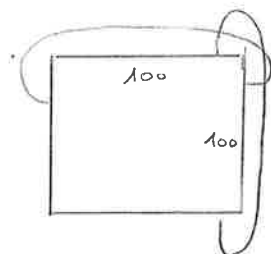
PERO' SUCCEDERE CHE GLI ZERI DI Z RAGGIUNGANO L'ASSE $\text{Re}(\beta)$ SE $V \rightarrow \infty$.



CONDIZIONI AL BORDO

UN SISTEMA A VOLUME FINITO $V < \infty$ E' SPECIFICATO DANDO L'HAMILTONIANA H E LE CONDIZIONI AL BORDO* (BC).

IN GENERALE SI SCELGONO CONDIZIONI PERIODICHE (PBC); IN ALTERNATIVA POSSO INSERIRE UN BORDO FATTO DI SPIN $+1$ ($0 - 1$) FISSI.



*NOTA: CIOE' IL VALORE DI $H[c]$ SULLA SUPERFICIE.

SE NON SONO SU UNA TRANSIZIONE DI FASE AL PRIMO ORDINE, ALLORA $\rho_{eq}^{V=\infty}$ NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE CONDIZIONI AL BORDO.

IN EFFETTI GLI SPIN SUL BORDO SONO UNA FRAZIONE $\frac{1}{L}$ DEL TOTALE. SE SONO PERO' SU UNA TRANSIZIONE DEL I° ORDINE*, BASTA UNA PICCOLA VARIAZIONE PER FAVORIRE L'UNA O L'ALTRA CONFIGURAZIONE.

LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE ξ MISURA QUANTO DISTANTE PUO' ARRIVARE L'INFLUENZA DI UNA VARIAZIONE IN UN PUNTO. IN GENERALE

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}$$

*NOTA: INFATTI L'1 ($T < T_c$) HA PIU' DI UNA CONFIGURAZIONE STABILE.

MA SU UNA TRANSIZIONE AL II° ORDINE ξ DIVERGE**.

NORMALMENTE, DATA UNA SCATOLA DI LATO L, GLI EFFETTI DELLE CONDIZIONI AL BORDO DECEDONO COME

$$e^{-L/\xi}$$

SU UNA TRANSIZIONE DEL II° ORDINE, SI HA INVECE UN DECADIMENTO A POTENZA,

$$L^{-\alpha}$$

**NOTA: E SOTTO T_c ? VERREBBE DA DIRE CHE LA CORRELAZIONE RESTA GROSSA. IN REALTA' VEDREMO CHE SI USA PER QUESTO $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c$ (CONNESSA)

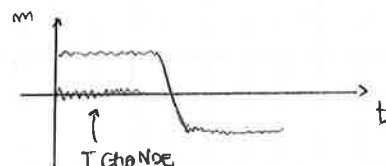
* PRESO UN SISTEMA MAGNETICO A $T < T_c$ CON CONDIZIONI (+BC), DI FATTO HO IMPOSTO UN GRANDE CAMPO MAGNETICO SU POCHI SPIN IN UN VOLUME GRANDE MA FINITO; L'EFFETTO E' ANALOGO ALL' AVER APPLICATO UN PICCOLO CAMPO MAGNETICO QUANDO $V = \infty$. AVREMO

$$m = +\tilde{m}$$

SCELTE INVECE (-BC), ANALOGAMENTE

$$m = -\tilde{m}$$

SE AL CONTRARIO SCELGO (PBC), ESISTERA' (SE $V < +\infty$) UN TEMPO AL QUALE IL SISTEMA TRANSISCE:



QUESTO TEMPO CRESCE PERO' AL CRESCERE DELLA TAGLIA DEL SISTEMA. COMUNQUE

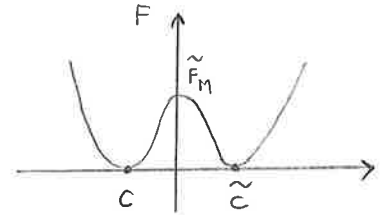
$$\overline{m}(t) |_{p_{bc}} = 0$$

MA E' UNO ZERO MOLTO DIVERSO DA QUELLO CHE TROVO A ALTE T.

IN UN SISTEMA CON TRANSIZIONE AL I° ORDINE (ISING, ACQUA E GHIACCIO) SI AVRANNO TRANSIZIONI SPONTANEE OGNI

$$t_w \propto e^{L^{D-1}}$$

$$\tau \propto e^{\beta(\tilde{F}_M - F_c)}$$



(SONO DUE STIME EQUIVALENTI DELLO STESSO

ORDINE DI GRANDEZZA). LO INTERPRETIAMO QUINDI COME IL TEMPO NECESSARIO A SUPERARE LA BARRIERA DI ENERGIA LIBERA (CHE CRESCE COME L^{D-1}).

NOTA: VEDREMO PIU' IN LA' PERCHE' E' ZERO (HA A CHE FARE CON L'ENERGIA DELLA SUPERFICIE DI UN DOMINIO). PER τ SI E' USATA LA LEGGE DI ARRHENIUS.

• STATI PURI E MISCELE STATISTICHE

PARTENDO DA UNO STATO INIZIALE OMOGENEO*, $T < T_c$, DEFINISCO

$$\langle \cdot \rangle_{\pm} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \langle \cdot \rangle_h$$

*NOTA: VOGLIAMO CIOE' EVITARE IL CASO IN CUI PARTO CON CONDIZIONI INIZIALI MISTE.

$$\langle \cdot \rangle_0 = \frac{1}{2} (\langle \cdot \rangle_+ + \langle \cdot \rangle_-)$$

NOTA: QUESTA E' LA MEDIA SULLE POSSIBILI CONDIZIONI INIZIALI. DEVO USARE $\langle \cdot \rangle_+$ O $\langle \cdot \rangle_-$ SE VOGLIO DESCRIVERE UN SINGOLO SISTEMA.

CON $\langle \cdot \rangle_0$ DESCRIVO UNA MISCELA STATISTICA, NON UNO STATO PURO.

LA MEDIA CONVESSA SU DUE STATI PURI SI SCRIVE

$$\langle \cdot \rangle_p = p \langle \cdot \rangle_+ + (1-p) \langle \cdot \rangle_-$$

E' INVECE UNO STATO PURO UNO CHE NON PUO' ESSERE DECOMPOSTO:

$$\langle \cdot \rangle_a = \alpha \langle \cdot \rangle_b + (1-\alpha) \langle \cdot \rangle_c \Rightarrow \langle \cdot \rangle_a = \langle \cdot \rangle_b = \langle \cdot \rangle_c$$

OGNI STATO PUO' ESSERE DECOMPOSTO IN MODO UNICO COME LA COMBINAZIONE CONVESSA DI STATI PURI.

SI DICE CHE UN GRUPPO DI SIMMETRIA G E' ROTTO SPONTANEAMENTE SE LO STATO SIMMETRICO NON E' PURO E PUO' ESSERE DECOMPOSTO COME COMBINAZIONE LINEARE CONVESSA DI STATI PURI CHE SI TRASFORMANO COME UNA RAPPRESENTAZIONE NON BANALE DI G .

RIAPPITOLANDO

CONSIDERIAMO L'INSIEME DI TUTTI GLI STATI INVARIANTI PER TRASLAZIONE, E' UN INSIEME CONVESSO, CIOE'

$$\langle \cdot \rangle_p = p \langle \cdot \rangle_+ + (1-p) \langle \cdot \rangle_-$$

$$0 < p < 1$$

UNO STATO E' PURO SE NON PUO' ESSERE DECOMPOSTO COME SOMMA DI ALTRI STATI (E', COME SI DICE, UNO STATO SUL BORDO). QUINDI

$$\langle \cdot \rangle_a = \alpha \langle \cdot \rangle_b + (1-\alpha) \langle \cdot \rangle_c$$

$$\Rightarrow \langle \cdot \rangle_a = \langle \cdot \rangle_b = \langle \cdot \rangle_c$$



OGNI STATO PUO' ESSERE DECOMPOSTO IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE CONVESSA DI STATI PURI.

(DEFINIZIONE DI ROTTURA SPONTANEA, COME SOPRA).

NON BANALE $\rightarrow$ SULLA QUALE L'AZIONE DI G HA UN RUOLO.

STATO DEL SISTEMA $\rightarrow$ PROBABILITA' DELLE CONFIGURAZIONI.

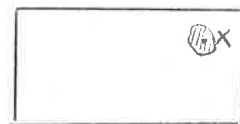
*NOTA: SE $H_0 \rightarrow H_0 + \lambda H_1$,
 $-\frac{1}{p} \frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = \langle H_1 A \rangle_c$

PROPRIETA' DI CLUSTERING

MODIFICO L'HAMILTONIANA VICINO AL PUNTO x ,

$$H \rightarrow H' = H + \delta H$$

$$\delta H = B(x)$$



MI ASPETTO ALLORA CHE $\langle A(y) \rangle$ NON CAMBI PER $|x-y| \rightarrow \infty$.

DAL TH. DELLA RISPOSTA LINEARE*, DEDUCO CHE CIO' E' VERO SE

$$\langle B(x) A(y) \rangle_c \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 0$$

(PROPRIETA' DI CLUSTERING)

SI DICE "STATO CLUSTERING" UNO CHE GODE DI QUESTA PROPRIETA'.

PER ESEMPIO PER NOI, A $T < T_c$ (FASE FREDDA),

$$\oplus \rightarrow \oplus \rightarrow \oplus \quad \langle \cdot \rangle_+$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \xrightarrow{|i-j| \rightarrow \infty} 0$$

E LO STESSO VALE PER LO STATO PURO $|- \rangle$,

$$\ominus \rightarrow \ominus \rightarrow \ominus \quad \langle \cdot \rangle_-$$

INVECE PER $\langle \cdot \rangle_0^{T < T_c}$ (STATO NON PURO),

$$\oplus \rightarrow \ominus \rightarrow \oplus$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \sim \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \neq 0$$

$\sim +1$
 $\begin{matrix} (-1)(-1) = 1 \\ (+1)(+1) = 1 \end{matrix}$
 ~ 0

DOE', E' PARI PER SCAMBIO $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$.

PER $T > T_c$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \underset{|i-j| \rightarrow \infty}{=} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = 0$$

NOTA: SE SOLO $\langle \cdot \rangle_+$ INTENDO LA DINAMICA DI UN SISTEMA CON $n \rightarrow 0^+$, CHE QUINDI RIMARRA' SEMPRE $|+\rangle$. PERCIO' $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{|i-j| \gg 1} \sim \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$

SEGUE DA $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \rightarrow 0$. SE PRENDO UN SISTEMA MISTO DI TAGLIA FINITA, QUESTO FLUTTERA' E PERCIO' $\langle \sigma_i \rangle \sim 0$.

NOTA: QUESTA SECONDO ME L'HA BUTTATA UN PO' LI'. SO GIA' CHE $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \rightarrow 0$ E COMUNQUE NON MI INTERESSA IL CASO $T > T_c$ AI FINI DELLA ROTTURA DI SIMMETRIA.

LA ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA PUO' QUINDI ESSERE PENSATA COME IL FALLIMENTO DELLA PROPRIETA' DI CLUSTERING, QUANDO $T < T_c$, PER LO STATO $\langle \cdot \rangle_0$.

MODELLO DI ISING

MODELLO $\rightarrow$ SEMPLIFICA LA SITUAZIONE REALE

PONENDO $\sigma_i = \pm 1$ STO FACENDO UN COARSE GRAINING DELLA HAMILTONIANA REALE,

$$H \rightarrow H_{\text{eff}}$$

$$\{c\}, \{s(x)\}$$

DEFINISCO H_{eff} TRAMITE

$$e^{-\beta H_{\text{eff}}[s(x)]} \equiv \int d[c] e^{-\beta H[c]} \delta[s(x) - \tilde{S}[c]]$$

RACCHIUDO ODE' IN $S(x)$ TUTTI QUEI GRADI DI LIBERTA' ELEMENTARI (GLUONI, QUARK...) CHE Danno LUOGO A CONFIGURAZIONI $\tilde{S}[c]$ CHE HANNO LO STESSO VALORE DI $S(x)$. UN MAGNETINO $S(x)$ SOSTITUISCE MIGLIAIA DI GRADI DI LIBERTA' "REALI".

SUPPONENDO NOTA L'HAMILTONIANA ESATTA,

$$\int d[c] e^{-\beta H[c]} g[\tilde{S}[c]] = \int d[s] e^{-\beta H_{\text{eff}}[s]} g[s]$$

E QUESTO E' VERO PER QUALSIASI OSSERVABILE g .

NEL MODELLO DI ISING, PONIAMO

$$H_{\text{ISING}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

APPROSSIMAZIONE DI CAMPO MEDIO

IL MODELLO DI ISING SI SA RISOLVERE IN $D=1, 2$ (SOLUZIONE DI ONSAGER) MA NON $D=3$: ABBIAMO BISOGNO DI UNA APPROSSIMAZIONE

RICORDIAMO CHE SI ERA RICAVATA, DA UN PRINCIPIO DI MINIMO, P_q :

$$F[P] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P]$$

$$S[P] = - \int d[\sigma] P[\sigma] \log P[\sigma] = \langle -\log P \rangle$$

LA CONFIGURAZIONE ALL'EQUILIBRIO È QUELLA CHE MINIMIZZA $F[P]$ E

$$E[P] = \langle H[\sigma] \rangle$$

SO CHE

$$P_{eq} \sim e^{-\beta H}$$

MA NOI IPOTIZZIAMO CHE LA P_{eq} SIA FATTORIZZATA SUI SITI, OSSIA

$$P[\sigma] = \prod_i P_i(\sigma_i)$$

$$P_i(\sigma_i) = \delta_{\sigma_i, +1} \frac{1+m_i}{2} + \delta_{\sigma_i, -1} \frac{1-m_i}{2}$$

È NORMALIZZATA?

$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) = \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} = 1$$

QUINDI, SOMMANDO SU TUTTE LE CONFIGURAZIONI $\{\sigma\}$ (SONO 2^N CON N SITI),

$$\sum_{\{\sigma = \pm 1\}} P_{\text{fitt}}[\sigma] = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \prod_i P_i(\sigma_i) = \prod_i \left(\sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) \right) = 1$$

CALCOLIAMO

$$\langle \sigma_i \rangle = \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{k \neq i} P_k(\sigma_k) \right) \left(\sigma_i P_i(\sigma_i) \right)$$

$$= \sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i P(\sigma_i) = (+1) \frac{1+m_i}{2} + (-1) \frac{1-m_i}{2} = m_i$$

IN GENERALE, PER UNA FUNZIONE $g(\sigma_i)$ DELLO SPIN σ_i ,

$$\langle g(\sigma_i) \rangle_{P_{\text{fitt}}} = g(+1) \left(\frac{1+m_i}{2} \right) + g(-1) \left(\frac{1-m_i}{2} \right) = \sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) g(\sigma_i)$$

* VOGLIAMO ORA MINIMIZZARE

$$F = U - \frac{1}{\beta} S$$

SI NOTI CHE, INVECE DI MINIMIZZARE FUNZIONI, MI SONO RIDOTTO A MINIMIZZARE RISPETTO AL PARAMETRO m_i . ABBIAMO

$$U = \langle H \rangle = -J \langle \sum_{\langle i, k \rangle} \sigma_i \sigma_k \rangle - \langle \sum_i h_i \sigma_i \rangle$$

NOTA: L'IDEA È CONSIDERARE $\beta J \sum_i \sigma_i \equiv H_i$ COME UN CAMPO CHE AGISCE SU σ_i . AL CRESCERE DI D , CRESCE IL NUMERO DI VINCHI CHE CONTRIBUISCONO AL CAMPO SU σ_i : SI PUÒ PENSARE DI IGNORARE LE FLUTTUAZIONI (AL VARIARE DI i) E DI SOSTITUIRLO CON IL SUO VALORE MEDIO.

TRUOVI PIÙ PULITO POSTULARE

$$P_i(\sigma_i) = a_i \delta_{\sigma_i, +1} + b_i \delta_{\sigma_i, -1}$$

ED IMporre LA (I) E LA (II) PER ASSARE a_i, b_i .

(I)

NOTA: PUÒ ANDARE SCHIERE $\prod_i \left(\sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) \right)$. COME SEMPRE, HO UN PRODOTTO SU UN VINCOLO E POI SOMMO SU TUTTI I VINCOLI, PERCIÒ ESPLORO TUTTO LO SPAZIO, VALE LO STESSO QUI (INVERTI PRIMA DI SPEZZARE).

(II)

(III)

POICHÉ LA DISTRIBUZIONE È FATTOZZATA, $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle$ E

$$U = -J \sum_{(i,k)} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle - \sum_i h_i \langle \sigma_i \rangle$$

$$= -J \sum_{(i,k)} m_i m_k - \sum_i h_i m_i$$

NOTA: $J \sum_{(i,k)} m_i m_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} m_i m_k$

CON J_{ik} DEFINITO COME SOTTO. DERIVATA IN ∂m_i .

INVECE L'ENTROPIA VALE

$$S = -\langle \log p_{\text{att}} \rangle = -\sum_i \langle \log p_i(\sigma_i) \rangle \stackrel{(III)}{=} -\sum_i \sum_{\sigma_i=\pm 1} p_i(\sigma_i) \log p_i(\sigma_i)$$

$$= -\sum_i \left[\frac{1+m_i}{2} \log \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} \log \frac{1-m_i}{2} \right]$$

E CERCHIAMO IL MINIMO DI F CALCOLANDO

$$\frac{\partial F}{\partial m_i} = 0$$

$$F = U - \frac{S}{\beta}$$

$$-\sum_k J_{ik} m_k - h_i - \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial m_i} = 0$$

$$J_{ik} = \begin{cases} J & \text{SE } |i-k|=1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI HA

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial m_i} &= \frac{1}{2} \log \frac{1+m_i}{2} + \frac{1+m_i}{2} \frac{2}{1+m_i} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1-m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} \frac{2}{1-m_i} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+m_i}{1-m_i} = \text{ATANH}(m_i) \end{aligned}$$

INFATTI

$$Y = \text{TANH}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$Z = e^x$$

$$\left(Z + \frac{1}{Z} \right) Y = Z - \frac{1}{Z}$$

$$(Z^2 + 1) Y = Z^2 - 1$$

$$Z^2 = \frac{1+Y}{1-Y} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \log \frac{1+Y}{1-Y}$$

PERCIO'

$$-\sum_k J_{ik} m_k - h_i + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m_i) = 0$$

OSSIA

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right]$$

DETTE EQUAZIONI DI CAMPO MEDIO.

LA MAGNETIZZAZIONE DIPENDE, CIOE', SIA DA h CHE DAI SITI VICINI.

SE $h=0$, TROVO

$$m_i = \tanh \left(\beta \sum_k J_{ik} m_k \right)$$

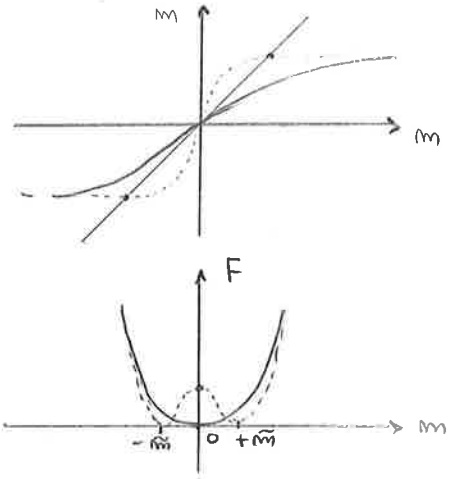
AL VARIARE DI β PUO' CAMBIARE IL

NUMERO DI INTERSEZIONI CON LA

BISSETTRICE: CAMBIA QUINDI IL

RUOLO DELL' ORIGINE PER L'ENERGIA

LIBERA: AD ALTA T E' UN MINIMO, MA NON A BASSE T .



NOTA: SI PUO' PENSARE $h_i + \sum_k J_{ik} S^k$ COME IL CAMPO MAGNETICO EFFETTIVO SENTITO DA CIASCUNO SPIN S_i . QUELLA MOSTRATA E' UNA SOLUZIONE GRAFICA NEL CASO IN CUI $m_i = m \forall i$, RAGIONEVOL E SE $h_i = h \forall i$.

• DERIVAZIONE ALTERNATIVA

NEL MODELLO NON APPROSSIMATO, CALCOLO

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i e^{-\beta H[\sigma]}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}}$$

NOTA: E' MEGLIO SE TI CONVINCI IL PRIMA POSSIBILE CHE

$$\sum_{\{\sigma_1 = \pm 1, \sigma_2 = \pm 1\}} f(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} f(\sigma_1, \sigma_2)$$

CON IL SEGNO '-' E NON '+' (SE LA f IN QUESTIONE FATTORIZZA, CIO' DIVENTA IMPORTANTE).

CHIAMIAMO

$H[\sigma^-] \rightarrow$ PARTE DI H CHE NON CONTIENE σ_i

$H[\sigma_i] \rightarrow$ PARTE DI H CHE CONTIENE σ_i : $H[\sigma_i] = - \sum_k J_{ik} \sigma_i \sigma_k - h_i \sigma_i$

ALLORA

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{\sum_{\{\sigma^-\}} e^{-\beta H[\sigma^-]}} \left(\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i e^{-\beta H[\sigma_i]} \right) \cdot \frac{\sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{-\beta H[\sigma_i]}}{\sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{-\beta H[\sigma_i]}} \quad (*)$$

$$(*) = \frac{2 \sinh \left(\beta \left(\sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \right)}{2 \cosh \left(\beta \left(\sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \right)} = \tanh \left(\beta \left(\sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \right)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}} \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} \sigma_k + h_i \right) \right] \quad (\text{UGUAGLIANZE DLR})$$

EFFECTIVE FIELD ACTING ON σ_i

SE ALLO SPIN σ_i SOSTITUISCO* IL SUO VALORE MEDIO m_i , RITROVO LE EQUAZIONI DI CAMPO MEDIO; MA LE UGUAGLIANZE DLR SONO EDATE E LA LORO VALIDITA' E' PIU' GENERALE.

*NOTA: VUOL DIRE $\langle \tanh(h_i + J_{ik}\sigma^k) \rangle \rightarrow \tanh(h_i + J_{ik}m^k)$.

• ESEMPIO: ISING IN $D=2$

$$h_i = 0 \quad \forall i$$

$$\sigma_0 = \sigma_i$$

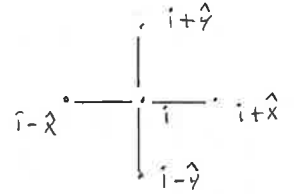
$$\sigma_1 = \sigma_{i+\hat{x}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{i-\hat{x}}$$

$$J = 1$$

$$\sigma_3 = \sigma_{i+\hat{y}}$$

$$\sigma_4 = \sigma_{i-\hat{y}}$$



LE UGUAGLIANZE DLR Danno

$$\langle \sigma_0 \rangle = \langle \tanh[\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)] \rangle$$

NOTIAMO CHE TUTTI I POLINOMI DI VARIABILE BOOLEANA SONO LINEARI DI GRADO I,

$$P(\sigma) = A + B\sigma$$

CHIAMANDO

$$C = \cosh \beta$$

$$S = \sinh \beta$$

$$t = \tanh \beta$$

AVRO' AD ESEMPIO

$$e^{\beta\sigma} = C(1 + \sigma t)$$

$$\frac{1}{1 + A\sigma} = \frac{1 - A\sigma}{1 - A^2}$$

NOTA: IL PUNTO E' CHE $\sigma^m = \begin{cases} \sigma & m \text{ dispari} \\ 1 & m \text{ pari} \end{cases}$, QUINDI

$$= 1 + \beta\sigma + \frac{(\beta\sigma)^2}{2} + \frac{(\beta\sigma)^3}{3!} \dots = \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} \dots\right) + \sigma\left(\beta + \frac{\beta^3}{3!} \dots\right) = C + \sigma S$$

$$= 1 - A\sigma + (A\sigma)^2 \dots = (1 + A^2 + A^4 \dots) - A\sigma(1 + A^2 + A^4 \dots) = \frac{1 - A\sigma}{1 - A^2}$$

SIAMO INTERESSATI A CALCOLARE

$$\langle f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \rangle$$

$$\{\sigma_i = \pm 1\}_{i=1,2,3,4}$$

$\rightarrow$

1 cost.

4 σ_i

6 $\sigma_i \sigma_j, i \neq j$

4 $\sigma_i \sigma_j \sigma_m, i \neq j \neq m$

1 $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$

DOVE SI SONO SCRITTI TUTTI I TERMINI POSSIBILI PER UN POLINOMIO DI GRADO I IN CIASCUNA DELLE SUE VARIABILI.

RICORDANDO CHE $\tanh$ È DISPARI (SOTTO $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i \quad \forall i$),

$$\tanh(\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)) = A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) + B(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4)$$

I COEFFICIENTI A, B SI POSSONO FISSARE SCEGUENDO, AD ESEMPIO,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$$

$$4A + 4B = \tanh(4\beta) \equiv t_4$$

$$\sigma_1 = -1, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = +1$$

$$2A - 2B = \tanh(2\beta) \equiv t_2$$

QUINDI

$$\begin{cases} A+B = \frac{t_4}{4} \\ A-B = \frac{t_2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{1}{8} (t_4 + 2t_2)$$

$$B = \frac{1}{8} (t_4 - 2t_2)$$

PERCIO', SU UN RETICOLO 2×2 ,

*NOTA: DI PER SÉ $\sigma_i \rightarrow m_i$ È IL CAMPO MEDIO,
MA SE $h_i = h \quad \forall i$ SI AVrà $m_i = m \quad \forall i$.

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \tanh(\beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)) \rangle = A \langle \sigma_1 + \sigma_2 + \dots \rangle + B \langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \dots \rangle$$

DA CUI, SOSTITUENDO $m = \langle \sigma_i \rangle$ (CAMPO MEDIO) A σ_i ,

$$m = 4A \cdot m + 4B \langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle$$

ANCHE QUESTA È UNA RELAZIONE ESATTA, CHE METTE IN CONTATTO m CON $\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle$,

IN APPROSSIMAZIONE DI CAMPO MEDIO, PERCIO',

$$\sigma_i \rightarrow m \quad \Rightarrow \quad m = 4Am + 4Bm^3$$

CHE HA SOLUZIONI $m=0$ E

$$1 = 4A + 4Bm^2 \quad \Rightarrow \quad m = \pm \left(\frac{1-4A}{4B} \right)^{1/2}$$

COE' HO UNA SOLUZIONE $m \neq 0$ PER

$$A \leq A_c = \frac{1}{4}$$

PER CUI SI TROVA $\beta_c \sim 0.32$ (TEMPERATURA CRITICA).

FOCUS: DALLA DEFINIZIONE $\chi = \frac{\partial m}{\partial h} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial h}{\partial m} \frac{\partial}{\partial h} = \chi^{-1} \frac{\partial}{\partial h}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} = (\chi^{-1})^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \left(\frac{\partial}{\partial m} \chi^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial h} = \chi^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \chi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial h} \chi^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial h}$$

$$= \chi^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \chi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial m} 1 \right) \frac{\partial}{\partial h} = \chi^{-2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} = \chi^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} = \chi^{-2} \cdot \chi = \chi^{-1}$$

MODELLO DI ISING: SOLUZIONE DI CAMPO MEDIO

IN UN SISTEMA OMOGENEO CON h COSTANTE, SARIAMO LE E.C.M, COME

$$m = \tanh(\beta(2Dm + h))$$

NOTA: "OMOGENEO" NEL SENSO CHE HO POSTO $J=1$. OGNI SITO HA 2D PRIMI VICINI.

VOLGO MINIMIZZARE L'ENERGIA LIBERA φ PER UNITA' DI VOLUME, CIOE'

$$\frac{d\varphi}{dm} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dm^2} > 0.$$

NOTA: SI ERA CALCOLATA

$$\frac{d\varphi}{dm_i} = - \sum_k J_{ik} m_k - h_i + \frac{1}{\beta} \operatorname{ATANH}(m_i)$$

POSTO $h=0$,

$$m = \tanh(\beta 2Dm)$$

$m=0$ E' SEMPRE SOLUZIONE DI $\frac{d\varphi}{dm} = 0$. CALCOLIAMO INVECE

$$\varphi' = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+m}{1-m}$$

NOTA: NEL FOCUS UNA PAGINA INDIETRO MOSTRO CHE $\frac{d^2\varphi}{dm^2} = \chi^{-1}$.

$$\varphi'' = -2D + \frac{1}{\beta(1-m^2)} = \chi^{-1}$$

(SUSCETTIVITA' INVERSA)

QUESTO CI DICE ANCHE CHE, PER $T < T_c$, QUANDO m CRESCE DECRESCHE LA SUSCETTIVITA'.

NOTA: OVVIAMENTE $m^2 \in [0,1]$.

* STUDIO LA SOLUZIONE $m=0$:

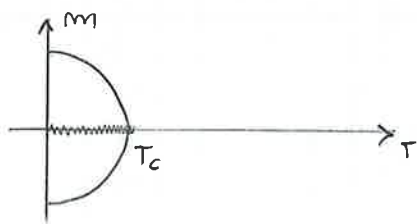
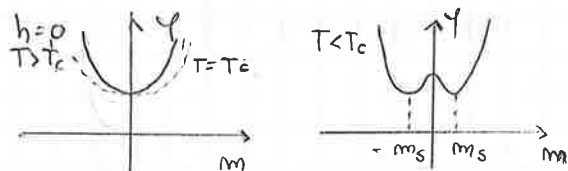
$$\varphi''(m=0) = -2D + \frac{1}{\beta} > 0 \Rightarrow$$

NOTA: $T > T_c = 2D$.

$$\beta < \frac{1}{2D} = \beta_c$$

PER $\beta = \beta_c$ IL PUNTO $m=0$ PERDE LA SUA STABILITA' E NASCONO DUE NUOVI MINIMI $m = \pm m_s$.

A DESTRA E' MOSTRATO IL MECCANISMO DI TRANSIZIONE.



• LIMITE $T \rightarrow T_c$

COME NASCE LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA?

SIANO $2D\beta \sim 1 \rightarrow m \sim 0$. ESPANDENDO SUBITO SOTTO IL PUNTO CRITICO,

$$(1-m)^{-1} \approx 1 + m + m^2 + m^3 + O(m^4)$$

NOTA: ESPANDI FINO ALL'ORDINE m^3 I TERMINI CHE COMPaiono IN φ' .

$$\frac{1+m}{1-m} \approx (1+m)(1+m+m^2+m^3) + O(m^4) = 1 + 2m + 2m^2 + 2m^3 + O(m^4)$$

USANDO $\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, TROVO

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right) &\simeq \ln(m+m^2+m^3) - \frac{1}{2}(2m+2m^2)^2 + \frac{1}{3}(2m)^3 + O(m^4) \\ &\simeq 2m + \left(2m^2 - \frac{1}{2}4m^2\right) + \left(2m^3 - \frac{1}{2}8m^3 + \frac{8}{3}m^3\right) + O(m^4) \\ &\simeq 2m + \frac{1}{6}(12-4+16)m^3 + O(m^4) = 2m + \frac{8}{3}m^3 + O(m^4)\end{aligned}$$

PERHO' RICHIEDO

$$\psi' \simeq -2Dm + \frac{1}{\beta}m + \frac{1}{3\beta}m^3 \equiv 0$$

ESCAUDENDO $m=0$, DIVIDO PER m ED HO

$$-2D + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{3\beta}m^2 = 0$$

$$m^2 \simeq 3(2D\beta - 1) \quad \Rightarrow \quad m \simeq \pm \sqrt{3}(2D\beta - 1)^{1/2}$$

RICONOSCO

$$m \simeq \pm \sqrt{3} \left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1 \right)^{1/2} \sim C \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right)^{1/2} \sim C \left(\frac{T_c - T}{T} \right)^{1/2} \sim \tilde{C} (T_c - T)^{1/2}$$

SI NOTI CHE IL PUNTO DELICATO E' IL NUMERATORE: INFATTI, $\sqrt{x}$ E' SINGOLARE PER $x=0$. SI E' TROVATO

$$\underline{m \sim \tilde{C} (T_c - T)^{1/2}}$$

$$T \rightarrow T_c$$

• LIMITE $T \rightarrow 0$

$$2D\beta \rightarrow \infty, \quad \frac{\beta}{\beta_c} \rightarrow \infty.$$

$$m \sim \pm 1 \quad \text{E PRENDO } m \sim +1.$$

RISCRIVO LA CONDIZIONE $\frac{d\psi}{dm} = 0$ COME

$$-4D\beta m + \ln \frac{1+m}{1-m} = 0$$

$$-4D\beta m + \ln(1+m) - \ln(1-m) = 0$$

POSTO $m \simeq +1$,

$$-4D\beta + \ln 2 - \ln(1-m) = 0$$

NOTA: QUI LO SI E' VISTO APPROVANDO A T_c DA SOTTO, MA MI DICONO CHE SIA SIMMETRICO.

$$-4D\beta - \ln(1-m) = -\ln 2$$

ESPOENZIANDO LA SI TROVA INFINE

$$\frac{e^{-4D\beta}}{1-m} \sim \frac{1}{2}; \quad 1-m \sim 2e^{-4D\beta} \Rightarrow \underline{m \sim 1 - 2e^{-4D\beta}} \quad T \rightarrow 0$$

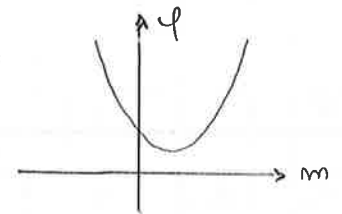
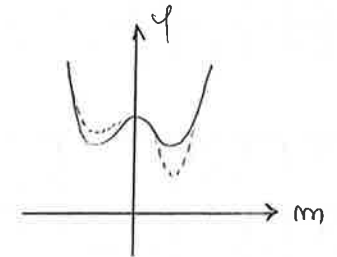
COME SI È DETTO, IL PRIMO PASSO È QUELLO IN CUI CAMBIANO 2D LEGAMI QUANDO SI GIRA UN SOLO SPIN.

CASO $h \neq 0$

SEA $|h|$ PICCOLO, $T < T_c^{(h=0)}$,

SE ACCENDO h MI ASPETTO CHE y CAMBI COME IN FIGURA: APPA' UN SOLO STATO STABILE E L'ALTRO METASTABILE.

AL CRESCERE DI h (O QUANDO $T > T_c$) SCOMPARE LO STATO METASTABILE.



IN CAMPO MEDIO SI È TROVATO, SE $h=0$,

$$T_c = \frac{1}{\beta_c} = 2D$$

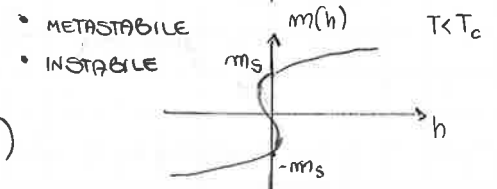
PER $T > T_c$ (E SEMPRE $h=0$),

$$m=0, \quad u=0 \quad (u \text{ ENERGIA INTERNA PER UNITÀ DI } V)$$

PER $T < T_c$,

$$m \sim (T_c - T)^\beta$$

DOVE β È UN ESPONENTE CRITICO E $\beta_{MF} = \frac{1}{2}$ (MEAN FIELD).



NOTA: RICORDA CHE $u = \langle H \rangle \stackrel{MF}{=} -Dm^2 - hm$.
È VERO SOLO IN CAMPO MEDIO!

GRANDEZZE COME β SONO DETTE UNIVERSALI, MENTRE NON LO È T_c (NÉ IL COEFFICIENTE DAVANTI A $(T_c - T)^\beta$), CHE DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DEL SISTEMA IN ESAME.

SIMILMENTE (INTRODUCENDO L'ESPONENTE CRITICO γ)

$$u \sim -m^2 \sim (T - T_c)$$

$$\chi \sim (T_c - T)^{-\gamma}$$

$$\gamma_{MF} = 1$$

INFATTI SI ERA TROVATO

$$\chi^{-1} = -2D + \frac{1}{\beta(1-m^2)}$$

NOTA:

$$= -T_c + \frac{T}{1 - O(T_c - T)} = -T_c + T(1 + O(T_c - T)) = O(T \cdot T_c)$$

PER $T = T_c$, $h \neq 0$ POTREMMO CALCOLARE (MA NON LO FAREMO)

$$m \propto h^{1/5}$$

$$\delta_{MF} = 3$$

MOLTRE C_V E' DISCONTINUO A T_c : HO UNA TDF DEL II° ORDINE.

SE $h \neq 0$ SCOMPARIANO LE SINGOLARITA', PERCHÉ SI SELEZIONA LO STATO $+$ o $-$.

NOTA: NON C'E' CALORE LATENTE A $T = T_c$, OSSIA u NON E' DISCONTINUA.

CITIAMO CHE LA SOLUZIONE DI CAMPO MEDIO E' ESATTA PER $D \geq 4$, BUONA PER $D=2,3$. A $D=1$ NON C'E' TRANSIZIONE.

CAMPO MEDIO, 3° MODO

DIMOSTRIAMO INNANZITUTTO CHE, DATE H_0 E H_1 ,

$$\int d[\sigma] e^{-\beta H_1[\sigma]} \geq \int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma] - \beta \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0}}$$

DOVE

$$\langle \cdot \rangle_{H_0} = \frac{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma]} (\cdot)}{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma]}}$$

* NOTA: IN REALTA' SAI GIA' CHE F , DEFINITA COME $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$, $Z = \int d\sigma e^{-\beta H}$, $H = H_0 - \int dx h(x) \cdot \sigma(x)$ E' IL FUNZIONALE GENERATORE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE. SI AVEVA $-\frac{\partial}{\partial h(x)} \frac{\partial}{\partial h(y)} F = \beta \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle_c$ QUI NON C'E' IL $-1/\beta$ E IL TERMINE DI SORGENTE E' $\lambda(H_1 - H_0)$.

PER FARLO, DEFINIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE

$$g(\lambda) \equiv \ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma] - \beta \lambda (H_1[\sigma] - H_0[\sigma])} \quad (= \ln \int d\sigma e^{-\beta [H_0 + \lambda (H_1 - H_0)]})$$

DERIVIAMOLA* DUE VOLTE:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(\lambda)}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H_1 - H_0)} (-\beta (H_1 - H_0))}{\int d[\sigma] e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H_1 - H_0)}} \right\} \quad \left(= -\beta \frac{d}{d\lambda} \langle H_1 - H_0 \rangle \right) \\ &= \beta^2 \left(\langle (H_1 - H_0)^2 \rangle - \langle H_1 - H_0 \rangle^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

NOTA: SONO MEDIE PENSATE SU $H = H_0 + \lambda (H_1 - H_0)$.

QUESTO CI DICE CHE

$$g(\lambda) \geq g(0) + \lambda \left(\frac{dg}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

OSSIA CHE $g(\lambda)$ STA SOPRA LA SUA APPROSSIMAZIONE LINEARE (E' CONVESSA). CALCOLANDOLA IN $\lambda=1$,

$$\ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_1[\sigma]} \geq \ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_0[\sigma]} - \beta \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0} \quad (I)$$

ESPOENZIANDO ALTROVO LA (I).

* SCEGLIAMO ORA

$$H_1 = \text{ISING A } (h=0) = - \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

$$H_0 = -r \sum_i \sigma_i$$

NOTA: H_0 DESCRIVE IN EFFETTI UN CAMPO COSTANTE CHE SI APPLICA SU σ_i .

CHIAMANDO f LA χ DI PRIMA (DENSITA' DI ENERGIA LIBERA), DALLA (I)

$$f_{\text{ISING}} \leq - \frac{1}{\beta V} \ln \int d[\sigma] e^{-\beta H_0} + \frac{1}{V} \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0}$$

$$\downarrow \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{\beta r \sum_i \sigma_i} = (2 \cosh(\beta r))^V$$

$$\text{NOTA: } = \prod_{i=1}^V \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\beta r \sigma_i} = \prod_{i=1}^V 2 \cosh(\beta r).$$

$$\text{INOLTRE SI E' USATA } f = - \frac{1}{V\beta} \ln Z.$$

PERCIO'

$$f_{\text{ISING}} \leq - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta r)] + \frac{1}{V} \langle H_1 - H_0 \rangle_{H_0}$$

POICHE' LA P_{eq} PER H_0 FATTORIZZA,

$$\langle -H_0 \rangle_{H_0} = \sqrt{r} \frac{\sum_{\sigma = \pm 1} \sigma e^{\beta r \sigma}}{\sum_{\sigma = \pm 1} e^{\beta r \sigma}} = r V \tanh(\beta r)$$

$$\underbrace{\sum_{\sigma = \pm 1} e^{\beta r \sigma}}_{= \langle \sigma \rangle}$$

$$\text{NOTA: } Z_0 = (2 \cosh(\beta r))^V. \text{ QUINDI}$$

$$P_{eq} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_0) = \prod_i \frac{1}{Z^{1/V}} \cdot e^{-\beta r \sigma_i} = P_i(\sigma_i)$$

$$\text{NOTA: } \langle -H_0 \rangle_{H_0} = -r \sum_i \langle \sigma_i \rangle = -r V \langle \sigma \rangle.$$

INVECE

$$\langle H_1 \rangle_{H_0} = - \sum_{i,j} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = - \sum_{i,j} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

$$= - \Delta V \langle \sigma \rangle^2$$

PRIMI VICINI
PER SPIN

NUMERO DI SPIN PRESENTI

$$\langle H_1 \rangle_{H_0} = - \Delta V \tanh^2(\beta r)$$

$$m \equiv \langle \sigma \rangle = \tanh(\beta r)$$

IN CONCLUSIONE, γ E' UN VALORE DI f LIMITE

$$f_{\text{ISING}} \leq - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta r)] - \Delta \tanh^2(\beta r) + r \tanh(\beta r) \equiv \tilde{f}$$

USANDO $\tilde{f}$ PER CALCOLARE

$$\frac{d\tilde{f}}{dm} = 0$$

TROVEREI IL CAMPO MEDIO, DOPO AVER SOSTITUITO IL RISULTATO TROVATO

$$r = \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m)$$

NOTA: COME MI ASPETTAVO, VISTO CHE ∂_i È VISTO COME LA P_{eq} FATTORIZZATA IN $P = T P_i$.

• FOCUS: FACCIAMOLO.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}}{dm} &= \frac{d}{dm} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln[2\cosh(\beta r)] - Dm^2 + \frac{m}{\beta} \text{ATANH}(m) \right\} \\ &= \frac{dr}{dm} \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln[2\cosh(\beta r)] \right\} - 2Dm + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m) + \frac{m}{\beta} \frac{d}{dm} \text{ATANH}(m) \\ &= -\text{TANH}(\beta r) \frac{dr}{dm} - 2Dm + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m) + \frac{m}{\beta} \frac{d}{dm} \text{ATANH}(m) \\ &= -m \frac{dr}{dm} - 2Dm + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m) + m \frac{dr}{dm} = -2Dm + \frac{1}{\beta} \text{ATANH}(m) \end{aligned}$$

• FOCUS: SUL MODELLO A INTERAZIONI DEBOLI A LUNGO RAGGIO (VEDI OLTRE)

RESTA DA MOSTRARE CHE $\lambda = m$. POSSO USARE

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{1}{\beta V} \frac{\partial}{\partial h} \ln \left\{ \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int d\lambda e^{-N\beta A(\lambda)} \right\}$$

OPPURE, PIÙ SEMPLICEMENTE,

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{\partial A}{\partial h} - \frac{\partial \lambda}{\partial h} \frac{\partial A}{\partial \lambda} \\ &= -\frac{\partial}{\partial h} \left\{ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln[2\cosh(\beta(\lambda+h))] \right\} - \frac{\partial \lambda}{\partial h} \underbrace{\left\{ \lambda - \text{TANH}(\beta(\lambda+h)) \right\}}_{=0 \text{ (CONDIZIONE DI MINIMO)}} \\ &= \text{TANH}(\beta(\lambda+h)) = \lambda \end{aligned}$$

MODELLO RISOLUBILE (INTERAZIONI DEBOLI A LUNGO RAGGIO)

QUANDO FUNZIONA IL CAMPO MEDIO? QUANDO LE CORRELAZIONI SONO DEBOLI. COME ABBIAMO DETTO, LA SOLUZIONE DIVENTA ESATTA PER $D \geq 4$; AL CRESCERE DI D CRESCIE INFATTI IL NUMERO DI VICINI E QUINDI CALA IL FEEDBACK CHE GU POSSO DARE.

TRATTIAMO ORA UN MODELLO CON FORZE DEBOLI E A LUNGO RAGGIO:

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k - h \sum_i \sigma_i \quad i, k = 1, \dots, N$$

LA SOMMA E' SULLE COPPIE (IL TERMINE DIAGONALE NON CONTA, E' UNA COSTANTE); L'ACCORPIAMENTO E' $J = \frac{1}{N}$. IN EFFETTI IL NUMERO DI COPPIE (i, k) E' $\binom{N}{2} \sim N^2$ E CI SI ASPETTA $H = O(N)$ (ESTENSIVA).

USIAMO LA RELAZIONE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

NOTA: RISPETTO AL MODELLO DI PRIMA IN CUI J_{ik} GARANTIVA UN'INTERAZIONE LOCALE, QUI TUTTI INTERAGISCONO CON TUTTI.

NOTA: E' SUFFICIENTE COMPLETARE IL QUADRATO $(\sqrt{A}x \pm \frac{B}{2\sqrt{A}})^2$

PER RISOVRIVERE $\frac{B^2}{4A}$, CON $B = \beta \sum_i \sigma_i$ LUI RIMANE COM'E'

$$e^{-\beta H} = \exp \left\{ \frac{\beta}{2N} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k + \beta h \sum_i \sigma_i \right\} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2} + \sum_i (\beta\lambda + \beta h) \sigma_i}$$

QUESTO FUNZIONA PERCHÉ L'INTERAZIONE E' NON LOCALE, QUINDI

$$\sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k = \left(\sum_i \sigma_i \right) \left(\sum_k \sigma_k \right) = \left(\sum_i \sigma_i \right)^2$$

CALCOLIAMO PERCIO'

NOTA: SI VUOLE TROVARE $\beta = -\frac{1}{N\beta} \ln Z$.

$$Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{-\beta H[\sigma]} = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{\sum_i \beta(\lambda + h) \sigma_i}$$

CHE CI PIACE PERCHÉ LA SOMMA E' FATTORIZZABILE:

$$Z = \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\frac{N\beta\lambda^2}{2}} \left(2 \cosh(\beta(\lambda + h)) \right)^N$$

$$= \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\beta A(\lambda)} d\lambda$$

(I)

DOVE SI È DEFINITA

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta(\lambda+h))]$$

LA (I) SI PRESTA AD ESSERE APPROSSIMATA COL METODO DEL PUNTO DI SELLA PER N GRANDE:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \int dx e^{N g(x)} = \max g(x)$$

QUESTO CI DICE CHE

$$f = \min_{\lambda} A(\lambda) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

PER DETERMINARE QUESTO MINIMO, CALCOLIAMO

$$\frac{dA}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \tanh(\beta(\lambda+h))$$

CHE SONO PROPRIO LE EQUAZIONI DI CAMPO MEDIO, SE NON CHE IN QUESTO CASO LE ABBIAMO OTTENUTE SENZA APPROSSIMAZIONI. FUNZIONA PERCHÉ

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = O\left(\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

SI PUÒ MOSTRARE CHE λ SI RICONDUCE ALLA MAGNETIZZAZIONE m : BASTA CALCOLARSI IL VALORE DI ASPETTATIVA DELLO SPIN SULL'INTEGRALE E VERIFICARE CHE SI RITROVA λ .

NOTA: VEDI FOCUS DUE PAGINE INDIETRO.

FOCUS: PUNTO DI SELLA

$$\int_a^b dx e^{N g(x)} = \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(x_m)|N}} e^{N g(x_m)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

CON $x_m \in [a, b]$ (METODO DI LAPLACE). QUINDI PER N GRANDE

$$\frac{1}{N} \ln \int dx e^{N g(x)} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{|g''(x_m)|N} \right) + N g(x_m) + \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \right\} = g(x_m) - \frac{1}{2N} \ln N + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

E SI RITROVA QUANTO VOLUTO PRENDENDO IL LIMITE PER $N \rightarrow \infty$. USIAMOLO PER CALCOLARE LA DENSITA' DI ENERGIA LIBERA:

$$f = -\frac{1}{N\beta} \ln Z = -\frac{1}{N\beta} \ln \left\{ \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\beta A(\lambda)} d\lambda \right\} = -\frac{1}{N\beta} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N\beta A(\lambda)} + O\left(\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \max_{\lambda} (-\beta A(\lambda)) = \min_{\lambda} A(\lambda)$$

⊛ NOTA: RISCALANDO I CAMPI IN H COME $\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{N}}$,
 $H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j - (h\sqrt{N}) \sum_i \tilde{\sigma}_i$
 ✕ SI TROVA DERIVANDO 2 VOLTE RISPETTO A h ,
 MENTRE ADESSO $\langle \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j \rangle_c$ SI CALCOLA DERIVANDO
 RISPETTO A $\tilde{h} = h\sqrt{N}$, DA CUI IL FATTORE $\frac{1}{N}$.

NOTA: MANDARE $N \rightarrow \infty$ SIGNIFICA METTERSI NEL LIMITE TERMODINAMICO ($V \rightarrow \infty$ A DENSITA' COSTANTE).

PER IL CALCOLO DI f VEDI FOCUS QUI SOTTO.

LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

SAPPIAMO CHE IN CAMPO MEDIO

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{MF} = 0$$

NOTA: E' PROPRIO L'ASSUNZIONE INIZIALE GRAZIE A CUI FATTORIZZIAMO P_{eq} .

MA A ME INTERESSANO PROPRIO $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{ISING}$: COME LE STIMO?

USO IL TEOREMA DELLA RISPOSTA LINEARE:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{h=0}^{ISING} \stackrel{*}{=} -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h_i} \frac{\partial}{\partial h_j} F^{ISING}[h] \Big|_{h=0} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_j} \Big|_{h=0} \quad (I)$$

VALIDA QUANDO USO LA $F[h]$ ESATTA, NON APPROSSIMATA.

POSSO PERO' USARE

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_j} \Big|_{MF} \neq 0$$

NOTA: INFATTI L'UGUAGLIANZA (I)^{*} VALE SOLO SE USO LA P_{eq} ESATTA. IN M.F. LA FUNZIONE RISPOSTA NON COINCIDE CON QUELLA DI CORRELAZIONE (CHE E' NULLA). RICORDA CHE $-\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle_0 = \langle H_1 A \rangle_c^{(0)}$ SE $H = H_0 + \lambda H_1$ (QUI $\lambda = h_j$).

COME ESTIMATORE (A MENO DI CORREZIONI).

CHIAMMIAMO

$$\delta P = |P_{eq} - P_{app}| = O(\epsilon)$$

NOTA: L'OBIETTIVO E' MOSTRARE CHE L'ERRORE NELLA FUNZIONE RISPOSTA E' PIU' PICCOLO DI QUELLO DELLA FUNZIONE DI CORRELAZIONE.

E IPOTIZZIAMO CHE QUESTA DISTANZA SIA PICCOLA (ALTRIMENTI HO GIA' PERSO IN PARTENZA). ALLORA

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{P_{eq}} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{P_{app}} + O(\epsilon)$$

$$\int P_{eq} \sigma_i \sigma_j - \int P_{app} \sigma_i \sigma_j = O(\epsilon)$$

NOTA:

$$P_{app} \propto e^{-\beta(H_0 + O(\epsilon))} = e^{-\beta H_0} (1 + O(\epsilon))$$

RICORDIAMO CHE SI ERA TROVATA F USANDO UN PRINCIPIO DI MINIMO, PER CUI

$$\frac{\delta F}{\delta P} \Big|_{P=P_{eq}} = 0$$

TROVANDOMI SUL MINIMO, L' $O(\epsilon)$ E' ASSENTE E

$$F[P_{app}] = F[P_{eq}] + O(\epsilon^2)$$

PERCIO' LA STIMA E' BUONA IN LINEA DI PRINCIPIO.

L'UNICO RISCHIO E' CHE SI TROVI UNA CORREZIONE INFINITA.

(IN GENERALE IN FISICA LE COSE NON FUNZIONANO QUANDO NON DEVONO FUNZIONARE!).

METTIAMO SOTTO LE IPOTESI

$$\left. \begin{array}{l} h=0 \\ T > T_c \end{array} \right\} \rightarrow m_s = 0 \quad (\text{MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA NULLA})$$

$$T \rightarrow T_c^+$$

ACCENDENDO $h=0(\epsilon)$ E TROVANDOMI NELLA FASE CALDA, TRASCURO L' $\alpha(m^2)$ PERCHÉ SO CHE LA MAGNETIZZAZIONE È PICCOLA; TROVO

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right]$$

$$\approx \beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right)$$

$$J_{ik} = \begin{cases} J & |i-k|=1 \\ 0 & \text{ELSEWHERE} \end{cases}$$

NOTA: COME ANNUNCIATO, STO USANDO IL CAMPO MEDIO. IL CAMPO h CHE INSERISCO È "POINT-DEPENDENT".

OVVERO

$$\sum_k \left(\frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} \right) m_k = h_i \quad \Rightarrow \quad B_{ik} m_k = h_i$$

DOVE B È DEFINITA

$$B_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik}$$

*NOTA: RISOLVERE COSÌ? ALLA FINE VORRÒ

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle_c = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} = \frac{1}{\beta} A_{ik}.$$

ALLORA, DEFINENDO LA MATRICE INVERSA A_{ik} ,

$$\underline{m_i} = \sum_k A_{ik} h_k \quad A_{ik} = (B^{-1})_{ik}$$

PER RISOLVERLA*, PASSIAMO ALLO SPAZIO DI FOURIER.

DATO UN RETICOLO IPERCUBICO IN D -DIMENSIONI, PASSO A UNA ZONA DI BRILLOUIN

$$-\pi \leq p_\alpha \leq \pi$$

$$\alpha = 1, \dots, D$$

QUINDI, DATA

NOTA: PER INVARIANZA TRASLAZIONALE, IN REALTÀ $B(\underline{k}, \underline{l}) = B(\underline{k} - \underline{l}) \equiv B(\underline{r})$ E POTREI FARE LE TRASFORMATE IN $e^{i \underline{r} \cdot \underline{l}}$. LO STESSO DISCORDO SI APPLICA AL CALCOLO DI u (COSÌ EVITI u_k). BASTA DEFINIRE
 $\delta_{\underline{k}, \underline{l}} \rightarrow \delta(\underline{r}), J_{\underline{k}, \underline{l}} \rightarrow \delta(|\underline{r}|-1)$

$$B_{\underline{k}, \underline{l}} = \left(\frac{\delta_{\underline{k}, \underline{l}}}{\beta} - J_{\underline{k}, \underline{l}} \right) = B(|\underline{k} - \underline{l}|)$$

$$\tilde{B}(p) = \frac{1}{\beta} \sum_{\underline{n}=\underline{l}} \left(\delta_{\underline{n}, \underline{l}} - \beta J_{\underline{n}, \underline{l}} \right) e^{-i(\underline{n}-\underline{l}) \cdot \underline{p}}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left(1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha \right)$$

NOTA: PER CONVINCERTENE, PENSA AD ESEMPIO CHE IN 2D I VETTORI $(\underline{k}-\underline{l}) = \underline{a}$ DI MODULO 1 SONO $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$ E FATTI I CONTI PER ESPlicitO.

DEFINIAMO LA FUNZIONE DI GREEN (PROPAGATORE LIBERO)

$$\tilde{G}_0(p) = \beta^{-1} \tilde{B}(p)^{-1} = \left(1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha} \right)^{-1}$$

ALLORA

$$A_{\underline{r}, \underline{l}} = (B^{-1})_{\underline{r}, \underline{l}} = A(|\underline{r} - \underline{l}|)$$

$$= (2\pi)^{-D} \int_{BZ} d^D p \tilde{B}(p)^{-1} e^{i(\underline{r} - \underline{l}) \cdot \underline{p}}$$

$$= \frac{\beta}{(2\pi)^D} \int_{BZ} d^D p \tilde{G}_0(p) e^{i(\underline{r} - \underline{l}) \cdot \underline{p}} \equiv \beta G_0(\underline{r} - \underline{l})$$

NOTA: IN GENERALE,

$$\frac{1}{V} \sum_{\underline{r}} f(\underline{r}) \rightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(\underline{p})$$

QUI IL FATTORE V NON LO SI METTE PER ESPLICITO, MA SI RICORDI CHE $A_{\underline{r}, \underline{l}}$ COSÌ TROPPO È INTENSIVA. LO SI VEDE ANCHE DA COME LA SI USA QUI SOTTO PER CALCOLARE LA DENSITÀ DI ENERGIA u .

DOVE G_0 È LA FUNZIONE DI GREEN NELLO SPAZIO x .

SI È COSÌ TROVATA UNA STIMA PER LA GENERICA FUNZIONE DI CORRELAZIONE

$$\langle \sigma_i \sigma_r \rangle_{h=0}^{\text{ISING}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_r} \Big|_{h=0}^{\text{ISING}} \approx \frac{A_{i,r}}{\beta}$$

* COSA SUCCEDDE ALL' $O(\epsilon^2)$?

CHIAMIAMO u LA DENSITÀ DI ENERGIA

$$u = \frac{U}{V} = u_L = -\frac{1}{2} \sum_{\underline{r}} J_{\underline{r}, \underline{r}} \langle \sigma_{\underline{r}} \sigma_{\underline{r}} \rangle$$

VERO SE $h=0$. USANDO QUANTO TROVATO,

$$u = -\frac{1}{2\beta} \sum_{\underline{r}} J_{\underline{r}, \underline{r}} A_{\underline{r}, \underline{r}} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\beta}{(2\pi)^D} \sum_{\underline{r}} \int_{BZ} d^D p \frac{e^{i(\underline{r} - \underline{r}) \cdot \underline{p}}}{1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos p_{\alpha}} J_{\underline{r}, \underline{r}}$$

DOVE RICORDIAMO CHE

$$\int_{BZ} d^D p = \prod_{\alpha=1}^D \int_{-\pi}^{\pi} dp_{\alpha}$$

ORA CONSIDERIAMO CHE, POICHÉ J CONNETTE SOLO SPIN VICINI,

$$\sum_{\underline{k}} e^{i(\underline{r} - \underline{r}) \cdot \underline{p}} J_{\underline{r}, \underline{r}} = 2 \sum_{\alpha} \cos p_{\alpha}$$

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{BZ} d^D p \frac{\sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha}}{1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha}}$$

NOTA: IN MF SI AVENIA $u=0$ PER $T > T_c$

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\underline{r}, \underline{r}'} J_{\underline{r}, \underline{r}'} \sigma_{\underline{r}} \sigma_{\underline{r}'} \quad (h=0)$$

$$u = \langle H \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\underline{r}, \underline{r}'} J_{\underline{r}, \underline{r}'} \langle \sigma_{\underline{r}} \sigma_{\underline{r}'} \rangle$$

SECONDO MEMO SOMMATO ANCHE SU $\underline{l}$ (TANTOPIÙ CHE LA NOSTRA $\langle \sigma_{\underline{r}} \sigma_{\underline{r}'} \rangle$ È INTENSIVA)

LA u E' DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA
POTENZIALMENTE PROBLEMATICHE; CONSIDERO QUINDI

$$C_V = \frac{du}{dT} = \frac{du}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{T^2} \frac{du}{d\beta} = -\beta^2 \frac{du}{d\beta}$$

$$= \frac{\beta^2}{(2\pi)^D} \int_{BZ} d^D p \frac{(\sum_{\alpha} \cos p_{\alpha})^2}{(1 - \beta \sum_{\alpha} \cos p_{\alpha})^2}$$

* STUDIAMO $\tilde{G}_0(p)$ VICINO ALLA TRANSIZIONE, PER $\beta \sim \beta_c = \frac{1}{2D}$:

$$\left(1 - 2\beta_c \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha}\right)^{-1}$$

DA CUI SI VEDE CHE, PER $p \sim 0$, $\tilde{G}_0(p)$ SVILUPPA UN POLO SE SONO VICINO A β_c

$$\tilde{G}_0(p) \simeq \left(1 - 2D\beta + \beta \sum_{\alpha=1}^D p_{\alpha}^2 + O(p^4)\right)^{-1} = \frac{1}{\beta p^2 + \underbrace{(1 - 2D\beta)}_{\sim m^2} + O(p^4)}$$

$\xrightarrow{\sim m^2} = \frac{1 - 2D\beta}{\beta}$

ANALOGO AL PROPAGATORE DI UN

CAMPO SCALARE. LA MASSA $m \rightarrow 0$ VICINO AL PUNTO CRITICO, IL CHE SIGNIFICA CHE DIVERGE LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE:

$$\xi \sim \frac{1}{m} \xrightarrow{T \rightarrow T_c^+} \infty$$

** NOTA: IN $D=3$ E $D=4$,
 $G_0^{(3)}(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$, $G_0^{(4)}(x) = \frac{\pi}{m} e^{-m|x|}$. SI CALCOLANO
CHIUDENDO, PER $p \geq 0$, IL CONTORNO SOPRA/SOTTO.

SI SA CHE**

* NOTA: OVVERO UN IMPULSO p , SE $c = \hbar = 1$.

$$\tilde{G}_0(p) \sim \frac{1}{p^2 + m^2} \Rightarrow G_0(x) \sim e^{-mx} = e^{-\left(\frac{x}{\xi}\right)}$$

(IN FISICA UNA MASSA* E' L'INVERSO DI UNA LUNGHEZZA).

AL PUNTO CRITICO $\xi = \infty$; IL DECADIMENTO ESPONENZIALE

SPARISCE E HO UN DECADIMENTO A POTENZA, INDICE DI UNA CORRELAZIONE A LUNGO RANGE (NON LOCALE). INFATTI,

SE $\beta = \beta_c = \frac{1}{2D}$ AVRO'

NOTA: $A_{L,0} = \beta \langle \sigma_L \sigma_0 \rangle_{h=0}$.

$$\tilde{G}_0(p) \sim \frac{1}{p^2} \Rightarrow A_{L,0} \sim \int_{BZ} \frac{d^D p}{p^2} \sim p^{D-2} \sim L^{2-D}$$

* IL CALORE SPECIFICO (CHE STUDIO PER P PICCOLI, OSSIA GRANDI LUNGHEZZE) VALE

$$C_V \sim \int_{BZ} \frac{(D - P^2/2)^2}{(\beta P^2 + (1 - 2\beta D))^2} d^D P$$

$$[\beta P^2] = [1 - 2\beta D]$$

COME SI COMPORTA C_V PER $P \sim 0$?

SE $D > 4$,

$$\int_{BZ} \frac{d^D P}{P^4} \sim \text{const.}$$

SE $D < 4$, INVECE*,

$$C_V \sim P^{D-4} \sim (1 - 2\beta D)^{\frac{D}{2}-2}$$

OSSIA DIVERGE, SUL PUNTO CRITICO T_c , PER $P \rightarrow 0$ (PICCOLI MOMENTI); LA SECONDA FORMA MI DICE CHE DIVERGE PER $m^2 \rightarrow 0$ E CIOE' PER $T \rightarrow T_c$.

IL CASO $D=4$ SI DICE DIMENSIONE CRITICA SUPERIORE (D_c^u), CON

$$C_V \sim \ln(1 - 2\beta D)$$

INFINE SI E' VISTO CHE

$$A_{l,0} \propto_{l \rightarrow \infty} e^{-l/\xi}$$

$$\xi \sim (1 - 2\beta D)^{-1/2} \rightarrow \text{ESPONENTE CRITICO } (\gamma_{MF})$$

NOTA: SE PENSI $\tilde{G}_0(P) \sim \frac{1}{P^2 + m^2}$, CON

$$m^2 = (1 - 2\beta D)/\beta$$

IN EFFETTI $G_0(x) \sim e^{-mx} \equiv e^{-x/\xi}$

$$\text{DA CUI } \xi = 1/m = \left(\frac{1 - 2\beta D}{\beta} \right)^{-1/2},$$

$$\beta \rightarrow \beta_c$$

IN SINTESI, C_V E' PICCOLO A GRANDI T (VA COME T^{-2}) E DIVERGE PER $T \rightarrow T_c$ IN $D \leq 4$.

SEMBRA QUINDI CHE, SE $D \leq 4$, LA TEORIA DI CAMPO MEDIO NON DEBBA FUNZIONARE VICINO A T_c .

ANTIPIAMMO ANCHE CHE, SE CALCOLO $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ A $T < T_c$,

TROVO $\xi < \infty$.

NOTA: TROVO $\xi^2 = \frac{\beta(1 - \tilde{m}^2)}{1 - 2\beta(1 - \tilde{m}^2)}$, DOVE $\tilde{m}$ E' LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA (BINNEY).

NOTA: SI TRATTA DI INTEGRALI SU DI UNA REGIONE FINITA (LA ZONA DI BRILLOUIN), QUINDI IL PROBLEMA DELLA CONVERGENZA ALL' INFINITO NON SI PONE.

NOTA: COM'E' POSSIBILE? $k_B \approx 1$. QUINDI $(1 - 2\beta D)/\beta \equiv m^2$

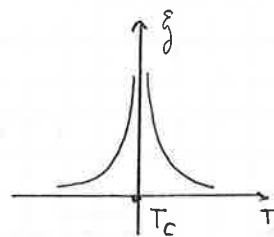
HA LE DIMENSIONI DI P^2 .

NOTA: E VICINO AL PUNTO CRITICO, $m = 0$.

* NOTA: IN TEORIA DEI CAMPI QUESTO SI DICE POWER COUNTING; PER ANALISI DIMENSIONALE, IL GRADO DI DIVERGENZA IN P E' LO STESSO CHE IN m . SI GIUSTIFICA COSI': AD ESEMPIO,

$$\int_0^\pi \frac{dP}{P+a} = \ln(P+a) \Big|_0^\pi \sim \ln \pi - \ln a$$

$$\int \frac{dP}{(P+a)^2} \sim \frac{1}{(P+a)}, \quad \int \frac{d^3 P}{(P+a)^2} \sim (P+a)$$



* SE MANDASSI $D \rightarrow \infty$ TENENDO FISSO

$$\tilde{p} = p/p_c = 2Dp$$

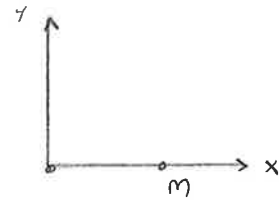
NOTA: SERVE PERCHÉ ALTAMENTE
 $p_c \xrightarrow{D \rightarrow \infty} 0$

ALLORA M.F. È ESATTO (NON LO DIMOSTREREMO). LA SPIEGAZIONE EURISTICA È CHE DIVENTANO MOLTI I PRIMI VICINI (È COME PARLARE A UNA FOLLA).

NOTA: NON DISTINGUO I SINGOLI INDIVIDUI.

MOSTRIAMO SOLO CHE PER $T > T_c$

$$\langle \sigma_i \sigma_r \rangle_{\tilde{p} \text{ FISSO}} \xrightarrow{D \rightarrow \infty} 0$$



COME UNA POTENZA DI D^{-1} .

SCEGLIAMO UNA GEOMETRIA PARTICOLARE: DUE PUNTI A DISTANZA m LUNGO L'ASSE x ,

$$l_x - k_x = m$$

$$l_\alpha - k_\alpha = 0, \quad \alpha \neq x.$$

A QUESTA DISTANZA IL PROPAGATORE VALE

$$G_0(m) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \tilde{G}_0(p) e^{i p_x m}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \frac{e^{i m p_x}}{1 - 2p \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha}$$

NOTA: SI RICORDI CHE

$$A_{\pi, l} = p G_0(k-l)$$

CON

$$G_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B^2} d^D p \tilde{G}_0(p) e^{i p \cdot x}$$

$$\tilde{G}_0(p) = \left(1 - 2p \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha \right)^{-1}$$

NOTIAMO CHE, IN GENERALE,

$$A^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty dz z^{\gamma-1} e^{-Az}$$

DOVE Γ È LA FUNZIONE GAMMA DI EULERO. INFATTI

$$\gamma = 2A$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{d\gamma}{A} \frac{\gamma^{\gamma-1}}{A^{\gamma-1}} e^{-\gamma} = \frac{1}{A^\gamma} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty d\gamma \gamma^{\gamma-1} e^{-\gamma} = \frac{1}{A^\gamma}$$

SCELTO $\gamma = 1$ ($\Gamma(1) = 1$ POICHÉ $\Gamma(m+1) = m!$), IN PARTICOLARE

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty dz e^{-Az}$$

NOTA: VABBÈ DAI, È IL SOLITO
 $\int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \tau$.

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE

$$G_0(m) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{B_2} d^D p \int_0^\infty d\mu e^{-\mu \left(1 - \frac{\tilde{p}}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha\right) + i m p_x} \quad (I)$$

PER CONTINUARE IL NOSTRO CONTO CI SERVONO LE FUNZIONI DI BESSEL MODIFICATE DI ORDINE INTERO

$$I_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(m\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{z \cos \theta} \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{z \cos \theta + i m \theta} d\theta \quad (II)$$

DOVE SI È USATA

$$\cos(m\theta) = \frac{1}{2} (e^{im\theta} + e^{-im\theta})$$

NOTA: MANDA $\theta \rightarrow -\theta$ NELL'INTEGRALE CON $e^{-im\theta}$.

GUARDANDO LA (I), PER $\alpha \neq x$ HO DELLE FUNZIONI $I_m(z)$ CON $m=0$; HO PERCIÒ I DUE CONTRIBUTI (AVENDO RICONOSCIUTO NELLA (II) LA B_2)

$$G_0(m) = \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} I_0\left(\frac{\mu \tilde{p}}{D}\right)^{D-1} I_m\left(\frac{\mu \tilde{p}}{D}\right) \quad (III)$$

POSSIAMO USARE LE ESPANSIONI IN SERIE DELLE FUNZIONI DI BESSEL

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(z^2/4)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \right\}$$

NOTA: AI FINI DELLA DIMOSTRAZIONE BASTA RICORDARE L'ORDINE DOMINANTE, $I_m(z) \sim z^m$ SE $z \ll 1$. IN EFFETTI L'INTEGRALE (III) CONTIENE $e^{-\mu}$, QUINDI È DOMINATO DAI VALORI DI $\mu \ll 1$.

IN PARTICOLARE, USANDO $\Gamma(m+1) = m!$,

$$I_0(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{z^2}{4} \frac{1}{\Gamma(2)} + O(z^3) = 1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^4)$$

$$I_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^m + O(z^{m+2})$$

ABBIAMO PERCIÒ LA TESI SE NOTIAMO CHE, APPROSSIMANDO,

$$G_0(m) \sim \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} 1^{D-1} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\mu \tilde{p}}{2D}\right)^m$$

$$= \left(\frac{\tilde{p}}{2D}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \mu^m = \left(\frac{\tilde{p}}{2D}\right)^m \sim D^{-m}$$

DECADIMENTO ESPONENZIALE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE ($\beta \neq \beta_c$)

INVECE DI AFFRONTARE IL CONTO USANDO NUOVAMENTE LE FUNZIONI DI BESSEL, CI RIFACCIAMO A UN TEOREMA SUL COMPORTAMENTO DELLE FUNZIONI ANALITICHE (VEDI AD ES. MOHSE AND FESHBACH 4.8):

SE $g(p)$ E' UNA FUNZIONE ANALITICA (SU $\mathbb{R}$) DI PERIODO 2π , LA CUI SINGOLARITA' PIU' VICINA ALL'ASSE REALE E' IN $p = ip_s$, ALLORA

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp g(p) e^{imp} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} e^{-m p_s}$$

ESPRIMIAMO

$$\begin{aligned} G_0(m) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int dp_x e^{ip_x m} \int \left(\prod_{\mu=2}^D dp_{\mu} \right) \left[1 - 2\beta \left(\cos p_x + \sum_{\mu=2}^D \cos p_{\mu} \right) \right]^{-1} \\ &= (2\pi)^{-D} \int dp e^{ipm} g(p) \end{aligned}$$

DOVE SI E' DETTO $p_x \equiv p$ E SI E' DEFINITA

$$g(p) = \int \left(\prod_{\mu=2}^D dp_{\mu} \right) \left[1 - 2\beta \left(\cos p + \sum_{\mu=2}^D \cos p_{\mu} \right) \right]^{-1}$$

LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE ξ E' QUELLA PER CUI

$$p_s = \xi^{-1}$$

E SI TRATTA ORA DI INDIVIDUARE IL PUNTO p_s DI SINGOLARITA' DI $g(p)$.

SE $p_{\mu} \simeq 0$, $\mu = 2, \dots, D$, TROVO QUELLO PIU' VICINO ALL'ASSE REALE * :

$$1 - 2\beta \cos(ip_s) - 2\beta(D-1) = 0$$

$$\cos(ip_s) = \frac{1}{2\beta} - D + 1 = 1 + \frac{1-2D\beta}{2\beta}$$

E USANDO

$$\arccos(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} i\sqrt{2x'}$$

* NOTA: IN REALTA' STAREI INTEGRANDO NELLE p_{μ} , QUINDI MI ASPETTO CHE $g(p)$ ABBAIA UN CONTINUO DI PUNTI DI SINGOLARITA'. SI DIMOSTRA PERO' CHE, SUPPONENDO ALCUNI $p_{\mu} \neq 0$, IL PUNTO p_s SI ALLONTANA DALL'ASSE REALE. VEDI CONTO ESPlicitO TRA QUALCHE PAGINA (APPENDICE).

POICHÉ IN PROSSIMITÀ DELLA TEMPERATURA CRITICA

$$2D\beta \sim 1$$

NOTA: DI NUOVO, STIAMO VEDENDO PER $T \rightarrow T_c^+$,
MA L'ARGOMENTO SI APPLICA ANCHE A $T \rightarrow T_c^-$.

ALLORA

$$\rho_s = A \cos \left(1 + \frac{1-2D\beta}{2\beta} \right) \sim i \sqrt{\frac{1-2D\beta}{\beta}}$$

QUINDI

$$\rho_s = \xi^{-1} \approx \sqrt{\frac{1-2D\beta}{\beta}} \quad (=m) \quad \text{PER } 2D\beta \sim 1$$

CO' DEFINISCE UN ALTRO ESPONENTE CRITICO. INFATTI

$$\beta \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \beta_c = \cos 1.$$

QUINDI

$$\xi \sim |\beta_c - \beta|^{-1/2} \quad \checkmark$$

ABBIAMO COSÌ SCOPERTO CHE IN MEAN FIELD

$$\nu_{MF} = \frac{1}{2}$$

AVREI TROVATO LO STESSO RISULTATO SCEGUENDO
UN CAMMINO PIÙ COMPLICATO.

* CITIAMO CHE VICINO AL PUNTO CRITICO È RIPRISTINATA

L'INVARIANZA ROTAZIONALE:

$$A_{0,l} \underset{T \rightarrow T_c}{\sim} A(l^2), \quad l^2 \rightarrow \infty$$

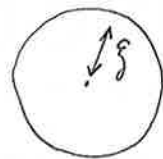
NOTA: OVVERO SI PERDE LA DIPENDENZA DALLA DIREZIONE.

$$l^2 = \sum_i l_i^2$$

* PER $T \neq T_c$ POSSO IMMAGINARE UN CERCHIO DI RAGGIO ξ ENTRO
CUI LA CORRELAZIONE È IMPORTANTE:

$$G_0 \sim e^{-m/\xi}$$

PER $T \rightarrow T_c$ ξ CRESCE, FINO A CHE TROVO UN
DECADIMENTO A POTENZA.



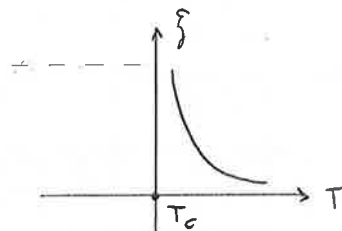
* ABBIAMO VISTO CHE (PER $T > T_c$)

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}$$

QUESTA MI DA SEMPRE UN VALORE COSTANTE NELLA

FASE FREDDA ($T < T_c$):

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \xrightarrow[T \rightarrow 0]{T < T_c} \tilde{m}^2 = \text{cost.}$$



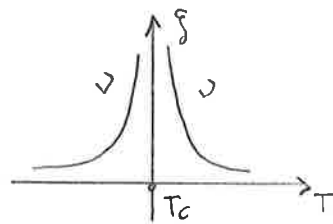
SE CONSIDERO INVECE

NOTA: SE $T < T_c$,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i^x \sigma_j^x \rangle + \langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle \approx \tilde{m}^2 + e^{-x/\xi}$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

NELLA FASE CALDA NON CAMBIA NULLA, MA NELLA FASE FREDDA STO SOTTRAENDO IL BACKGROUND $\langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$ E OTTENGONO UN ANDAMENTO SIMMETRICO.



* RICORDIAMO CHE PER $T \rightarrow T_c^-$, $h = 0$ SI

HA UN ANDAMENTO COME A FIANCO: A $T = T_c$

TERMINA UNA LINEA DI TRANSIZIONE DEL I° ORDINE

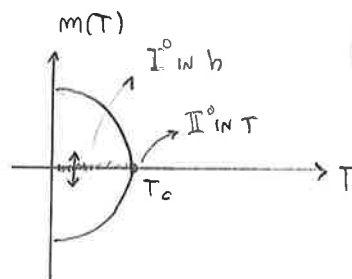
IN h E SI HA UN PUNTO DI TRANSIZIONE DEL II° ORDINE IN T .

PER $T < T_c$, $h = \pm \varepsilon \rightarrow m$ SALTA DA $-\tilde{m}$ A $+\tilde{m}$.

AVRO' DUE POSSIBILI STATI:

$$|+\rangle, \tilde{m} > 0$$

$$|-\rangle, -\tilde{m} < 0$$



CHIAMIAMO ALLORA IL GAP DI MAGNETIZZAZIONE

$$\Delta m = m_{|+\rangle} - m_{|-\rangle} = 2\tilde{m} \xrightarrow{T \rightarrow T_c^-} 0$$

*NOTA: SIGNIFICA "TUTTI +" SOLTANTO A $T=0$, ALTAMENTE AVRO' UNA PREVALENZA DI +.

MOSTRIAMO CHE, SE SUCCEDDE QUESTO, ALLORA NECESSARIAMENTE

$$\xi \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \infty$$

(SE $\tilde{m} \rightarrow 0$)

PRENDIAMO UN SISTEMA ALLINEATO IN MEDIA* CON $|+\rangle$ E CONSIDERIAMO

UNA BOLLA DI MAGNETIZZAZIONE $|-\rangle$. LA DIFFERENZA

DI F CAUSATA DA QUESTA BOLLA E' LEGATA ALLA

PARETE (DENTRO LA BOLLA UNO SPIN NON SA DI ESSERE

FUORI POSTO): L'INTERFACCIA CONTRIBUISCE A F CON

$$\Delta F \propto R^{D-1} \tilde{m} \propto$$

$$\propto > 0$$

POSSO PAGARE UN CERTO PREZZO ΔF E CIO' DETERMINA LA

DIMENSIONE MASSIMA DELLA BOLLA CHE POSSO CREARE,

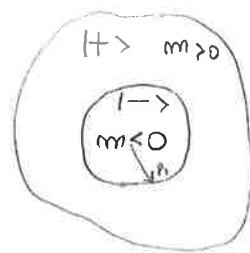
$$R_c^{D-1} \tilde{m} \propto \text{cost.}$$

R_c = RAGGIO CRITICO

SE PAGANDO LO STESSO VOGLIO FARE UNA BOLLA PIU' GRANDE,

$$R_c \propto \tilde{m}^{-\frac{1}{D-1}}$$

$R_c \propto \xi \propto \text{dim. cluster tipico.}$



* UN ALTRO MODO PER VEDERLO E' IL SEGUENTE. SIA m SOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DI STABILITA'

$$\psi'(m, T) = h$$

PER $T < T_c$ HO DUE SOLUZIONI DISTINTE m_1, m_2 .

PER $T \rightarrow T_c$, I PUNTI TENDONO ENTRAMBI A $m_1, m_2 \rightarrow m = 0$.

IN QUEL PUNTO, BISOGNA NECESSARIAMENTE CHE

$$\psi''(m, T_c) = 0$$

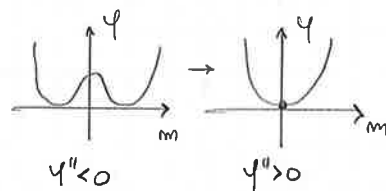
MA ALLORA LA SUSCETTIVITA' MAGNETICA

$$\chi \sim (\psi'')^{-1} \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \infty$$

DEVE DIVERGERE (QUINDI DIVERGE LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE)*.

QUI LE FLUTTUAZIONI SONO CORRELATE SU LUNGA SCALA E CIO' DA' LUOGO AL DECADIMENTO A POTENZA.

NOTA: SI STA CHIAMANDO $\psi(m, T)$ L'ENERGIA LIBERA DEL CASO $h = 0$.
 ψ' E' UNA DERIVATA RISPETTO A m



*NOTA:
 $\chi = \beta \int G(x) dx = \beta \tilde{G}_0(0) = \frac{\beta}{(4-2Dp)} = 5$

• RICAPITOLIAMO

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c}{\simeq} |T - T_c|^{-\nu}$$

$$\nu_{MF} = \frac{1}{2}$$

$$G(m) \Big|_{\substack{h=0 \\ T=T_c}} \simeq m^{-(D-2+\eta)} \quad \uparrow \text{ DIMENSIONE ANOMALA}$$

$$\eta_{MF} = 0$$

$$m(T) \Big|_{h=0} \underset{T \rightarrow T_c}{\simeq} |T - T_c|^p$$

$$p_{MF} = \frac{1}{2}$$

$$\chi(T) \Big|_{h=0} \simeq |T - T_c|^{-\gamma}$$

$$\gamma_{MF} = 1$$

$$C(T) \Big|_{h=0} \simeq |T - T_c|^{-\alpha}$$

$$\alpha_{MF} = 4 - D$$

$$m(h) \Big|_{T=T_c} \simeq |h|^{1/\delta}$$

$$\delta_{MF} = 3$$

(LE ULTIME DUE NON LE ABBIAMO DIMOSTRATE).

IL LIMITE DI VOLUME INFINITO

LA NOSTRA TEORIA È BEN DEFINITA PER $V \rightarrow \infty$?

PRENDIAMO LA GRANDEZZA INTENSIVA f_v E STUDIAMOLA NEL LIMITE $V \rightarrow \infty$ (SU DI UN RETICOLO CENTERED CUBIC).

NEL MODELLO DI ISING, $h=0$, L'ENERGIA È LIMITATA:

$-ND \leq E \leq ND \rightarrow$ STATO FONDAMENTALE DI UN ANTIFERROMAGNETE (STAGGERED), $\sigma_{xy} = (-1)^{x+y+z}$

VI SONO IN TOTALE 2^N CONFIGURAZIONI. POICHÉ

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}$$

NOTA: CIASCUNO DEGLI N SPIN HA 2D PAIRI VICINI E ALLA FINE DIVIDO PER 2 COSÌ DA CONTARE OGNI COPPIA UNA SOLA VOLTA.

ALLORA

$$2^N e^{-\beta ND} \leq Z_N \leq 2^N e^{\beta ND}$$

PRENDENDO IL $\ln$ E DIVIDENDO PER N ,

$$\frac{1}{\beta} \ln 2 - D \leq \frac{1}{\beta N} \ln Z_N \leq \frac{1}{\beta} \ln 2 + D$$

$$-D + \frac{1}{\beta} \ln 2 \leq -f_N \leq D + \frac{1}{\beta} \ln 2$$

QUINDI f_N NON DIVERGE CON N .

SIA ALLORA $N = L^D$ (IPERCUBO) E SCEGLIAMO CONDIZIONI AL BORDO LIBERE (FBC, NO INTERAZIONI SUI BORDI).

PRENDIAMO DUE SISTEMI DI TAGLIA LINEARE L E $2L$:

$$Z_{(2L)^D} = (Z_{L^D})^{2^D} + O(L^{D-1})$$

$\hookrightarrow$ TERMINI DI BORDO

COME QUANTIFICHIAMO IL CONTRIBUTO* DEL BORDO?

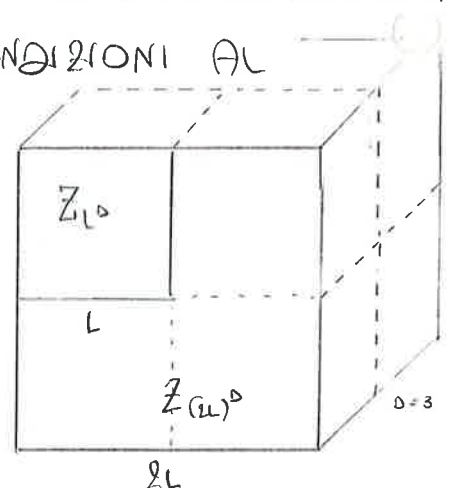
$$D(2L)^{D-1}$$

DO' SIGNIFICA CHE (F STA PER "FREE")

$$(Z_{L^D}^{(F)})^{2^D} e^{-D(2L)^{D-1}\beta} \leq Z_{(2L)^D}^{(F)} \leq (Z_{L^D}^{(F)})^{2^D} e^{D(2L)^{D-1}\beta}$$

$$2^D \ln Z_{L^D}^{(F)} - D(2L)^{D-1}\beta \leq \ln Z_{(2L)^D}^{(F)} \leq 2^D \ln Z_{L^D}^{(F)} + D(2L)^{D-1}\beta$$

MODI DI AFFETTARE
SUPERFICIE DI SEPARAZIONE (INTERNA)
*NOTA: $D(2L)^{D-1}$ SONO IL NUMERO MASSIMO DI SPIN CHE POSSONO CAMBIARE. IN $D=2$ SI HA $2 \cdot (2L)$; IN $D=3$, $3 \cdot (2L)^2$, PROVA A VISUALIZZARLI (È LA CROCE NEL QUADRATO).



E QUINDI, RACCOGLUENDO I TERMINI IDENTICI E DIVIDENDO PER $(2L)^D$,

$$-D(2L)^{D-1} \leq \frac{1}{\beta} \left(\ln Z_{(2L)^D}^{(F)} - 2^D \ln Z_{L^D}^{(F)} \right) \leq D(2L)^{D-1}$$

$$-\frac{D}{2L} \leq -\frac{1}{\beta(2L)^D} \ln Z_{(2L)^D}^{(F)} + \frac{1}{\beta L^D} \ln Z_{L^D}^{(F)} \leq \frac{D}{2L} \Rightarrow \left| f_{(2L)^D} - f_{L^D} \right| \leq \frac{C}{L}$$

I TEOREMI STANDARD MI ASSICURANO CHE QUESTA SEQUENZA CONVERGA: QIO' IMPLICA CHE f AMMETTA UN BUON LIMITE, PER ISING, QUANDO $V \rightarrow \infty$ (LIMITE TERMODINAMICO).

NOTA: HO MOSTRATO, INSOMMA, CHE SE PRENDI UN SISTEMA 2⁰ VOLTE PIU' GRANDE DEL PRIMO f NON CAMBIA SE NON PER TERMINI TRASCURABILI NEL LIMITE TERMODINAMICO.

APPENDICE: SUL DECADIMENTO ESPONENZIALE DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE.

NEL CERCARE IL PUNTO SINGOLARE P_S DI $\gamma(p)$ PIU' VICINO ALL'ASSE β , SI ERANO SUPPOSTI

$$P_\mu \approx 0 \text{ se } \mu = 2, \dots, D.$$

PER MOSTRARE CHE E' CORRETTO, SCEGLIAMO UN ALTO DEI P_μ NON NULLO,

$$P_\alpha = O(\varepsilon), \quad \alpha \neq 1$$

$$\cos P_\alpha \approx 1 - \frac{P_\alpha^2}{2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

E RIPETIAMO I CONTI: AVENDO CHIAMATO $P_x \equiv P$,

$$1 - 2\beta \left(\cos P + \sum_{\mu=2}^D \cos P_\mu \right) = 0$$

$$1 - 2\beta \cos(\tilde{P}_S) - 2\beta(D-1) + 2\beta \frac{\varepsilon^2}{2}(D-1) = 0$$

$$\tilde{P}_S = \arccos \left[1 + \frac{1 - \beta/\beta_c}{2\beta} + \frac{\varepsilon^2}{2}(D-1) \right] \approx i \sqrt{\left(1 - \frac{\beta}{\beta_c}\right) \frac{1}{2\beta} + \frac{\varepsilon^2}{2}(D-1)} > P_S = i \sqrt{\left(1 - \frac{\beta}{\beta_c}\right) \frac{1}{2\beta}}$$

QUINDI IN EFFETTI L'ASSUNZIONE E' GIUSTIFICATA.

SI NOTI CHE SI STA DANDO UN RUOLO PRIVILEGIATO A $P = P_x$, RISPETTO A TUTTI GLI ALTRI, PERCHE' STIAMO STUDIANDO $G(m)$ NELL'IPOTESI SEMPLIFICATIVA IN CUI SI CONSIDERANO DUE PUNTI A DISTANZA m LUNGO L'ASSE x .

ESPANSIONI AD ALTE E BASSE T

LO STUDIO DEL MODELLO DI ISING CHE ABBIAMO INTRODOTTRO PROSEGUE ATTRAVERSO ESPERIMENTI, SOLUZIONI NUMERICHE O LA RICERCA DI SOLUZIONI ESATTE O APPROSSIMATE.

NOTO IL COMPORTAMENTO A $T=0$, STUDIAREMO CHE COSA SUCCEDDE A BASSE T ; SIMILMENTE CI METTEREMO NEL LIMITE $T \rightarrow \infty$ PER TROVARE UN' ESPANSIONE PER PICCOLI β .

ANDREMO INCONTRO A UNA "CATASTROFE": LE NOSTRE ESPANSIONI PERTURBATIVE PRESENTANO DELLE DIVERGENZE. PROPRIO PER ELIMINARE LE DIVERGENZE DELLA TEORIA INTRODURREMO IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE. L'IDEA E' QUESTA: SE CONOSCO QUALCOSA DELLA FISICA DEL MODELLO (AD ESEMPIO SE SO CHE CERTE QUANTITA' DEVONO RESTARE BEN DEFINITE VICINO AL PUNTO CRITICO) E RIESCO A INSERIRLO NELLA TRATTAZIONE MATEMATICA, ARRIVO MOLTO PIU' LONTANO.

CI RIFAREMO COME SEMPRE AL MODELLO DI ISING. GIA' IN $D=3$ ESSO NON AMMETTE SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA; INTRODURREMO PERCIO' IL MODELLO GAUSSIANO, CHE E' LOCALE E CHE RESTITUISCE LA SOLUZIONE DI CAMPO MEDIO NEL LIMITE DI PICCOLI β (O T GRANDI).

CHIARAMENTE, SE NON FOSSE PER LA PRESENZA DELLE TRANSIZIONI, LO STUDIO A $T=0$ CI DIREBBE GIA' TUTTO SUL SISTEMA.

• ESPANSIONE A BASSE T

SO CHE A $T=0$ TUTTI GLI SPIN SONO ALLINEATI ($\uparrow\uparrow\uparrow$ oppure $\downarrow\downarrow\downarrow$).

A PICCOLE T , ALCUNI SPIN INIZIANO A RIGIRARSI; INFATTI IN

$$F = U - \frac{S}{\beta}$$

COMPETONO IL TERMINE ENERGETICO E IL TERMINE ENTROPICO.

QUEST' ULTIMO INIZIA A CONTARE NON APPENA ACCENDO T E

DA' POCO AL FATTO CHE LA CONFIGURAZIONE CON TUTTI GLI SPIN ALLINEATI E' UNA SOLA (MENTRE AD ESEMPIO VE NE SONO N CON UNO SPIN ROVESCIATO).

SENZA PERDERE DI GENERALITA', SCEGLIAMO UNO STATO INIZIALE $|+\rangle$ TALE CHE TUTTI GLI SPIN VALGANO $+1$ A $T=0$.

CI CHIEDIAMO QUANTO VALGA $P(1 \text{ SPIN GIATO})$: QUESTA, UNITA A $P(\text{TUTTI } \uparrow)$, DOPPREBBE BASTARE A DARE UNA DESCRIZIONE ACCURATA DEL SISTEMA SE $T \ll 1$. QUANDO T CRESCE, DIVERRANNO IMPORTANTI LE CONFIGURAZIONI CON 2 SPIN GIATI.

CHIAMIAMO IN GENERALE

$$K = \# \text{ SPIN GIATI}$$

PER $K=0$ HO IL COSIDDETTO GROUND STATE.

CONSIDERIAMO UN SISTEMA CON N SPIN IN D DIMENSIONI, CON $N = L^D$

SCEGLIAMO UN RETICOLO SEMPLICE (SCATOLA CUBICA) CON P.B.C.. SIA L FINITO (SOLO ALLA FINE MANDEREMO $L \rightarrow \infty$), MA $L > K$.

CONTIAMO LE CONFIGURAZIONI CON:

TUTTI $+1$:

1

1 SPIN -1 :

N

2 SPIN -1 :

$$\frac{1}{2} N(N-1) = \binom{N}{2}$$

2 SPIN -1 , VICINI :

$$N \cdot (2D) \cdot \frac{1}{2} = ND \quad (\text{TANTE QUANTE I LEGAMI})$$

$\uparrow$ SPIN $\uparrow$ PRIMI VICINI $\uparrow$ CONTO UNA VOLTA SOLA OGNI COPPIA

CALCOLIAMO L'ENERGIA DI

QUESTE CONFIGURAZIONI USANDO

$$E = - \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

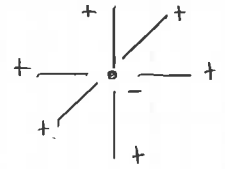


AVENDO SCELTO CONDIZIONI PERIODICHE AL BORDO, HO ND TERMINI DIVERSI E PERCIO' L'ENERGIA DELLO STATO FONDAMENTALE E'

$$E_0 = -ND$$

QUANDO UNO SPIN È GIRATO,

$$E_1 = E_0 + 4D$$

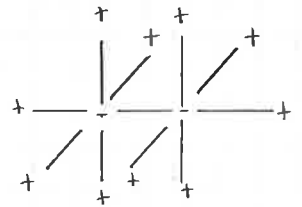


INFATTI SI ABBANNO 2D LEGAMI ROTTI E CIASCUNO FA CRESCERE DI 2 L'ENERGIA. SIMILMENTE, 2 SPIN GIRATI NON ADIACENTI DANNNO

$$E_{2 \text{ N.A.}} = E_0 + 8D$$

MENTRE SE NE GRUO 2 VICINI

$$E_{2 \text{ N.N.}} = E_0 + 8D - 4$$



AD ESEMPIO, NEL CASO $D=3$ MOSTRATO A FIANCO

SONO ROTTI SOLO 10 DEI 12 LEGAMI PRESENTI, SE LI CONTASSI COME PER IL CASO A SPIN NON ADIACENTI.

SCHIVIAMO QUINDI UN'APPROSSIMAZIONE DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE INCLUDENDO $k=0, 1, 2$. AVREMO

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H[\sigma]}$$

$$\approx \underset{k=0}{1 \cdot e^{-\beta E_0}} + \underset{k=1}{N \cdot e^{-\beta(E_0+4D)}} + \underset{k=2, \text{ vicini}}{ND \cdot e^{-\beta(E_0+8D-4)}} + \underset{k=2, \text{ LONTANI}}{\frac{N^2-N-2ND}{2} \cdot e^{-\beta(E_0+8D)}}$$

DEFINIAMO

$$t = e^{-4\beta D}$$

IL PARAMETRO DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO, IN TERMINI DEL QUALE

$$\underset{\text{LOW T}}{Z} \approx e^{-\beta E_0} \left(1 + Nt^D + ND t^{2D-1} + \frac{N(N-1-2D)}{2} t^{2D} + \dots \right)$$

ALLORA

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{\beta N} \ln Z = -\frac{1}{\beta N} \ln \left\{ e^{\beta N D} (1 + Nt^D + \dots) \right\} \\ &= -D - \frac{1}{\beta N} \ln \left(1 + \sum_{j=1}^K C_j \right) \end{aligned}$$

DOVE $-D$ È IL CONTRIBUTO DEL GROUND STATE, MENTRE

$C_j =$ CONTRIBUTO DI j SPIN (-1)

$$C_j = O(N^j)$$

SE PRENDO SUBITO

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f = 0$$

OTTENGO BANALMENTE ZERO: NON È L'APPROCCIO CORRETTO. INVECE:

i) ESPANDO f IN T NEL VOLUME FINITO (OIE' A N FISSATO);

ii) PRENDO IL $\lim_{N \rightarrow \infty} f$, CHE È COSÌ BEN DEFINITO.

USANDO $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, ESPANDIAMO FINO A $K=3$

$$\ln\left(1 + \sum_{j=1}^K C_j\right) \approx (C_1 + C_2 + C_3) - \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)^2 + \frac{1}{3}(C_1 + C_2 + C_3)^3$$

$$\approx C_1 + C_2 + C_3 - \frac{1}{2}(C_1^2 + 2C_1C_2) + \frac{C_1^3}{3}$$

$$\approx C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2}\right) + \left(C_3 - C_1C_2 + \frac{C_1^3}{3}\right)$$

DOVE SI È RACCOLTO, NELL'ULTIMO PASSAGGIO, IN POTENZE DI N .

SI È PERCIÒ' TROVATA

$$f \approx -D - \frac{1}{\beta N} \left[C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2}\right) + \left(C_3 - C_1C_2 + \frac{C_1^3}{3}\right) \right]$$

I TERMINI RILEVANTI (FINO A $K=2$) SONO

$$\begin{cases} C_1 = N t^D \\ C_2 = \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} - ND\right) t^{2D} + ND t^{2D-1} \\ \frac{C_1^2}{2} = \frac{N^2}{2} t^{2D} \end{cases}$$

PERCIÒ'

$$f_{K=2} = -D - \frac{1}{\beta N} \left[C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2}\right) \right]$$

$$= -D - \frac{1}{\beta} \left[t^D + \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{2} - D\right) t^{2D} + D t^{2D-1} - \frac{N}{2} t^{2D} \right]$$

$$= -D - \frac{1}{\beta} \left[t^D - \frac{1}{2} t^{2D} + D(t^{2D-1} - t^{2D}) \right]$$

NOTIAMO CHE SI SONO CANCELLATI TUTTI I TERMINI IN N^2 , COE' QUELLI CHE RENDEVANO f DIVERGENTE NEL LIMITE $N \rightarrow \infty$: LA f_{2N} COSI' TROVATA NON DIPENDE DA N . QUESTA E' UNA PROPRIETA' GENERALE, SE L'INTERAZIONE E' A CORTO RAGGIO, E RISPONDE IL FATTO CHE IL SISTEMA SIA BEN DEFINITO:

$$\forall K, L > K, \quad f_N^{(K)} \text{ NON DIPENDE DA } N \text{ (E' INTENSIVA)}.$$

SI RICONOSCONO IN $f_{K=2}$ I CONTRIBUTI DI 1 O 2 SPIN RUOTATI.

L'ANALISI PUO' ESSERE ESTESA PER GRANDI K (FINO A $\sim t^{20}$) PER AVVICINARSI AL PUNTO CRITICO E STIMARE I COEFFICIENTI CRITICI.

ESEMPI

NOTA: E' SVOLTO NEL "FOCUS" TRA UN PAIO DI PAGINE.

CALCOLA $f_{K=3}$ E $m_{N=2} = \langle \sigma \rangle$.

CONSEGUENZE DELL'INDIPENDENZA DA N DI f_N NEI SISTEMI SHORT-RANGED
SE FACCIAMO LE COSE BENE, AD OGNI ORDINE PERTURBATIVO I TERMINI PIU' CHE LINEARI IN N SI CANCELLANO.

CONSIDERIAMO UN CLUSTER DI SPIN E ASSUMIAMO CHE ESSO DIA UN CONTRIBUTO NA ALLA FUNZIONE DI PARTIZIONE. PRENDIAMO M COPIE BEN SEPARATE DI QUESTO CLUSTER; QUESTE DARANNO UN CONTRIBUTO

$$\frac{(NA)^M}{M!}$$

NOTA: NELLA PROSSIMA PAGINA SI SPIEGA PERCHE'.

(SI E' TENUTO CONTO DELLE PERMUTAZIONI). LA SOMMA DI QUESTI CONTRIBUTI AL VARIANTE DI M DA'

$$\sum_m \frac{(NA)^m}{m!} \sim e^{NA}$$

QUINDI L'ENERGIA LIBERA VALE

$$F \sim -\frac{1}{\beta} \ln Z \sim -\frac{1}{\beta} (NA)$$

*NOTA: INTENDE I TERMINI CHE VANNO COME N^2 O PIU' ESSI VENGONO DA EFFETTI DI VOLUME ESCLUSO E DALLA DIFFERENZA DI ENERGIA TRA SPIN SEPARATI O A CONTATTO.

LA SOMMA DEGLI EFFETTI DI CLUSTER INDIPENDENTI DA' QUINDI UN RISULTATO BANALE. L'EFFETTO FISICO INTERESSANTE* VIENE DAL

NEL CALCOLO DI $\int_{n=2}$, IL TERMINE N^2 VENIVA DAL CASO IN CUI I DUE SPIN NON SI TOCCANO.

*
NOTA: DIVERGO AI CLUSTER
CONNESSI. SI VEDE MEGLIO
NEL COMTO CON $K=3$ (VEDI FOCUS).

AW ORDINE N , UN CLUSTER CONTRIBUISCE CON

$$f \sim \frac{1}{\beta N} \log(A N)$$

CON A COSTANTE. SE HO 2, 3 ..., m CLUSTER, AVRÒ UN CONTRIBUTO A Z

$$\frac{(AN)^3}{m^1}$$

COME CON LE FUNZIONI DI PARTIZIONE: SE NON SI TOCCANO, NE FACCIO IL PRODOTTO,

$$\left(\sum_S \right) \left(\sum_S \right) \dots$$

SOMMANDO I CONTRIBUTI DI m COPIE AL VARIABILE DI m ,

$$f \approx \frac{1}{\beta N} \ln \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(NA)^m}{m!} \right) = \frac{1}{\beta N} NA = \frac{1}{\beta} A$$

NOTA: IN EFFETTI SE SCAMBIO
DUE CLUSTER UGUALI IN POSIZIONI
DIVERSE TRAVO LA STESSA CONFIG.

L' $m!$ SERVE A NON CONTARE PIU' VOLTE LE CONFIGURAZIONI UGUALI.

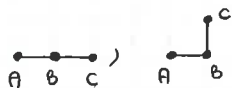
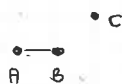
LA f COSÌ TROVATA NON È ESTENSIVA CON N ; IN TEORIA DELLE PERTURBAZIONI, CIO' DEVE ESSERE VERIFICATO A TUTTI GLI ORDINI.

• FOCUS: CALCOLO DELL'ENERGIA LIBERA $\sum_{k=3} (BASSE T)$

DOBBIAMO CONTARE INNANZITUTTO LE CONFIGURAZIONI CON 3 SPIN GIATI.

... QUALSIASI

$$\binom{N}{3} = \frac{1}{6} N(N-1)(N-2) \quad (1)$$



... DISTANTI

$$\text{LEGAMI TOTALI} \rightarrow (ND)(N - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SITO C}}}{2D} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VICINI DI A}}}{2D} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VICINI DI B}}}{2D}) = ND(N - 4D) \quad (2)$$

$$\text{SITO A} \rightarrow N(2D)(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MODI DI SCEGLIERE B}}}{2D-1}) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MODI DI SCEGLIERE C}}}{\frac{1}{2}} = ND(2D-1) \quad (3)$$

$$(1) - (2) - (3) = N \left[\frac{1}{6}(N^2 - 3N + 2) + D(2D+1) - ND \right] \quad (4)$$

ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO CON LE CONFIGURAZIONI A 2 SPIN GIATI, ORA NE CALCOLIAMO LE ENERGIE. OTTENIAMO

$$E_0 = -ND$$

$$1$$

$$E_1 = E_0 + 4D$$

$$N$$

$$E_2^L = E_0 + 8D$$

$$\binom{N}{2} - ND$$

$$E_2^V = E_0 + 8D - 4$$

$$ND$$

$$E_3^L = E_0 + 3 \cdot (2D) \cdot 2 = E_0 + 12D$$

$$N \left[\frac{1}{6}(N^2 - 3N + 2) + D(2D-1) - ND \right] \equiv A(N)$$

$$E_3^{2V} = E_0 + 12D - 4$$

$$ND(N-4D)$$

$$E_3^{3V} = E_0 + 12D - 8$$

$$ND(2D-1)$$

LO SVILUPPO A BASSE T DELLA FUNZIONE DI PARTIZIONE DA'

$$Z \simeq e^{\beta E_0} \left\{ 1 + Nt^D + NDt^{2D-1} + \left[\binom{N}{2} - ND \right] t^{2D} + ND(2D-1)t^{3D-2} + ND(N-4D)t^{3D-1} + A(N)t^{3D} \right\}$$

ON ERA DERIVATA QUINDI

$$\sum_{k=3} = -\frac{1}{\beta N} \ln Z = -D - \frac{1}{\beta N} \ln \left\{ 1 + \sum_{j=1}^3 C_j \right\} = -D - \frac{1}{\beta N} \left\{ C_1 + \left(C_2 - \frac{C_1^2}{2} \right) + \left(C_3 - C_1 C_2 + \frac{C_1^3}{3} \right) \right\}$$

DOVE RICONOSCIAMO

$$\begin{cases} C_1 = Nt^D \\ C_2 = \left[\binom{N}{2} - ND \right] t^{2D} + NDt^{2D-1} \\ C_3 = A(N)t^{3D} + ND(N-4D)t^{3D-1} + ND(2D-1)t^{3D-2} \end{cases}$$

SOSTITUENDO NELL' ESPRESSIONE PER $f_{N=3}$ SI TROVA

$$f_{N=3}' = -D - \frac{1}{\beta} \left\{ t^D + Dt^{2D-1} - \left(D + \frac{1}{2}\right)t^{2D} + D(2D-1)t^{3D-2} \right. \\ \left. - 4D^2t^{3D-1} + \left(\frac{1}{3} + 2D^2 + D\right)t^{3D} \right\}$$

OSSERVIAMO CHE SI SONO CANCELLATI, IN $\log Z$, TUTTI I CONTRIBUTI PIU' CHE LINEARI IN N : DAI CALCOLI COMBINATORI SOLTI SI VEDE COME ESSI PROVENISSERO SOLAMENTE DAI CLUSTER DISCONNESSI.

FOCUS: CALCOLO DELLA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA (BASSE T)

STAVOLTA L'HAMILTONIANA COMPLETA SI SCRIVE

$$H = - \sum_{i,j} \sigma_i \cdot J_{ij} \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

IL TERMINE MAGNETICO CONTRIBUISCE CON

$$E_0 = -Nh$$

$$E_1 = -(N-2)h$$

$$E_2 = -(N-4)h$$

NEL CASO IN CUI TUTTI GLI SPIN SIANO ALLINEATI CON IL CAMPO h O VE NE SIANO 1 O 2 RUOTATI. ALLORA

$$Z = e^{\beta Nd - \beta Nh} \left[1 + N e^{\beta 2h} t^D + N D e^{\beta 4h} t^{2D-1} + \frac{N(N-1-2D)}{2} e^{\beta 4h} t^{2D} + \dots \right]$$

IL CALCOLO PROCEDE IN MODO DEL TUTTO ANALOGO A PRIMA, SE NON CHE ORA I CONTRIBUTI C_k DI k SPIN RUOTATI CHE USEREMO SONO

$$\begin{cases} C_1 = N e^{\beta 2h} t^D \\ C_2 = \left[\left(\frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} - ND \right) t^{2D} + ND t^{2D-1} \right] e^{\beta 4h} \\ \frac{C_1^2}{2} = \frac{N^2}{2} t^{2D} \end{cases}$$

ALLORA

$$\begin{aligned} f &= - \frac{1}{\beta N} \ln Z \\ &= -D + h - \frac{1}{\beta N} \left[C_1 + C_2 - \frac{C_1^2}{2} \right] \end{aligned}$$

E POSSIAMO CALCOLARE

$$m(h) = \frac{df}{dh}$$

INFINE LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA VALE

$$m^+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = 1 - 2t^D + 2t^{2D} \left[2D(1-t^{-1}) + 1 \right] + \dots$$

FOCUS: MATRICE DI COVARIANZA DI UNA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

$$P(\underline{z}) = C_N e^{-\frac{1}{2}(\underline{z}-\underline{m}), \hat{A}(\underline{z}-\underline{m})} \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^N$$

DOVE $\hat{A}$ È UNA FORMA BILINEARE (MATRICE SIMMETRICA). CAMBIO DI VARIABILI A

$$\underline{x} \equiv \underline{z} - \underline{m} \quad \Rightarrow \quad P(\underline{x}) = C_N e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})}$$

POICHÉ $\hat{A}$ È SIMMETRICA, È DIAGONALIZZATA DA $\hat{S}$ ORTOGONALE ($\hat{S}^T = \hat{S}^{-1}$):

$$(\underline{x}, \hat{A}\underline{x}) = (\hat{S}\underline{y}, \hat{A}\hat{S}\underline{y}) = (\hat{S}^T\hat{S}\underline{y}, \hat{S}^T\hat{A}\hat{S}\underline{y}) = (\underline{y}, \hat{\Lambda}\underline{y})$$

$$\underline{x} \equiv \hat{S}\underline{y}, \quad \hat{\Lambda} \equiv \hat{S}^T\hat{A}\hat{S} \quad \Rightarrow \quad P(\underline{y}) = C_N e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i y_i^2} = C_N \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2}$$

PERCHÉ $P(\underline{y})$ SIA NORMALIZZABILE, RICHIEDO

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \hat{A} \text{ DEFINITA POSITIVA}$$

$$\int d^N y P(\underline{y}) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_N = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\lambda_i}{2\pi}} = (2\pi)^{-N/2} \sqrt{\det \hat{A}}$$

INOLTRE

$$\langle y_i \rangle = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \langle z_i \rangle = m_i$$

DEFINIAMO INFINE LA MATRICE DI COVARIANZA

$$(\hat{C})_{ij} = \langle (z_i - m_i)(z_j - m_j) \rangle = \langle z_i z_j \rangle - m_i m_j$$

USANDO I PRODOTTI DIADICI,

$$\hat{C} = \langle \underline{x} \otimes \underline{x} \rangle = \langle (\hat{S}\underline{y}) \otimes (\hat{S}\underline{y}) \rangle = \hat{S} \langle \underline{y} \otimes \underline{y} \rangle \hat{S}^T$$

CHE SI VEDE MEGLIO UTILIZZANDO IL FORMALISMO BRACKET,

$$\underline{x} \otimes \underline{x} \equiv |\underline{x}\rangle \langle \underline{x}| = |\hat{S}\underline{y}\rangle \langle \hat{S}\underline{y}| = \hat{S} |\underline{y}\rangle \langle \underline{y}| \hat{S}^T$$

MA LA $P(\underline{y})$ FATTORIZZA, QUINDI

$$\langle y_i y_j \rangle = \delta_{ij} \lambda_j^{-1} \quad \Rightarrow \quad \langle \underline{y} \otimes \underline{y} \rangle = \hat{\Lambda}^{-1}$$

INFINE, NOTANDO CHE

$$\hat{\Lambda} = \hat{S}^T \hat{A} \hat{S} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Lambda}^{-1} = \hat{S}^T \hat{A}^{-1} \hat{S}$$

CONCLUDIAMO CHE

$$\hat{C} = \hat{S} \langle \underline{y} \otimes \underline{y} \rangle \hat{S}^T = \hat{S} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{S}^T = \hat{A}^{-1}$$

* IN ALTERNATIVA, SI PUÒ USARE IL TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE:

$$Z[h] = (\det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{ij} h_i A_{ij}^{-1} h_j} \quad \hat{A} = -\beta \hat{J} + \Pi$$

$$\langle \sigma_\mu \sigma_\nu \rangle = \frac{V}{\beta} \chi_{\mu\nu} = -\frac{V}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial h_\mu \partial h_\nu} \ln Z[h] = \left(+\frac{1}{\beta}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial h_\mu \partial h_\nu} \ln Z[h] = (A^{-1})_{\mu\nu}$$

MODELLO GAUSSIANO

INTRODUCIAMO IL MODELLO GAUSSIANO: SI TRATTA DI UN MODELLO LOCALE CHE AMMETTE COME SOLUZIONE QUELLA DI CAMPO MEDIO PER ALTE T (MA CI PERMETTE DI ANDARE OLTRE IL CAMPO MEDIO).

IN QUESTO MODELLO GLI SPIN $\sigma_i \in \mathbb{R}$ (NON PIU' ± 1); COME AL SOLITO, SONO POSIZIONATI SU DI UN RETICOLO

$$\Lambda^D \in \mathbb{Z}^D$$

GLI SPIN SONO DISTRIBUITI SECONDO

$$dP(\sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_i^2/2} d\sigma_i$$

RICORDIAMO CHE

$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{\int P(\sigma) \sigma^2 d\sigma}{\int P(\sigma) d\sigma} = 1$$

$$\langle \sigma^4 \rangle = 3$$

$$\langle \sigma^{2m} \rangle = (2m-1)!!$$

*NOTA: IN GENERALE

$$Z[h] = \int \prod_i dP_0(\sigma_i) e^{-\beta H[\sigma]}$$

IN ASSENZA DI INTERAZIONI SPIN-SPIN, OSSIA PER $\beta=0$, LA PROBABILITA' CHE $\sigma < \sigma_i < \sigma + d\sigma$ E' $P_0(\sigma) d\sigma = dP_0(\sigma)$

HO IL MODELLO DI ISING PER

$$P_0(\sigma) = \delta(1-\sigma^2) = \frac{1}{2} [\delta(\sigma+1) + \delta(\sigma-1)]$$

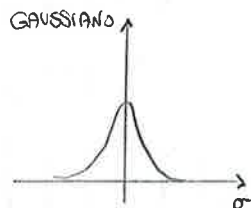
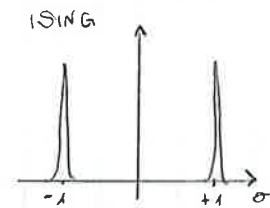
QUI INVECE LA SCELGO GAUSSIANA.

$$\text{NOTA: } \langle \sigma^{2m} \rangle = (2m-1)!! \cdot (\text{VAR}[\sigma])^m$$

L'HAMILTONIANA E' COME QUELLA DI ISING:

$$H[\sigma] = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \sigma_i J_{ik} \sigma_k - \sum_i h_i \sigma_i$$

$$J_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{SE } |i-k|=1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



NOTA CHE ANCHE IN ISING SI USAVA, OLTRE A $e^{-\beta H[\sigma]}$, UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' A PRIORI* DELLE σ_i NELLA MISURA: ERA UNA SOMMA DI DUE δ . ORA INVECE LA FUNZIONE DI PARTIZIONE E'

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \left(\prod_{i=1}^N d\sigma_i \right) \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq k} \sigma_i J_{ik} \sigma_k + \beta \sum_i h_i \sigma_i - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 \right\} = \int d\mu$$

LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE SI CALCOLA COME

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \frac{\int d\mu \sigma_i \sigma_k}{\int d\mu}$$

MOSTRIAMO ORA CHE $\langle \sigma_i \sigma_r \rangle$ CALCOLATA IN QUESTO MODELLO
 COINCIDE CON IL RISULTATO MF-ISING. AFFRONTEREMO IL CALCOLO
 PRIMA IN MODO ALGEBRICO E POI IN MODO DIAGRAMMATICO.

AVEREMO BISOGNO DEGLI INTEGRALI GAUSSIANI

$$\int dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

$$I = \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) e^{-\left[\frac{1}{2} \sum_{i,r} x_i A_{ir} x_r + \sum_i b_i x_i \right]} = (?) \quad (I_a)$$

CON A_{ik} MATRICE $N \times N$, x_i E b_i VETTORI A N COMPONENTI (b SI
 DICE "SORGENTE"). SIA A_{ik} SIMMETRICA, REALE E DEFINITA POSITIVA,
 $A_{ik} \in \mathbb{R}$, $A_{ik} = A_{ki}$

AUORA A_{ik} È DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI $\alpha_i > 0$. NE SEGUE

$$I = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_i A_{ik}^{-1} b_k \right\} \quad \text{NOTA: VEDI FOCUS TRA 7 PAGINE.} \quad (I_b)$$

IL $\det A$ CONTIENE IL CONTRIBUTO DEGLI AUTOVALORI,

$$\det A = \prod_i \alpha_i$$

LA MATRICE INVERSA È t.c.

$$\sum_r A_{ik}^{-1} A_{rj} = \delta_{ij}$$

* VALGONO LE RELAZIONI

$$\underline{\det A = e^{\text{Tr}(\ln A)}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tr}(\ln A) = \ln(\det A)$$

NOTO: DIMOSTRO QUESTA E LA (I) IN
 UN FOCUS PIÙ AVANTI.

INOLTRE, DATO $z \in \mathbb{R}$, A MATRICE,

$$\ln(A + z\mathbb{1}) = \ln(1 + (A + z\mathbb{1} - 1)) = (A + z\mathbb{1} - 1) - \frac{1}{2}(A + z\mathbb{1} - 1)^2 + \frac{1}{3}(A + z\mathbb{1} - 1)^3 - \dots$$

$$\frac{d}{dz} \ln(A + z) = 1 - (A + z - 1) + (A + z - 1)^2 - \dots \stackrel{*}{=} 1 + (1 - A - z) + (1 - A - z)^2 \dots$$

RICONOSCENDO LO SVILUPPO

$$\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3$$

*NOTA: ANCHE SE NON LO NOTI, PROSEGUI
 TRANQUILLAMENTE RICOSTRUIENDO $\frac{1}{1+x}$.

OTTENIAMO

$$\frac{d}{dz} \ln(A+z) = \frac{1}{A+z}$$

* POSSIAMO QUINDI TORNARE AL MODELLO GAUSSIANO E CALCOLARE Z .

$$h=0$$

$$Z = \int d\mu = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\prod_i d\sigma_i \right) e^{\frac{\beta}{2} \sum_{ik} \sigma_i \delta_{ik} \sigma_k - \sum_i \frac{\sigma_i^2}{2}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\prod_i d\sigma_i \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_i A_{ik} \sigma_k} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}$$

DOVE SI È DEFINITA

$$A_{ik} = -\beta \mathcal{J}_{ik} + \delta_{ik}$$

NOTA: NEL MODELLO DI ISING, SI ERA CHIAMATA

$$\hat{A}_{ik} = \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{J} \right)_{ik}^{-1} \rightarrow \langle \sigma_i \sigma_k \rangle = \frac{1}{\beta} \hat{A}_{ik}$$

QUI SI È DEFINITA

$$A_{ik} = \beta \left(\frac{\delta_{ik}}{\beta} - \mathcal{J}_{ik} \right) = \beta \hat{A}_{ik}^{-1}$$

QUINDI I RISULTATI PER $\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$ SONO COERENTI.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI VALE

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle = A_{ik}^{-1}$$

NOTA: TRUOQ QUESTA DIMOSTRAZIONE

INGIUSTIFICATAMENTE BREVE. NE RIPORTO

ALTRE DUE (CANONICHE) IN UN FOCUS 3 PAGINE INDIETRO.

CHIAMANDO, NEL CASO $h \neq 0$,

$$f_i = -\beta h_i$$

$$Z[f] = \int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_i A_{ik} \sigma_k - \sum_i f_i \sigma_i}$$

NOTA: BASTA APPLICARE LA (I). f È UN

NOME GENERICO, NON È L'ENERGIA LIBERA.

INOLTRE

$$d[\sigma] \equiv (2\pi)^{-N/2} \left(\prod_i d\sigma_i \right)$$

$$= Z[f=0] \cdot e^{\frac{1}{2} \sum_{ik} f_i A_{ik}^{-1} f_k}$$

$$\text{NOTA: } = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{ik} h_i A_{ik}^{-1} h_k}$$

CONSIDERO UNA SITUAZIONE IN CUI ACCENDO IL CAMPO IN SOLO DUE SITI,

$$\begin{cases} f_l = x, & f_m = y \\ f_i = 0 & \text{per } i \neq l, i \neq m \end{cases}$$

QUINDI

$$Z_{(x,y)} = \int d[\sigma] e^{-\frac{\sigma A \sigma}{2} - x \sigma_l - y \sigma_m}$$

$$= Z[0] e^{\frac{1}{2} (x^2 A_{ll}^{-1} + y^2 A_{mm}^{-1} + 2xy A_{lm}^{-1})}$$

(IIa)

SI RICORDI, INFATTI, CHE

$$A_{lm}^{-1} = A_{ml}^{-1}$$

SE IL CAMPO MAGNETICO E' PICCOLO, LO SONO ANCHE x E y .

SVILUPPANDO IN SERIE L'ARGOMENTO DELL'INTEGRALE IN x E y ,

$$\begin{aligned} Z(x, y) &\simeq \int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sigma A \sigma} \left(1 - x \sigma_l + \frac{1}{2} x^2 \sigma_l^2 + \dots \right) \left(1 - y \sigma_m + \frac{1}{2} y^2 \sigma_m^2 + \dots \right) \\ &= \int d[\sigma] e^{-\frac{1}{2} \sigma A \sigma} \left(1 - x \sigma_l - y \sigma_m + x y \sigma_l \sigma_m + \frac{x^2 \sigma_l^2}{2} + \frac{y^2 \sigma_m^2}{2} + \dots \right) \quad (\text{IIb}) \end{aligned}$$

CONFRONTANDO NELLE (IIa) E (IIb) I TERMINI IN xy , TROVAMO

$$\int d[\sigma] e^{-\sigma A \sigma} \sigma_l \sigma_m = Z[0] A_{lm}^{-1}$$

OSSIA, COME VOLEVAMO,

$$\langle \sigma_l \sigma_m \rangle = A_{lm}^{-1}$$

NOTA: $\hat{A} = 11 - \beta \hat{J}$.

★ LO STESSO CALCOLO PUO' ESSERE SVOLTO, IN MODO PIU' COMPLETO,

VALUTANDO PER INTERO

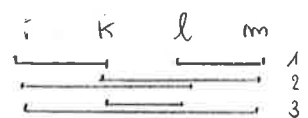
$$Z[h] \rightarrow \int = -\frac{1}{\beta V} \ln Z + \text{TH. FLUTTAZIONE E DISSIPAZIONE}$$

NOTA: (VEDI FOCUS)
 $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \left(+\frac{1}{\beta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j} \ln Z(h).$

SI POTREBBE DIMOSTRARE CHE VALE, PER LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

A PIU' PUNTI,

$$\langle \sigma_i \sigma_r \sigma_l \sigma_m \rangle = A_{ir}^{-1} A_{lm}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{rm}^{-1} + A_{im}^{-1} A_{rl}^{-1}$$



QUINDI, NEL MODELLO GAUSSIANO, LE POSSO RICONDURRE ALLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI. SIMILMENTE

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_r \sigma_l \sigma_m \sigma_n \rangle = A_{ij}^{-1} A_{rl}^{-1} A_{mn}^{-1} + 14 \text{ PERMUTAZIONI}$$

NOTA: SONO IN TUTTO
 $(6-1)!! = 15$.
 VEDI NOTA PROSSIMA PAGINA.

I TERMINI CHE CONTANO SONO QUELLI IN CUI I CAMPI FIGURANO AL QUADRATO NELL'INTEGRALE GAUSSIANO (CHE ALTRIMENTI E' NULLO).

I CONTRIBUTI NON NULLI PER LA FDC A K PUNTI SONO

$$(k-1)!!$$

POSSO ANCHE VEDERLO COME CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI WICK.

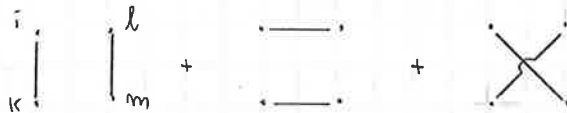
METODO DIAGRAMMATICO

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle$$



NOTA: QUELLI CON M DIAGRAMMI FANNO SEMPRE ZERO PERCHÉ HO SEMPRE UN σ "SCOPPIATO".

$$\langle \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m \rangle$$



$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \sigma_m \sigma_n \rangle$$



PER INTEGRALI GAUSSIANI, LE F.D.C. A MOLTI PUNTI SI POSSONO ESPRIMERE IN TERMINI DI QUELLE A 2 PUNTI.

TUTTI I DIAGRAMMI PER LE F.D.C. CON $m > 2$ SONO DISCONNESSI E LE UNICHE PARTI CONNESSE SONO LE F.D.C. A 2 SPIN. QUESTO È VERO NEL MODELLO GAUSSIANO, MA FALSO QUANDO C'È INTERAZIONE.

NEL MODELLO GAUSSIANO LE F.D.C. CON $m > 2$ SONO BANALI.

IL MODELLO GAUSSIANO RIPRODURRÀ IL CAMPO MEDIO PROPRIO PERCHÉ È UNA TEORIA LIBERA.

NOTA: LIBERA = SENZA INTERAZIONE.

FUNZIONI DI CORRELAZIONE CONNESSE A PIÙ PUNTI (DEF. RICORSIVA)

VOGLIAMO DARNE UNA DEFINIZIONE RICORSIVA.

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_i \rangle_c$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c + \langle \sigma_i \rangle_c \langle \sigma_j \rangle_c$$

OSSIA, COME NELLA SOLITA DEFINIZIONE,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle_c \langle \sigma_j \rangle_c$$

$$= \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

PROSEGUENDO,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle_c + \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \langle \sigma_k \rangle_c + (2 \text{ PERM.}) + \langle \sigma_i \rangle_c \langle \sigma_j \rangle_c \langle \sigma_k \rangle_c$$

E COSÌ VIA.

NOTA: SI PUÒ DIRE CHE

$$\langle m \rangle_c = \langle m \rangle - (\text{GUESS}, m-1)$$

DOVE IL GUESS È COSTRUITO CON LE COMBINAZIONI DI PRODOTTI DI $\langle m-1 \rangle$ (A MENO PUNTI).

IL FATTO CHE NEL GAUSSIANO LE $\langle m \rangle$ SI SCRIVANO IN TERMINI DELLE $\langle 2 \rangle$ CI DICE CHE L'UNICA $\langle m \rangle_c$ NON NULLA È LA $\langle 2 \rangle_c$.

NOTA: $(m-1)!!$ SONO I MODI IN CUI m OGGETTI POSSONO ESSERE DIVISI IN $k = \frac{m}{2}$ COPPIE (m È PARI). INFATTI $(m!! = 2^k \cdot k!)$

$$\frac{1}{(\frac{m}{2})!} \cdot \binom{m}{2} \cdot \binom{m-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} = \frac{1}{k!} \frac{m!}{2^{m-2}} \cdot \frac{(m-2)!}{2^{m-4}} \cdot \dots = \frac{m!}{2^k k!} = \frac{m!}{m!!} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots}{m(m-2)(m-4) \dots} = (m-1)!!$$

↳ PERMUTAZIONI TRA LE COPPIE

LE FDC CONNESSE SONO IMPORTANTI PERCHÉ :

1) PROPRIETÀ DI CLUSTERING

NOTA: SPESSO NEL SEGUITO LAVOREREMO A T ALTE, DOVE $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$.

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \xrightarrow{|i-j| \gg 1} 0 \quad (\text{VERO PER STATI PURI})$$

2) NEGLI APPROCCI DIAGRAMMATICI, SONO QUELLE LEGATE AI DIAGRAMMI CONNESSI.

3) SONO DIRETTAMENTE LEGATE A β :

$$\langle \prod_{\alpha=1}^m \sigma_{i_\alpha} \rangle_c = \beta^{-m} \prod_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial h_{i_\alpha}} \ln Z[h] = - \beta^{-(m-1)} \prod_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial h_{i_\alpha}} F[h]$$

PUNTO DELLA SITUAZIONE

IL MODELLO GAUSSIANO È SEMPLICE E RISOLIBILE IN MODO ESATTO, MA SOLO PER TEMPERATURE ALTE:

NOTA: EURISTICAMENTE, A $T=T_c$ GLI SPIN NON SI LIMITANO AD ALLINEARSI, MA IL LORO MODULO DIVERGE: INFATTI $\sigma \in \mathbb{R}$ (BINNEY).

$$\beta < \beta_c = (2D)^{-1}$$

PER $\beta > \beta_c$ NON ESISTE, PERCHÉ $\hat{A}$ NON È PIÙ POSITIVA DEFINITA.

PER QUANTO RIGUARDA LE FDC,

NOTA: QUINDI LA DISTRIBUZIONE NON È PIÙ NORMALIZZABILE.

GAUSSIANO LOCALE

↔

MF (ISING)

SI NOTI CHE PERO' NON ABBIAMO APPLICATO L'APPROSSIMAZIONE DI CAMPO MEDIO (FATTORIZZAZIONE DELLE $P(\sigma_i)$).

Sviluppo ad alte temperature (Modello Gaussiano)

PER $\beta=0$, $T=\infty$ GLI SPIN SONO COMPLETAMENTE SCORRELATI E GLI INTEGRALI FATTORIZZANO.

ESPANDIAMO QUINDI L'INTEGRANDO PER β PICCOLI. ESAMINIAMO

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \frac{\int (\prod_i d\sigma_i) \sigma_a \sigma_b e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2} + \beta \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_i \tilde{J}_{ij} \sigma_j}}{\int (\prod_i d\sigma_i) e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2} + \beta \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_i \tilde{J}_{ij} \sigma_j}}$$

DOBBIAMO ESPANDERE NUMERATORE E DENOMINATORE IN POTENZE DI β .

IL DENOMINATORE DA'

$$e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2}} \left[1 + \beta \sum_{i,k} \frac{1}{2} \sigma_i J_{ik} \sigma_k + \frac{\beta^2}{2!} \frac{1}{4} \sum_{i,k} \sum_{i',k'} \sigma_i \sigma_k \sigma_{i'} \sigma_{k'} J_{ik} J_{i'k'} + \dots \right]$$

NOTIAMO CHE TUTTI I TERMINI CON UN NUMERO DISPARI DI σ SONO NULLI:

$$\int d\sigma e^{-\sigma^2/2} \sigma = 0$$

GLI UNICI PEZZI CHE POSSONO CONTRIBUIRE, QUINDI, SONO QUELLI IN CUI LA STESSA σ_i COMPARE DUE VOLTE. IDENTIFICHIAMO OGNI

$$\sigma_i J_{ik} \sigma_k$$

CON UN LINK; CIASCUN LINK E' UN PASSO IN UN CAMMINO. SIMILMENTE

$$\sigma_1 J_{12} \sigma_2 \sigma_2 J_{23} \sigma_3$$

SONO DUE PASSI; QUI σ_2 FIGURA DUE VOLTE, QUINDI DA' UN CONTRIBUTO NON NULLO. NEL TERMINE β^2 , AD ESEMPIO, HO

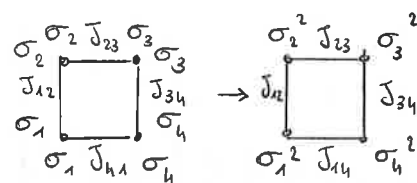
$$\sum_{i,k} \sum_{i',k'}$$

$$i \xrightarrow{k} i' \xrightarrow{k'} i'$$

IL TERMINE IN β^4 AVRA'

$$\beta^4 \sigma_{i_1} \sigma_{j_1} \sigma_{i_2} \sigma_{j_2} \sigma_{i_3} \sigma_{j_3} \sigma_{i_4} \sigma_{j_4} J_{i_1 j_1} J_{i_2 j_2} J_{i_3 j_3} J_{i_4 j_4}$$

$$\sim \frac{\beta^4}{4!} \left(\sum_{i,k} \frac{1}{2} \sigma_i J_{ik} \sigma_k \right)^4$$

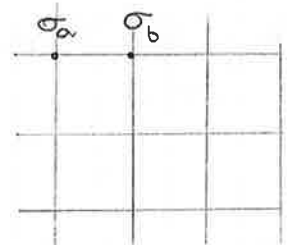


CONTERANNO SOLO I CAMMINI CHIUSI NEL DENOMINATORE E SOLO I CAMMINI APERTI IN i,k NEL NUMERATORE IN CUI COMPAGNONO $\sigma_i \sigma_k$. HO UN FATTORE β PER CIASCUN LEGAME CHE SCENDE NELLO SVILUPPO PERTURBATIVO PER PICCOLI β .

FUNZIONI DI CORRELAZIONE A 2 PUNTI

AL PRIMO ORDINE IN β , NEL NUMERATORE

$$\int (d\sigma_1 \dots d\sigma_n) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k} \left[\sigma_a \sigma_b \frac{\beta}{2} \sum_{i,k} \sigma_i J_{ik} \sigma_k \right]$$



CI SONO DUE CONTRIBUTI CHE DANNO UN APPORTO NON NULLO.

ESSI SONO

$$\delta_{ai} \delta_{bk}, \delta_{am} \delta_{b;}$$

TUTTI GLI ALTRI CONTRIBUTI DANNO ZERO NELL'INTEGRALE GAUSSIANO.

I DUE CONTRIBUTI CANCELLANO IL FATTORE $\frac{1}{2}$.

* AL SECONDO ORDINE IN β , CHIAMANDO

$$\int d\mu = \int d[\sigma] e^{-\sum_i \frac{\sigma_i^2}{2}}$$

GUARDANDO IL DENOMINATORE,

$$\int d\mu \left[1 + \frac{\beta}{2} \sum_{i,m} \sigma_i J_{im} \sigma_m + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{4} \sum_{i,k} \sum_{i',m'} (\sigma_i J_{ik} \sigma_k) (\sigma_{i'} J_{i'm'} \sigma_{m'}) + \dots \right]$$

$$(A) = 1$$

$$(B) = 0$$

$$(C) = \frac{\beta^2}{2!} \frac{1}{4} \int d\mu \sum_{i,k} \sum_{i',m'} \sigma_i \sigma_m \sigma_{i'} \sigma_{m'} J_{ik} J_{i'm'} = \frac{\beta^2}{4} \sum_{i,m} J_{im}^2$$

NOTA: (B) = 0 PERCHÉ IN EFFETTI VI SONO SOLO SPIN SCOPPIATI (i=k NON C'È NELLA SOMMA!).

SO CHE I TERMINI NON NULLI SONO QUELLI PER CUI

$$|i-k|=1, |i'-k'|=1$$

QUINDI VI SONO ANCHE QUI DUE CONTRIBUTI (CHE CANCELLANO L' $\frac{1}{2!}$)

$$\delta_{ii'} \delta_{kk'} + \delta_{im'} \delta_{km'}$$

$$i = k$$

ALL'ORDINE β^4 APPA' VARI CONTRIBUTI, TRA CUI

$$\sum_{i,j,k,l} J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} = \text{Tr}(J^4)$$



QUESTO È IL PRIMO CAMMINO CHIUSO NON BANALE.

NOTA: È LA SOMMA SU TUTTI I QUADRATI.

* GUARDANDO ORA AL NUMERATORE, IL PRIMO CONTRIBUTO NON NULLO

È DI ORDINE β^3 SE SCELGO σ_a E σ_b COME A FIANCO (INFATTI IL NUMERATORE DIPENDE DA CHI SONO σ_a E σ_b !): CI VOGLIONO ALMENO 3 LEGAMI.

I TERMINI SUCCESSIVI SARANNO DI $O(\beta^5)$, $O(\beta^7)$...

SI NOTI NEL VERTICE α UN FATTORE DI MOLTIPLICITA' $(4-1)!!=3$

DOVUTO AL FATTO CHE CI SONO PASSATO 4 VOLTE.

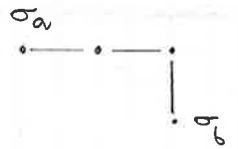
$$\sigma_a \dots \sigma_b \alpha(\beta^3)$$

$$\int \sigma^4 e^{-\sigma^2/2} d\sigma = 3$$

$$\sigma_a \sigma_b \alpha(\beta^3)$$

$$\sigma_a \sigma_b \alpha(\beta^3) \text{ DISCONNESSO}$$

IN SINTESI, PER VALUTARE $\langle \sigma_a \sigma_b \rangle$ (IN QUESTA SPECIFICA GEOMETRIA) AVRO'



$$\frac{\text{Diagram 1} \beta^3 + \text{Diagram 2} \beta^5 + \dots + \text{Diagram 3} \beta^9 + \text{Diagram 4} \beta^9}{1 + \beta^4 \text{Diagram 5} + \dots}$$

(IL TERMINE β^2 NON CONTRIBUISCE*: LO VEDREMO PIU' AVANTI). USANDO

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 \dots$$

$$\frac{1}{1 + \text{Diagram 5} \beta^4} \sim 1 - \text{Diagram 5} \beta^4 + O(\beta^8)$$

NOTA: DI FATTO OGNI DIAGRAMMA SARA' UN NUMERO. SI TRATTERA' DI CALCOLARLI E VALUTARNE LA MOLTEPLICITA'.

PROVO

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \left(\text{Diagram 1} \beta^3 + \text{Diagram 2} \beta^5 + \dots \right) \left(1 - \beta^4 \text{Diagram 5} \right)$$

NOTA: SONO CONTI CHE FAREMO NEL SEGUITO, TAKE IT EASY.

ALL' $O(\beta^2)$ I CONTRIBUTI SONO PERCIO', AD ESEMPIO,

$$\text{Diagram 1} \beta^3 \text{Diagram 5} \beta^4 + \text{Diagram 2} \beta^2 \text{Diagram 5} \beta^4 - \text{Diagram 3} \beta^3 \text{Diagram 5} \beta^4$$

DISCONNESSO
(NUM)
NON SI TOCCANO

CONNESSO
(NUM)

SENZA CONDIZIONI DI ESCLUSIONE
(NUM x DEN)

LO CONSIDERO SIA SE SI TOCCANO, SIA SE NON SI TOCCANO

*NOTA: NEL GAUSSIANO SI' CHE CONTRIBUISCE. E' CHE FAREMO CONTI ANALOGHI SUL MODELLO DI ISING E LUI I CONTRIBUTI IN β^2 SI ELIMINANO; QUI VOLEVAMO PRESENTARLI.

QUINDI IN EFFETTI SARANNO SOLO I DIAGRAMMI CONNESSI A CONTARE, PERCHÉ GLI ALTRI SI CANCELLERANNO.

FOCUS: CONTI (GAUSSIANO)

$$I = \int d^n x e^{-\frac{1}{2}(x, \hat{A} x) + (b, x)} = \int d^n x e^{-\frac{1}{2}((z+y), \hat{A}(z+y)) + (b, z+y)}$$

$$\hat{A} z = b, \quad z = \hat{A}^{-1} b$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(z, \hat{A} z) + (b, z)} \int d y e^{-\frac{1}{2}[(y, \hat{A} y) + (y, b) + (z, \hat{A} y)] + (b, y)}$$

$$\hat{A} = \hat{A}^T \quad \downarrow \quad (z, \hat{A} y) = (\hat{A} z, y) = (b, y)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(b, z)} \int d y e^{-\frac{1}{2}(y, \hat{A} y)} = e^{\frac{1}{2}(b, \hat{A}^{-1} b)} \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \hat{A}}}$$

SE $\Lambda = M^{-1} A M$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ (λ_i AUTIVALORI DI A), USANDO LA PROPRIETA' CICLICA DELLA TRACCIA $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ E IL FATTO CHE M DIAGONALIZZA ANCHE LE FUNZIONI ANALITICHE DI A (TRAMITE POLINOMIO DI TAYLOR, E.G. $M^{-1} A^2 M = M^{-1} A M M^{-1} A M$)

$$e^{\text{Tr}(\ln A)} = e^{\text{Tr}(M \ln A M^{-1})} = e^{\text{Tr}(\ln \Lambda)} = e^{\sum_i \ln \lambda_i} = \prod_i e^{\ln \lambda_i} = \prod_i \lambda_i = \det \Lambda = \det A$$

VALE ANCHE SE A NON E' HERMITIANA, MA PER MOSTRARLO SERVE LA SUA FORMA DI JORDAN.

ISING AD ALTE T

IL PESO NON È PIÙ GAUSSIANO, MA

$$\delta_{\sigma_i, +1} + \delta_{\sigma_i, -1}$$

$$\sigma_i = \pm 1, \quad \sigma_i \sigma_j = \pm 1$$

I CONTI SI BASANO SU UN'ALGEBRA BOOLEANA; QUI UN POLINOMIO GNERICO DI σ SI SCRIVE SEMPRE

$$\text{POL}(\sigma) = A + B\sigma$$

QUINDI

$$\underline{e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = c(1 + t \sigma_i \sigma_j)} \quad (\text{I})$$

DOVE

$$C = \cosh(\beta)$$

$$S = \sinh(\beta)$$

$$t = \tanh(\beta)$$

INFATTI $e^{\beta \sigma_i \sigma_j}$ È UN POLINOMIO DEL 1° ORDINE IN σ_i E IN σ_j , QUINDI

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = a + b\sigma_i + c\sigma_j + d\sigma_i \sigma_j$$

SCELTO $\sigma_i \sigma_j = 1$, VERIFICHIAMO CHE

$$e^\beta \equiv c(1 + \frac{S}{C}) = C + S = \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta} + e^\beta - e^{-\beta}) = e^\beta$$

SCELTO $\sigma_i \sigma_j = -1$,

$$c(1 - t) \equiv e^{-\beta}$$

QUINDI FUNZIONA.

UN'ALTRA RELAZIONE UTILE È

$$\frac{1}{A + B\sigma} = \frac{A - B\sigma}{A^2 - B^2}$$

NOTA: UN MODO PIÙ PULITO PER DIMOSTRARLA È TRAMITE GLI SVILUPPI DI TAYLOR.

* NOTA: IN UN'ESPANSIONE PERTURBATIVA IN β .

(II)

SU OGNI LINK, LA (I) CI DICE CHE HO UN FATTORE* $c(1 + t\sigma_i \sigma_j)$.

SI PUÒ USARE ANCORA UN'ESPANSIONE DIAGRAMMATICA, MA I

DIAGRAMMI CHE CONTANO SONO DIVERSI ($\sigma_i^2 = 1$ E POSSONO CAMBIARE I PESI).

FORMALMENTE, DEFINIAMO LA VARIABILE DI LINK (VUOTO, PIENO)

$$m_{ij} = 0, 1$$

CALCOLIAMO

$$Z_{\text{ISING}} = \sum_{\{\sigma\}} e^{+\beta \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j} = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \prod_{ij} e^{\beta \sigma_i \sigma_j}$$

$$= C^{ND} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{ij} (1 + t \sigma_i \sigma_j)$$

** NOTA: NON SI CAPISCE CHE FINE FACCIA L'1 DELLA PRODUTTORIA QUI SOTTO, MANCA IL FATTORE 2^N (DA $\sum_{\{\sigma\}}$ QUANDO IL CONTRIBUTO È NON NULLO) ED È DIFFICILE DA LEGGERE. TUTTO SOMMATO USARE LA FORMA $Z_{\text{ISING}}^{(B)}$ (VEDI NOTA SOTTO).

NOTA: IL NUMERO TOTALE DI COPPIE È ND.

QUEST'ULTIMA SU DI UN RETICOLO CUBICO SEMPLICE. ANNO' TERMINI

$$\sum_{\{\sigma\}} \left((1 + t \sigma_1 \sigma_2) (1 + t \sigma_3 \sigma_4) \dots \right)$$

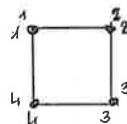
NOTA: È UN PRODOTTO DI FATTORI LINEARI, QUINDI NON POSSO PASSARE MAI PIÙ VOLTE SULLA STESSA LINEA.

$$= \sum_{\{\sigma\}} \left(1 + t \sigma_1 \sigma_2 + t \sigma_3 \sigma_4 + \dots + O(t^2) \right)$$

MA TUTTI I TERMINI LINEARI Danno ZERO QUANDO SI SOMMA SU $\sigma_i = \pm 1$.

I PRIMI TERMINI CHE CONTANO SONO QUELLI DI $O(t^4)$:

$$\dots + t^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + t^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 + \dots + t^3 \dots + t^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_4 \sigma_1 + \dots$$



DOPO AVER SOMMATO SULLE $\{\sigma\}$, POSSO SCRIVERE**

$$Z_{\text{ISING}} = (\cosh(\beta))^{ND} \sum_{\{m_{ik}=0,1\}} t^{\sum_{\langle i,k \rangle} m_{ik}}$$

NOTA: BINNEY CHIAMA $g(l)$ IL NUMERO DI LOOP CHE POSSO COSTRUIRE CON l LINEE ($g(0)=1$, $g(l>ND)=0$) È $Z_{\text{ISING}}^{(B)} = C^{ND} 2^N \sum_{l=0}^{\infty} g(l) t^l$

OGNI COPPIA DI PRIMI VICINI PUO' APPARIRE O NON APPARIRE IN QUESTO PRODOTTO: SE VI APPARE, $m_{ik}=1$. PER EVITARE DI CONTARE CAMMINI NON CHIUSI, AGGIUNGIAMO LA PRESCRIZIONE

$$m_i = \sum_j m_{ij} \quad \text{SIA PARI } \forall i$$

INFATTI, SE UN CAMMINO È CHIUSO, ENTRANO IN OGNI SITO UN NUMERO PARI DI LEGAMI.

NOTA: AD ESEMPIO,

$$t \sigma_1 \sigma_2 \rightarrow m_{12}=1, \text{ TUTTI GLI ALTRI } 0.$$

$$t \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 \rightarrow m_{12}, m_{23}=1; m_{ik}=0.$$

$$t \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_4 \sigma_1 \rightarrow m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{41}=1$$

SI NOTI CHE STIAMO ESPANDENDO IN

$$t = \tanh \beta$$

NOTA: SI DICE "CHARACTER EXPANSION"

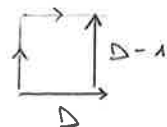
E NON IN β : I DIAGRAMMI IN TAL CASO SAREBBERO DIVERSI.

QUI IL PRIMO DIAGRAMMA CHE CONTA È IL QUADRATO. SIA

$$\ln Z_{\square}(\beta) = -\frac{1}{\beta N} \ln Z_{\square} = -\frac{D}{\beta} \ln(\cosh \beta) + \tilde{f}(\beta)$$

CHE MOLTEPLICATA ASSOCIO AL DIAGRAMMA QUADRATO?

SCELGO IL PRIMO LEGAME* IN D MODI, IL SECONDO IN $(D-1)$ MODI E POI IL QUADRATO SI CHIUDE DA SÉ.



POICHÉ LA STESSA PLAQUETTE LA SI TROVA RUOTANDO NEW ALTRO SENSO, AGGIUNGO UN FATTORE $\frac{1}{2}$. ALLORA

$$\tilde{f}_\square(\beta) = -\frac{1}{\beta} \frac{D(D-1)}{2} t^4$$

E POSSO SCRIVERE

NOTA: SI È SEMPLIFICATO UN FATTORE N , PERCHÉ POSSO

COSTRUIRE UN QUADRATO IN CIASCUNO DEI SITI,

$$\tilde{f}_\square(\beta) = -\frac{1}{\beta N} \ln \left[1 + \frac{ND(D-1)}{2} t^4 + O(t^5) \right] \approx -\frac{1}{\beta} \frac{D(D-1)}{2} t^4 + O(t^5)$$

1 È IL CONTRIBUTO ALL'ORDINE t^0 (CI VA, ANCHE SE NEW $\sum$ (PARSI) NON SI CANCELLA).

$$f_\square(\beta) = -\frac{1}{\beta} \left[D \ln(\cosh \beta) + \frac{D(D-1)}{2} \tanh(\beta)^4 \right]$$

SI NOTI, DI NUOVO, CHE L'ESPANSIONE IN t (PIÙ SEMPLICE DI QUELLA IN β) È POSSIBILE SOLO SUL MODELLO DI ISING.

*NOTA: IN $D=2$ VERREBBE DA DIRE $2D(2D-1)/2$, MA DEVI ANCHE

STARE IN UN SOLO QUADRANTE: HO 1 SOLO QUADRATO PER SITO.

CONTATTI INIZIA AD AVERE SENSO IN $D=3$ (DEVI STARE IN UN OTTANTE).

• STIMA DEI COEFFICIENTI CRITICI

POSSIAMO USARE QUANTO VISTO PER STIMARE t_c E I COEFFICIENTI CRITICI. PARTIAMO DALLE SEGUENTI ASSUNZIONI:

1) t_c È LA PARTE REALE DELLA SINGOLARITÀ DI f PIÙ VICINA ALL'ORIGINE DEL PIANO COMPLESSO $t^2 \in \mathbb{C}$ ($t = \tanh \beta$).

2) L'ENERGIA LIBERA PRESENTA UNA SINGOLARITÀ IN $t^2 = t_c^2$

CHE HA LA FORMA (A POTENZA)

$$(t_c^2 - t^2)^\omega$$

ESPANDENDO $f(t^2)$ IN SERIE,

$$f(t^2) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m (t^2)^m$$

AVREMO

$$t_c^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_m}{f_{m+1}}$$

NOTA: UN TEOREMA DEL CONFRONTO ATTRIBUITO A APPEL ENUNCIA CHE, SE f E g SONO ANALITICHE DENTRO UN CERCHIO DI RAGGIO r , CON UN UNICO POLO DELLO STESSO ORDINE SUL BORDO, $f(z), g(z) \sim (r e^{i\theta} - z)^{-\gamma}$

ALLORA I COEFFICIENTI DEL LORO SVILUPPO DI TAYLOR SONO ASINTOTICAMENTE UGUALI, I.E. $f_m \sim g_m$, $m \rightarrow \infty$. PER NOI $g(z)$ È L'ENERGIA LIBERA (IGNOTA), CHE HA UN POLO IN t_c , MENTRE $f(z)$ È LO SVILUPPO PERTURBATIVO DA NOI COSTRUITO.

$$\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-m^2 \left(\frac{f_m}{f_{m+1}} - \frac{f_{m-1}}{f_m} \right) \right] t_c^{-2} - 1$$

NOTA: t_c^2 NON È ALTRO CHE IL RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE. ω NON L'HO TUTTORA CAPITA.

* SE $D=3$, ALL'ORDINE 18 SU DI UN RETICOLO SEMPLICE CUBICO

$$t_c \approx 0.2181$$

$$\omega \approx 1.9$$

* NOTA: SI VEDE BENE USANDO $Z_{\text{ISING}}^{(6)}$.
 GLI UNICI LOOP IN $D=1$ SONO $l=0$ E
 $l=N$ (TUTTA LA CATENA). MA
 $t^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ($t \in [-1, 1]$)
 E RIMANE SOLO $t^0 = 1$.

* SE $D=1$, RIMANE IL SOLO TERMINE*

$$f = -\frac{1}{\beta} \ln(\cosh \beta)$$

NOTA: QUESTA È LA SOLUZIONE
 ESATTA DEL MODELLO DI ISING
 CON $D=1$ E $h=0$.

NON ESISTE, INFATTI, UNO SVILUPPO PERTURBATIVO IN DIAGRAMMI CHIUSI
 (POSSO SOLO ANDARE AVANTI E INDIETRO).

IN 1D A OGNI SITO POSSO FARE CORRISPONDERE UN LINK; È
 SEMPLICE SOSTITUIRE

$$\sum_{\{\sigma\}} \longrightarrow \sum_{\{l=\pm 1\}}$$

$$e^{\beta \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j}$$



NON VI È TRANSIZIONE DI FASE: LA LOWER CRITICAL DIMENSION È

$$D_L^c = 2$$

TUTTAVIA $T=0$ HA QUALCOSA IN COMUNE CON T_c , PERCHÉ

$$\xi \xrightarrow{T \rightarrow 0} \infty$$

IL PUNTO È CHE, PER ROMPERE UN DOMINIO, IL PREZZO DA PAGARE È
 PROPORTIONALE ALL'INTERFACCIA (PARLAMO DI PRIMI VICINI, MA
 L'ARGOMENTO SI ESTENDE ALE INTERAZIONI A RANGE FINITO). AL
 CRESCERE DEI DOMINI, NON CRESCE L'INTERFACCIA: BASTA SPEZZARE
 UNO SPIN E L'HO GIÀ ROTTA. NON RIESCO A COSTRUIRE DOMINI
 STABILI, PER CUI SIA DAVVERO DIFFICILE ROMPERE L'INTERFACCIA.

* SE $D=2$, IL MODELLO È RISOLVIBILE (SOLUZIONE DI ONSAGER,
 PUOI GUARDARLA SUL FEYNMAN).

DA DISCRETO (RETICOLO) AL CONTINUO

ABBIAMO VISTO CHE, NEL MODELLO DI ISING RETICOLARE,

$$\langle \sigma_i \sigma_l \rangle = c \int d^D k \frac{e^{-i(\underline{i}-\underline{l}) \cdot \underline{k}}}{1 - 2\beta J (\cos p_x + \dots)}$$

NOTA: $C = (2\pi)^{-D}$ E TRA PARENTESI HO
 $\sum_{j=1}^D \cos p_j$
 NOI AVEVAMO USATO $J=1$.

ESPANDENDO PER PICCOLI MOMENTI (E' IL LIMITE DI GRANDI DISTANZE, O DI SPAZIATURA RETICOLARE $a \rightarrow 0$),

$$\langle \sigma_i \sigma_l \rangle \sim c \int d^D k \frac{e^{-i(\underline{i}-\underline{l}) \cdot \underline{k}}}{(1 - 2\beta J) + \beta J k^2 + O(k^4)}$$

↓ TERMINE DI MASSA (KLEIN-GORDON)

PER $\beta \rightarrow \beta_c$, HO IL LIMITE $m^2 \rightarrow 0$ NELLA TEORIA.

NEL MODELLO GAUSSIANO,

NOTA: E LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE SONO LE STESSA CHE NEL CAMPO MEDIO.

$$Z = \int \left(\prod_i d\sigma_i \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{i,k} \sigma_i J_{ik} \sigma_k \right\}$$

SE ASSUMO CHE LE σ_i SIANO "DOLCEMENTE VARIABILI" (OSSIA CON FLUTTUAZIONI PICCOLE SULLA SCALA DELLA SPAZIATURA RETICOLARE), POSSO PENSARE DI SOSTITUIRE IL TERMINE GAUSSIANO CON

$$\sum_i \sigma_i^2 \rightarrow \int d\gamma \sigma^2(\gamma)$$

COSA POSSO DIRE SUL TERMINE DINAMICO? SCEGUENDO $D=2$, $\underline{0} = (0,0)$,

$$\sigma_{00} \cdot (\sigma_{01} + \sigma_{0,-1} + \sigma_{1,0} + \sigma_{-1,0}) \rightarrow 4\sigma_{00} \cdot \sigma_{00}$$

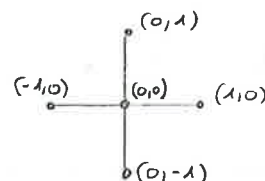
$$\frac{\beta}{2} \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k \rightarrow \beta \int d\gamma \sigma(\gamma)^2$$

NOTA: STO APPROSSIMANDO σ_{ij} CON $i,j \sim 0$ A σ_{00} . CI STA SE LE σ FLUTTUANO LENTAMENTE, MA OVVIAMENTE SI TRATTA DI UNA STIMA ROZZA. STA DERIVANDO LE σ (L'INCREMENTO VALE ± 1).

MA SE ESPANDO IN SERIE DI TAYLOR

$$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,0} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \sigma_{0,0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \sigma_{0,0} + \dots$$

$$\sigma_{0,-1} = \sigma_{0,0} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sigma_{0,0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \sigma_{0,0} + \dots$$



POSSO DARE UNA STIMA MIGLIORE DELLA SOMMA SUI PRIMI VICINI.

AVENDO, SOTTRAENDO $4\sigma_0^2$ (PER RISSOMMARLO TRA POCO),

$$\sigma_{0,1} + \sigma_{0,-1} + \sigma_{1,0} + \sigma_{-1,0} - 4\sigma_{0,0}$$

NOTA: IN $D \neq 2$, 4 DIVENTA $2D$.

NON TOGLIERE $-4\sigma_{0,0}$, ESCE DA SOLO $4\sigma_{0,0}$.

$$= (\sigma_{0,1} - \sigma_{0,0}) + (\sigma_{0,-1} - \sigma_{0,0}) + (\sigma_{1,0} - \sigma_{0,0}) + (\sigma_{-1,0} - \sigma_{0,0})$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_{0,0} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_{0,0} \right) = \nabla^2 \sigma_{0,0}$$

PASSIAMO COSÌ A UN MODELLO CONTINUO IN CUI

$$Z = \int d[\sigma] \exp \left\{ \int d^D x \left[- (1 - 2D\beta) \frac{\sigma^2(x)}{2} + \frac{\beta}{2} \sigma(x) \nabla^2 \sigma(x) \right] \right\}$$

↳ INTEGRALE PER PARTI $\rightarrow -\frac{\beta}{2} |\nabla \sigma(x)|^2$

* INTRODUCIAMO IL MODELLO DI LANDAU-GINSBURG, IN CUI IL PESO DEGLI SPIN NON È PIÙ GAUSSIANO MA

$$We^{-\alpha \frac{\sigma^2(x)}{2} - g \sigma^4(x)}$$

NOTA: SUL PARIASI $P_0(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} - g(\sigma^2-1)^2}$.
BASTA RIESARE W E α DI CONSEGUENZA.
SI NOTI CHE SONO PROBABILITÀ A PRIORI.

DOVE:

- $g=0$: MODELLO GAUSSIANO
- $g \rightarrow \infty$: $Ne^{-g(\sigma^2-1)^2} \rightarrow \delta(\sigma^2-1)$



VEDREMO CHE C'È UN PARTICOLARE VALORE DI g CHE DESCRIVE ISING AL PUNTO CRITICO.

CHIAMIAMO DA QUI IN POI $\varphi(x)$ I CAMPI FONDAMENTALI. PONIAMO

$$dP[\varphi] = e^{-\beta H_{\text{eff}}[\varphi]} d[\varphi]$$

NOTA: DA CONFRONTARE CON $\mathcal{N}\varphi^4$ IN QFT,

$$S = \int d^4x \left[\frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2\Lambda^2} (\Box \varphi)^2 \right]$$

DOVE

$$\beta H_{\text{eff}}[\varphi(x)] = \int d^D x \left\{ \frac{\mu}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^D (\partial_\nu \varphi(x))^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4(x) + h(x) \varphi(x) + \frac{1}{2\Lambda^2} (\Delta \varphi(x))^2 \right\} \quad (I)$$

È UN MODELLO CONTINUO: NON HÒ PIÙ SPAZIATURA RETICOLARE, QUÉ UN CUTOFF DI PICCOLE DISTANZE (PUO' CONSEGUIRNE LA "CATASTROFE ULTRAVIOLETTA").

β È RIASSORBITO IN μ : VADO AL PUNTO CRITICO PER $\mu \rightarrow 0$.

NEL SECONDO TERMINE HO LE DERIVATE DEI CAMPI (TERMINE DI INTERAZIONE). IL TERMINE IN g (PARAMETRO PICCOLO) RIGUARDA ANCORA LA MISURA DELLA PROBABILITA' A PRIORI DEI CAMPI.

IL QUARTO E' IL TERMINE DI CAMPO MAGNETICO.

L'ULTIMO E' UN TERMINE DI CUTOFF, CHE IMPEDISCE DI AVERE PROBLEMI QUANDO MI METTO A DISTANZE TROPPO PICCOLE; IMPEDISCE AL CAMPO DI FLUTTUARE TROPPO A PICCOLE DISTANZE.

IL PROPAGATORE AVRA' UNA FACCIA COME

$$\frac{1}{m^2 + p^2 + c p^4}$$

(OGNI DERIVATA DA' UN CONTRIBUTO p). IN ALCUNI CASI QUESTO TERMINE DI CUTOFF E' NECESSARIO PER IMPEDIRE DIVERGENZE DI CORTE DISTANZE.

NOTIAMO CHE, NEL TERMINE DI MASSA $\frac{\mu}{2} \varphi^2(x)$, SE

$\mu > 0 \rightarrow$ 1 MINIMO DI H_{eff} IN $\varphi = 0$

$\mu < 0 \rightarrow$ 2 MINIMI DI H_{eff} IN $\varphi = \pm \left(-\frac{6\mu}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$

NOTA: LO VEDREMO MEGLIO VERSO LA FINE, TRATTANDO LA ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA. COMUNQUE BASTA MINIMIZZARE $\frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4$

INOLTRE IL TERMINE DI CUTOFF $\frac{1}{2\Lambda^2}(\Delta\varphi(x))^2$ SOSTITUISCE LA DISCRETIZZAZIONE ($a \neq 0$): AVENDO ELIMINATO IL RETICOLO NEL PASSARE AL CONTINUO, NON SIAMO PIU' PROTETTI CONTRO DIVERGENZE A PICCOLE DISTANZE.

ANCHE IL TERMINE CON LE DERIVATE CONTRASTA CHI FLUTTUA A PICCOLE DISTANZE, MA IL TERMINE DI CUTOFF E' PIU' FEROCO.

SE CALCOLO, A LIVELLO CLASSICO, L'APPROSSIMAZIONE

$$\beta F \sim \min_{\{\varphi\}} \beta H_{eff}[\varphi]$$

NOTA: IL CHE HA SENSO A T BASSE, ESSENDO $F = \min_{\varphi} (E - TS(\varphi))$

PER $\mu < 0$ HO MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA*: HO LA T_c PER $\mu = 0$.

IN GENERALE, AVREMO INVECE

*NOTA: LO VEDI DA $\varphi_{min} = \pm \sqrt{-\frac{6\mu}{g}}$.

$$\mu = c(T - T_c) + O((T - T_c)^2)$$

(FUORI DAL MODELLO GAUSSIANO, IL PUNTO CRITICO SI SPOSTA DA $\mu = 0$).

* PER $g < 0$, L'INTEGRALE (I) DIVERGE.

PER $g = 0$ HO IL MODELLO GAUSSIANO, DEFINITO SOLO PER $T > T_c$.

IL NOSTRO MODELLO DI INTERAZIONE E' FERROMAGNETICO, PERCIO' IL COEFFICIENTE DEL TERMINE

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^D (\partial_j \varphi(x))^2$$

E' POSITIVO (GLI SPIN TENDONO AD ALLINEARSI).

NOTA: INFATTI H_{eff} CRESCE (E QUINDI LA PROBABILITA' DECRESCe) SE $\varphi(x)$ CAMBIA CON x (OSSIA SE GLI SPIN SONO DISALLINEATI).

LE CONFIGURAZIONI IN CUI $\varphi(x)$ VARIA MOLTO SONO COSI' SOPPRESSE. TALVOLTA NON BASTA: SI OSSERVA CHE, SE $D \geq 2$ (E $\Lambda = \infty$), LA QUANTITA' $\langle \varphi^2 \rangle$ DIVERGE.* E' NECESSARIO (ALMENO COME STEP INTERMEDIO) INSERIRE $\frac{1}{2\Lambda^2} (\Delta \varphi)^2$.

* PERCHE' NON AGGIUNGO ALTRI TERMINI, COME

$$\mu \varphi^2 + g \varphi^4 + m \varphi^6 \dots$$

* NOTA: E' L'ENERGIA INTERNA. VEDI NOTA PROSSIMA PAG.

DI ORDINE PIU' ALTO? DIMOSTREREMO CHE TALI TERMINI SONO IRRAILEVANTI, OVVERO NON CAMBIANO GLI ESPONENTI CRITICI.

* CONSIDEREREMO UNA TEORIA IN CUI

$$\beta, g, \Lambda$$

SONO COSTANTI; NEL MODELLO DI LANDAU-GINSBURG, LA DIPENDENZA DALLA TEMPERATURA E' IN μ :

$$T_{\text{ISING}} \sim \mu$$

NEL MODELLO GAUSSIANO, $\mu_c = 0$.

IN QUESTA TEORIA PIU' GENERALE,

$$\mu_c = \mu_c(g, \Lambda) \neq 0$$

TRA IL PUNTO FISSO GAUSSIANO $g = 0$ E IL MODELLO DI ISING A $g = \infty$, VEDREMO CHE ESISTE UN VALORE DI g IL CUI LIMITE CRITICO E' LO STESSO CHE NEL MODELLO DI ISING.

SCRIVIAMO, IN GENERALE,

$$\mu - \mu_c(g, \Lambda) = c(T - T_c) + \dots$$

PORREMO** IN GENERALE $\beta = 1, c = 1$.

*** NOTA: DI FATTO β NON C'E' IN 2LG . NON E' "ISING NEL CONTINUO", E' UN ALTRO MODELLO A TUTTI GLI EFFETTI. NELLA NOSTRA COSTRUZIONE $\mu = \frac{1}{\beta} (1 - 2D\beta)$ MA NON E' IMPORTANTE LA CORRISPONDENZA ESATTA.

** NOTA: OCCHIO, LE STA SOLO RIASORBENDO NUOVE ALTRE COSTANTI, NON E' UN' AFFERMAZIONE SULLE LORO DIMENSIONI FISICHE. VEDI ***.

REGOLARIZZAZIONE ULTRAVIOLETTA (A CORTE DISTANZE)

METTIAMO NEL MODELLO GAUSSIANO ($g=0$).

DATO UN RETICOLO DI SPAZIATURA a , SI VERIFICA CHE

$$\tilde{G}_L(p) = \frac{1}{\mu + \sum_j \frac{1}{a^2} (2 - 2 \cos p_j a)}$$

DA CUI

$$G_L(j) = (2\pi)^{-D} \int_{BZ} d^D p e^{i a p \cdot j} \tilde{G}_L(p)$$

SE $h=0$, SI AVRA'

$$f = \frac{1}{2N\beta} \text{Tr} \ln A$$

$$f_L = \frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \ln \tilde{G}_L(p) - \frac{1}{2} a^2 \sum_{l,k} h_l G_L(l-k) h_k$$

SE LAVORO NEL CONTINUO E INSERISCO UN CUTOFF $\Lambda \sim \frac{1}{a}$, TROVO INVECE

$$\tilde{G}_\Lambda(p) = \left(\mu + p^2 + \frac{(p^2)^2}{\Lambda^2} \right)^{-1} \quad (I)$$

POSSO CALCOLARE

$$f_\Lambda = \frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \ln \tilde{G}_\Lambda(p) - \frac{1}{2} \int d^D x d^D y h(x) G(x-y) h(y) \quad (II)$$

QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO HO UNA CORREZIONE CHE VA COME p^4 .

NOTA: OSSERVANDO CHE $\frac{d}{d\mu} \tilde{G}_\Lambda(p) = -\tilde{G}_\Lambda^2(p)$,

$$U(\mu) = -\frac{d}{d\mu} f(\mu) = -\frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \tilde{G}_\Lambda(p)$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{p^2 + \mu + \frac{p^4}{\Lambda^2}} \sim_{\Lambda \rightarrow \infty} p^{D-2} \quad (III)$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p e^{i p x} \tilde{G}_\Lambda(p) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} \langle \varphi(0)^2 \rangle$$

DOVE HO USATO (I) E (II). DALLA (III) SI LEGGONO I GRADI DI DIVERGENZA DI U AL VARIARE DI D (POWER COUNTING). SIMILMENTE,

$$C_V(\mu) = \frac{dU}{d\mu} = \frac{1}{2(2\pi)^D} \int d^D p \tilde{G}_\Lambda^2(p) \sim_{\Lambda \rightarrow \infty} p^{D-4}$$

* VORREI RIMUOVERE LA REGOLARIZZAZIONE,

$$\Lambda \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$$

NEL MODELLO GAUSSIANO,

$$g=0, \Lambda \rightarrow \infty$$

DETTA U = ENERGIA INTERNA, IN

$$D=2 \quad U \sim \ln \Lambda$$

$$D=3 \quad U \sim \Lambda$$

MA LA NORMALIZZAZIONE DI U NON È IMPORTANTE (PUO' ESSERE DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE INFINITA); BASTA GUARDARE C.
A $g=0$, $D < 4$ MANDO $\Lambda \rightarrow \infty$ SENZA PROBLEMI.

SE $g \neq 0$ APPAIONO NUOVE DIVERGENZE. AVREMO BISOGNO DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE, CHE PUO' ESSERE INTESO NELLO SPAZIO DEI MOMENTI O IN QUELLO REALE.

* SI NOTI CHE POSSO MANDARE $\alpha \rightarrow 0$ TENENDO FISSA LA DISTANZA ξ TRA DUE PUNTI, O AL CONTRARIO MANDARE $\xi \rightarrow \infty$ CON $\alpha = \text{cost.}$
SE USO PARAMETRI ADIMENSIONALI, COME $(\xi/\alpha)^m$, NON CAMBIA NULLA; INVECE GRANDEZZE DIMENSIONALI POSSONO COMPORTARSI IN MODO MOLTO DIVERSO SE MISURATE IN UNITA' DI α O DI ξ .

SU DI UN RETICOLO CON SPACING α , L'HAMILTONIANA SI SCRIVE

$$H_{\text{eff}}[\varphi] = \alpha^D \left[\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i,k} J_{ik} (\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_i \left(\frac{M}{2} \varphi_i^2 + \frac{g_i}{4!} \varphi_i^4 + h_i \varphi_i \right) \right]$$

DOVE

$$\mu \propto 1 - \beta 2D = 1 - \beta/\beta_c^{\text{MF}}$$

NOTA: HO OTTENUTO $H_{\text{eff}}[\varphi]$ PER DISCRETIZZAZIONE; AD ESEMPIO
 $\frac{1}{\alpha}(\varphi_i - \varphi_j) \sim \partial_\mu \varphi$

DEFINENDO

$$\Psi_i = \alpha^{\frac{D-2}{2}} \varphi_i$$

POSSIAMO RISCRIVERE

$$H_{\text{eff}}[\Psi] = \frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} (\Psi_i - \Psi_k)^2 + \sum_i \left(\frac{M}{2} \Psi_i^2 + \frac{\lambda}{4!} \Psi_i^4 \right)$$

DOVE

$$\begin{cases} M = \mu \alpha^2 \\ \lambda = g \alpha^{4-D} \end{cases}$$

* NOTA: IN EFFETTI SE $\alpha \rightarrow 0$ SVANISCONO SIA IL TERMINE DI INTERAZIONE ($\lambda \rightarrow 0$, FINISCO NEL GAUSSIANO) CHE QUELLO DI MASSA ($M \rightarrow 0$, CHE PER DEFINIZIONE INDIVIDUA IL PUNTO CRITICO).

α GIOCA LO STESSO RUOLO DI Λ^{-1} .

PER $D < 4$, IN QUESTO MODO RITROVO IL MODELLO GAUSSIANO AL PUNTO CRITICO* MANDANDO $\alpha \rightarrow 0$.

POSSIAMO QUINDI VEDERE IL LIMITE CRITICO IN DUE MODI DIVERSI.
NEL SEGUITO, IN REALTÀ, LAVOREREMO IN SERIE DI g .

VEDREMO CHE

MODELLO RETICOLARE ISING
AL PUNTO CRITICO T_c

~

MODELLO CONTINUO (LANDAU-
GINSBURG) AL PUNTO CRITICO

L'UNIVERSALITÀ DEGLI ESPONENTI CRITICI DIPENDE DA:

- i) LA DIMENSIONE D ;
- ii) LE SIMMETRIE DELL'HAMILTONIANA;
- iii) IL TIPO DI CAMPI.

* LE FLUTTUAZIONI A PICCOLE DISTANZE NON CONTERANNO VICINO
AL PUNTO CRITICO (A MENO CHE NON SIANO FORTI AL PUNTO DA
FAR DIVERGERE LA TEORIA, COSA CHE CONTROLLA CON UN CUTOFF
OPPURE LAVORANDO SU DI UN RETICOLO).

ANALISI DIMENSIONALE

$$[\text{MASSA}] \equiv 1 \equiv [\text{LUNGHEZZA}^{-1}]$$

$$[a] = [\text{LUNGHEZZA}] = -1 = [\lambda^{-1}]$$

GUARDANDO A

$$p^2 + \frac{p^4}{\lambda^2}$$

=>

$$[\lambda] = [p] = [L^{-1}] = 1$$

INOLTRE

$$[\psi] = [M] = [\lambda] = 0$$

$$[\mu] = 2$$

$$[g] = 4-D$$

PERCÌ POSSIAMO INDIVIDUARE IL PARAMETRO ADIMENSIONALE

$$u = g(\mu - \mu_c)^{-\frac{(4-D)}{2}}$$

NOTIAMO CHE LA SUSCETTIVITÀ È

$$\chi \sim (\mu - \mu_c)^{-\gamma}$$

NOTA: QUESTA PRIMA EQUAZIONE DEFINISCE L'UNICA
GRANDEZZA FISICA FONDAMENTALE. DI TUTTO IL
RESTO BASTA INDICARE L'ESPONENTE A CUI TALE
GRANDEZZA È ELEVATA.

NOTA: $\psi = a^{\frac{D-2}{2}} \varphi$, NON È IL CAMPO φ CHE,
PER LA CAONACA, HA DIMENSIONI

$$[\varphi] = \frac{1}{2}(D-2)$$

COME IN QUANTUM FIELD THEORY, L'AZIONE È
ADIMENSIONALE IN $e^{-S} \sim e^{-\beta H_{\text{eff}}}$.

NOTA: SE $D > 4$, $u \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_c} 0$ E CI SI ASPETTA I
SOLITI ESPONENTI CRITICI. SE $D < 4$, $u_c \rightarrow \infty$.
HO COSTRUITO u USANDO GLI UNICI DUE
PARAMETRI A DISPOSIZIONE, g E μ .

NOTA: SAPPIAMO GIÀ, DALLO STUDIO IN CAMPO
MEDIO, CHE LA SUSCETTIVITÀ DIVERGE CON UNA
QUALCHE POTENZA DEL PARAMETRO CRITICO.

PERCHÉ POSSO ESPRIMERE

$$\gamma(g; \mu - \mu_c) = - \frac{d \ln X}{d \ln(\mu - \mu_c)} \Rightarrow \ln X \sim -\gamma \ln(\mu - \mu_c)$$

AL PUNTO CRITICO,

$$\gamma_c = \gamma(g, 0)$$

ESPANSIONE PERTURBATIVA

INIZIAMO CERCANDO DI ESPANDERE, IN TERMINI DELLA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO g , LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI

$$G(x) = \langle \psi(0) \psi(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int d[\psi] e^{-H[\psi]} \psi(0) \psi(x)$$

DOVE SI È POSTO $\beta = 1$ E SI È CHIAMATA

$$Z = \int d[\psi] e^{-H[\psi]}$$

NOTA: $e^{-H[\psi]} = e^{-H[\psi]}|_{g=0} = \frac{g}{h!} \int d^D x \psi^h(x)$.
MOLTIPLICA E DIVIDI PER $Z|_{g=0}$ (GAUSSIANO).

ESPANDENDO IN g ,

$$G(x) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\sum_m \left(-\frac{g}{h!}\right)^m \frac{1}{m!} \langle [\int_V d^D y \psi^h(y)]^m \psi(x) \psi(0) \rangle_0}{\sum_m \left(-\frac{g}{h!}\right)^m \frac{1}{m!} \langle [\int_V d^D y \psi^h(y)]^m \rangle_0} \quad (I)$$

DOVE $\langle \cdot \rangle_0$ INDICA IL VALORE DI ASPETTATIVA A $g=0$, COE' NEL MODELLO GAUSSIANO.

SI RICORDI CHE, A $g=0$ NEL CONTINUO, SI AVEVA

$$\langle \psi(0) \psi(x) \rangle_0 \equiv G_0(x, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{i k \cdot x}}{k^2 + \mu}$$

E CHE LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE A PIU' PUNTI SI SCRIVONO IN TERMINI DI QUELLE A DUE PUNTI (TEOREMA DI WICK). VALGONO RELAZIONI DEL TIPO

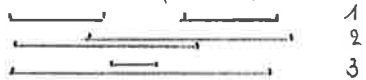
$$\langle \psi(x_0) \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \rangle = G_0(x_0 - x_1) G_0(x_2 - x_3) + 2 \text{ PERMUTAZIONI.}$$

AL PRIMO ORDINE IN g AVREMO

$$\langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle_{(1)} = \frac{\langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle_{(0)} - \frac{g}{4!} \int_V d^D y \langle \varphi^4(y) \varphi(0) \varphi(x) \rangle_0}{1 - \frac{g}{4!} \int_V d^D y \langle \varphi^4(y) \rangle_0} \quad (II)$$

E IL PROBLEMA SI È RIDOTTO AL CALCOLO DI INTEGRALI GAUSSIANI (TANTI).

AD ESEMPIO AL DENOMINATORE HO

$$\langle \varphi(y) \varphi(y) \varphi(y) \varphi(y) \rangle \rightarrow 3 G_0(y-y)^2 = 3 G_0(0)^2$$


AL NUMERATORE HO (APPLICANDO LE CONTRAZIONI PRESENTI NEL MODELLO GAUSSIANO)

$$\langle \varphi(x) \varphi(0) \varphi^4(y) \rangle = G_0(x) \langle \varphi^4(y) \rangle_0 + 4 G_0(x-y) \langle \varphi(0) \varphi^3(y) \rangle_0$$

CHE IN LINEA DI PRINCIPIO DÀ

$$(6-1)!! = 5!! = 15 \quad \text{CONTRIBUTI}$$

CONTRAENDO,

← INFATTI HO 4 MODI PER FARE QUESTA CONTRAZIONE

$$G_0(x) \langle \varphi^4(y) \rangle_0 + 4 G_0(x-y) \langle \varphi(0) \varphi(y) \varphi(y) \varphi(y) \rangle_0$$

$$= 3 G_0(x) G_0(0)^2 + 4 G_0(x-y) 3 G_0(y) G_0(0)$$

QUINDI AVRO' IN TOTALE

$$G_1(x) = \frac{G_0(x) - \frac{g}{4!} \int_V d^D y [3 G_0(x) G_0(0)^2 + 12 G_0(x-y) G_0(y) G_0(0)]}{1 - \frac{g}{4!} \int_V d^D y 3 G_0^2(0)}$$

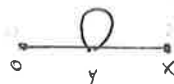
DAL PUNTO DI VISTA DIAGRAMMATICO,

$$G_0(x) \rightarrow \text{---}^x$$

$$G_0(0) \rightarrow \bigcirc_z \quad G_0(z-z) = G_0(0)$$

$$G_0^2(0) \rightarrow \bigcirc$$

$$G_0(y) G_0(x-y) G_0(0) \rightarrow$$



← LA BUBBLA È SCESA CON $\varphi^4(y)$, QUINDI STA IN y .
LA SUA POSIZIONE È INTEGRATA SU TUTTO LO SPAZIO y .

$$G_0(x) G_0(0)^2 \rightarrow$$



$$\bigcirc_y$$

← ANCHE QUI LA DOPPIA BUBBLA PROVIENE DA $\varphi^4(y)$, CON $y \neq x$.

COME GIÀ ABBIAMO VISTO, I DIAGRAMMI DISCONNESSI Danno CONTRIBUTI CHE CRESCONO COME N^α , $\alpha > 1$: CI ASPETTIAMO CHE SI CANCELLINO*.

ABBIAMO (SVILUPPANDO E TRONCANDO AL PRIMO ORDINE IN g LA (II))

$$G_1(x) = G_0(x) - \frac{g}{4!} \int d^D y [3 G_0(x) G_0(0)^2 + 12 G_0(x-y) G_0(y) G_0(0)] + \frac{g}{4!} \int d^D y 3 G_0(x) G_0(0)^2$$

$$= G_0(x) - \frac{g}{2} \int d^D y G_0(x-y) G_0(y) G_0(0)$$

E IN EFFETTI, A QUEST'ORDINE, UN CONTRIBUTO SI È CANCELLATO:

$$\frac{G_0(x)}{x}, \quad \frac{G_0(0)}{y} \quad \text{E' CIO' CHE RIMANE.}$$

OU UN SISTEMA CHE AMMETTE UN BUON LIMITE DI V INFINITO, NECESSARIAMENTE I TERMINI AL DENOMINATORE SERVONO A CANCELLARE I DIAGRAMMI DISCONNESSI AL NUMERATORE. IN TEORIA DELLE PERTURBAZIONI, CI BASTERA' GUARDARE AI DIAGRAMMI CONNESSI AL SOLO NUMERATORE.

* ALL'ORDINE g^2 ,

$$\langle \psi(0) \psi(x) \rangle = \frac{N}{D}$$

DOVE

$$N = G_0(x) - \frac{g}{4!} \int d^D y \langle \psi(0) \psi(x) \psi^4(y) \rangle_0 + \frac{g^2}{2(4!)^2} \int d^D y_1 d^D y_2 \langle \psi^4(y_1) \psi^4(y_2) \psi(x) \psi(0) \rangle_0$$

$$D = 1 - g \int d^D y \langle \psi^4(y) \rangle_0 + \frac{g^2}{2} \int d^D y_1 d^D y_2 \langle \psi^4(y_1) \psi^4(y_2) \rangle_0$$

IL TERMINE A 10 PUNTI

$$\frac{1}{2} \langle \psi^4(y_1) \psi^4(y_2) \psi(x) \psi(0) \rangle$$

SI FATTORIZZA IN

$$(10-1)!! = 9!! = 945 \quad \text{TERMINI ...}$$

CHE SI FA?

NOTA: COME SEMPRE, $(m-1)!!$ SONO I MODI DI DISTRIBUIRE m ELEMENTI IN COPPIE.

* NOTA: ANCHE SE QUI NON LO DIMOSTRIAMO IN GENERALE, UNO PUO' VEDERLO CASO PER CASO. INOLTRE AVEVAMO VISTO, PARLANDO DI CLUSTER NEW ESPANSIONE A BASSE T , COME f DOVESSE RIMANERE INTENSA. L'ARGOMENTO REGGE ANCHE SE PARLAMO DI DIAGRAMMI INVECE CHE DI CLUSTER.

SE INIZIO CONTRAENDO $\psi(x)\psi(0)$, OTTENGO SOLO DIAGRAMMI DISCONNESSI (NON HO PIU' MODO DI RICOLEGARE γ_1 E γ_2 A x E 0).

POSSO ALLORA CONTRARRE

$$x \sim \gamma_1 \quad \times 4$$

$$x \sim \gamma_2 \quad \times 4$$

MA SONO UGUALI: γ_1 E γ_2 SONO VARIABILI MUTE. CONTRAGGO QUINDI

$$x \sim \gamma_1$$

NOTA: INIZIO SEMPRE ATTACCO LE DUE GAMBE ESTERNE $\psi(x)$ E $\psi(0)$.

E MOLTIPLICO PER 2. SOCRINO

$$\frac{1}{2} \langle \psi^4(\gamma_1) \psi^4(\gamma_2) \psi(x) \psi(0) \rangle_0 = 4 G_0(x - \gamma_1) \langle \psi^3(\gamma_1) \psi^4(\gamma_2) \psi(0) \rangle_0 = (*)$$

IN GENERALE, VEDREMO CHE IL FATTORE $\frac{1}{m!}$ E' SEMPLIFICATO DALLE SIMMETRIE DELLE POSSIBILI PERMUTAZIONI DELLE γ_i .

GIA' COSI' SONO PASSATO A $7!! = 105$ TERMINI. CONTRAENDO $\psi(0)$,

$$(*) = 4 G_0(x - \gamma_1) \left\{ \underbrace{3 G_0(\gamma_1) \langle \psi^2(\gamma_1) \psi^4(\gamma_2) \rangle_0}_A + 4 G_0(\gamma_2) \underbrace{\langle \psi^3(\gamma_1) \psi^3(\gamma_2) \rangle_0}_B \right\}$$

IN (A), SE ATTACCO γ_1 HO UN TERMINE DISCONNESSO CON IL RESTO*. POSSO SOLO ATTACCARRE UN γ_1 A UN γ_2 ; SCELGO UN $\psi(\gamma_1)$ IN

$$\langle \psi_1 \psi_1 \psi_2 \psi_2 \psi_2 \psi_2 \rangle$$

E LO CONTRAGGO CON CIASCUNO DEI 4 $\psi(\gamma_2)$. TROVO

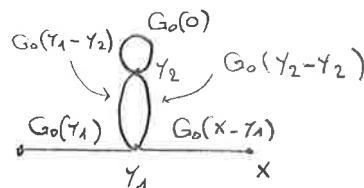
$$(A) = 4 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) \langle \psi(\gamma_1) \psi^3(\gamma_2) \rangle_0$$

$$= 12 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2 G_0(0)$$

IL TERMINE (A) CONTRIBUISCE A (*) CON PESO 1/4,

$$12 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_1) 12 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2 G_0(0)$$

*NOTA: BEH, POTREI ATTACCARRE $\gamma_2 \gamma_2$, NO? PER EVITARE CONTEGGI MULTIPLI, SE SCELGO DI INIZIARE PORTANDO FUORI γ_1 POI DEVI PROCEDERE USANDO SOLTANTO LEI.



HO SEMPRE VERTICI A 4 (E' UNA TEORIA ϕ^4) E SONO IN TUTTO m .

INFATTI STO ESPANDENDO IN SERIE

$$e^{\frac{g}{4!} \int d^D x \phi^4(x)}$$

OGNI LINEA (PROPAGATORE) PROVIENE DA UNO DI QUESTI $\psi(x)$.

IL TERMINE (B) DA'

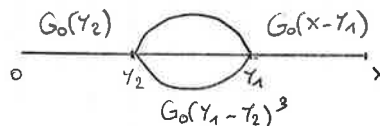
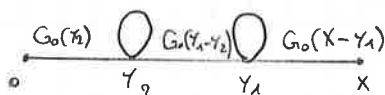
NOTA: STAVOLTA I $\psi(\gamma_1)$ SONO 3, NE POSSO CONTRARRE 2.

$$\begin{aligned} \langle \psi^3(\gamma_1) \psi^3(\gamma_2) \rangle_0 &= 3 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) \langle \psi^2(\gamma_1) \psi^2(\gamma_2) \rangle_0 + \underbrace{2}_{**} G_0(0) \langle \psi(\gamma_1) \psi(\gamma_2)^3 \rangle_0 \\ &= \underbrace{[3 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 6 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3]}_{**} + 6 G_0(0)^2 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

IL CONTRIBUTO DI (B) A (*) È PERCHÉ

* NOTA: TIPO FUORI UN $\psi(\gamma_1)$ E LO CONTRASSEGNO CON CIASCUNO DEI $\psi(\gamma_1)$ RIMASTI DENTRO.

$$\begin{aligned} 16 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) [3 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 6 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3 + 6 G_0(0)^2 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)] \\ = 16 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) [9 G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 6 G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3] \\ = 144 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) G_0(\gamma_1 - \gamma_2) G_0(0)^2 + 96 G_0(x - \gamma_1) G_0(\gamma_2) G_0(\gamma_1 - \gamma_2)^3 \end{aligned}$$



NOTA CHE LE VARIABILI DI INTEGRAZIONE (I VERTICI) SONO γ_1 E γ_2 , MENTRE 0 E X SONO I PUNTI DI PARTENZA E ARRIVO; DA LORO ESCE SEMPRE UNA SOLA LINEA (DAI VERTICI, INVECE, 4). IL NUMERO DI VERTICI È PARI ALL' ORDINE DELLO SVILUPPO.

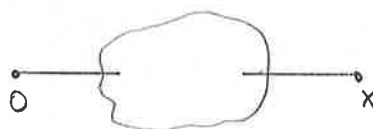
AL SECONDO ORDINE ABBIAMO

QUINDI TROVATO 3 CONTRIBUTI:

$$144 \times \text{diagram with 2 vertices and 2 internal lines}$$

$$144 \times \text{diagram with 2 vertices and 1 internal line}$$

$$96 \times \text{diagram with 2 vertices and 0 internal lines}$$



** NOTA: IN $\langle \psi^2(\gamma_1) \psi^2(\gamma_2) \rangle$ POSSO LASCIARE DA SOLI I $\psi^2(\gamma_2)$ PERCHÉ C'È $G_0(\gamma_1 - \gamma_2)$ A MOLTIPLICARE.

QUESTO PUO' ESSERE DIVISO IN 2 TAGLIANDO UNA SOLA LINEA INTERNA (RIDUCIBILE).

VANNO TUTTI MOLTIPLICATI PER $\left(\frac{1}{4!}\right)^2 = \frac{1}{(24)^2}$. IN SINTESI,

$$G_0 \quad \text{diagram with 1 line}$$

$$G_1 \quad \text{diagram with 3 lines}$$

$$G_2 \quad \text{diagram with 5 lines}$$

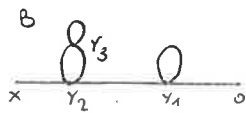
1 LINEA

3 LINEE

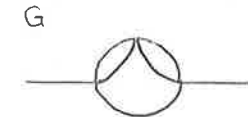
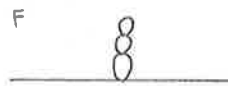
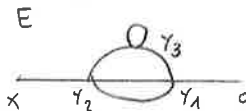
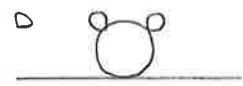
5 LINEE

QUESTI SONO DIAGRAMMI DI FEYNMAN DI QUESTA TEORIA. I VERTICI IN UNA TEORIA ψ^4 SONO TUTTI FATTI COSÌ:

* ALL'ORDINE g^3 AVRO' 7 LINEE E TROVERO' I DIAGRAMMI



(RIDUCIBILI)



(SE NE SONO DISEGNATI ALCUNI). SOTTINTENDENDO LO ZERO IN G_0

(SONO TUTTE FUNZIONI DI GREEN LIBERE), AD ESEMPIO 'B' SIGNIFICA

$$G(x-y_2)G(y_2-y_1)G(y_1)G(y_2-y_3)^2 G(0)^2$$

MENTRE 'E' SIGNIFICA

$$G(x-y_2)G(y_2-y_1)^2 G(y_1-y_3)G(y_3-y_2)G(0)G(y_1)$$

E IN TUTTI I CASI DOVRO' POI INTEGRARE IN $d^D y_1 \dots d^D y_m$.

* SCRIVEREMO, IN GENERALE,

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle = \sum_m \left(-\frac{g}{4!}\right)^m \frac{1}{m!} \int d^D y_1 \dots d^D y_m \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y_1) \dots \varphi^4(y_m) \rangle_0^{\text{CONNESSI}}$$

SI NOTI CHE y_i E' UNA SIMMETRIA NELLE VARIABILI MUTE, CHE POSSONO ESSERE PERMUTATE IN $m!$ MODI. QUINDI

$$\langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle = \sum_m \left(-\frac{g}{4!}\right)^m \int d^D y_1 \dots d^D y_m \langle \varphi(x)\varphi(0)\varphi^4(y_1) \dots \varphi^4(y_m) \rangle_0^{\text{CONN. A MENO DI PERMUTAZIONI}}$$

QUINDI LE REGOLE SONO:

1) DISEGNO TUTTI I DIAGRAMMI CONNESSI CON m VERTICI, OGNUNO CON 4 LINEE INTERNE ($\varphi^4(y)$) E 2 LINEE ESTERNE.

2) CONSIDERO UN SOLO DIAGRAMMA PER OGNI GRUPPO DI DIAGRAMMI EQUIVALENTI PER UNO SCAMBIO DI VERTICI (ELIMINO COSI' L' $m!$).

3) AD OGNI DIAGRAMMA ASSOCIO UN INTEGRANDO CHE E' IL PRODOTTO DELLE G_0 ASSOCIATE ALLE LINEE.

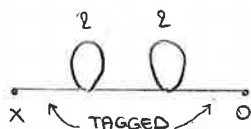
4) INTEGRAO SULLE COORDINATE DEI VERTICI INTERNI.

5) MOLTIPLICO IL RISULTATO PER $\left(-\frac{g}{4!}\right)^m$ PER LA MOLTEPLICITA' DEL DIAGRAMMA.

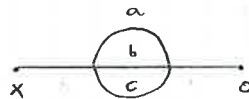
IN GENERE L'ULTIMO PASSAGGIO E' IL PIU' DELICATO.

IN UNA TEORIA φ^4 (VERTICI A 4 LINEE), LA MOLTEPLICITA' DI UN DIAGRAMMA DI ORDINE m E' PARI A $(24)^m$ DIVISO PER IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DELLE LINEE INTERNE CHE LASCIANO IL DIAGRAMMA INVARIATO.

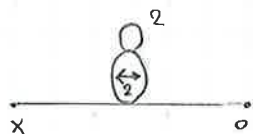
• ESEMPLI $\rightarrow O(q^2) : \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$



$$2 \cdot 2 = 4$$



$$2 \cdot 3 = 6$$



$$2 \cdot 2 = 4$$

$$a \leftrightarrow b, a \leftrightarrow c, b \leftrightarrow c$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

NOTA: VALE LA REGOLA DELLA SOMMA (VEDI OLTRE).

• CALCOLO DEGLI INTEGRALI

PER FARLO, PASSIAMO NELLO SPAZIO DEI MOMENTI p . RICORDIAMO CHE

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{1}{\mu + 2 \sum_j (1 - \cos p_j)}$$

OVVERO, NEL LIMITE CONTINUO,

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{1}{\mu + p^2}$$

E VALGONO LE FORMULE DI INVERSIONE

$$G_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i p \cdot x} \tilde{G}_0(p)$$

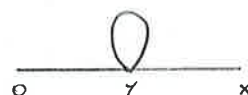
$$\tilde{G}_0(p) = \int_V d^D x e^{-i p \cdot x} G_0(x)$$

INOLTRE POSSO ESPRIMERE

$$\delta(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i p \cdot x}$$

• ESEMPIO (1)

$$D_1 \equiv \int d^D \gamma G_0(x - \gamma) G_0(\gamma) G_0(0)$$



POICHÉ

$$G_0(0) = \int_{\mathbb{R}^D} \tilde{G}_0(q) \frac{d^D q}{(2\pi)^D}$$

POSSIAMO RISCHINERLE, TIRANDO FUORI LA "BOLLA",

$$D_1 = (2\pi)^{-D} \int d^D q \tilde{G}_0(q) \int_Y d^D \gamma G_0(x-\gamma) G_0(\gamma)$$

L'ULTIMO È UN INTEGRALE DI CONVOLUZIONE. VALE LA PROPRIETÀ

$$F\{f(x) * g(x)\} = F\{f(x)\} \cdot F\{g(x)\}$$

INFATTI

$$\int d^D \gamma G_0(x-\gamma) G_0(\gamma) = \int d^D \gamma \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(p) e^{i p \cdot (x-\gamma)} \tilde{G}_0(q) e^{i q \cdot \gamma} = (*)$$

MA

$$\int d^D \gamma e^{i(q-p) \cdot \gamma} = \delta^{(D)}(q-p)$$

QUINDI

$$\begin{aligned} (*) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \delta^{(D)}(p-q) e^{i p \cdot x} \tilde{G}_0(p) \tilde{G}_0(q) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i p \cdot x} \tilde{G}_0(p)^2 \\ &= F^{-1}[\tilde{G}_0(p)^2] \end{aligned}$$

OVVERO, APPLICANDO LA TRASFORMATA DIRETTA AI DUE MEMBRI,

$$F\left[\int d^D \gamma G_0(x-\gamma) G_0(\gamma)\right] = F[G_0] F[G_0]$$

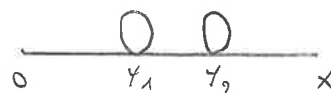
NEL NOSTRO CASO,

$$\tilde{D}_1(p) = \frac{1}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(p)^2 \int d^D q \tilde{G}_0(q)$$



• ESEMPIO (2)

$$D_2^{00} = \int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 G_0(x-\gamma_2) G_0(\gamma_2-\gamma_1) G_0(\gamma_1) G_0(0)^2$$



$$D_2^{00} = \left\{ (2\pi)^{-D} \int \tilde{G}_0(p) d^D p \right\}^2 \int d^D \gamma_2 \int d^D \gamma_1 \underbrace{\left(G_0(x-\gamma_2) G_0(\gamma_2-\gamma_1) \right) G_0(\gamma_1)}_{*(\gamma_1)}$$

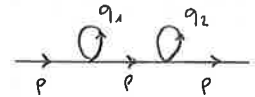
GUARDANDO PRIMA ALLA CONVOLUZIONE IN γ_1 ,

$$\begin{aligned} & \int d^D \gamma_2 F^{-1} \left\{ F \left(G_0(x-\gamma_2) G_0(\gamma_1-\gamma_2) \right) F \left(G_0(\gamma_1) \right) \right\} \\ &= F^{-1} \left\{ F \left[\int d^D \gamma_2 G_0(x-\gamma_2) G_0(\gamma_1-\gamma_2) \right] F \left[G_0(\gamma_1) \right] \right\} \\ &= F^{-1} \left\{ F[G_0]^3 \right\} \end{aligned}$$

QUINDI

$$\tilde{D}_2^{00}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \left(\int \tilde{G}_0(q) d^D q \right)^2 \tilde{G}_0(p)^3$$

NOTA: VOLEVA ESSERE UNA DIMOSTRAZIONE CHE DO, MA SECONDO ME QUESTA NOTAZIONE NON HA ALCUN SENSO. LO RIFACCIO IN UN FOCUS TRA UN PAIO DI PAGINE. CONSIDERA PERO' CHE $\int d^D \gamma_2 G(x-\gamma_2) G(\gamma_1-\gamma_2) = \int d^D \gamma_2 G(x-\gamma_1+\gamma_1-\gamma_2) G(\gamma_1-\gamma_2) \stackrel{z}{=} \int d^D z G(x-\gamma_1+z) G(z) = \int d^D z G(x-\gamma_1+z) G(z)$



ESEMPIO (3)

COMPATTANDO LA NOTAZIONE,

$$D_2 = \int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 G_{x2} G_2 G_{21}^2 G_0$$

$$= (2\pi)^{-D} \int \tilde{G}_0(q) d^D q \underbrace{\int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 G_{x2} G_2 G_{21}^2}_{A}$$

$$\begin{aligned} A &= \int d^D \gamma_1 \int d^D \gamma_2 \int d^D p_1 d^D p_2 d^D p_3 d^D p_4 e^{i p_1 \cdot (x-\gamma_2)} \tilde{G}_0(p_1) e^{i p_2 \cdot \gamma_2} \tilde{G}_0(p_2) \\ &\quad \cdot e^{i p_3 \cdot (\gamma_2-\gamma_1)} \tilde{G}_0(p_3) e^{i p_4 \cdot (\gamma_2-\gamma_1)} \tilde{G}_0(p_4) (2\pi)^{-4D} \end{aligned}$$

OTTENGO DEI CONTRIBUTI

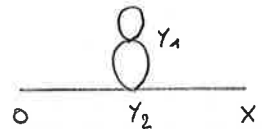
$$\int d^D \gamma_1 (\cdot) \rightarrow \delta^{(D)}(p_4+p_3) \rightarrow p_3+p_4 \equiv 0$$

$$\int d^D \gamma_2 (\cdot) \rightarrow \delta^{(D)}(-p_1+p_2+p_3+p_4) \rightarrow \delta^{(D)}(-p_1+p_2)$$

USANDO LE DUE δ PER FARE GLI INTEGRALI IN $d^D p_2$ E $d^D p_4$, RIMANE

$$A = (2\pi)^{-2D} \int d^D p_1 \int d^D p_3 e^{i p_1 \cdot x} \tilde{G}_0(p_1)^2 \tilde{G}_0(p_3)^2$$

NOTA: INFATTI LE G SONO PARI. VEDI FOCUS ANCHE QUI.



QUINDI IL PESO DA ASSOCIARE A QUESTO DIAGRAMMA SARÀ

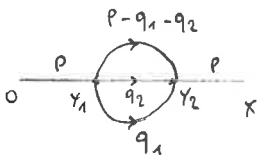
$$D_2^{\frac{g}{2}} = F^{-1}(\tilde{D}_2^{\frac{g}{2}}(p)) = F^{-1} \left\{ \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(k)^2 \right\}$$

• ESEMPIO (h)

CALCOLA IL DIAGRAMMA A FIANCO.

NOTA CHE IL MOMENTO CHE SCORRE DA O A X È SEMPRE P, MENTRE SULLA BOLA POSSO FAR SCORRERE TUTTI I MOMENTI CHE VOGLIO A PATTO CHE

$$p = \sum_{i=1}^3 q_i$$



NOTA: AD OGNI VERTICE SI CONSERVA IL MOMENTO.
VEDI FOCUS PER IL CONTO ESPLICITO.

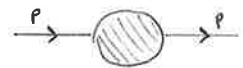
PUOI VERIFICARE CHE SI OTTIENE, IN QUESTO CASO,

$$\tilde{D}_2(p) = \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q_1) \tilde{G}_0(q_2) \tilde{G}_0(p - q_1 - q_2)$$

REGOLE GENERALI (CALCOLO DEGLI INTEGRALI NELLO SPAZIO DI FOURIER)

1) C'È UN MOMENTO P PER OGNI LINEA ESTERNA, QUINDI ESSE Danno

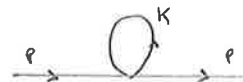
$$\tilde{G}_0(p)^2$$



2) AD OGNI LINEA INTERNA α ASSOCIO UN MOMENTO q_α CON UNA DIREZIONE.

3) SU OGNI VERTICE,

$$\sum (\text{MOMENTI ENTRANTI}) - \sum (\text{MOMENTI USCENTI}) = 0$$



4) ALL'ORDINE g^m RESTANO m MOMENTI LIBERI E m INTEGRAZIONI DEI PRODOTTI DELLE $\tilde{G}_0(q_\alpha)$ RELATIVE A QUESTI MOMENTI.

NOTA: OCCHIO, QUEST'ULTIMA È VERA SOLO PER LE CORRELAZIONI A 2 PUNTI (2 LINEE ESTERNE), PER CUI IL NUMERO DI LOOP È PARI AL NUMERO DI VERTICI.

• FOCUS : CALCOLO DEGLI INTEGRALI

• ESEMPIO (2)

$$\int d\gamma_2 \int d\gamma_1 G_0(x-\gamma_2) G_0(\gamma_2-\gamma_1) G_0(\gamma_1) \stackrel{\text{FUBINI}}{=} \int d\gamma_2 (G_0 * G_0)(\gamma_2) G_0(x-\gamma_2) = (G_0 * G_0 * G_0)(x)$$

$$= \int d\gamma_2 G_0(x-\gamma_2) F^{-1} \{ F[G_0] F[G_0] \}(\gamma_2)$$

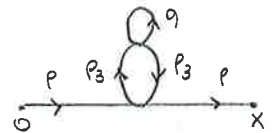
(ESPRIMO SOLO LA DIPENDENZA DALLA VARIABILE CHE NON USO PER CALCOLARE F)

$$= F^{-1} \{ F[G_0] \cdot F \circ F^{-1} \{ F[G_0] F[G_0] \} \}(x)$$

$$= F^{-1} \{ F[G_0]^3 \}(x)$$

• ESEMPIO (3)

$$A = (2\pi)^{-2D} \int d^D p_1 d^D p_3 e^{i p_1 \cdot x} \tilde{G}_0(p_1)^2 \tilde{G}_0(p_3)^2$$



QUINDI (CHIAMANDO $p = p_1$)

$$D_2(x) = (2\pi)^{-D} \int \tilde{G}_0(q) d^D q \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i p \cdot x} \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(p_3)^2$$

$$\tilde{D}_2(p) = F\{D_2(x)\} = \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(p_3)^2$$

VOLENDO, CONCLUDO PRENDENDO L'ANTITRASFORMATA DEI DUE MEMBRI.

• ESEMPIO (4)

$$D_2 = \int d^D \gamma_1 d^D \gamma_2 G_0(\gamma_1) G_0(\gamma_2-\gamma_1)^3 G_0(x-\gamma_2)$$

$$= \int d\gamma_2 G_0(x-\gamma_2) \int d\gamma_1 G_0(\gamma_1) G_0^3(\gamma_2-\gamma_1)$$

$$= \int d\gamma_2 G_0(x-\gamma_2) F^{-1} \{ F[G_0] F[G_0^3] \}(\gamma_2)$$

$$= F^{-1} \{ F[G_0] \cdot F \circ F^{-1} \{ F[G_0] F[G_0^3] \} \}(x)$$

$$= F^{-1} \{ F[G_0]^2 \cdot F[G_0^3] \}(x)$$

NON SAPREI BENE CHE COSA FAREMME, PERÒ. CAMBIAMO TATTICA:

$$D_2 = \int d\gamma_1 d\gamma_2 d^D p_1 d^D p_2 d^D p_3 d^D p_4 d^D p_5 (2\pi)^{-5D} e^{i p_1 \cdot \gamma_1} e^{i (p_2+p_3+p_4) \cdot (\gamma_2-\gamma_1)} e^{i p_5 \cdot (x-\gamma_2)} \tilde{G}_0(p_1) \dots \tilde{G}_0(p_5)$$

$$= \int (2\pi)^{-5D} d^D p_1 \dots d^D p_5 d\gamma_1 d\gamma_2 e^{i \gamma_1 \cdot (p_1 - (p_2+p_3+p_4))} e^{i \gamma_2 \cdot (p_2+p_3+p_4-p_5)} e^{i p_5 \cdot x} \tilde{G}_0(p_1) \dots \tilde{G}_0(p_5)$$

$$= \int (2\pi)^{-5D} d^D p_1 \dots d^D p_5 \delta(p_2+p_3+p_4-p_1) \delta(p_2+p_3+p_4-p_5) e^{i p_5 \cdot x} \tilde{G}_0(p_1) \dots \tilde{G}_0(p_5)$$

MI ACCORDO CHE p_5 NON SE NE ANDRA', QUINDI TRA POCO CHIAMO $\underline{p} = p_5$. ANNO

$$D_2 = \int (2\pi)^{-5D} d^D p_1 \dots d^D p_5 \delta(p_5 - p_1) \delta(p_2 + p_3 + p_4 - p_5) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}} \tilde{G}_0(p_1) \dots \tilde{G}_0(p_5) \quad p_1 = p_5 \equiv p$$

$$= \int (2\pi)^{-4D} d^D p_2 d^D p_3 d^D p_4 d^D p \delta(p_2 + p_3 + p_4 - p) \tilde{G}_0(p)^2 \tilde{G}_0(p_2) \tilde{G}_0(p_3) \tilde{G}_0(p_4) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$$

DI QUESTI 4 MOMENTI, UNO E' FISSATO DALLA CONDIZIONE (DATA DALLA δ)

$$p_2 + p_3 + p_4 = p$$

CHIAMANDO $p_2 \equiv q_2$, $p_3 \equiv q_1$, QUESTA DIVENTA

$$p_4 = p - q_1 - q_2$$

INTEGRANDO PERCIO' IN $d^D p_4$ E RINOMINANDO p_2, p_3 COME SOPRA,

$$D_2(x) = \int (2\pi)^{-3D} d^D q_1 d^D q_2 d^D p \tilde{G}_0(p)^2 \tilde{G}_0(q_1) \tilde{G}_0(q_2) \tilde{G}_0(p - q_1 - q_2) e^{i \underline{p} \cdot \underline{x}}$$

PRENDENDO LA TRASFORMATTA DEI DUE MEMBRI,

$$\tilde{D}_2(p) = \tilde{G}_0(p)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q_1) \tilde{G}_0(q_2) \tilde{G}_0(p - q_1 - q_2)$$

REGOLA DI SOMMA

CHIAMANDO $\lambda = \frac{g}{4!}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-z^2/2} e^{-\lambda z^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} z^{4m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dz z^{4m+2} e^{-\frac{z^2}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} (4m+1)!!$$

RAZIONANDO IN MODO ANALOGO PER IL DENOMINATORE, TROVO

$$m = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2 - \lambda z^4} dz \right) : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2 - \lambda z^4} dz \right) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-\lambda)^m (4m+1)!!}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-\lambda)^m (4m-1)!!}$$

$$= \frac{1 - \lambda 5!! + \frac{1}{2} \lambda^2 9!! - \lambda^3 \cdot \frac{1}{6} 13!! + O(\lambda^4)}{1 - (\lambda 3!! - \frac{1}{2} \lambda^2 7!! + \frac{1}{6} \lambda^3 11!!) + O(\lambda^4)} \simeq (1 - \lambda 5!! + \frac{9!!}{2} \lambda^2 - \frac{13!!}{6} \lambda^3) \left(1 + \lambda 3!! - \frac{7!!}{2} \lambda^2 + \frac{11!!}{6} \lambda^3 + \lambda^2 (3!!)^2 - (7!! \lambda 3!!) \lambda^2 + (3!!)^3 \lambda^3 \right)$$

$$= 1 + \lambda \left[3!! - 5!! \right] + \lambda^2 \left[\frac{9!!}{2} - (3!!)(5!!) - \frac{7!!}{2} + (3!!)^2 \right] + \lambda^3 \left[-\frac{(13!!)}{6} + \frac{(11!!)}{6} - (7!!)(3!!) + (3!!)^3 + \frac{5!! 7!!}{2} - (5!!)(3!!)^2 + \frac{(9!!)(3!!)}{2} \right] + O(\lambda^4)$$

$$= 1 - 12 \lambda + 384 \lambda^2 - 19008 \lambda^3 + O(\lambda^4) = 1 - \frac{1}{2} g + \frac{2}{3} g^2 - \frac{11}{8} g^3 + O(g^4)$$

· ANCORA SULLA MOLTEPLICATA: REGOLA DI SOMMA

LA SOMMA DELLE MOLTEPLICATA DEI DIAGRAMMI A UN DATO ORDINE E' DATA DA UN INTEGRALE (UNA TEORIA DI CAMPO ZERO-DIMENSIONALE) OTTENUTO ELIMINANDO L'ARGOMENTO DI $\varphi(x)$ ED ELIMINANDO LE SUE DERIVATE. PER NOI

$$\mathcal{O}_{D=0}(\varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{g}{4!} \varphi^4$$

DOVE HO TOLTO LA DIPENDENZA DA x E LE DERIVATE DEI CAMPI.

CALCOLO QUINDI

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dz z^2 e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{g}{4!} z^4}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{g}{4!} z^4}} = \langle z^2 \rangle_g$$

ALL' $O(g^2)$, SI OTTIENE $\frac{g}{3}$.

· ESEMPI: CALCOLA L' $O(g^3)$.

NOTA:

$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{g}{4!}\right)^m (4m+1)!!}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{g}{4!}\right)^m (4m-1)!!}$$

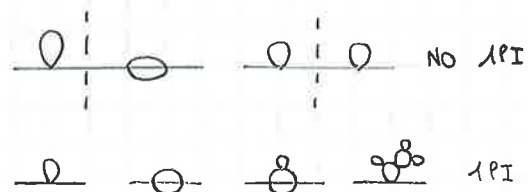
VEDI FOCUS UNA PAGINA INDIETRO PER LA DIMOSTRAZIONE E IL CALCOLO DEI PRIMI ORDINI IN g .

· 1PI: DIAGRAMMI IRREDUCIBILI A UNA PARTICELLA

SONO QUEI DIAGRAMMI CHE NON POSSONO ESSERE DIVISI IN DUE PARTI DISCONNESSE TAGUANDO SOLO UNA LINEA INTERNA.

QUI A FIANCO ALCUNI ESEMPI.

RICORDIAMO INTANTO CHE ABBIAMO CALCOLATO *



$$\langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle = 1 + \frac{0}{-12g} + \frac{0}{+144g^2} + \frac{0}{+144g^2} + \frac{0}{+36g^2} + O(g^3)$$

VOGLIAMO RISOMMARE PARZIALMENTE QUESTA SERIE PERTURBATIVA.

* INIZIAMO CONSIDERANDO LA BOWA, CHE



HA PESO $12g$, E RISOMMIAMO LA SERIE DI QUESTI SOLI DIAGRAMMI ("GIRINI").

* NOTA: HANNO TUTTI DENISI PER $(4!)^m$.

SCRIVIAMO COE'

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \frac{0}{1} + \frac{0}{-12g} + \frac{0 \ 0}{(-12g)^2} + \frac{0 \ 0 \ 0}{(-12g)^3} + \dots$$

OIASCUNO VALE, NELLO SPAZIO DI FOURIER,

$$\underline{0} = -12g \tilde{G}_0(p)^2 \int d\tilde{q} \tilde{G}_0(q) \quad d\tilde{q} := \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

$$\underline{0 \ 0} = (-12g)^2 \tilde{G}_0(p)^2 \tilde{G}_0(p) \left(\int d\tilde{q} \tilde{G}_0(q) \right)^2$$

$$\underline{0 \ 0 \ 0} = (-12g)^3 \tilde{G}_0(p)^2 \tilde{G}_0(p)^2 \left(\int d\tilde{q} \tilde{G}_0(q) \right)^3$$

DEFINIAMO DIAGRAMMA AMPUTATO UNO IN CUI NON CONSIDERIAMO LE LINEE ESTERNE.

AD ESEMPIO

$$\dots 0 \dots = \Sigma_1 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_0(q)$$

E NOTIAMO CHE Σ_1 NON DIPENDE DAL MOMENTO: È UN NUMERO.

RISOMMANDO TUTTA LA SERIE DI BOLLICINE,

$$\tilde{G}_2(p) = \tilde{G}_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{G}_0(p) \left[-12g \tilde{G}_0(p) \Sigma_1 \right]^k$$

$$= \tilde{G}_0(p) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-12g \tilde{G}_0(p) \Sigma_1 \right)^k \right] = \frac{\tilde{G}_0(p)}{1 + 12g \tilde{G}_0(p) \Sigma_1}$$

(SUPPONENDO CHE QUESTA SERIE CONVERGA). ABBIAMO TROVATO

$$\tilde{G}_2(p) = \left(\tilde{G}_0(p)^{-1} + 12g \Sigma_1 \right)^{-1} = \frac{1}{\mu + p^2 + 12g \Sigma_1}$$

ALL' ORDINE g^0 ,

$$\tilde{G}_2(p) = \tilde{G}_0(p)$$

* NOTA: SECONDO ME È FALSO. INFATTI $\Sigma_1 = \Sigma_1(\mu)$
E IL PUNTO CRITICO QUI È DEFINITO (IMPLICITAMENTE!) DA
 $\mu + 12g \Sigma_1(\mu) = 0$

MENTRE AGLI ORDINI SUCCESSIVI LA MASSA NUDA (BARE MASS) È
SOSTITUITA DALLA MASSA RINORMALIZZATA: COME AVEVAMO
ANTICIPATO, NELLA TEORIA INTERAGENTE SI SPOSTA IL PUNTO CRITICO.
IN QUESTA APPROSSIMAZIONE*, $\mu_c = -12g \Sigma_1$.

* RIPETIAMO IL RAGIONAMENTO CON L' HAMBURGER:

$$\tilde{G}_\Theta(p) = 1 + \frac{p \cdot q_1 - q_2}{p \cdot q_1 \cdot p} + \text{diagramma} + \dots = \frac{1}{\mu + p^2 - \Sigma_2(p)}$$

+ $\propto g^2$ $(+ \propto g^2)^2$

* NOTA: E' NON SOLO DALLE VARIABILI MUTE. IN EFFETTI LA CONSERVAZIONE DEI MOMENTI FA COMPARIRE p NEL LOOP.

QUINDI IN QUESTO CASO $\Sigma_2 = \Sigma_2(p)$, OSSIA DIPENDE DAI MOMENTI,*

SE INCLUDESSI IN Σ TUTTI I DIAGRAMMI 1PI, OTTERREI UNA FORMULA ESATTA:

$$\Sigma(p) = \Sigma_1 + \Sigma_2(p) + \dots$$

... 0 Θ ...

NOTA: ANCHE IL SEGNO $'^{-1}$ DI $-g$ ORA LO INCLUDO NELLE Σ .

(STO INCLUDENDO LA DIPENDENZA DA g^m NELLE Σ). SE AD ESEMPIO DEFINISCO

$$\Sigma_{1+2} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

** NOTA:

$$= \tilde{G}_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{G}_0 \Sigma_{1+2})^k \right)$$

TROVO

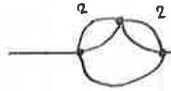
$$\tilde{G}_{1+2}(p) = \frac{\tilde{G}_0}{1 + \tilde{G}_0 \Sigma_{1+2}} \stackrel{**}{\simeq} \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 (\Sigma_1 + \Sigma_2) \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 (\Sigma_1 + \Sigma_2) \tilde{G}_0 (\Sigma_1 + \Sigma_2) \tilde{G}_0 + \dots$$

$$= \tilde{G}_0 \text{ --- } + \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \text{ --- } + \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \text{ --- } +$$

$$+ \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \text{ --- } + \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \text{ --- } +$$

$$+ 2 \tilde{G}_0 \Sigma_1 \tilde{G}_0 \Sigma_2 \tilde{G}_0 \text{ --- } + \dots$$

NOTA: SI RITROVANO, ODE', IN QUESTO SVILUPPO, ANCHE I DIAGRAMMI NON 1PI.

POTREI PROSEGUIRE DANDO Σ_3 ; TROVEREI, USANDO Σ_{1+2+3} ,  $O(g^3)$

UN TERMINE $6 \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \tilde{G}_0^4$ (6 SONO LE PERMUTAZIONI, SVILUPPO MULTINOMIALE).

OGNI $\Sigma_i(p)$ CONTIENE LA SOMMA DI TUTTE LE POSSIBILI RIPETIZIONI DI UN DIAGRAMMA 1PI, RIPETITO DA 0 A ∞ VOLTE.

SE CHIAMO $\Sigma(p)$ LA SOMMA DI TUTTI I DIAGRAMMI 1PI, OTTENGO

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p) &= \tilde{G}_0(p) + \tilde{G}_0(p) \Sigma \tilde{G}_0(p) + \tilde{G}_0(p) \Sigma \tilde{G}_0(p) \Sigma \tilde{G}_0(p) + \dots \\ &= (\tilde{G}_0(p)^{-1} - \Sigma(p))^{-1} = \frac{1}{\mu + p^2 - \Sigma(p)} \end{aligned}$$

NOTA: $\Sigma(p)$ SI DICE SELF-ENERGY E SOMMA I CONTRIBUTI DI TUTTI I DIAGRAMMI AMPUTATI. IL SUO EQUIVALENTE PER LE FUNZIONI A 4 PUNTI SARÀ Γ . DEFINIREMO $m^2 = \mu - \Sigma(0)$.

QUINDI LE Σ_i , $i > 1$, RINORMALIZZANO NON SOLTANTO LA MASSA.

E' A PARTIRE DA QUESTO $\hat{G}(p)$ CHE DEFINIAMO μ_c t.c.

$$\hat{G}(p=0, \mu=\mu_c) = \infty$$

INDICHIAMO LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI ESATTA CON IL SIMBOLO

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \tilde{G}(p)$$

SIA INVECE

$$\text{---}\square\text{---} = \text{SOMMA DEGLI 1PI AMPUTATI}$$

$$= \dots \bigcirc \dots + \dots \bigcirc \dots + \dots \bigcirc \dots$$

IN QUESTI TERMINI, ABBIAMO TROVATO

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{1}{(-)^{-1} - (\text{---}\square\text{---})}$$

NOTA: OCCIÒ CHE IN GENERALE LA SELF-ENERGY SI DENOTA CON Σ , SENZA LE GAMBE ESTERNE. L'EQUAZIONE DIVENTA

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{1}{(-)^{-1} - \Sigma}$$

$$\text{NOTA: } \tilde{G}_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma(p)} = \frac{1}{\Pi^{(2)}(p)}$$

DI NORMA SI DEFINISCE

$$m^2 \equiv \mu - \Sigma(0) = \mu - \Sigma(p) + O(p^2)$$

(INFATTI $\Sigma(p)$ A UN LOOP NON DIPENDE DA p).

FUNZIONE DI CORRELAZIONE A 4 PUNTI

$$\langle \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \psi(x_4) \rangle$$

NELLA TEORIA NON INTERAGENTE, ESSA SI ESPRIME IN TERMINI DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI

$$| | , \text{---}\text{---} , \times$$

ORA AVREMO INVECE 3 CLASSI DI DIAGRAMMI:

1) COMPLETAMENTE DISCONNESSI: CI SONO VERTICI NON CONNESSI AD ALCUN PUNTO ESTERNO. VENGONO TUTTI CANCELLATI DAL DENOMINATORE.

$$\text{---}\bigcirc\text{---} \text{---}\bigcirc\text{---} \text{---}\bigcirc\text{---} \text{---}\bigcirc\text{---}$$

2) DIAGRAMMI RIDUCIBILI IN DUE PARTI TRA LORO DISCONNESSE.

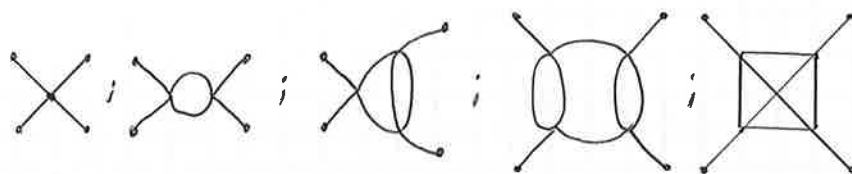
$$\text{---}\bigcirc\text{---} | \text{---}\bigcirc\text{---} \text{---}\bigcirc\text{---}$$

SI CANCELLANO DEFINENDO LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA

$$\langle \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \psi(x_4) \rangle_c = \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \psi(x_4) \rangle - \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle \langle \psi(x_3) \psi(x_4) \rangle + 2 \text{ TERM.}$$

3) DIAGRAMMI COMPLETAMENTE CONNESSI

SONO I SOLI CHE RIMANGONO E CHE USEREMO. AD ESEMPIO (A VARI ORDINI),

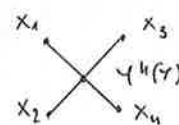


NOTA: A g^0 HO SOLO
DIAGRAMMI DISCONNESSI.

* ALL' ORDINE ZERO, QUINDI, QUESTA FUNZIONE DI CORRELAZIONE È NULLA.

AL PRIMO ORDINE IN g ,

$$\text{Diagram with 4 external lines and a central blob} \sim -\frac{g}{4!} \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \int d^4 y \varphi^4(y) \rangle_{cc} = (*)$$



ATTACCO x_1 AD UNA γ IN 4 MODI, POI $x_2 - \gamma$ IN 3 MODI, $x_3 - \gamma$ IN 2 MODI, $x_4 - \gamma$ IN UN MODO SOLO: IN TOTALE 24 . QUESTO 24 CANCELLA L' $\frac{1}{4!}$.

A QUEST' ORDINE NON POSSO AVERE BULLE O DISCONNETTO IL DIAGRAMMA. OTTENGO

$$(*) = -g \int d^4 y G_0(x_1 - \gamma) G_0(x_2 - \gamma) G_0(x_3 - \gamma) G_0(x_4 - \gamma)$$

PASSANDO ALLO SPAZIO DI FOURIER,

$$\tilde{G}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g \int d^4 y \left(\prod_{i=1}^4 d^4 x_i \right) \left(\prod_{i=1}^4 G_0(x_i - \gamma) \right) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)}$$

NEL VERTICE SI HA LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO. PER VEDERLO IN MODO ESPLICITO, ADOTTIAMO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$z_1 = x_1 - \gamma$$

$$z_2 = x_2 - \gamma$$

$$z_3 = x_3 - \gamma$$

$$z_4 = x_4 - \gamma$$

E γ INVARIATA. LO JACOBIANO VALE

$$J = \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = 1$$

NUOVE NUOVE VARIABILI,

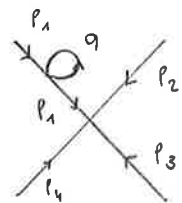
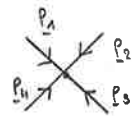
$$\tilde{G} = -g \int d^D \gamma \left(\prod_{i=1}^4 d^D z_i \right) \left(\prod_{i=1}^4 G_0(z_i) \right) e^{i \gamma \sum_i p_i} e^{i \sum_i z_i p_i}$$

MA

$$\int d^D \gamma e^{i \gamma \sum_i p_i} \sim \delta^{(D)} \left(\sum_i p_i \right)$$

QUINDI

$$\tilde{G} = -g \delta^{(D)} \left(\sum_i p_i \right) \prod_{i=1}^4 \underbrace{\left(p_i^2 + \mu \right)^{-1}}_{\tilde{G}_0(p_i)}$$



★ AD ORDINI SUCCESSIVI SUBENTRANO NUOVI VERTICI.

CONSIDERIAMO I DIAGRAMMI COMPLETAMENTE CONNESSI
COME QUELLO A FIANCO, CHE VALE

$$g^2 \delta^{(D)} \left(\sum_i p_i \right) \left(\tilde{G}_0(p_1) \sum_{\dots} \tilde{G}_0(p_1) \right) \tilde{G}_0(p_2) \tilde{G}_0(p_3) \tilde{G}_0(p_4)$$

DOVE PER DEFINIZIONE

$$\sum_{\dots} = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q)$$

IN GENERALE, AVREMO DAI DIAGRAMMI DI QUESTO TIPO UN CONTRIBUTO

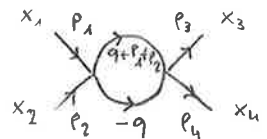
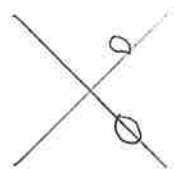
$$-g^m \delta^{(D)} \left(\sum_i p_i \right) \left(\prod_i \tilde{G}(p_i) \right)$$

DOVE $\tilde{G}(p_i)$ È LA FUNZIONE A 2 PUNTI RINORMALIZZATA

$$\tilde{G}(p_i) = \left(\mu + p^2 - \Sigma(p) \right)^{-1}$$

↳ TUTTI I DIAGRAMMI 1PI AMPUTATI, A TUTTI GLI ORDINI, A 2 PUNTI (SELF-ENERGY)

COMPARE ALL'ORDINE g^2 UN DIAGRAMMA COME QUELLO A
DESTRA, CHE È NUOVO; IN OGNI SUO VERTICE, $\sum_i p_i = 0$.



★ IN GENERALE, PERCIO,

$$\tilde{G}(p_1, p_2, p_3, p_4)_{oc} = \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \underbrace{\prod_{i=1}^4 \tilde{G}(p_i)}_{\text{CONTRIBUTO DELLE 4 LINEE ESTERNE}} \cdot \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

DOVE Γ SOMMA I DIAGRAMMI 1PI AMPUTATI*, CHIARAMENTE DI ANNA'

$$\Gamma = -g + O(g^2)$$

*NOTA: A 4 PUNTI. VEDI
FOCUS TRA 5 PAGINE: $\Gamma = -\Gamma(4)$

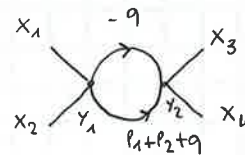
NOTA: È IL CONTRIBUTO DEL VERTICE X.

ALL' $O(g^2)$ HO UN SOLO DIAGRAMMA CHE VALE, NELLO SPAZIO X ,

$$+ g^2 G_0(x_1 - y_1) G_0(x_2 - y_1) G_0(y_1 - y_2)^2 G_0(x_3 - y_2) G_0(x_4 - y_2)$$

QUINDI CONTRIBUISCE A Γ CON UN TERMINE

$$\sim \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^D q}{[\mu + (q + p_1 + p_2)^2][\mu + q^2]}$$



QUESTA PARTE È Γ

NOTA: $\Gamma^{(4)} = (-1) \left[\sum_m \left(-\frac{g}{4!} \right)^m \cdot (\text{DIAGRAMMA}) \right]_{\text{IN } P}$
 $= -\Gamma$

MANIPOLAZIONE DEGLI INTEGRALI NELLO SPAZIO DEI MOMENTI

VALE LA RELAZIONE

$$A^{-m} = \Gamma(m)^{-1} \int_0^\infty dY Y^{m-1} e^{-YA}$$

NOTA: $\Gamma(m) = \int_0^\infty dx x^{m-1} e^{-x}$
 CHIAMA $x = AY \dots$

$$m > 0$$

DOVE $\Gamma(m)$ È LA FUNZIONE GAMMA DI EULERO, CHE SUGLI INTERI VALE

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

APPLICHIAMOLA AL PROPAGATORE, CHE RISCRIVIAMO COME

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2 + m^2)}$$

NOTA: SE $m=1$, USA LA SOLTA

$$t = \int_0^\infty dt e^{-t/\tau}$$

DOVE GLI α_i (UNO PER CIASCUN PROPAGATORE CHE INTRODUCO) SI DICONO PARAMETRI DI FEYNMAN.

RICORDIAMO CHE PER INTEGRALI GAUSSIANI

$$\int d^D k e^{-\alpha k^2 + k \cdot p} = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{D}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}$$

SE CONSIDERO IL DIAGRAMMA A RIANCO,



$$- \left(\frac{g}{(2\pi)^D} \right)^3 \frac{1}{8} \tilde{G}_0(p)^4 \left(\int d^D k \tilde{G}_0(k) \right)^3$$

$$\int d^D k (k^2 + m^2)^{-1} = \int_0^\infty d\alpha \int d^D k e^{-\alpha(k^2 + m^2)} = \pi^{+\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-\frac{D}{2}} e^{-\alpha m^2}$$

$$= \pi^{+\frac{D}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) m^{D-2}$$

NOTA: POSTO $\mu = m^2$,

$$\int_0^\infty d\alpha \alpha^{-D/2} e^{-\alpha \mu} \stackrel{\alpha \mu = \gamma}{=} \mu^{\frac{D}{2}-1} \int_0^\infty d\gamma e^{-\gamma} \gamma^{-\frac{D}{2}} = \mu^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

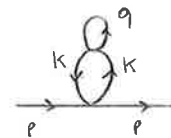
NOTA: PER INTEGRALI GAUSSIANI IN PIÙ DIMENSIONI,

$$\int d^D k e^{-\alpha k^2} = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{D}{2}}$$

IN QUEST'ALTRO DIAGRAMMA COMPARE

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = \pi^{+\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-\frac{D}{2}-1} e^{-\alpha m^2}$$

$$= \pi^{+\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) m^{D-4}$$



NOTA: $D \sim \tilde{G}_0(p)^2 \int d^D q \tilde{G}_0(q) \int d^D k \tilde{G}_0^2(k)$.

QUINDI QUESTO INTEGRALE PUO' DIVERGERE.

PER ESERCIZIO, CALCOLA QUALCHE DIAGRAMMA DALL'APPENDICE 5 DEL PARISI.

NOTIAMO CHE LA FUNZIONE

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x} \text{ PER } x \rightarrow 0.$$

NEL GIRINO 2 COMPARE $\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$, CHE DIVERGE* PER $D \geq 2$.

INVECE 2 CONTIENE $\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$ CHE HA PROBLEMI PER $D \geq 4$.

*NOTA: PERCHÉ NON SOLO PER $D=2$? SI PUO' VEDERE, DA $\Gamma(-x) = \pi [\sin(\pi x) \Gamma(x+1)]^{-1}$, CHE $\Gamma(x)$ HA POLI SEMPLICI IN TUTTI GLI INTERI NEGATIVI.

*QUESTI INTEGRALI POSSONO ESSERE REGOLARIZZATI PONENDO UNA SPAZIATURA RETICOLARE $a > 0$ O UN CUTOFF $\Lambda < \infty$. MA COSA SUCCEDDE SE VOGLIO RIMUOVERE IL CUTOFF, CIOÈ SE $a \rightarrow 0$ O $\Lambda \rightarrow \infty$? POSSO AVERE DELLE DIVERGENZE UV, CHE DOVRÒ CORREGGERE. CONSIDERIAMO UN DIAGRAMMA NELLA FORMA GENERALE

$$\int \left(\prod_{\alpha=1}^L d^D k_\alpha \right) \left(\prod_{\alpha=1}^N \tilde{G}_0(q_\alpha(k)) \right)$$

NOTA: L È IL NUMERO DI LOOP, N IL NUMERO DI LINEE INTERNE (TOTALI).

DOVE LE $q_\alpha(k)$ SONO FUNZIONI LINEARI DEI k ; HO DL INTEGRAZIONI SUI MOMENTI INTERNI E N PROPAGATORI. OGNUNO DEGLI N PROPAGATORI PORTA UN k^{-2} .

PER $a \rightarrow 0$, AVRÒ QUINDI UNA DIVERGENZA COME

$$(k)^{DL-2N} \equiv k^D$$

DOVE SI È CHIAMATO D IL GRADO DI DIVERGENZA. SE

$$D = DL - 2N \geq 0$$

ALLORA IL DIAGRAMMA È DIVERGENTE (UV), ALTRIMENTI SI DICE CHE IL DIAGRAMMA È SUPERFICIALMENTE CONVERGENTE.

IN QUESTO CASO, IL GRADO GLOBALE E' TALE DA FARLO CONVERGERE, MA NON POSSO ESCLUDERE CHE VI SIA UN SOTTODIAGRAMMA DIVERGENTE.

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UN DIAGRAMMA E' CHE SIA LUI CHE I SUOI SOTTODIAGRAMMI SIANO SUPERFICIALMENTE CONVERGENTI. (WEINBERG 1960).

CLASSIFICAZIONE DEI DIAGRAMMI DIVERGENTI

CHIAMANDO

$E = \#$ LINEE ESTERNE

$N = \#$ LINEE INTERNE

$V = \#$ VERTICI

$L = \#$ LOOP

NOTA: PUOI DIMOSTRARE LE 2 RELAZIONI COSI'. DELLE $4V$ LINEE CHE ESCONO DAI VERTICI, E' DIVENTANO LINEE ESTERNE E LE ALTRE SI ACCOPPIANO.

$$N = \frac{1}{2}(4V - E)$$

METTO UN MOMENTO SU CIASCUNA LINEA ($E+N$), MA IN OGNI VERTICE HO LA CONSERVAZIONE DI $\mathcal{P}_{tot}$ QUINDI IN TUTTO V EQUAZIONI CHE LI ACCOPPIO. ($E-1$) SONO ASSATI Sulle LINEE ESTERNE; NE RESTANO LIBERI

$$L = (E+N) - V - (E-1) = V + 1 - \frac{E}{2}$$

VALE LA RELAZIONE TOPOLOGICA (GRAFO CON VERTICI A 4 LINEE)

$$\underline{E + 2N = 4V}$$

NOTA: V E' ANCHE L'ORDINE DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO.

ESEMPI

 $E=2, N=1, V=1, L=1$

 $E=2, N=3, V=2, L=2$

 $E=2, N=3, V=2, L=2$

*NOTA: ($E-1$) PER INVARIANZA TRASLAZIONALE.

NOTA: UN LOOP E' UN CAMMINO SEMPLICE FATTO DI LINEE INTERNE. L'HAMBURGER NON HA 1 LOOP CON 3 LINEE, BENSI' 2 LOOP.

NON E' UN CASO CHE PER $E=2$ SIA SEMPRE $V=L$ (PER LA TEORIA $\lambda\phi^4$). IN EFFETTI UN DIAGRAMMA COME



NON ESISTE IN $\lambda\phi^4$, PERCHE' DA OGNI VERTICE DEVONO USCIRE 4 GAMBE.

VALE INOLTRE LA RELAZIONE

$$\underline{V = L + \frac{E-2}{2}}$$

QUINDI IL GRADO DI DIVERGENZA DI UN DIAGRAMMA SI PUO' SCRIVERE COME

$$\begin{aligned} D &= DL - 2N = DL + E - 4V = DL + E - 4L - 2E + 4 \\ &= (D-4)L + (4-E) \end{aligned}$$

QUINDI:

i) $D < 2$: NON CI SONO DIVERGENZE.

$$D=1 \rightarrow D = -3L + 4 - E$$

NOTA: $D = (4-E) - \varepsilon L$ DOVE $\varepsilon = (4-D)$. LO SCOPO E' COMUNQUE ELIMINARE N E V .

NELLA FUNZIONE A 2 PUNTI ($E=2$) HO $D = -3L+2$ E, MANO A MANO CHE CRESCE 'E', D DIVENTA PIU' NEGATIVO.

ii) $D=2$

POSSO AVERE PROBLEMI SE $E=2$, $D = -2L+2$.

SE $E > 2$, $-2L+4-E \leq -2L+1 < 0$, NON DIVERGENTE.

QUINDI IN $D=2$ IL SOLO DIAGRAMMA CHE DIVERGE E' LA SELF-ENERGY AD UN LOOP ...O... QUESTA VALE

$$\Sigma_{\dots} = -\frac{g}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \int \frac{d^D K}{\mu + \sum_{\nu} \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(K_{\nu} \omega))} \equiv \Sigma(p, \mu) + O(g^2)$$

NON E' UN PROBLEMA SE DIVERGE, PERCHÉ L'ENERGIA E' DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE. VA PERO' RINORMALIZZATO SCEGLIENDO

$$\Sigma_R(p, \mu) \equiv \Sigma(p, \mu) - \Sigma(0, \mu_R)$$

DOVE μ_R E' DETTO PUNTO DI RINORMALIZZAZIONE.
CIO' E' EQUIVALE AD AGGIUNGERE AD H UN CONTROTERMINO

$$H \rightarrow H' = H + c \int d^D x \psi^2(x)$$

iii) $D=3$

C'E' UN SOLO NUOVO DIAGRAMMA DIVERGENTE:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{g}{(2\pi)^3} \right)^2 \int d^3 k_1 d^3 k_2 \tilde{G}_0(k_1) \tilde{G}_0(k_2) \tilde{G}_0(p-k_1-k_2) \sim \log \alpha^{-2} \sim \log \Lambda$$

MA SI PUO' MOSTRARE CHE LA SUA PARTE DIVERGENTE IN Λ NON DIPENDE DA p .

ix) $D=4$

HO DIVERGENZE POLINOMIALI NEI MOMENTI ESTERNI. AGGIUNGO AD H

$$\int d^D x (\partial_{\mu} \psi)^2$$

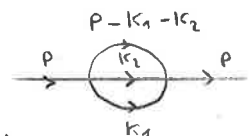
O COMUNQUE DEI CONTROTERMINI CHE CONTENGANO LE DERIVATE DI ψ .

NOTA: IL CASO $L=0$ NON VA CONSIDERATO, NON C'E' NULLA CHE POSSA DIVERGERE. PARTIRE DA $E=2$ E ANDARE A SALIRE EQUIVALE A CONSIDERARE I VARI SOTTO DIAGRAMMI.

NOTA: $\Sigma_{\dots} = -\frac{3}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \int \frac{d^D K}{K^2 + \mu + \frac{K^4}{\Lambda^2}}$
A QUEST' ORDINE (1 LOOP), IN EFFETTI LA SELF-ENERGY $\Sigma(p, \mu)$ NON DIPENDE DA p .

NOTA: CIO' RIMUOVE LA DIVERGENZA PERCHÉ $\Sigma_{\dots}$, CHE DIVERGE COME $\log \Lambda$, NON DIPENDE DA p .

NOTA: AGGIUNGERE UNA COSTANTE C A Σ EQUIVALE A MODIFICARE $G(p) \rightarrow [G(p)^{-1} - C]^{-1}$
OVVERO A CAMBIARE IL VALORE DI μ .
CIO' SI OTTIENE AGGIUNDO IN H $\frac{c}{2} \int d^D x \psi^2(x)$



NOTA: QUINDI SOTTRAGGI IL SUO VALORE IN $p=0$ RIMUOVE LA DIVERGENZA.

NOTA: SIGNIFICA RISCALDARE I CAMPI!

NOTA: TUTTO VERO, PERO' SENZA VEDERE I CONTI SECONDO ME SA MOLTO DI ARIA FRITTA. VEDI AD ESEMPIO BINNEY, 9.1 ÷ 9.3.

• APPROCCIO COSTRUTTIVO RIGOROSO

COME COSTRUISSO UNA TEORIA DI CAMPO BEN DEFINITA NEL LIMITE CRITICO?

E' STATO PROVATO MATEMATICAMENTE CHE, PER $D \leq 4$, DOPO AVER INTRODOTTO I CONTRATEMINI ESISTE IL LIMITE $\alpha \rightarrow 0$.

• FOCUS: VERTEX FUNCTIONS

(BINNEY 8.4)

DIAMO GIUSTO UN'INFINITATE. ABBIAMO SEMPRE CALCOLATO L'ENERGIA LIBERA DI HELMOLTZ $F[h]$, CON

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{\delta \log Z[h]}{\delta h(x)} \equiv \bar{\phi}(x)$$

$$F[h] = -\frac{1}{\beta} \log Z[h]$$

MEDIANTE TRASFORMATA DI LEGENDRE, DEFINIAMO L'ENERGIA LIBERA DI GIBBS

$$\Gamma[\bar{\phi}] \equiv \int d^D x h(x) \bar{\phi}(x) - \log Z[h] = \beta G[\bar{\phi}]$$

CHE NON E' PIU' UN FUNZIONALE DI h , MA DEL CAMPO MEDIO. PASSANDO IN TRASFORMATA DI FOURIER

$$\tilde{\chi}(\underline{k}) \equiv \int d^D x e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \bar{\phi}(x) = \int d\underline{x} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \frac{\delta \log Z[h]}{\delta \tilde{h}(\underline{q})} \frac{\delta \tilde{h}(\underline{q})}{\delta h(\underline{x})}$$

$$= \int d\underline{x} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \frac{\delta \log Z[\tilde{h}]}{\delta \tilde{h}(\underline{q})} \int d\underline{y} e^{-i\underline{q} \cdot \underline{y}} \frac{\delta h(\underline{y})}{\delta h(\underline{x})} = \frac{\int d\underline{x} e^{-i(\underline{k}+\underline{q}) \cdot \underline{x}} \frac{\delta \log Z[\tilde{h}]}{\delta \tilde{h}(\underline{q})}}{= \delta(\underline{k}+\underline{q})} = \frac{\delta \log Z[\tilde{h}]}{\delta \tilde{h}(-\underline{k})}$$

$$\Gamma[\tilde{\chi}] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\chi}(\underline{k}) \tilde{h}(-\underline{k}) - \log Z[\tilde{h}]$$

SI PUO' MOSTRARE CHE Γ'' A $\tilde{\chi}=0$ SVANISCE AL PUNTO CRITICO (SISTEMA A $V=\infty$) E CHE,

PER $T < T_c$, IL PIU' GRANDE VALORE DI $\tilde{\chi}$ PER CUI $\Gamma' = 0$ E' LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA.

PER $T > T_c$, SE ESPANDO

$$\Gamma[\tilde{\chi}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \frac{d^D q_1 \dots d^D q_m}{(2\pi)^{mD}} \tilde{\chi}(-\underline{q}_1) \dots \tilde{\chi}(-\underline{q}_m) \Gamma^{(m)}(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_m)$$

LE $\Gamma^{(m)}$ SI DICONO VERTEX FUNCTIONS. Γ E' IL FUNZIONALE GENERATORE DEI DIAGRAMMI

AMPUTATI 1PI: SI PUO' MOSTRARE CHE

$$\Gamma^{(2)}(\underline{k}) = \tilde{G}_0^{-1}(\underline{k}) - \Sigma(\underline{k}) = \frac{1}{\tilde{G}_c^{(2)}(\underline{k})}$$

$$\Gamma^{(4)}(\dots) = -\Gamma''(\dots)$$

$$(\Gamma^{(2)}(\underline{k}_1, \underline{k}_2) = \delta(\underline{k}_1 + \underline{k}_2) \Gamma^{(2)}(\underline{k}_1))$$

$$\tilde{G}_c^{(4)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_4) = -\delta^D\left(\sum_{i=1}^4 \underline{k}_i\right) \prod_{i=1}^4 \tilde{G}_c^{(2)}(\underline{k}_i) \cdot \Gamma^{(4)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_4)$$

DOVE Σ E' Γ'' SONO I SIMBOLI CHE NOI ABBIAMO ADOTTATO PER INDICARE LA SOMMA DEI DIAGRAMMI 1PI A TUTTI GLI ORDINI, RISPETTIVAMENTE A 2 E A 4 PUNTI.

VICINO ALLA TRANSIZIONE

LE DIVERGENZE UN ERANO PIU' UN INCONVENIENTE TECNICO; ORA APPAIONO DIVERGENZE IR, CHE SONO FISICAMENTE INTERESSANTI (LIMITE DI GRANDI DISTANZE).

DISCUTEREMO IL LIMITE A MOLTE COMPONENTI, $m \rightarrow \infty$, DI

$$\psi_a(x) \quad a = 1, \dots, m$$

E INTRODURREMO LA RISOMMAZIONE DI HARTREE-FOCK.

DIVERGENZE IR

CI METTIAMO NEL CASO

$$p \rightarrow 0$$

$$\mu \rightarrow \mu_c$$

STIAMO ESPANDENDO LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE IN POTENZE DI g A $(\mu - \mu_c(g))$ ASSO. NEL LIMITE CRITICO,

$$\mu \rightarrow \mu_c(g)$$

A TUTTI GLI EFFETTI, NOI STIAMO ESPANDENDO NEL PARAMETRO

$$u = \frac{g}{(\mu - \mu_c(g))^{(4-D)/2}}$$

CHE E' DELICATO, PERCHÉ DIVERGE QUANDO CI AVVICINIAMO ALLA REGIONE CRITICA (COSA CHE QUINDI, ORA COME ORA, NON POSSIAMO FARE).

NOTA: IN $D < 4$.

L'ANALISI DIMENSIONALE CI DICE INFATTI CHE

$$\begin{cases} \lambda = g a^{4-D} \\ M = \mu a^2 \end{cases}$$

$$[\mu] = [a^{-2}] = L^{-2}$$

$$[g] = [a^{-(4-D)}]$$

μ E' UNA MASSA QUADRA (E' CHE m ERA LA MAGNETIZZAZIONE).

$$[\mu^{(4-D)/2}] = [a^{-(4-D)}] = [g]$$

NOTA: CON QUESTE DEFINIZIONI SI ERA RISCHITTA

$$H_{eff}[\psi] = \sum_{i,j} \frac{1}{2} J_{ij} (\psi_i - \psi_j)^2 + \sum_i \left(\frac{M}{2} \psi_i^2 + \frac{\lambda}{4!} \psi_i^4 \right)$$

CON

$$\psi_i = a^{(D-2)/2} \varphi_i \quad [\varphi_i] = 0 = [\lambda] = [M]$$

QUI E' PALESE CHE SI ESPANDA PERTURBATIVAMENTE IN λ , E RITROVO IL MODELLO GAUSSIANO SE $\alpha \rightarrow 0$.

NOTA: AL MOMENTO NON E' UN ARGOMENTO MOLTO CONVINCENTE, MA VEDREMO CHE IN EFFETTI SI ESPANDE IN IL (VIENE FUORI DA SOLO) QUANDO AFFRONTAREMO LA RINORMALIZZAZIONE NELLO SPAZIO DEGLI IMPULSI.

LA QUANTITA' ADIMENSIONALE NATURALE CHE POSSIAMO OTTENERE COME RAPPORTO TRA POTENZE DI g E $(\mu - \mu_c(q))$ E' APPUNTO μ .

QUINDI, SE ESPANDO QUANTITA' ADIMENSIONALI, ESPANDO IN EFFETTI IN FUNZIONE DI QUESTO PARAMETRO.

L'ESPANSIONE NON PUO' FUNZIONARE A μ_c , DEFINITO COME

$$\mu_c: |\tilde{G}(p, \mu_c)|_{p=0} = \infty$$

INVECE DI METTERMI SUL PUNTO CRITICO, ALLORA, NOTO CHE

$$[\mu - \mu_c] = [p^2]$$

POTHEI PROVARE A CALCOLARE LE CORRELAZIONI IN FUNZIONE DI p A $\mu = \mu_c$; AD ESEMPIO, PER LA FUNZIONE A 2 PUNTI TROVEREI

$$\tilde{G}(g, p) = \frac{1}{p^2} f\left(\frac{g}{p^{4-D}}\right)$$

NOTA: $g p^{D-4}$ E' UNA QUANTITA' ADIMENSIONALE. QUINDI LO E' f . SI STA DICENDO CHE $\tilde{G}$ DIVERGE, PER p PICCOLI, COME p^{-2} .

PER QUELLA A 4 PUNTI, CONTRIBUISCONO A Γ DIAGRAMMI COME



$$\sim g^2 \int \frac{d^D q}{[(-q + p_1 + p_2)^2 + \mu][\mu + q^2]} \approx g^2 \int \frac{d^D q}{q^4} \sim g^2 q^{-(4-D)}$$

IN GENERALE, OGNI BOLLA DA' UN $q^{-(4-D)}$. AD ESEMPIO



$$\sim g^3 q^{-2(4-D)}$$

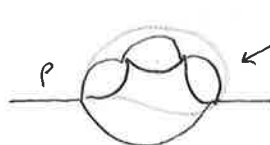
SE HO m BOLLE,

$$g^{m+1} q^{-m(4-D)}$$

NOTA: $\overbrace{\times \times \times \dots \times}^m$

ESEMPIO

$D=3$, 2 PUNTI



$$\sim \int \frac{d^3 k}{k^3} f((p+k)^{-1})$$

NOTA: LE 3 BOLLE NEL COMPLESSO DANNO $g^4 q^{-3(4-3)} \sim \frac{1}{q^3}$.

E' INFRAROSSO DIVERGENTE (DIVERGE PER $k \rightarrow 0$).

PIU' AGGIUNGO BOLLE E PIU' I DIAGRAMMI DIVERGONO:

L'ESPANSIONE PERTURBATIVA SEMBRA INUTILE.

APPROSSIMAZIONE DI HARTREE - FOCK

UN PASSO "FUORBO" E' LA COSIDDETTA

RPA (RANDOM PHASE APPROXIMATION)

CPA (COHERENT POTENTIAL APPROXIMATION)

PRENDIAMO TUTTI I DIAGRAMMI CON DEI CACTUS DI g ,



NOTA: STO FACENDO UNA PARTICOLARE SELEZIONE TRA TUTTI GLI INFINITI DIAGRAMMI.

E RISOMMIAMOLI PER COSTRUIRE Σ , LA SELF-ENERGY.

SI ERA VISTO COME, RISOMMANDO I DIAGRAMMI DEL TIPO

$$\Sigma_1 \rightarrow \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

NOTA: IN QUEL CASO I CACTUS NON C'ERANO!

SI ERA OTTENUTA UNA CORREZIONE INDIPENDENTE DA P , MENTRE $\Sigma(P) = \Sigma_{1+2+3+\dots}$.

INDICHIAMO CON I SIMBOLI

$\text{---} \square \text{---}$: SOMMA DEI DIAGRAMMI 1PI AMPUTATI NELLA CLASSE CONSIDERATA.

$\text{---} \bigcirc \text{---}$: TUTTA LA CORRELAZIONE COMPLETA NELLA NOSTRA APPROSSIMAZIONE

OSSIA

$$\text{---} \square \text{---} = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

CON LE GAMBE ESTERNE E NON NECESSARIAMENTE 1PI. PONIAMO*

$$\text{---} \square \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (\text{EQUAZIONE RICORSIVA})$$

HARTREE-FOCK RISOMMA I DIAGRAMMI CHE STIAMO CONSIDERANDO.

POSSO COSI' CALCOLARE ITERATIVAMENTE

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---}$$

$$\text{---} \square \text{---} = \text{---} \circ \text{---}$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + (\text{COPIE})$$

$$\text{---} \square \text{---} = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}$$

* NOTA: STANDO ALLE DEFINIZIONI DATE, L'EQUAZIONE SI SCRIVE COSI': $\text{---} \square \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---}$

CIOE' SENZA LE GAMBE. IL FATTO E' CHE STA USANDO MALE LA SELF-ENERGY, CHE IN GENERALE SI DENOTA CON IL SOLO QUADRATINO, $\square$. VEDI FOCUS TRA 5 PAGINE.

DEFINIAMO UNA Σ_R RINORMALIZZATA

$$\Sigma_R(p, \mu) = \Sigma(p, \mu) - \Sigma(0, \mu_N)$$

DOVE μ_N E' DETTO PUNTO DI RINORMALIZZAZIONE (IN GENERALE SI SCEGLIE $p=0$, MA NON E' NECESSARIO). IN TERMINI DI Σ_R , L'EQUAZIONE RICORRENTE E'

$$\Sigma_R = -\frac{g/2}{(2\pi)^D} \left[\int \frac{d^D q}{q^2 + \mu - \Sigma_R} - \int \frac{d^D q}{q^2 + \mu_N} \right]$$

NOTA: SIMENTICA IL SOLITO $m^2 \equiv \mu - \Sigma(0)$. QUESTO METODO E' AUTOCOERENTE E HA LE SUE CONVENZIONI.

HARTREE-FOCK

(I)

DEFINENDO

$$m^2 \equiv \mu - \Sigma_R$$

LA (I) DIVENTA

$$\Sigma_R = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[(q^2 + m^2)^{-1} - (q^2 + \mu_N)^{-1} \right]$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ D \neq 2}}{=} -\frac{g}{2} (2\pi)^{-D} \pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left[(m^2)^{\frac{D-2}{2}} - \mu_N^{\frac{D-2}{2}} \right]$$

IN $D=2$, SI PONE INVECE

$$\Sigma_R = -\frac{g}{2} \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu_N}{m^2}\right)$$

NOTA: SI USA $\int_0^\infty \frac{1}{q^2+m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(q^2+m^2)}$

E CI SI RICONDUCE ALLA $\Gamma(x)$. IN $D=2$ AVREI $\Gamma(0)$, CHE VA PRESA CON LE MOLLE.

NOTA: Σ_R COSI' OTTENUTA E' INDIPENDENTE DALL' IMPULSO, COME Σ_1 .

IN $D \neq 2$ SI TROVA QUINDI, SOSTITUENDO A Σ_R LA DEFINIZIONE SOPRA,

$$m^2 = \mu + \underbrace{\frac{g}{2} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)}_{\equiv A} \left[(m^2)^{\frac{D-2}{2}} - \mu_N^{\frac{D-2}{2}} \right] \quad (\text{II})$$

IN $D=3$, USANDO $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$,

$$m^2 = \mu + \frac{g}{2} \frac{1}{4\pi\sqrt{4\pi}} (-\sqrt{4\pi}) (m - \mu_N^{1/2})$$

$$m^2 + \frac{g}{8\pi} m = \mu + \frac{g}{8\pi} \sqrt{\mu_N}$$

SE IN $D=3$ RICHIEDO $m=0$, OTTENGO

$$\mu_c = -\frac{g}{8\pi} \sqrt{\mu_N}$$

IN GENERALE*, PER $D>2$ E $D \leq 4$,

$$\mu_c \sim -g \mu_N^{\frac{D-2}{2}}$$

NOTA: LA (II) SI DICE "GAP EQUATION".

**NOTA: SCRIVIAMO, IN GENERALE, $m^2 \sim (\mu - \mu_c)^{2\gamma}$

COME SI ACCORDA QUESTO CON $m^2 \equiv \mu - \Sigma_R$?

BASTA RICORDARE CHE $\Sigma_R = \Sigma_R(\mu)$.

*NOTA: NELLA (II), $m=0 \Rightarrow \mu_c = A \mu_N^{D/2-1}$. INOLTRE $\dots (\mu - \mu_c) = m^2 - A m^{D-2}$

DOVE m^2 SI IGNORA SE $2 < D \leq 4$.

NOTA: LA SELF-ENERGY Σ_R CORRREGGE IL PROPAGATORE RENDENDOLO

$$\frac{1}{q^2 + \mu - \Sigma_R} = \frac{1}{q^2 + m^2}$$

QUINDI PER DEFINIZIONE SI HA IL PUNTO CRITICO** PER $m=0$.

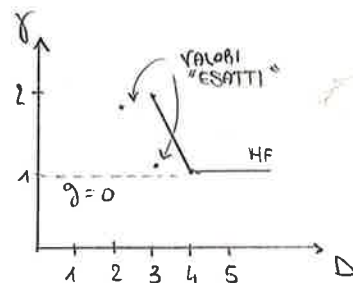
$$E \quad m \sim (\mu - \mu_c)^{\frac{1}{D-2}}$$

ALLORA*

$$\chi = m^{-2} = (\mu - \mu_c)^{-\gamma_{HF}} \equiv (\mu - \mu_c)^{-\frac{2}{D-2}}$$

IN QUESTA APPROSSIMAZIONE (H-F), $D \geq 2$ e $D \leq 4$,

$$\gamma_{HF} = \frac{2}{D-2}$$



QUESTO PUO' APPARIRE INSENZATO: PERCHE' SCEGLIERE PROPRIO QUELLA CLASSE DI DIAGRAMMI?

IN REALTA' ESSI SONO I PRIMI DIAGRAMMI NON BANALI NELL' ESPANSIONE

$$\frac{1}{m}, \varphi_a \quad a=1, \dots, m$$

QUINDI UN MOTIVO C'E' (LO DISCUTEREMO).

*NOTA: QUESTO E' VERO ANCHE AL DI FUORI DI H-F, PERCHE' (CONTINUA IN **)
 $m^{-2} = \Gamma^{(2)}(0) = \tilde{G}^{-1}(0)$
 $= (\mu + p^2 \Sigma(p))|_{p=0} = \mu - \Sigma(0)$

NOTIAMO CHE IL RISULTATO DI H-F NON DIPENDE DA g : HO UNA SORTA DI "SALTO" TRA IL CASO $g=0$ E QUELLO $g \neq 0$.

**NOTA: QUINDI
 $m^{-2} = \tilde{G}(0) = \int d^D x G(x)$
 $= \int d^D x \frac{1}{p} \chi(x) = \frac{1}{p} \chi$

L'ESPANSIONE IN $\frac{1}{m}$

SIAMO IL NUMERO DI COMPONENTI DEI CAMPI. QUANDO $m \rightarrow \infty$, H-F E' PROPRIO LA SOMMA DEI DIAGRAMMI DOMINANTI IN QUESTA APPROSSIMAZIONE.

CONSIDERIAMO QUINDI m COMPONENTI IN UNO SPAZIO INTERNO (NON E' LO SPAZIO REALE, ANCHE CON UN SITO SOLO HO INFINITI g.d.l.)

$$\varphi_a(x), \quad a=1, \dots, m$$

SCEGUAMO UN' HAMILTONIANA H INVARIANTE SOTTO ROTAZIONI IN m DIMENSIONI (INTERNE), OSSIA SOTTO IL GRUPPO DI SIMMETRIA $O(m)$:

$$H[\varphi] = \int d^D x \left[\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^D \sum_{a=1}^m (\partial_j \varphi_a)^2}_{\text{TERMINE CINETICO}} + \underbrace{\frac{\mu}{2} \sum_{a=1}^m \varphi_a^2}_{\text{TERMINE DI MASSA}} + \underbrace{\frac{g}{4m} \left(\sum_{a=1}^m \varphi_a^2 \right)^2}_{\text{INVARIANTE QUADRATICO}} \right] \quad (I)$$

NEL CASO AD ALTE T, SO CHE IL SISTEMA E' ISOTROPO E INVARIANTE PER TRASLAZIONI:

$$\langle \varphi_a(0) \varphi_b(x) \rangle = \delta_{ab} G(x)$$

NOTA: IL ∂_{ab} VIENE DALLA SIMMETRIA PER ROTAZIONI.

POSSO ALLORA PENSARE A UNO SVILUPPO IN q : AVREI GLI STESSI DIAGRAMMI CHE NELLA TEORIA SCALARE, MA MOLTEPLICITA' DIVERSE. PER VEDERLO, INTRODUCIAMO DEI CAMPI

$$\alpha(x) \rightarrow \int d[\alpha(x)]$$

NOTA: VOGLIO RISCRIVERE IL TERMINE IN φ MEDIANTE UN CAMPO AUSILIARIO.

CHE NON HANNO IL TERMINE CINETICO, MA CHE CI SERVONO PER IL SOLTTO TRUCCO DELL'INTEGRAZIONE GAUSSIANA:

$$\int d[\alpha(x)] \exp \left\{ - \int d^D x \left(\frac{1}{2g} \alpha^2(x) + \frac{1}{\sqrt{12m}} i \alpha(x) \sum_{a=1}^m \varphi_a^2(x) \right) \right\}$$

$$\simeq \exp \left\{ - \int d^D x \frac{1}{12m} \left(\sum_a \varphi_a^2(x) \right)^2 \frac{2g}{4} \right\} = \exp \left\{ - \int d^D x \frac{g}{24m} \left(\sum_a \varphi_a^2(x) \right)^2 \right\}$$

DOVE SI E' USATO

$$\int dx e^{-Ax^2 \pm Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

NOTA: CAPITO? METTI $m=1$ E HAI

$$e^{- \int d^D x \frac{g}{4!} \varphi(x)^4}$$

VEDI FOCUS QUI SOTTO, CAMBIO QUALCHE TERMINE, TROVO

$$A \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{12m}} \sum_a \varphi_a^2(x)$$

$$B \equiv i \sqrt{\frac{g}{12m}} \sum_a \varphi_a^2(x)$$

POSSO IN QUESTO MODO SCRIVERE

$$Z = \int d[\alpha] d[\varphi] e^{-H[\alpha(x), \varphi(x)]}$$

CON

$$H[\alpha(x), \varphi(x)] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^D \sum_{a=1}^m (\partial_\nu \varphi_a(x))^2 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{i \alpha(x)}{\sqrt{12m}} \right) \sum_{a=1}^m \varphi_a^2(x) + \frac{1}{2g} \alpha^2(x) \right]$$

DOVE $\alpha(x)$ NON HA IL TERMINE CINETICO E INTERAGISCE CON

$$\sum_a \varphi_a^2(x)$$

HO COSI' TRASFORMATO UN VERTICE QUARTICO IN UN VERTICE

QUADRATICO IN CUI PERO' HO L'INTERAZIONE CON UN NUOVO CAMPO $\alpha(x)$.

FOCUS: SECONDO ME COSI' NON HA ALCUN SENSO. DEFINISCI INVECE, SEMPRE IN ACCORDO CON LA (I),

$$H[\alpha(x), \varphi(x)] = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^D \sum_{a=1}^m (\partial_\nu \varphi_a(x))^2 + \left(\frac{\mu}{2} + i \sqrt{\frac{g}{12m}} \alpha(x) \right) \sum_{a=1}^m \varphi_a^2(x) + \frac{1}{2} \alpha^2(x) \right\}, \quad \text{i.e. } \alpha(x) \rightarrow \sqrt{g} \alpha(x).$$

AVREMO PROPAGATORI DEL TIPO

$$\varphi_a(x) \text{ --- }, \quad \alpha(x) \text{ ----}$$

$$\varphi_a \text{ --- } \varphi_b \text{ --- } \frac{i\sqrt{g}}{\sqrt{12m}} \delta_{ab}$$

E $\varphi_a, \varphi_b, \alpha$ FORMANO VERTICI A 3 NELLO SPAZIO DEI MOMENTI.

SICCOME α NON HA IL TERMINE CINETICO (NON PARLA CIOE' CON GLI ALTRI α NELLO SPAZIO),

$$\langle \alpha(x) \alpha(0) \rangle = g \delta(x)$$

NOTA: $\int d^4x \alpha(x) \alpha(y) \alpha(z) e^{i \sqrt{\frac{g}{42m}} \alpha(x) \sum_i \varphi_i^2 + \frac{1}{2} \alpha^2(x)}$
 FA ZERO PER FORZA SE $y \neq z$. IN EFFETTI IN ISING
 $\sum_i \sigma_i \tilde{\sigma}_i \sigma_j \rightarrow$ PEZZO CON LE DERIVATE $\rightarrow$ INTERAZIONE.

IN QUESTA RISCrittURA E' EVIDENTE QUALI SIANO I DIAGRAMMI DOMINANTI A GRANDI m .

LA FUNZIONE A 4 PUNTI AMPUTATA 1PI SARA' (ALL'ORDINE) IL VERTICE

$$\Gamma_{abcd} = (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \frac{g}{3m} + O(g^2)$$



I DIAGRAMMI POSSONO ESSERE RISCritti IN TERMINI DEI NUOVI CAMPI E DEI NUOVI VERTICI. AD ESEMPIO,

$$\times \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \dots$$

*NOTA: CON LA MIA CONVENZIONE (VEDI FOCUS), IL TERMINE DI MASSA E' $\frac{1}{2} \alpha^2(x)$ E $\langle \alpha(x) \alpha(0) \rangle = \delta(x)$.

$$\bigcirc \rightarrow \begin{array}{c} \varphi \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \varphi \quad \alpha \quad \varphi \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \varphi \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \varphi \quad \alpha \quad \varphi \end{array} + \dots$$

CHE SONO DEL PRIMO ORDINE IN g , O DEL SECONDO ORDINE IN $\sqrt{g}$ NELLA NUOVA TEORIA (OGNI INTERAZIONE CON α , $\sqrt{g} \alpha \varphi \varphi$, SI PORTA DIETRO UN $\sqrt{g}$). O ANCORA

$$\bigcirc \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \alpha \quad \alpha \quad \alpha \end{array} > \dots$$

DOVE SI VEDE CHE COMPaiono SEMPRE SOLO VERTICI A 3.

IN QUESTA RAPPRESENTAZIONE E' POSSIBILE CONTROLLARE CHE COSA SUCCEDA NEL LIMITE $m \rightarrow \infty$:

- 1) PERIAMO UN FATTORE m PER OGNI VERTICE g (INFATTI OGNI NUOVO VERTICE HA $\sqrt{\frac{g}{m}}$).
- 2) PER OGNI LOOP CHIUSO DI LINEE φ GUADAGNO UN m . POSSO VEDERE OGNI LINEA φ COME m LINEE (LE SUE COMPONENTI): SUBENTRA UN FATTORE COMBINATORIO (DI MOLTEPLICITA') $\propto m$.

PER $m \rightarrow \infty$ A g FISSO I SOLI DIAGRAMMI CHE SOPRAVVIVONO SONO

$$\langle \varphi \varphi \rangle: \text{---} \square \text{---} = \bigcirc$$

IL TERMINE CHE DOMINA E' PROPRIO LA RISOMMAZIONE DELLA BOLLA,
 OIE' H-F. PER LE FUNZIONI $\langle \alpha \alpha \rangle$ SOPRAVVIVONO INVECE

$$\langle \alpha \alpha \rangle = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

(MA E' POCO INTERESSANTE).

NELLA RAPPRESENTAZIONE α, γ , AD OGNI ORDINE SOPRAVVIVE SOLO
 UN NUMERO FINITO DI DIAGRAMMI. E' POSSIBILE CALCOLARE GLI
 ESPONENTI CRITICI COME SOMMA DI POTENZE DI $\frac{1}{m}$.

L'ESPANSIONE $\frac{1}{m}$ (E QUINDI H-F) E' UTILE PER CAPIRE DELLE
 COSE SUL COMPORTAMENTO CRITICO, MA NON MOLTO PER CALCOLARE
 GLI ESPONENTI CRITICI.

FOCUS: HARTREE - FOCK

RICORDIAMO CHE $\Sigma(p, \mu)$ E' LA SELF-ENERGY, OSSIA IL CONTRIBUTO DEI DIAGRAMMI AMPUTATI. AL PRIMO ORDINE
 IN g , DOVE L'UNICO DIAGRAMMA PRESENTE E' $\bigcirc$,

$$\Sigma(p, \mu) \underset{\substack{\uparrow \\ O(g)}}{\approx} -\frac{g}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_0(q) = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + \mu} \equiv \dots \bigcirc \dots \quad (I)$$

(A QUEST'ORDINE, LA SELF-ENERGY NON DIPENDE DA p). SEGUE LA CORREZIONE AL PROPAGATORE

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma(p, \mu)} \equiv \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (II)$$

H-F PRESCRIVE DI SOSTITUIRE $\tilde{G}(p)$ A $\tilde{G}_0(p)$ PER CALCOLARE LA SELF-ENERGY, OVVERO

$$\dots \text{---} \bigcirc \text{---} \dots = \Sigma(p, \mu) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TUTTI GLI ORDINI} \\ \text{H-F}}}{\equiv} -\frac{g}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{G}(p) = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + \mu - \Sigma(p, \mu)} \equiv \dots \bigcirc \dots \quad (III)$$

IN QUESTO MODO NON SI OTTENGONO TUTTI I DIAGRAMMI AMPUTATI CHE DOVREI METTERE IN $\text{---} \bigcirc \text{---}$, MA SOLO QUELLI
 FATTI DI CACTUS, COME VISTO A LEZIONE. AD ESEMPIO, CALCOLANDO $\tilde{G}(p)$ CON LA (II) USANDO LA STIMA (I) DI $\Sigma(p, \mu)$,

$$\tilde{G}(p) = \left[p^2 + \mu + \frac{g}{2} \int dK \frac{1}{K^2 + \mu} \right]^{-1} = \left[(p^2 + \mu) \left(1 + \frac{1}{p^2 + \mu} \frac{g}{2} \int dK \frac{1}{K^2 + \mu} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{p^2 + \mu} \left[1 - \frac{g}{2} \frac{1}{p^2 + \mu} \int \frac{dK}{K^2 + \mu} \right] + O(g^2)$$

QUINDI

$$\Sigma(p, \mu) = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D p}{p^2 + \mu} \left[1 - \frac{g}{2} \frac{1}{p^2 + \mu} \int \frac{dK}{K^2 + \mu} \right] = -\frac{g}{2} \int \frac{d^D p}{p^2 + \mu} + \frac{g^2}{4} \int \frac{d^D p}{(p^2 + \mu)^2} \int \frac{dK}{K^2 + \mu} + O(g^3) = \dots \bigcirc \dots + \dots \bigcirc \dots + O(g^3)$$

E COSI' VIA.

L'ULTIMO PASSAGGIO E' SOTTARE ALLA $\Sigma(p, \mu)$ CHE ABBIAMO OTTENUTO RICORSIVAMENTE NELLA (III) IL SUO VALORE
 CALCOLATO IN UN PUNTO DI SOTTARAZIONE $m^2 = \mu_N$ (IN QUESTO MODO LA SI RINORMALIZZA) E A IMPULSO NULLO. SI OTTIENE

$$\Sigma_R(p, \mu) = -\frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^D} \left[\int \frac{d^D p}{p^2 + \mu - \Sigma_R(p, \mu)} - \int \frac{d^D p}{p^2 + \mu_N} \right]$$

NOTA CHE $\dots \bigcirc \dots$ E' UN LOOP CHE HO COSTRUITO PIPIEGANDO SU SE' STESSO ($\text{---} \bigcirc \text{---} \equiv \tilde{G}(p)$) INVECE CHE ($\text{---} \equiv \tilde{G}_0(p)$).

GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE NELLO SPAZIO P

PARTIAMO DALLO SVILUPPO PERTURBATIVO IN g DEL MODELLO DI LANDAU-GINSBURG. NE ABBIAMO GIÀ OSSERVATO ALCUNE PATOLOGIE, TRA CUI LA DIVERGENZA DI μ AL PUNTO CRITICO.

MA IL PUNTO CRITICO ESISTE: È BEN DEFINITO, VI SONO DELLE PROPRIETÀ CHE POSSO MISURARE E A CUI POSSO FARE CORRISPONDERE UN VALORE FINITO.

RINORMALIZZEREMO LA TEORIA BASANDO L'ESPANSIONE SU QUANTITÀ FISICHE DELLE QUALI HA SENSO FARE IL LIMITE.

UN MODO È ESPANDERE IN POTENZE DI

$$\varepsilon = 4 - D = D_c^u - D$$

PERCHÉ SAPPIAMO CHE A $D = D_c^u$ IL CONTO ESATTO CI DA' $g = 0$, LA TEORIA LIBERA: NON CI SONO CORRELAZIONI.

UN ARGOMENTO EURISTICO PER VEDERLO È IL SEGUENTE:

1) CAMPO $\varphi \sim R.W.$ (INTEGRALE SUI CAMMINI)

2) $R.W. \sim$ DIMENSIONE 2 ($t \sim d^2$, PERCHÉ $d \sim \sqrt{t}$)

DUE CAMPI INTERAGISCONO QUANDO... I LORO CAMMINI SI INCONTRANO.

4 DIMENSIONI È IL PUNTO IN CUI GENERICAMENTE DUE $R.W.$ SMETTONO DI INCONTRARSI.

PARISI, NEL 1973, TROVA INVECE UN MODO PER CALCOLARE GLI ESPONENTI CRITICI IN DIMENSIONE FISSA (A 25 ANNI).

★ METTIAMOCI AL PUNTO CRITICO, DOVE

$$\mu \rightarrow \mu_c$$

$$D \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_c$$

$$\xi \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ UNIVERSALITÀ

VOGLIAMO RIORGANIZZARE L'ESPANSIONE PERTURBATIVA IN MODO CHE CONTINUI AD AVERE SENSO VICINO AL PUNTO CRITICO.

SO CHE IN $D=4=D_c^w$ FUNZIONA LA TEORIA GAUSSIANA, $g=0$.
E' PLAUSIBILE PENSARE CHE IN DIMENSIONE VICINA A 4 ESPANDERE
SIA PIU' SEMPLICE.

IL PARAMETRO EFFETTIVO DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO*

$$\tilde{g} = \frac{g}{m^{4-D}} = g \xi^{4-D}$$

NOTA: $\xi \equiv m^{-1}$ (VEDI NOTA *) - IN EFFETTI,

$$\hat{G}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \xrightarrow{(D=4)} G(x) = \frac{\pi}{m} e^{-mx}.$$

(CONSTANTE DI ACCOPPIAMENTO EFFETTIVA, ADIMENSIONALE) DIVERGE AL
PUNTO CRITICO.

RIPARTIAMO DALLA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A 2 PUNTI**

$$G(p) = \frac{Z_1}{p^2 + m^2 + O(p^4)}$$

*NOTA: NELLA LAGRANGIANA COMPaiono I PARAMETRI NUDI
 μ E g . QUANDO RINORMALIZZO, MI SOSTITUISCO I PARAMETRI
FISICI m^2 E λ . LA LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE E' PER
DEFINIZIONE L'INVERSO DELLA MASSA FISICA (ITZYKSON-DROUFFE).

PER $g=0$,

$$Z_1 = 1$$

$$m^2 = \xi^{-2}$$

SE $g \neq 0$,

$$Z_1 \sim \xi^{-\eta}$$

$$m^2 \sim \xi^{-2} \text{ PER } \xi \rightarrow \infty$$

DOVE η E' LA DIMENSIONE ANOMALA.

POSSO DEFINIRE DEI CAMPI RINORMALIZZATI

$$\varphi_R(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{Z_1}}$$

**NOTA: SPOILER ALERT. L'IPOTESI DI SCALING, CHE
GIUSTIFICHEREMO CON IL GOLP NELLO SPAZIO FISICO, E' CHE
 ξ SIA L'UNICA LUNGHEZZA RILEVANTE AL PUNTO CRITICO. SEGUE CHE

$$G(r, \theta) = r^{-(D-2+\eta)} g(r/\xi(\theta)), \quad g(x) \sim \begin{cases} 0(1), & x \ll 1 \\ e^{-x}, & x \gg 1 \end{cases}$$

MA

$$G(x) = \int d^D p e^{ipx} \frac{1}{p^2 + m^2} \sim p^{(D-2)} \sim x^{-(D-2)}$$

E IN EFFETTI NELLA TEORIA LIBERA $\eta=0$.

QUELLO Z_1 DEVE A RICOSTRUIRE LA LEGGE DI SCALING
GIUSTA NELLA TEORIA INTERAGENTE.

COSI' DA SCRIVERE

$$G_R(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + O(p^4)}$$

SIA PER IL GAUSSIANO CHE PER $g \neq 0$ PER $\xi \rightarrow \infty$.

DEFINIAMO ANALOGAMENTE UNA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A 4 PUNTI
CONNESSA AMPUTATA RINORMALIZZATA Γ_4^A .

IL CONTO A D FISSATA

METTIAMOCI IN $D=3$. UNA GENERICA FUNZIONE

$$F\left(\frac{g}{m}\right) = F_0 + F_1 \frac{g}{m} + F_2 \left(\frac{g}{m}\right)^2 + \dots$$

SE $\frac{g}{m} \rightarrow 0$, CONOSCERE MOLTI TERMINI DELL'ESPANSIONE NON SERVE.

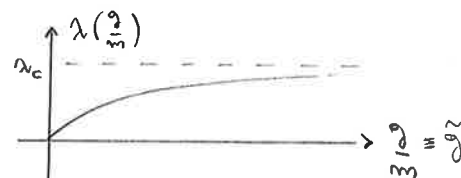
MA ANCHE SE $\frac{g}{m}$ DIVERGE, LE PROPRIETÀ FISICHE DELLA TEORIA POSSONO TENDERE A VALORI COSTANTI. POSSO DEFINIRE UNA NUOVA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO λ t.c.

$$\begin{cases} \lambda = \frac{g}{m} & \text{PER } \tilde{g} \text{ PICCOLI} \\ \lambda \rightarrow \lambda_c & \text{FINITO PER } \frac{g}{m} \rightarrow \infty \end{cases}$$

DEFINISCO CIOÈ UN MAPPING CONFORME CHE MANDI

$$\infty \rightarrow \lambda_c$$

$$\frac{g}{m} = \infty \rightarrow \lambda = \lambda_c$$



SCEGLIEREMO PER λ UNA PROPRIETÀ DEL SISTEMA t.c.

$$\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \lambda$$

TRASFORMEREMO L'ESPANSIONE PERTURBATIVA IN POTENZE DI $\tilde{g}$ IN UNA IN POTENZE DI λ .

OSSERVIAMO CHE

$$m^2 \sim (\mu - \mu_c)^{2\gamma}$$

$$(m^2)^{1/2\gamma} \sim (\mu - \mu_c)$$

$$\frac{d\mu}{dm^2} \sim \frac{1}{2\gamma} (m^2)^{\frac{1}{2\gamma} - 1}$$

NOTA: ANCORA, PERCHÉ $\xi = m^{-1}$ E
 $\xi \sim (\mu - \mu_c)^{-\gamma}$

NOTA: DERIVO IN dm^2 PER FARE SPARIRE μ_c .

QUINDI

$$\ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \simeq \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right) \ln(m^2) + \text{cost.}$$

$$m^2 \frac{d}{dm^2} \ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \xrightarrow{m^2 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right)$$

*NOTA: È UNA BUONA SCELTA PERCHÉ LA POSSIAMO USARE PER RICAVARE γ .

È DAVVERO UNA FUNZIONE DI $\tilde{g}$, PERCHÉ

$$m^2 = \mu - \Sigma(\mu, p)$$

E LA SELF-ENERGY È UNA SERIE IN g .

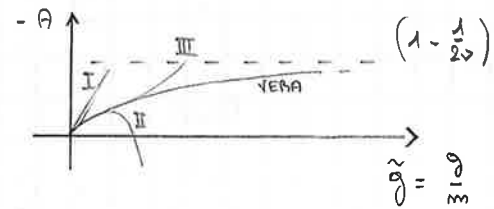
QUANTO ABBIAMO TROVATO È VERO SOLO SE $m^2 \rightarrow 0$, I.E. $\tilde{g} \rightarrow \infty$.

QUESTA È UNA BUONA SCELTA* PER LA FUNZIONE DI $\tilde{g}$ CERCATA.

DEFINIAMO ALLORA LA FUNZIONE

$$A(\tilde{g}) = A\left(\frac{\tilde{g}}{m}\right) = \sum_k A_k \tilde{g}^k \equiv m^2 \frac{d}{dm^2} \ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma} - 1$$

$$A(\tilde{g} \rightarrow \infty) \rightarrow \text{cost.}$$



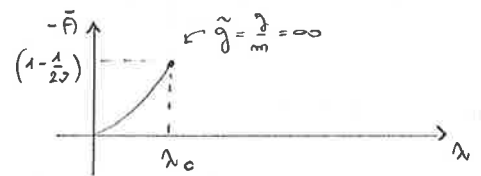
NEL GRAFICO SI MOSTRANO $A(\tilde{g})$ E LE SUE APPROSSIMAZIONI AI PRIMI 3 ORDINI, CON CUI CHIARAMENTE NON DESCRIVONO IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO.

POICHÉ È DIFFICILE CONTROLLARE $A(\tilde{g})$ CON UN'ESPANSIONE IN $\tilde{g}$, DEFINIAMO

$$\bar{A}(\lambda) \equiv A(\tilde{g}(\lambda))$$

CON LA PROPRIETÀ CHE

$$\bar{A}(\lambda_c) = A(\tilde{g} = \infty) = \frac{1}{2\gamma} - 1$$



DOVE λ È LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA.

★ CALCOLIAMO INNANZITUTTO I COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO IN SERIE DI λ IN $\tilde{g}$. SAPENDO GIÀ CHE $B_1 = 1$,

$$\lambda = \tilde{g} + B_2 \tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3)$$

ALL' ORDINE $\tilde{g}^2$, AVREMO

$$\lambda = \tilde{g} + B_2 \tilde{g}^2 = \tilde{g}(1 + B_2 \tilde{g}) \approx \frac{\tilde{g}}{1 - B_2 \tilde{g}}$$

$$\lambda(1 - B_2 \tilde{g}) \approx \tilde{g}$$

QUESTA RELAZIONE PUO' ESSERE INVERTITA:

$$\lambda - B_2 \tilde{g} \lambda \approx \tilde{g}$$

$$\tilde{g} + B_2 \tilde{g} \lambda \approx \lambda$$

$$\tilde{g} \approx \frac{\lambda}{1 + B_2 \lambda} \approx \lambda(1 - B_2 \lambda)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{g} = \lambda - B_2 \lambda^2 + O(\lambda^3)$$

NOTA: STIAMO COSTRUIENDO λ IN MODO CHE COINCIDA CON $\tilde{g}$ PER $\tilde{g}$ PICCOLI (OVVERO PER λ PICCOLI). QUI NON CALCOLIAMO DAVVERO I B_k , MA LO FAREMO A BREVE E CI MUOVEREMO COME QUI PRESENTATO.

SICCOME SO SVILUPPARE λ (LA GRANDEZZA FISICA CHE DEFINISCE LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA) IN SERIE DI $\tilde{g}$, SO INVERTIRE ED ESPRIMERE $\tilde{g}$ IN FUNZIONE DI λ .

PERCIO'

$$A(\tilde{g}) = A_1 \tilde{g} + A_2 \tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3)$$

$$\bar{A}(\lambda) = A_1 \cdot (\lambda - B_2 \lambda^2) + A_2 (\lambda - B_2 \lambda^2)^2 + O(\lambda^3)$$

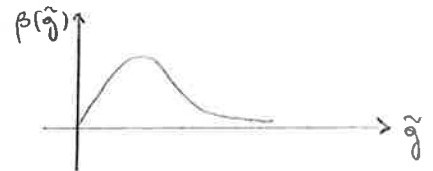
$$= A_1 \lambda + (-A_1 B_2 + A_2) \lambda^2 + O(\lambda^3)$$

*NOTA: $\lambda \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} \lambda_c$, QUINDI È PIATTA A TUTTI GLI ORDINI. LA DOMANDA È: CHI È λ_c ?

CI SERVONO CIOÈ I COEFFICIENTI A_k DELLO SVILUPPO IN $\tilde{g}$ DI A (LA GRANDEZZA DI CUI STUDIAMO IL COMPORTAMENTO CRITICO) E B_k DELLO SVILUPPO DI $\lambda(\tilde{g})$.

* DEFINIAMO UNA TERZA FUNZIONE* (BETA-FUNCTION)

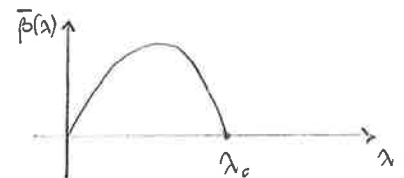
$$\beta(\tilde{g}) \equiv \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda(\tilde{g}) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} 0$$



SIMILMENTE,

$$\bar{\beta}(\lambda) \equiv \beta(\tilde{g}(\lambda))$$

$$\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$$



CALCOLO QUINDI λ_c COME QUEL VALORE PER CUI

$$\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$$

E A QUEL PUNTO $\bar{A}$ MI PERMETTERÀ DI CALCOLARE L'ESONENTE CRITICO ν :

$$\bar{A}(\lambda_c) = \frac{1}{2\nu} - 1$$

NOTA: SOTTO LE IPOTESI DI SCALING E HYPERSCALING, DATI ν E η RICOSTRUISCO $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

SI TRATTA PERCIO' DI DETERMINARE LO ZERO DELLA FUNZIONE $\bar{\beta}$.

PERCHÉ LE COSE FUNZIONINO, SERVE CHE λ_c SIA PICCOLO (ABBASTANZA PERCHÉ L'ESTRAPOLAZIONE FUNZIONI).

* CHE GRANDEZZA SCEGLIAMO PER λ ?

$$\lambda = m^{D-4} \Gamma_h^4$$

NOTA: GUARDACASO,

$$\Gamma_h^4 = g + O(g^2)$$

$$\lambda = \frac{g}{m^{4-D}} + O(g^2) = \tilde{g} + O(\tilde{g}^2)$$

DOVE Γ_h^4 È LA FDC A 4 PUNTI COMPLETAMENTE CONNESSA, AMPUTATA, DI CAMPI RINORMALIZZATI E A MOMENTO ESTERNO NULLO.

SI RICORDI CHE LE FUNZIONI A 2 PUNTI RINORMALIZZATE, SU $\psi_A(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{Z_1}}$,

$$\tilde{G}_A(p) = (p^2 + m^2 + O(p^4))^{-1}$$

SI COMPORTANO IN MODO SEMPLICE (SENZA LO ξ^{-1}) PER

$$m \rightarrow 0, \quad \frac{p}{m} \text{ ASSO}$$

NOTA: OSSIA $m \times$ ASSO.

PER LE FUNZIONI A N PUNTI, APPARISCE UN FATTORE MOLTIPLICATIVO

$$m^{-(N(1+\frac{D}{2})-D)}$$

NELLO SPAZIO DEI MOMENTI.

SE MISURO TUTTO IN UNITA' DI m , LE foc DEI CAMPI RINORMALIZZATI HANNO UN LIMITE FINITO PER

$$\frac{g}{m^{4-D}} \rightarrow \infty$$

NOTA: IN QFT LO SI VEDE ESPlicitAMENTE QUANDO SI SCEGLIE UN PUNTO DI SOTTRAZIONE DIVERSO DA $p=0$. $\Gamma^{(4)}$ NON DIVERGE SE $m \rightarrow 0$, E' LA NOSTRA SERIE PERTURBATIVA CHE E' NEL PARAMETRO SCALATO.

DEFINIAMO QUINDI

$$\lambda = m^{D-4} Z_1^2 \Gamma_4 = m^{D-4} \Gamma_4^A$$

NOTA: INCLUDO IN Γ_4^A UN FATTORE $\sqrt{Z_1}$ PER CIASCUN CAMPO.

AL PRIMO ORDINE PERTURBATIVO $Z_1 = 1$, QUINDI NON ENTRA NEL CALCOLO A 1 LOOP.

COSI' CHE

$$\lambda = \tilde{g} + O(\tilde{g}^2) \quad \text{PER} \quad \tilde{g} \approx 0$$

$$\lambda \rightarrow \lambda_c$$

(INFATTI LE foc SONO BEN DEFINITE NEL LIMITE CRITICO). CI ASPETTIAMO

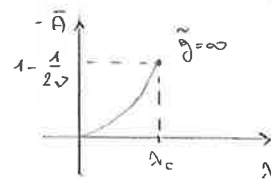
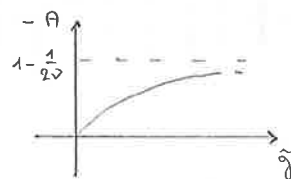
$$\lambda_c \xrightarrow{D \rightarrow 4} 0$$

INFATTI IN $D=4$ LA TEORIA DIVENTA GAUSSIANA.

CALCOLO DI β A 1 LOOP

ABBIAMO CHIAMATO 'A' LA GRANDEZZA

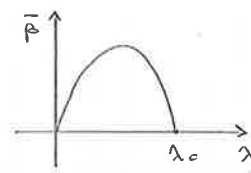
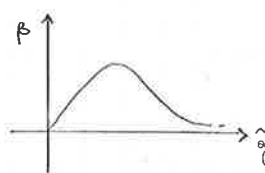
$$A(\tilde{g}) = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln \left(\frac{d\mu}{dm^2} \right) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} \frac{1}{2\epsilon} - 1$$



CON CUI E' POSSIBILE CALCOLARE β . UNA GRANDEZZA ANALOGA A

PERMETTEREBBE DI CALCOLARE η . INVECE

$$\beta(\tilde{g}) = \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda(\tilde{g}) \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow \infty} 0$$



RICAVIAMO QUINDI

$$\lambda_c: \bar{\beta}(\lambda_c) = 0$$

INFINE, SI È DEFINITA

$$\lambda = m^{D-4} \Gamma_h^n$$

**NOTA:

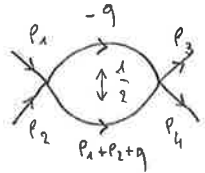
$$\Gamma_h \propto X + \cancel{XX} + \cancel{X} + \cancel{X}$$

*NOTA: OVVERO PER LA SELF-ENERGIA E PER IL VERTICE, LE GAMBE NON LE CALCOLO.

FACCIAMO IL CALCOLO ESATTO FINO A 1 LOOP, CONTANDO I DIAGRAMMI

 PER LE FUNZIONI RISPETTIVAMENTE A 2 E A 4 PUNTI.*

COMINCIAMO DALLA FUNZIONE A 4P, PER CUI AVEVAMO CALCOLATO



$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{matrix}$$

NOTA: A QUEST'ORDINE LA SELF-ENERGIA NON DIPENDE DAI MOMENTI. IL FATTORE 3 È TOPOLOGICO: NON VIENE DA COME DISTINGUO I MOMENTI, MA DA COME CONNETTO TRA LORO LE LINEE.

C'È UN FATTORE $\frac{1}{2}$ PER LO SCAMBIO DELLE LINEE INTERNE E UN FATTORE 3 PER LE PERMUTAZIONI DEI MOMENTI ESTERNI:** IN TOTALE $\frac{3}{2} g^2$. QUINDI

$$\Gamma_h(0,0,0,0) = g - \frac{3}{2} g^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = I$$

NOTA: g È IL VERTICE DA SOLO.

ABBIAMO GIÀ CALCOLATO QUESTO INTEGRALE USANDO I PARAMETRI DI FEYNMAN: VALE

NOTA: CHIAMA FIN DA ORA

$$I = (4\pi^2)^{-\frac{D}{2}} \pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) m^{D-4}$$

$$a = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}$$

ALLA FINE SI SEMPLIFICA!

QUINDI

$$\Gamma_h(0,0,0,0) = \left(\frac{g}{m^{4-D}}\right) m^{4-D} - \frac{3}{2} \left(\frac{g}{m^{4-D}}\right)^2 m^{4-D} (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$$

QUI SI VEDE CHE L'ESPANSIONE NON È IN g , MA IN $\frac{g}{m^{4-D}}$. SE CONTINUASSI ANDANDO AL 3° ORDINE (2 LOOP), TROVEREI

$$\left(\frac{g}{m^{4-D}}\right)^3 = \tilde{g}^3$$

ABBIAMO TROVATO

$$\Gamma_h(0,0,0,0) = \tilde{g} \cdot (m^2)^{2-\frac{D}{2}} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{2} \tilde{g} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \right\}$$

QUESTO È IL RISULTATO DEL CALCOLO AD 1 LOOP, CHE CI PERMETTE DI RICAVARE λ .

I PROSSIMI STEP SONO QUINDI:

- 1) A COME FUNZIONE DI $\tilde{g}$
- 2) ESPRIMERLO COME $\bar{A}(\lambda)$
- 3) λ_c t.c. $\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$

*NOTA: RICORDIAMO ANCHE CHE PIU' IN GENERALE

$$\tilde{G}(p) = (p^2 + m^2)^{-1}$$

$$m^2 \equiv \mu - \Sigma(0)$$

MA CHE LA SELF-ENERGY (SOMMA DEGLI 1PI AMPUTATI) VALE

$$\Sigma(p) = \Sigma(0) + O(q^2)$$

QUINDI NEL SEGUITO, VISTO CHE IL CALCOLO E' A 1 LOOP, SOSTITUIAMO Σ E BASTA.

RICORDIAMO* CHE LA $G(p)$ RINORMALIZZATA E'

$$\tilde{G}(p) = (p^2 + \mu - \Sigma)^{-1}$$

DOVE AL PRIMO ORDINE

$$\Sigma \equiv -\frac{1}{2} g \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

NOTA: PERCHÉ IN Σ ABBIAMO SOSTITUITO μ CON m^2 ? COME DISCUSSO IN BINNEY 9.1, L'EFFETTO E' QUELLO DI INCLUDERE I CONTRIBUTI DEI DIAGRAMMI P-INDEPENDENT (LE BOLLE, COME IN H-F) (___ ← inserire volgarità a piacere).

...O...

(L'AUTOENERGIA A UNA BOLLA NON DIPENDE DAL MOMENTO), CON

$$m^2 = \mu - \Sigma = \mu + \frac{1}{2} g \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2}$$

$$= \mu + \frac{1}{2} \frac{g}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

$$\mu = m^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

PERCIO', (USANDO $m \Gamma(m) = \Gamma(m+1)$),

$$\frac{d\mu}{dm^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{g}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \left(\frac{D}{2} - 1\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{g}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(1 - \frac{D}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g}$$

E

$$\ln\left(\frac{d\mu}{dm^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g}$$

NOTA: NON E' BANALE QUESTO PASSAGGIO. IN QUESTA REGIONE $\tilde{g}$ E' PICCOLO E IN EFFETTI POSSIAMO SVILUPPARE IL $\log$.

$$A(\tilde{g}) = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln \frac{d\mu}{dm^2} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} g \left(m^2 \frac{d}{dm^2} (m^2)^{-\frac{4-D}{2}} \right)$$

$$A(\tilde{g}) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g}^{(m+2)^{-\frac{(4-D)}{2}}} \left(\frac{4-D}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \tilde{g} \quad (I)$$

DOVE SI È USATA

$$m \Gamma(m) = \Gamma(m+1)$$

ALL' $O(\tilde{g})$, POSSO SOSTITUIRE $\tilde{g} \leftrightarrow \lambda$ E SCRIVERE LA (I) COME

$$\bar{A}(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \lambda$$

NOTA: VOLENDO, LO SI VEE DALLA (III).

POICHÉ IL CALCOLO È A 1 LOOP, NON HA SENSO CHE CI METTA ANCHE IL TERMINE IN λ^2 .

(II)

* NON CI RESTA CHE CERCARE GLI ZERI DI

$$\beta(\tilde{g}) = \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda(\tilde{g})$$

NOI ABBIAMO TROVATO

$$\lambda = m^{D-4} \Gamma_4^h(0,0,0,0) = \tilde{g} \left(1 - \frac{3}{2} \tilde{g} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}}\right) \quad (III)$$

QUINDI

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{g}) &= \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \left(\tilde{g} - \frac{3}{2} \tilde{g}^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} + O(\tilde{g}^3) \right) \\ &= \tilde{g} - 3 \tilde{g}^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} + O(\tilde{g}^3) \end{aligned}$$

POSSIAMO CALCOLARE $\bar{\beta}(\lambda)$ USANDO

$$\lambda = \tilde{g} - \frac{3}{2} \tilde{g}^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \Rightarrow \underline{\tilde{g} = \lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}}}$$

QUINDI

$$\bar{\beta}(\lambda) = \tilde{g}(\lambda) - 3 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \underbrace{(\tilde{g}(\lambda))^2}_{\equiv \alpha}$$

$$\approx \left(\lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \alpha \right) - 3 \alpha \left(\lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \alpha \right)^2 + O(\lambda^3)$$

$$\approx \lambda \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \lambda \right) + O(\lambda^3)$$

RICHIEDERE $\bar{\beta}(\lambda_c) = 0$ IMPLICA

NOTA: CHIARAMENTE L'ALTRA POSSIBILITÀ È $\lambda = 0$.

$$\lambda_c = \frac{2}{3} \frac{(4\pi)^{D/2}}{\Gamma(2 - \frac{D}{2})} = \frac{1}{3} \frac{(4\pi)^{D/2} (4-D)}{\Gamma(3 - \frac{D}{2})} \quad (IV)$$

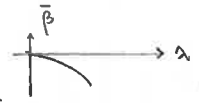
DOVE SI È USATO

$$\Gamma(2 - \frac{D}{2}) = \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{2 - \frac{D}{2}}$$

DALLA (IV) SI VEDE CHIARAMENTE CHE

$$\lambda_c|_{D=4} = 0$$

NOTA: IN $D=4$,
PERCHÉ $\lambda=0$ È
L'UNICO PUNTO FISSO.



USANDO ORA IL FATTO CHE

$$\bar{A}(\lambda_c) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \lambda_c = -\frac{4-D}{6} = \frac{1}{2D} - 1$$

POSSIAMO INFINE RICAVARE IL COEFFICIENTE (PER $D \leq 4$)

$$2\gamma_{1\text{loop}} = \frac{1}{1 - \frac{4-D}{6}} \Rightarrow \gamma_{1\text{loop}} = \frac{3}{D+2}$$

PER $D \geq 4$ HO IL RISULTATO DEL M-F PERCHÉ SPARISCONO LE CORREZIONI,

$$\gamma = \gamma_F = \frac{1}{2}$$

IN $D=3$ SI TROVA $\gamma_{1\text{loop}} = 0.6$, DA CONFRONTARSI CON $\gamma_{\text{exp}} \sim 0.63$.

IN $D=2$, $\gamma_{1\text{loop}} = 0.75$ MENTRE $\gamma_{\text{vero}} = 1$ (DALLA SOLUZIONE ESATTA DI ONSAGER).

IL CALCOLO A 2 LOOP

I NUOVI DIAGRAMMI 1PI SONO



PER LA FUNZIONE A 2 PUNTI, MENTRE PER QUELLA A 4 PUNTI HO



IN GENERE UNO FA IL CALCOLO AD m COMPONENTI.

PER $m \rightarrow \infty$, IL CONTO A 1 LOOP DIVENTA ESATTO (NON SOLO IN $D=4$, DOVE E' ESATTO PER QUALSIASI m).

NEL 1968 IL MEGLIO ERA UN CALCOLO A 6 LOOP (~ 1000 DIAGRAMMI INDIPENDENTI). SI TROVANO

$$\beta_{D=3}^{(6 \text{ loop})} = .630(15)$$

$$\eta_{D=3}^{(6 \text{ loop})} = .031(4)$$

IL PROBLEMA DEL CALCOLO DEGLI ESPONENTI CRITICI IN $D=3$ OGGI SI CONSIDERA RISOLTO (RG, MC, SVILUPPI AD ALTE T). IN $D=2$ I RISULTATI SONO MENO PRECISI.

• GLOSSARIO (MARINARI $\leftrightarrow$ PARISI)

$$A(\tilde{g}) = m^2 \frac{d}{dm^2} \ln \left(\frac{d\mu}{dm^2} \right) \xrightarrow{Z_2}$$

$$C_2(\lambda) \equiv \tilde{A}(\lambda)$$

$$b(\lambda) \equiv m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \Big|_{g \text{ fisso}} \lambda = \frac{1}{2} (D-4) u \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{m^2 \text{ fisso}} \lambda, \quad u \equiv \tilde{g}$$

• FOCUS: GLOSSARIO (MARINARI/PARISI $\leftrightarrow$ RESTO DEL MONDO) (ITZYKSON - DROUOT)

QUANTITA'	M/P	B.D.M.	NOTE
COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO (BARE)	g	g_0	DIMENSIONALE
COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA	λ	g	ADIMENSIONALE
MASSA NUDA (BARE MASS)	$\mu^{1/2}$	m_0	
MASSA RINORMALIZZATA (FISICA)	m	m	$m \equiv g^{-1}$

NOTA CHE NOI ABBIAMO USATO $\tilde{g} = \frac{g}{m^{4-D}}$ COME VARIABILE D'ALLOGGIO, MA E' SUPERFUO.

NEL CASO $D=3$, DOVE $\tilde{g} = \frac{g}{m}$, LA DEFINIZIONE DA NOI ADOTTATA DELLA β -FUNCTION E'

$$\beta = \tilde{g} \frac{d}{d\tilde{g}} \lambda = \tilde{g} \frac{d\lambda}{dm} \cdot \frac{dm}{d\tilde{g}} = \frac{m}{(D-4)} \frac{d\lambda}{dm} \stackrel{D=3}{=} -m \frac{d\lambda}{dm} \quad \left(m \frac{d\lambda}{dm} = 2m^2 \frac{d\lambda}{dm^2} \right)$$

DA CUI L'ANALOGIA (A MENO DI UN SEGNO) CON $\beta = m \frac{\partial g}{\partial m} \Big|_{g_0, \lambda}$ CHE SI TROVA NEI LIBRI DI TEORIA DEI CAMPI.

VICINO A 4 DIMENSIONI

ABBIAMO VISTO CHE IL PUNTO ASSO GAUSSIANO È STABILE* PER $D \geq 4$. NON APPENA $D < 4$, ESSO SI BIFORCA E

$$\lambda_c = \frac{1}{3} \frac{(4\pi)^{D/2}}{\Gamma(3 - \frac{D}{2})} (4-D)$$

*NOTA: DELLA SUA STABILITÀ DISCUTEREMO PIÙ AVANTI, ANDORA NON SI È VISTO.

È UN PUNTO ASSO STABILE IN. IL VALORE DELLA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA, PER $m^2 \rightarrow 0$, VALE CIOÈ

$$\lambda_c \sim (4-D) \quad D < 4$$

$$\lambda_c = 0 \quad D \geq 4$$

VOGLIAMO COSTRUIRE UN'ESPANSIONE IN

$$\varepsilon = D_c^0 - D = 4 - D$$

PER GLI ESPONENTI CRITICI.

MA CHE COS'È UNA DIMENSIONE NON INTERA? POSSO PENSARE A UNA ESTENSIONE NATURALE DEGLI SPAZI A DIMENSIONE INTERA. I COEFFICIENTI DELL'ESPANSIONE A ALTE T SONO POLINOMI IN D, QUINDI È DIRETTO VALUTARLI PER QUALSIASI D CHE CI INTERESSI.

IN TERMINI DI DIAGRAMMI, UN DIAGRAMMA A λ LOOP HA LA FORMA

$$\int \left(\prod_{\substack{i \text{ SULLE} \\ \text{LINEE INTERNE}}} d\alpha_i \right) \frac{1}{(4\pi D(\alpha))^{D/2}} \exp \left\{ - \frac{N(\alpha, p)}{D(\alpha)} - m^2 \sum_i \alpha_i \right\}$$

DOVE $D(\alpha)$ È IL DENOMINATORE E GLI α_i SONO PARAMETRI DI FEYNMAN. ALLORA:

i) 1 α_i PER OGNI LINEA INTERNA

ii) $D(\alpha)$ È UN POLINOMIO DI $O(\lambda)$

iii) $N(\alpha, p)$ È UN POLINOMIO DI $O(\lambda+1)$ CHE DIPENDE LINEARMENTE DA

$$p_{ik} = p_i \cdot p_k \quad (\text{INVARIANTE})$$

DOVE $p_i, \dots, p_r$ SONO I MOMENTI ESTERNI DEL DIAGRAMMA.

NOTA: CHI È $N(\alpha, p)$? NOI ABBIAMO ANALIZZATO SOLO CASI PIÙ SEMPLICI, MA GIÀ SE AVESSI

$$[(q - q_1)^2 + m^2]^{-1} \rightarrow q_1^2 + q^2 - 2q \cdot q_1$$

PER FARE UN'IDEA, GUARDA L'APPENDICE AL CAP. 5 DEL PARISI.

NOTA: ANCHE IN QUESTO CASO, QUINDI, HO OTTENUTO UNA FUNZIONE DI D.

C'E' UNA SOLA FUNZIONE REGOLARE CHE INTERPOLA TRA LE Δ INTERE.

TEOREMA DI CARLSON (TITCHMARCH, OXFORD 1939)

SE DUE FUNZIONI ANALITICHE $f(\Delta)$ E $g(\Delta)$ SONO TALI CHE, $\forall \Delta$ INTERO,

$$f(\Delta) = g(\Delta)$$

E SE ENTRAMBE SONO LIMITATE DA

$$|f(\Delta)| < e^{c|\Delta|}$$

$$|g(\Delta)| < e^{c|\Delta|}$$



$c < \pi$

NELLA PARTE DESTRA DEL PIANO COMPLESSO Δ , ALLORA

$$f(\Delta) = g(\Delta) \quad \forall \Delta.$$

* CONSIDERIAMO DELLE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \dots \varphi(z) \rangle$$

ESSE SONO FUNZIONI DI INVARIANTI DEL TIPO $x \cdot y$.

NOTA: PRESENTIAMO UN ALTRO MODO DI VEDERE LE DIMENSIONI D NON INTERE. SI PARLA DI INVARIANTI ROTAZIONALI.

STUDIAMO DELLE IDENTITA' CHE LEGANO fdc DI ORDINE DIVERSO: SONO DETTE "EQUAZIONI DEL MOTO".

L'INTEGRALE DI UNA DERIVATA TOTALE E' ZERO A MENO DI UN TERMINE DI BORDO CHE POSSO METTERE A ZERO. ALLORA

$$0 = \int d[\varphi] \frac{\delta}{\delta \varphi(\gamma)} \left[\left(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \right) e^{-H[\varphi]} \right]$$

$$= \int d[\varphi] \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\prod_{k \neq i} \varphi(x_k) \right) \delta(\gamma - x_i) - \left(\prod_{k=1}^N \varphi(x_k) \right) \frac{\delta H}{\delta \varphi(\gamma)} \right\} e^{-H[\varphi]}$$

$(N-1) \uparrow$ PUNTI $(N+1) \uparrow, (N+3)$

CIOE'

$$0 = \left\langle \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\prod_{k \neq i} \varphi(x_k) \right] \delta(\gamma - x_i) - \left(\prod_{k=1}^N \varphi(x_k) \right) \frac{\delta H}{\delta \varphi(\gamma)} \right\} \right\rangle \quad (I)$$

CHE E' UN SET DI INFINITE EQUAZIONI.

PER ESEMPIO, NEL CASO DI L-G (MASSA E CINETICO $\sim \varphi^2$, INTERAZIONE $\sim \varphi^4$), LA (I) CONNETTE LE fdc A $(N-1), (N+1)$ E $(N+3)$ PUNTI.

NOTA: $\frac{\delta H[\varphi]}{\delta \varphi(\gamma)} = \frac{\delta}{\delta \varphi(\gamma)} \int d^d x \left[\frac{m^2}{2} \varphi^2(x) + \frac{g}{4!} \varphi^4(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) \right] = m^2 \varphi(\gamma) + \frac{g}{3!} \varphi^3(\gamma) - 2 \partial_\mu \partial^\mu \varphi(\gamma)$ VEDI ALTRE

SE $N=1$,

$$(-\Delta_\gamma + m^2) \langle \varphi(\gamma) \varphi(x) \rangle + \frac{g}{3!} \langle \varphi^3(\gamma) \varphi(x) \rangle = \delta^{(D)}(x-\gamma)$$

SE $N=3$,

$$(-\Delta_\gamma + m^2) \langle \varphi(\gamma) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle + \frac{g}{3!} \langle \varphi^3(\gamma) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle = \delta^{(D)}(x_1-\gamma) \langle \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle + (*)$$

DOVE (*) CONTIENE LE ALTRE 2 PERMUTAZIONI.

SI SONO USATE

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(\gamma)} = \delta^{(D)}(x-\gamma)$$

$$(\partial_\mu \varphi)^2 \rightarrow \varphi \Delta \varphi$$

NOTA: L'IDEA È CHE UNO COSÌ POTREBBE ESTENDERE LA DEFINIZIONE DELLE FOLC IN DIMENSIONE D NON INTEGRA CONSIDERANDO LE FUNZIONI DEGLI INVARIANTI (TIPO $X \cdot Y$), SENZA RIFERIMENTO ALLO SPAZIO DA CUI PROVENGONO (PARISI).

CHIARIFICO IL CONTO DELL'ULTIMA NOTA:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(\gamma)} \int d^D x \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi(x)) (\partial^\nu \varphi(x)) &= \int d^D x (\partial_\nu \varphi(x)) \left(\partial^\nu \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(\gamma)} \right) \\ &= - \int d^D x (\partial_\nu \partial^\nu \varphi(x)) \cdot \delta^D(x-\gamma) = -\Delta \varphi(\gamma) \end{aligned}$$

PER I FATTI

È PLAUSIBILE CHE QUESTE EQUAZIONI DEL MOTO AMMETTANO UNA SOLUZIONE UNICA.

NOTA: PUOI ANCHE RICORDARE CHE IN QFT LE EQUAZIONI DEL MOTO PER UNA TEORIA φ^4 SONO DATE DA $\delta S = 0$ E SONO $(\square + m^2) \varphi + \frac{g}{3!} \varphi^3 = 0$.

• RINORMALIZZABILITÀ

HA SENSO STUDIARE UNA TEORIA PERTURBATIVAMENTE?

CONCENTRIAMOCI SULLE DIVERGENZE UV (PICCOLE DISTANZE).

IN $D=4$, L'ESPANSIONE PERTURBATIVA DELLE FOLC RINORMALIZZATE IN TERMINI DI λ (COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO RINORMALIZZATA) NON PRESENTA* DIVERGENZE UV. POSTO

$$\frac{1}{m^2 + p^2}$$

(MASSA RINORMALIZZATA)

*NOTA: VEDI AD ESEMPIO BINNEY §.3.

NON DIVERGE PER GRANDI p (PONGO $m^2 > 0$ PERCHÉ ORA IGNORO DIVERGENZE IR).

FACCIAMO LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

NOTA: SONO IL CONTENUTO DEL TEOREMA BHP, CHE STIAMO ENUNCIANDO.

1) SE UN DIAGRAMMA NON CONTIENE SOTTODIAGRAMMI DIVERGENTI E NON DIVERGE LUI STESSO, ALLORA PER $\Lambda \rightarrow \infty$, $m^2 \neq 0$, IL DIAGRAMMA (d) È FINITO.

2) SE INVECE d NON CONTIENE SOTTODIAGRAMMI DIVERGENTI MA DIVERGE

LUI STESSO*, ALLORA SI DIVERGE NELLO SPAZIO DI FOURIER, MA È FINITO NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI.

DEFINIAMO IL VALORE RINORMALIZZATO DI UN DIAGRAMMA

$$V_R(p) = V(p) - \sum_{m=0}^{\#(D)} \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^m V(p) \cdot p^m$$

NOTA: STO BANALMENTE SOTTRAENDO I PRIMI TERMINI DELLO SVILUPPO IN SERIE (I PIÙ DIVERGENTI).

NOTA: SI ERA TROVATO $D = (D-h)L + (h-E)$.

*NOTA: NELLO SPAZIO p , IMMAGINO.

DOVE

D : GRADO DI DIVERGENZA DEL DIAGRAMMA

$V(p)$: NUDO (BARE), CHE DIVERGE PER $\Lambda \rightarrow \infty$

$\#(D)$: L'INTERO PIÙ GRANDE $\leq D$

$\left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^m$: TUTTE LE DERIVATE, FINO A ORDINE m COMPLESSIVO, NEI MOMENTI ESTERNI.

3) SE UN α CONTIENE S.d. DIVERGENTI ED È DIVERGENTE LUI STESSO, DEVO RIPETERE ANCHE PER I S.d. IL PROCEDIMENTO IN (2).

È QUESTO IL CONTENUTO DEL TEOREMA BHP (BOGOLIUBOV, HEPP, PARASIUK): IL VALORE RINORMALIZZATO DI OGNI DIAGRAMMA È FINITO QUANDO $\Lambda \rightarrow \infty$.

AGGIUNGERE AD H DEI CONTROTERMINI POLINOMIALI IN φ E NELLE DERIVATE, CHE DIPENDONO DA g E DIVERGONO PER $\Lambda \rightarrow \infty$, COSÌ CHE

$$H \rightarrow H_R$$

NOTA: $\frac{1}{2\Lambda^2}(\dots)$ È IL CUTOFF, NON UN CONTROTERMINO.

EQUIVALE AD APPLICARE LA PROCEDURA DESCRITTA SOPRA, CON CUI SI RIMUOVE LA PARTE DIVERGENTE DAI DIAGRAMMI.

LA TEORIA È COSÌ RIDEFINITA PERTURBATIVAMENTE; L'HAMILTONIANA POTREBBE NON ESSERE LA STESSA.

DEFINIAMO RINORMALIZZABILI LE TEORIE NELLE QUALI H_R (CHE INCLUDE I CONTROTERMINI) HA LA STESSA FORMA DELLA HAMILTONIANA H DI PARTENZA (QUELLA NUDA).

HO UN PROBLEMA SE AD OGNI ORDINE PERTURBATIVO GENERO NUOVI CONTROTERMINI (E NUOVI PARAMETRI DA RISSARE).

PER NOI, AD ESEMPIO,

$$\mu\varphi^2 + g\varphi^4 + (\partial_\mu\varphi)^2 \rightarrow m^2\varphi^2 + g_A\varphi^4 + c(\partial_\mu\varphi)^2$$

SE ANCHE SALTASSE FUORI UN NUOVO TERMINE φ^6 POCO MALE (VUOL DIRE CHE HO SBAGLIATO IL PUNTO DI PARTENZA), MA POI SI DEVE FERMARE.

SI ERA VISTO CHE IL GRADO DI DIVERGENZA DI UN DIAGRAMMA E'

$$D = (D-4)L + 4 - E$$

$$L = \# \text{ LOOP}, E = \# \text{ LINEE ESTERNE}$$

E CHE IN $D > 4$ LG NON E' RINORMALIZZABILE: IN $D > 4$, SE HO ABBASTANZA LOOP IN EFFETTI QUALSIASI DIAGRAMMA DIVERGE.

SOLO IL CASO $g=0$ E' BEN DEFINITO PER $D > 4$ (IL CAMPO MEDIO E' ESATTO).

*NOTA: NON DIPENDE DA L, QUINDI DIVERGONO A TUTTI GLI ORDINI IN g GIA L'AUTOENERGIA CHE IL VERTICE A 4 PUNTI.

IN $D=4$ LA TEORIA E' RINORMALIZZABILE: GLI UNICI DIAGRAMMI DIVERGENTI SONO L'AUTOENERGIA E IL VERTICE A 4 PUNTI. IL GRADO DI DIVERGENZA NON DIPENDE* DA g E IL CONTROTERMINE IN H_R CONTIENE TUTTE LE POTENZE DI g (MA HA SEMPRE LA STESSA FORMA: E' IL COEFFICIENTE A DIPENDERE DA g).

IN $D < 4$ LA TEORIA SI DICE SUPER-RINORMALIZZABILE: $D(g)$ E' UNA FUNZIONE DECROSCENTE DI g . SOLO UN NUMERO FINITO DI DIAGRAMMI E' DIVERGENTE. I CONTROTERMINI NECESSARI SONO POLINOMI IN g DI GRADO $\leq 2/(4-D)$.

IN QUESTO CASO IL CONTROLLO MATEMATICO DELLA TEORIA E' PIU' SEMPLICE; VI SONO RISULTATI RIGOROSI SUL COMPORTAMENTO DELLE SERIE IN g (AD ESEMPIO LA RISSOMMABILITA' DI BOREL).

E-EXPANSION

$$E = D_c^0 - D = 4 - D$$

DEFINIAMO

$$b(\lambda) = \frac{D-4}{2} \bar{p}(\lambda)$$

NOTA: IN UN FOCUS QUALCHE PAGINA FA SPIEGATO CHE IN GENERALE SI DEFINISCE LA β FUNCTION COME

$$\hat{\beta}(\lambda) = m^2 \frac{\partial \lambda}{\partial m^2} \Big|_g = 2m^2 \frac{\partial \lambda}{\partial m^2} \Big|_g$$

PARISI DEFINISCE

$$b(\lambda) = m^2 \frac{\partial \lambda}{\partial m^2} = \frac{D-4}{2} \lambda \frac{d\lambda}{d\lambda} = \frac{D-4}{2} \bar{p}(\lambda)$$

NEL CASO $D=3$ ALTROVIA $b(\lambda) = -\frac{1}{2} \bar{p}(\lambda)$.
QUINDI $b(\lambda)$ NON ME LA STO RIDEFINENDO AD HOC. (II)

ALLORA *

$$2b(\lambda, \varepsilon) = -\varepsilon\lambda + \tilde{b}(\lambda, \varepsilon)$$

$$\tilde{b}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^k \tilde{b}_k(\varepsilon) \quad (\text{III})$$

DOVE I COEFFICIENTI $b_k(\varepsilon)$ HANNO UN LIMITE FINITO PER $\varepsilon \rightarrow 0$.

NELLA TEORIA CON MASSA, b E $\bar{A}$ POSSONO ESSERE CALCOLATI A TUTTI GLI ORDINI NELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI IN λ .

QUANDO $m^2 \rightarrow 0$, CI SONO DIVERGENZE INFRAROSSE ALL'ORDINE λ^{m_c} , CON

$$m_c \propto \frac{D}{\varepsilon}$$

NOTA: LA TEORIA A $m=0$ E' QUELLA AL PUNTO CRITICO.

A CAUSA DI TERMINI NON ANALITICI DELLA FORMA $\propto \lambda^{h/\varepsilon}$.

C'E' QUINDI UN ORDINE m_c NELLO SVILUPPO PERTURBATIVO PER CUI LE COSE SMETTONO DI FUNZIONARE. IN EFFETTI

$$m_c(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

ALLORA SI CALCOLA $\lambda_c(\varepsilon)$ COME SOLUZIONE DI

$$b(\lambda_c) = 0$$

SE LA DETERMINO A 'L' LOOP, L'ERRORE E' DI $O(\varepsilon^4)$.

L'ESPANSIONE E' NON CONVERGENTE, MA SI RITIENE CHE SIA BOREL SOMMABILE.

IN $D=3$, 4 LOOP, $m=1$ (COMPONENTI DEI CAMPI), TROVIAMO

$$\sqrt{\lambda_{D=3}} = 0.628 \pm 0.002$$

ASSOLUTAMENTE COMPATIBILE CON I VALORI SPERIMENTALI.

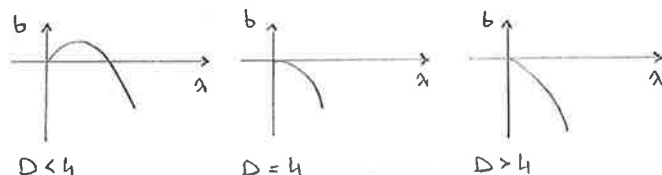
*NOTA: SI ERA RICAVATA

$$\bar{b}(\lambda) = \lambda - \frac{3}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \lambda^2 = \lambda - \frac{3}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{(4-D)} \lambda^2$$

IN EFFETTI, CON LA DEFINIZIONE (II), LA (III) DIVENTA

$$(D-4) \bar{b}(\lambda) = -\varepsilon\lambda + \tilde{b}(\lambda, \varepsilon)$$

CHE E' UNA BANALITA', VISTO CHE $\varepsilon = 4-D$. LA COSA INTERESSANTE SONO GLI ANDAMENTI DELLA FUNZIONE $b(\lambda)$ MOSTRATI IN FIGURA (NEL CASO $b_2 > 0$; VEDI PARISI P. 175): INFATTI E' DI QUESTA (CHE GENERALIZZA $\bar{b}(\lambda)$ IN $D \neq 3$) CHE ADESSO CERCHIAMO GLI ZERI. NEI GRAFICI SI MOSTRA COSA SUCCEDDE APPENA SOPRA E APPENA SOTTO $D=4$: SI NOTI CHE IN $D=4$ SPARISCE IL TERMINE LINEARE IN λ .



ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

FINORA ABBIAMO LAVORATO NEL CASO $T \rightarrow T_c^+$ (SIA IN CAMPO MEDIO, SIA ULTIMAMENTE IN TEORIA DEI CAMPI). MA SI È DETTO CHE, SE CONSIDERO

$$\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle_0$$

IL COMPORTAMENTO NELLE DUE FASI È MOLTO SIMILE.

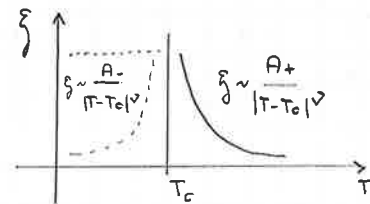
OSSERVIAMO LA $\text{loc } \xi$ (LA DISTANZA A CUI VALE LA PENA DI FARE UNA SCOMMESSE, GUADAGNANDOCI): SO CHE

$$\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle \sim e^{-x/\xi}$$

MA, CON QUESTA DEFINIZIONE, SOTTO IL PUNTO CRITICO $\xi = \infty$ (IL SISTEMA È MAGNETIZZATO).

SE SOSTITUISCO $\langle \varphi(0)\varphi(x) \rangle$ CON $\langle \varphi(0)M(x) \rangle_0$, A DESTRA DI T_c NON CAMBIA NULLA, MA A SINISTRA STO SOTTRAENDO L'EFFETTO DELLA MAGNETIZZAZIONE. OTTENGO

$$\xi \sim \frac{A_{\pm}}{|T - T_c|^{\nu}}$$



NOTA: "IL LAGO TITICACA HA ONDE ALTE IN MEDIA 3000m... FINCHÉ NON SOTTRAIGO L'ALTEZZA SUL LIVELLO DEL MARE".

* METTIAMOCI QUINDI A $T < T_c$. SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPO MAGNETICO OMOGENEO

$$h(x) = h$$

E CONSIDERIAMO

$$\beta H_{\text{eff}} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x))^2 + \frac{\mu}{2} \varphi(x)^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4(x) - h \varphi(x) \right\}$$

DETERMINIAMO UN CAMPO φ_0 COSTANTE* t.c. H_{eff} SIA MINIMA. SCRIVEREMO

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(x)$$

$$H[\varphi(x)] = H[\varphi_0] + \tilde{H}[\tilde{\varphi}(x)]$$

SICCOME φ_0 È UN PUNTO DI MINIMO, $\tilde{H}[\tilde{\varphi}(x)]$ NON AVRA' UN TERMINE LINEARE IN $\tilde{\varphi}$. CERCO QUINDI φ_0 t.c.

$$\mu \varphi_0 + \frac{g}{6} \varphi_0^3 - h = 0$$

*NOTA: POICHÉ φ_0 È COSTANTE, DEVO MINIMIZZARE
 $\frac{\mu}{2} \varphi_0^2 + \frac{g}{4!} \varphi_0^4 - h \varphi_0$
SENZA IL TERMINE CINETICO.
TRA L'ALTRO BASTANO LE DERIVATE ORDINARIE (NON VARIAZIONI).

SE $h=0$, $\mu > 0$ TRAVO $\varphi_0=0$ E SONO NEL CASO PRECEDENTE. IN GENERALE, INVECE,

$$H[\varphi(x)] = \int d^D x \left\{ H[\varphi_0] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\varphi}(x))^2 + \frac{\tilde{\mu}}{2} \tilde{\varphi}(x)^2 + \frac{g_3}{3!} \tilde{\varphi}(x)^3 + \frac{g_4}{4!} \tilde{\varphi}(x)^4 \right\} \quad (I)$$

NELLA FASE CALDA ($\mu > 0$) IL TERMINE $\tilde{\varphi}^3$ NON CI SARA': VUOL DIRE CHE

$$g_3 = g_3(\varphi_0) \text{ LINEARMENTE}$$

E SI ANNULLA PER $\varphi_0 = 0$.

SE INVECE $h \neq 0$,

$$\mu \varphi_0 + \frac{g}{6} \varphi_0^3 = h \quad \varphi_0 h > 0 \quad (II)$$

(OSSIA φ_0 SI ALLINEA AL CAMPO: LO SAPPIAMO A PRIORI).

PROVIAMO LA (I):

$$H[\varphi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 + \frac{\mu}{2} (\varphi_0 + \tilde{\varphi})^2 + \frac{g}{4!} (\varphi_0 + \tilde{\varphi})^4 - h (\varphi_0 + \tilde{\varphi}) \right]$$

$$= \int d^D x \left\{ \left(\frac{\mu}{2} \varphi_0^2 + \frac{g}{4!} \varphi_0^4 - h \varphi_0 \right) + \left(\mu \varphi_0 + \frac{g}{6} \varphi_0^3 - h \right) \tilde{\varphi}(x) + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{g}{6} \varphi_0^2 + \frac{g}{12} \varphi_0^2 \right) \tilde{\varphi}(x)^2 + \frac{g}{6} \varphi_0 \tilde{\varphi}^3(x) + \frac{g}{24} \tilde{\varphi}^4(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 \right\}$$

NOTA: SI OSSERVA CHE IL COEFFICIENTE DI $\tilde{\varphi}(x)$ E' NULLO PER LA CONDIZIONE DI MINIMO SU φ_0 , COME ERA AUSPICABILE. PUOI ANCHE IMMOALLO TU E SEMPLIFICARTI I CONTI.

E' SUFFICIENTE DEFINIRE

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2} g \varphi_0^2 \\ g_3 = g \varphi_0 \\ g_4 = g \end{cases}$$

PER RIOTTENERE LA (I).

SE $g \rightarrow 0$ PER h PICCOLO, SE $\mu > 0$

$$\varphi_0 \sim \frac{h}{\mu}$$

SE $\mu < 0$,

$$\varphi_0 \sim \text{sign}(h) \cdot \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} + O(h) \quad (III)$$

VEDIAMO PERCHÉ.

DEFINISCO φ_1 t.c.

$$\varphi_0 = \text{sign}(h) \varphi_1$$

COSÌ DA RISCRIVERE LA (II) COME

$$\mu \varphi_1 + \frac{g}{6} \varphi_1^3 = |h|$$

$$\mu + \frac{g}{6} \varphi_1^2 = 0$$

QUINDI PER $\mu < 0$, QUANDO $g \rightarrow 0$ $\tilde{\varphi}(x)$ È DISTRIBUITO GAUSSIANAMENTE.

ADORA, ALL'ORDINE DOMINANTE IN g ,

$$\langle \varphi(x) \rangle = \varphi_0$$

$$f(h) = -\frac{1}{V} \ln Z = H[\varphi_0]$$

$$(\tilde{\mu} - \Delta_x) \langle \tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(x) \rangle_c = \delta(x-x')$$

* PER $\mu < 0$, $h \rightarrow 0^+$

$$\varphi_0 = \left[-\frac{6\mu}{g} \right]^{1/2}$$

$$\tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2} g \varphi_0^2 = \mu - \frac{1}{2} g \left(\frac{6\mu}{g} \right) = -2\mu$$

$$g_3 = g \varphi_0 = \sqrt{-6\mu g}$$

PER $\mu < 0$ ABBIAMO QUINDI ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \varphi \rangle = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \langle \varphi \rangle \neq 0$$

E, COME PREANNUNCIATO TEMPO FA,

$$f(h) = f(0) - |h| \left(-\frac{6\mu}{g} \right)^{1/2} + O(h^2)$$

NOTA: DAI SU, È UNA FORCATA NÉ PIÙ E NÉ MENO. USA

$$\varphi_0 = \pm \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} + O(h)$$

E METTICI IL FATTO CHE $\varphi_0 h > 0$, CHE HA PERLOMENO FISICAMENTE SENSO.

NOTA:

$$\varphi_1 \left(\mu + \frac{g}{6} \varphi_1^2 \right) = O(h)$$

ESCLUDENDO LA SOLUZIONE BANALE $\varphi_1 = 0$,

$$\mu + \frac{g}{6} \varphi_1^2 = O(h)$$

(NON HA SENSO DIVIDERE PER $\varphi_0 \sim \frac{h}{\mu}$, ERA UN ALTRO CASO).

NOTA: IN PRATICA ORA RIFARITO CON LA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI SU $\tilde{\varphi}$. NOTA CHE

$$\langle \varphi(x) \rangle = \langle \varphi_0 + \tilde{\varphi} \rangle_{\text{GAUSS}} = \varphi_0 + \langle \tilde{\varphi} \rangle_{g=0} = \varphi_0$$

INOLTRE

$$\left\langle \left\{ \prod_{i=1}^N \prod_{k \neq i} \varphi(x_{ik}) \delta(y-x_i) - \prod_{k=1}^N \varphi(x_{ik}) \frac{\delta H}{\delta \varphi(y)} \right\} \right\rangle = 0$$

SONO LE EQUAZIONI DEL MOTO.

QUI LE CALCOLIAMO AL LEADING ORDER (A $g=0$).

POCO DOPO MOSTRIAMO CHE

$$\varphi_0 = O(1/\sqrt{g})$$

$$\tilde{\mu} = O(1)$$

$$g_3 = O(\sqrt{g})$$

$$g_4 = O(g)$$

QUESTA GERARCHIA VA TENUTA A MENTE NEL CALCOLO DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO. AD ESEMPIO IL TERMINE APPENA SUCCESSIVO NELLO SVILUPPO CONTERRA' g_3 MA NON g_4 .

INFINE SI È DETTA

$$H[\varphi] = \int d^d x \mathcal{H}[\varphi(x)]$$

$$f(h) = -\frac{1}{V} \ln \left\{ \int e^{-\int d^d x \mathcal{H}(\varphi_0) + O(g^2)} \right\}$$

$$= -\frac{1}{V} \ln e^{-V \mathcal{H}(\varphi_0) + O(g^2)} = \mathcal{H}(\varphi_0) + O(g^2)$$

NOTA: SI STA USANDO LA (III) INSIEME A

$$f(h) = \mathcal{H}[\varphi_0] + O(g^2)$$

QUESTO RIPRODUCE I RISULTATI DEL CAMPO MEDIO, MA ABBIAMO

UNA TEORIA PER $\tilde{\varphi}(x)$: POSSIAMO ANDARE OLTRE.

LA SUA H CONTIENE UN VERTICE CUBICO: AVREMO DIAGRAMMI DI FEYNMAN CON VERTICI A 3 E 4 LINEE.

ASSUMIAMO DI AVERE UNA TEORIA REGOLARIZZATA A CORTE DISTANZE. IN EFFETTI SYMANZIK DIMOSTRA CHE ANDARE NELLA FASE ROTTA NON AGGIUNGE NUOVE DIVERGENZE ULTRAVIOLETTE.

A UN LOOP,

$$\langle \varphi(0) \rangle \sim \frac{\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle}{0} \rightarrow \text{diagramma a loop}$$

$$\langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle \sim \text{diagrammi a loop}$$

NOTA: QUI SOTTO USIAMO

$$G_0(x) = \langle \tilde{\varphi}(0) \tilde{\varphi}(x) \rangle$$

$$\tilde{G}_0(p) = (\tilde{\mu} + p^2)^{-1} = \int d^D x e^{ipx} G_0(x)$$

INOLTRE

$$\int d^D x G_0(x) = \int d^D x \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iqx} \tilde{G}_0(q)$$

$$= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \delta(q) \tilde{G}_0(q) = \frac{1}{\tilde{\mu}} \sim \chi$$

AD ESEMPIO,

$$\langle \varphi(0) \rangle = \varphi_0 - \frac{g_3}{3!} \int d^D x \langle \tilde{\varphi}(0) \tilde{\varphi}^3(x) \rangle_c = \varphi_0 - \frac{g_3}{2} \int d^D x \langle \tilde{\varphi}(0) \tilde{\varphi}(x) \rangle_c \langle \tilde{\varphi}^2(x) \rangle_c$$

$$= \varphi_0 - \frac{1}{2} g_3 \int d^D x G_0(x) G_0(0) = \varphi_0 - \frac{1}{2} \frac{g_3}{\tilde{\mu}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + \tilde{\mu}}$$

SIMMETRIE CONTINUE

ISING: $m=1$

$$\sigma_i = \pm 1, \mathbb{Z}_2$$

HEISENBERG: $m=3$

$$O(m)$$

IN ENTRAMBI I CASI PARLIAMO DI SIMMETRIE SU UNO SPAZIO INTERNO.

PER T ALTE NON CI SONO GRANDI DIFFERENZE NELLO SVILUPPO: I PESI

SONO DIVERSI, MA HO GLI STESSI DIAGRAMMI (FASE DI SIMMETRIA REALIZZATA).

PER T BASSE, INVECE, NELLA FASE DI SIMMETRIA ROTTA, VI SONO GRANDI DIFFERENZE QUALITATIVE TRA I CASI $m=1$ E $m \neq 1$.

PER $m=1$, PASSO DA UNO STATO $\uparrow$ A $\downarrow$ CON SALTI DISCONTINUI.

SE $m>1$, LO STESSO PASSAGGIO E' OTTENIBILE A PICCOLI PASSI

(CIASCUNO DEI QUALI RICHIEDE POCA ENERGIA): $\uparrow \nearrow \nearrow \dots$

ESISTONO CONFIGURAZIONI DI SPIN LA CUI

ENERGIA E' DIVERSA DA QUELLA DEL GROUND STATE DI QUANTITA'

PICCOLE A PIACERE. SI PARLA DI ONDE DI SPIN.

RICORDIAMO CHE m È IL NUMERO DI COMPONENTI DELLO SPIN,

$$\sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}^2 = C = 1$$

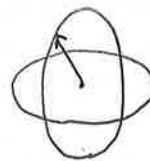
NOTA: $O(1)$ È Z_2 .

OTTENGO UNA TEORIA INVARIANTE SOTTO IL GRUPPO $O(m)$.

SU DI UNA (IPER)SFERA, PER INDIVIDUARE

UNO STATO NON BASTANO

$$|+\rangle, |-\rangle$$



MA HO BISOGNO DI UN PARAMETRO CONTINUO.

• ESEMPIO: $m=2$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \psi_0 \cos \theta(x) \\ \psi_2(x) = \psi_0 \sin \theta(x) \end{cases}$$

CON

$$\psi_1(x)^2 + \psi_2(x)^2 = \psi_0^2 \text{ FISSO.}$$

ALLORA, A $h=0$,

$$H[\theta] = H|_{\theta(x)=0} + \frac{1}{2} \psi_0^2 \int d^D x (\partial_\mu \theta(x))^2$$

NOTA: IN PARTICOLARE, LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA PUÒ PUNTARE OUNQUE SULL'IPERSFERA (DIPENDE DAL MODO - I.E. DALLA DIREZIONE - IN CUI HO RAGGIUNTO $h \rightarrow 0$).

OSSERVA CHE D È LA DIMENSIONE DEL SISTEMA E m QUELLA DELLO SPAZIO IN CUI SONO IMMERSI GLI SPIN. AD ESEMPIO

$$m=2, D=1 \rightarrow$$



*NOTA: IL TEOREMA DI GOLDSTONE Afferma INFATTI CHE LA ROTTURA DI SIMMETRIA DEL VUOTO DI UNA TEORIA IMPLICA L'ASSENZA DI MASS GAP, CIOÈ LA PRESENZA DI STATI A MASSA NULLA (AL LIMITE LEGGI).

NOTA: IN EFFETTI TUTTI GLI ALTRI PEZZI DI H CONTENGONO $|\psi|^2$, CHE NON DIPENDE DA $\theta(x)$. MANCA PERCIÒ IL TERMINE DI MASSA, IL CHE CI DICE CHE IL PROPAGATORE $\tilde{G}(p) = p^{-2}$.

$\theta(x)$ ENTRA IN H SOLO ATTRAVERSO LE DERIVATE. CALCOLIAMO

$$FT(\langle \theta(x) \theta(0) \rangle) = p^{-2} \quad \Rightarrow \quad \langle \theta(x) \theta(0) \rangle \sim x^{-(D-2)} \quad x \rightarrow \infty$$

PER $D > 2$ (PER $D \leq 2$ SUBENTRANO DIVERGENZE INFRAROSSA). SI NOTI CHE IN $H[\theta]$ C'È SOLO IL TERMINE CINETICO E NON QUELLO DI MASSA.*

QUINDI NELLA FASE ROTTA DI UNA TEORIA INVARIANTE $O(m)$ (È VERO IN GENERALE) TROVIAMO PROBLEMI IN $D=2$ (IL 2 VIENE DA p^{-2} , NON DA $m=2$).

*NOTA: COME LO GIUSTIFICO? CON IL POWER COUNTING. INFATTI

$$\langle \theta(x) \theta(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ipx} \frac{1}{p^2} \sim p^{D-2} \rightarrow [x] = [p]^{-1}, \quad \langle \theta(x) \theta(0) \rangle \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{D-2}$$

TEOREMA DI MEHMIN E WAGNER

$$\exists D_c^L \text{ t.c. } \forall H \text{ SHORT RANGE, CON } T > 0$$

NON E' POSSIBILE CHE LA SIMMETRIA SI ROMPA SPONTANEAMENTE.

$$D_c^L = 1 \quad \text{PER UNA SIMMETRIA DISCRETA,}$$

$$D_c^L = 2 \quad \text{PER UNA SIMMETRIA CONTINUA.}$$

(NON LO DIMOSTREMO).

*NOTA: PUOI ANCHE PENSARLO COME IL PREZZO DA PAGARE PER TAGLIARE IN DUE UN DOMINIO DI TAGLIA A , FUORIANDO GLI SPIN LUNGO LA LINEA SECANTE.

IN ISING ($D=1$), NON POSSO AVERE UNA tdf PERCHÉ IL BORDO NON CRESCE AL CRESCERE DEL DOMINIO (E IL CONTRIBUTO ENERGETICO DI UN DOMINIO VIENE SOLO DAL BORDO, DOVE HO SPIN ANTIPARALLELI*: $E \sim O(R^{D-1})$). SOLO SE HO DOMINI STABILI (i.e., CHE PAGO PER ROMPERE) CI PUO' ESSERE ASS.

I BOSONI DI GOLDSTONE

ABBIAMO VISTO CHE LA ROTTURA SPONTANEA DI UNA SIMMETRIA CONTINUA E' MOLTO DIVERSA DA QUELLA DI UNA SIMMETRIA DISCRETA.

PRENDIAMO UN SISTEMA CON INVARIANZA $O(m)$,

$$O(m), \quad m > 1$$

$$T < T_c$$

$$h_\alpha(x) = h_\alpha$$

$$\alpha = 1, \dots, m$$

GRAZIE ALL' INVARIANZA $O(m)$, SO CHE f DIPENDE DA h_α SOLTANTO ATTRAVERSO

$$|h| = \left(\sum_{\alpha=1}^m h_\alpha^2 \right)^{1/2}$$

PER LE SUSCETTIVITA', AVREMO DELLE FUNZIONI LONGITUDINALI χ_L PARALLELE AL CAMPO (IN UNA DELLE m DIMENSIONI) E ALTRE, χ_T , TRASVERSALI AL CAMPO (NELLO SPAZIO INTERNO, STANNO NEL PIANO ORTOGONALE DI DIMENSIONE $(m-1)$). ALLORA

$$f(h) = -|h|m - \frac{1}{2} \chi_L(h)|h|^2$$

$$\chi = \chi_L + \chi_T$$

$$\text{NOTA: } m = -\frac{\partial f}{\partial h}, \quad \chi = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2}.$$

DOVE m È IL MODULO DELLA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA.

SCEGLIAMO, PER MOSTRARLO,

$$h_m = h$$

$$h_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m-1$$

$$h \rightarrow 0^+$$

ALLORA AVREMO SEMPLICEMENTE

$$\begin{cases} \langle \varphi_m \rangle = m \\ \langle \varphi_\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

CALCOLIAMO INVECE

$$\chi_{ab} = - \frac{\partial^2 f}{\partial h_a \partial h_b} = - \frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{\partial f}{\partial h_b} \frac{\partial f}{\partial h} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_b} = \frac{1}{2|h|} 2h_b = \frac{h_b}{|h|}$$

NOTA: RICORDA CHE

$$\begin{aligned} \langle \varphi_\alpha \rangle &= - \frac{\partial}{\partial h_\alpha} F = - \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial h_\alpha} \int e^{-\beta H_0 - \int h_\alpha \varphi^\alpha d^3x} \delta\varphi \\ &= \frac{1}{Z} \int \varphi_\alpha e^{-\beta H} \delta\varphi \end{aligned}$$

E CHE LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA È

$$m = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \varphi_m \rangle = \frac{1}{Z} \int \varphi_m e^{-\beta H_0} \delta\varphi$$

$$\chi_{ab} = - \frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{h_b}{|h|} \right) \frac{\partial f}{\partial h} - \frac{h_b}{|h|} \frac{\partial}{\partial h_a} \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right) = A + B$$

NOTA: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \hat{x}_i$, PERCHÉ $\nabla r = \hat{r}$.

$$A = - \delta_{ab} \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{h_b}{|h|^2} \frac{\partial |h|}{\partial h_a} \frac{\partial f}{\partial h} = - \left(\delta_{ab} \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h} - \frac{h_a h_b}{|h|^3} \frac{\partial f}{\partial h} \right)$$

$$= - \left(\delta_{ab} - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h}$$

$$B = - \frac{h_b}{|h|} \frac{\partial |h|}{\partial h_a} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2}$$

$$\chi_{ab} = - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} - \left(\delta_{ab} - \frac{h_a h_b}{|h|^2} \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h}$$

NOTA: $\hat{h}_a \hat{h}_b \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \left(\delta_{ab} - \hat{h}_a \hat{h}_b \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h}$

GRAZIE ALLA SCELTA DEI CAMPI h_α FATTA SOPRA,

$$\chi_{ab} = - \delta_{am} \delta_{ab} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} - \left(\delta_{ab} - \delta_{am} \delta_{ab} \right) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h}$$

$$= \underbrace{\left(- \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \delta_{am} \right)}_{\sim \chi_L \quad (\alpha = m)} + \underbrace{\left(- (1 - \delta_{am}) \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial h} \right)}_{\sim \chi_T \quad (\alpha = 1, \dots, m-1)} \delta_{ab}$$

SI È COSÌ TROVATA, PER $T < T_c$,

$$\chi_{ab} = \left[\chi_L(h) \delta_{am} + \chi_T(h) (1 - \delta_{am}) \right] \delta_{ab} \quad (I)$$

CON

$$\begin{cases} \chi_L(h) = - \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \\ \chi_T(h) = - \frac{1}{|h|} \frac{\partial f}{\partial |h|} \quad ** = - \frac{m}{|h|} \end{cases}$$

** NOTA: RICORDA CHE SI ERA SUPPOSTO $h \rightarrow 0^+$.

* NOTA: SE $m \neq 0$.

$$\chi_T = \chi_{aa}, \quad a < m$$

NEL LIMITE $|h| \rightarrow 0$, LE $(m-1)$ SUSCETTIVITÀ TRASVERSE χ_T DIVERGONO.*

HO DUE DIREZIONI DEL SISTEMA IN CUI NON PAGO UN PREZZO PER MUOVERMI. QUINDI, A CAUSA DELL'INVARIANZA $O(m)$,

$$\chi_T \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} \infty$$

NOTA: RICORDA CHE $\chi = \frac{\partial m}{\partial h}$, DOÈ QUANTO VARIA m IN RISPOSTA AD h . SE APPLICO UN PICCOLO h IN DIREZIONE TRASVERSA A m , m VARIA MOLTO (IN QUELLA DIR.).

* SCRIVO IN GENERALE UN' HAMILTONIANA CON SIMMETRIA $O(m)$ COME

$$H[\varphi] = \int \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m (\partial_\nu \varphi_\alpha)^2 \right) + \frac{\mu}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha^2 \right) + \frac{g}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha^2 \right)^2 - h \varphi_m \right]$$

PER $\mu < 0$, $h \rightarrow 0^+$, DECOMPONGO (COME LA VOLTA SCORSA)

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{(0)} + \tilde{\varphi}_\alpha(x)$$

$$\varphi_\alpha^{(0)} = 0$$

$$\alpha = 1, \dots, m-1$$

$$\varphi_m^{(0)} = \sqrt{-\frac{6\mu}{g}} + O(h) \equiv \varphi^{(0)}$$

$$\mu \varphi_0 + \frac{g}{3!} \varphi_0^3 = h$$

NOTA: È LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ SU $H[\varphi_0]$. (II)

$$H[\varphi] = H[\varphi_0] + \tilde{H}[\tilde{\varphi}(x)]$$

CON

$$\begin{aligned} \tilde{H}[\tilde{\varphi}] = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^m (\partial_\nu \tilde{\varphi}_\alpha(x))^2 \right] + \frac{\mu_T}{2} \tilde{\varphi}_m(x)^2 + \frac{g}{3!} \tilde{\varphi}_m(x)^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{g}{3!} \tilde{\varphi}_m(x) \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{m-1} \tilde{\varphi}_\alpha^2 \right) + \frac{g}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^m \tilde{\varphi}_\alpha(x)^2 \right)^2 + \frac{\mu_L}{2} \sum_{\alpha=1}^{m-1} \tilde{\varphi}_\alpha(x)^2 \right\} \end{aligned}$$

DOVE

$$\mu_L \equiv \mu + \frac{1}{2} g \varphi^{(0)2} = 3 \frac{h}{\varphi^{(0)}} - 2\mu$$

$$\mu_T \equiv \mu + \frac{1}{3!} g \varphi^{(0)2} = \frac{h}{\varphi^{(0)}}$$

$$g_3 = g \varphi_0, \quad g_4 = g$$

NELLO SPAZIO DEI MOMENTI, LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE HANNO LA FORMA

NOTA: SE LA CALCOLI IN $P=0$ OTTIENI LA (I).

$$\tilde{G}_{ab}(P) = \delta_{ab} [G_L(P) \delta_{am} + G_T(P) (1 - \delta_{am})]$$

DOVE

$$\begin{cases} G_L(P) = \left(P^2 - 2\mu + \frac{3h}{\varphi^{(0)}} \right)^{-1} \\ G_T(P) = \left(P^2 + \frac{h}{\varphi^{(0)}} \right)^{-1} \end{cases}$$

I MODI TRASVERSI SONO A MASSA NULLA: I LORO POLI SI DICONO BOSONI DI GOLDSTONE.

NELLA FASE DI SIMMETRIA ROTTA DI UNA SIMMETRIA VI SONO MODI A MASSA NULLA CHE SI PROPAGANO.

SI DIMOSTRA CHE LE DIVERGENZE IA CHE AFFLIGGONO I DIAGRAMMI PERTURBATIVI NON AUMENTANO A CAUSA DEI BOSONI DI GOLDSTONE (QUINDI LA STRUTTURA DELLA RINORMALIZZAZIONE RESTA IN PIEDI).

LEGGI DI SCALING

PARTIAMO DAL CAMPO MEDIO, DOVE HO UN COMPORTAMENTO MOLTO SEMPLICE PER $D > D_c^u$: NON CI SONO FLUTTUAZIONI.

$$D_c^u = 4 \text{ PER } \varphi(x)^4$$

CHIAMANDO

$$\theta = \frac{1}{T_c} (T - T_c)$$

AVREMO PER

$\theta > 0$: LA SIMMETRIA DI H È REALIZZATA SUGLI STATI

$\theta < 0$: LA SIMMETRIA È ROTTA.

DAL PUNTO DI VISTA DELLA TEORIA DEI CAMPI,

$$\mu \sim \theta$$

OSSIA θ È UNA MASSA QUADRA NUDA.

L'IPOTESI DA CUI PARTIAMO È CHE VI SIA UNA SCALA DI LUNGHEZZE INTERESSANTE

$$\xi \gg a$$

NOTA: ξ È L'UNICA GRANDEZZA INDIPENDENTE A DIVERGERE AL PUNTO CRITICO.

$$\xi \xrightarrow{T \rightarrow T_c^+} \infty$$

E LE CORRELAZIONI DIVENTANO ISOTROPE VICINO A T_c .

$$G(x) = \langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle$$

MISURANDO LE LUNGHEZZE IN TERMINI DI a ,

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma \left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{r_1}{a} \right)$$

$$r = |\underline{r}|$$

SE RADDOPPIO a , r_1 E r_2 NON CAMBIA NULLA (A PATTO CHE LE ANISOTROPIE NON SIANO RILEVANTI).

PARTIAMO DALL'IPOTESI CHE, PER $a \rightarrow 0$, ESISTA IL LIMITE CRITICO PER r_1 E r_2 FISSATI.

PER $r_1, r_2 \gg a$, AVREMO QUINDI

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

SARINO ALLORA

$$\frac{G(r_3)}{G(r_1)} = \frac{G(r_3)}{G(r_2)} \cdot \frac{G(r_2)}{G(r_1)}$$

$$\Rightarrow \gamma\left(\frac{r_3}{r_1}\right) = \gamma\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \gamma\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

QUESTO CI DICE CHE

$$\gamma(r) \sim r^\alpha$$

QUESTA INVARIANZA DI SCALA DERIVA DALL'IPOTESI CHE SIA UNA SOLA LUNGHEZZA (ξ) A CONTROLLARE IL COMPORTAMENTO AL PUNTO CRITICO.

PER $\theta=0$, DEFINIAMO PERCIÒ

$$G(r_2) = G(r_1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{D-2+\eta}$$

NOTA: L'INVARIANZA DI SCALA IMPLICA UN DECADIMENTO A POTENZA. IN EFFETTI PER AVERE UNO ESPONENZIALE MI SERVE UNA SCALA. RICORDA CHE NELLA TEORIA LIBERA $[4] = \frac{1}{2}(D-2)$

DOVE η È LA DIMENSIONE ANOMALA ($\eta_{MF} = 0$).

* PRENDIAMO INVECE $\theta > 0$ PICCOLO. PER $\xi \gg a$, $r \gg a$, DISTINGUIAMO

THE REGIONI IN CUI STUDIAMO $G(r)$:

- a) $\xi \gg r \gg a$: REGIONE CRITICA ($\theta \sim 0$, $\xi \sim \infty$), TEORIA DEI CAMPI CONTINUA.
- b) $r \sim \xi \gg a$: TRANSIENTE.
- c) $r \gg \xi \gg a$: DECADIMENTO ESPONENZIALE DI $G(r)$ (NO INVARIANZA DI SCALA).

θ È UN PARAMETRO RILEVANTE PER IL COMPORTAMENTO IR (A GRANDI DISTANZE) DELLA TEORIA: PIÙ SONO DISTANTE E PIÙ DIVENTO SENSIBILE A UNA VARIAZIONE ANCHE MINIMA DI θ DA $\theta=0$.

PONIAMO

$$G(r, \theta) = r^{-(D-2+\eta)} g\left(\frac{r}{\xi(\theta)}\right)$$

CON

$$g(x) \underset{x \text{ piccolo}}{\sim} \text{REGOLARE}$$

$$g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-x}$$

NOTA: DIMOSTREREMO LA VERIDICITÀ DI QUESTA IPOTESI TRATTANDO IL GDA NELLO SPAZIO FISICO (VEDI IL FOCUS Legge di scala per le fdc).

NOTA: OSSIA IL CUI TERMINE LEADING È UNA COSTANTE.

PER $\theta \rightarrow 0$ MI ASPETTO (DAL CAMPO MEDIO) CHE $\xi \rightarrow \infty$ A POTENZA,

$$\xi(\theta) \sim \xi_+ \theta^{-\nu}$$

PER $\theta \rightarrow 0$.

(I)

PARTIAMO QUINDI DALL' IPOTESI DI SCALING : ξ E' LA SOLA SCALA DI LUNGHEZZA RILEVANTE VICINO AL PUNTO CRITICO.

*NOTA: $Z_{TOT} = \prod_i Z_i$ (BLOCCHI), QUINDI
 $F_{TOT} = \sum_i F_i = F_i \cdot (\# \text{ BLOCCHI})$

* INTRODUCIAMO, INOLTRE, L' IPOTESI DI HYPERSCALING.

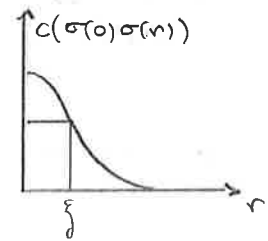
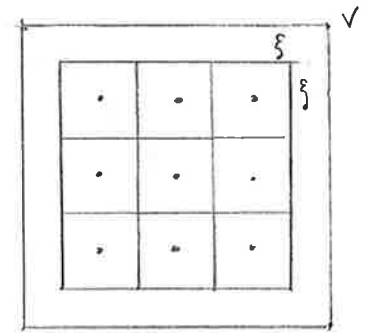
PRENDIAMO UN VOLUME V E DIVIDIAMOLO IN DEI BLOCCETTI DI TAGLIA $\xi(\theta)^D$. POSSO CONSIDERARLI COME REGIONI DI SPIN INDIPENDENTI (NON SI PARLANO); LA PARTE SINGOLARE DELL' ENERGIA LIBERA SCALA ALLORA COME *

$$f_{SING}(\theta) \sim \frac{1}{V} \left(\frac{V}{\xi(\theta)^D} \right) = \xi(\theta)^{-D}$$

↗ # BLOCCETTI

USANDO LA (I),

$$\underline{f_{SING}(\theta) \sim \theta^{\gamma D}}$$



NOTA: $\xi \sim$ TAGLIA DEI DOMINI ORIENTATI, CHE ASSUMO FLUTTUINO INDIPENDENTEMENTE GLI UNI DAGLI ALTRI.

* USANDO SCALING E HYPERSCALING, IL CALORE SPECIFICO VA COME

$$C(\theta) \sim \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \sim \theta^{\gamma D - 2} \sim \theta^{-\alpha}$$

NOTA: USEREMO HYPERSCALING IN TUTTE LE RELAZIONI IN CUI FIGURA D.

DOVE α E' PER DEFINIZIONE IL COEFFICIENTE DEL CALORE SPECIFICO, CHE VALE QUINDI

$$\underline{\alpha = 2 - \gamma D}$$

(II)

IN ISING A $D=2$, LA SOLUZIONE DI ONSAGER PREVEDE UNA SINGOLARITA' $\log$ DI C_V (QUINDI $\alpha=0$) E $\gamma=1$, IN ACCORDO CON LA (II). ANCHE NEI MODELLI $O(m)$, $m \rightarrow \infty$ (RISOLVIBILI) L'IPOTESI DI HS FUNZIONA IN DIMENSIONE $2 < D < 4$.

IN CAMPO MEDIO, L' HS NON FUNZIONA: INFATTI

$$\begin{cases} \alpha_{MF} = 0 \\ \gamma_{MF} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

NOTA: IN EFFETTI IN CAMPO MEDIO SI TRASCURANO LE FLUTTUAZIONI, MA E' PROPRIO SULLA BASE DI QUELLE CHE SI E' RICAVATA $f_{SING} \sim \theta^{\gamma D}$.

POSSIAMO USARE QUESTO FATTO PER DEFINIRE D_c^u COME L'ULTIMA A CUI VALGONO ENTRAMBE LE LEGGI:

$$\alpha_{MF} = 2 - \gamma_{MF} D_c^u \quad \Rightarrow \quad D_c^u = 4$$

NOTA: IN EFFETTI $\chi_{\mu\nu}(z, z) = \beta \langle S_\mu(z) S_\nu(z) \rangle_c$.
SE IL MEZZO È ISOTROPICO, $\chi_{\mu\nu}(z, z) = \chi_{\mu\nu}(1z-1z)$ E RANGO
 $\chi_{\mu\nu} = \int dx \chi_{\mu\nu}(x)$.

* CONSIDERIAMO LA SUSCETTIVITÀ

$$\chi = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h=0} \propto \int d^D x G(x)$$

$$G(r) \sim r^{-(D-2+\eta)} g\left(\frac{r}{\xi(\theta)}\right)$$

POICHÉ, PER GRANDI r , $G(r)$ DECADE ESPONENZIALMENTE, POSSO LIMITARMI A INTEGRARE NELLA REGIONE

$$\chi \sim \int_{|x| < \xi(\theta)} d^D x |x|^{-(D-2+\eta)} \sim \xi(\theta)^{2-\eta} \sim \theta^{-\gamma(2-\eta)}$$

POICHÉ PER DEFINIZIONE

$$\chi(\theta) \sim \theta^{-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \underline{\gamma = \gamma(2-\eta)}$$

* STUDIARE LE tdf SIGNIFICA STUDIARE LE SINGOLARITÀ DI ALCUNE FUNZIONI TERMODINAMICHE (COME f). PER FARLO USO IL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE O RISCALO ξ , MA LO FACCIAMO SEMPRE ATTRAVERSO TRASFORMAZIONI REGOLARI: LA SINGOLARITÀ È SOLO NELLE FUNZIONI TERMODINAMICHE.

* PER LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA

$$m(\theta) \sim (-\theta)^\beta = |\theta|^\beta$$

$$\text{PER } \theta \rightarrow 0^-$$

$$m(\theta) = \chi(\theta) h$$

$$\text{PER } \theta \rightarrow 0^+ \quad (\text{III})$$

$$m(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(h, \theta)$$

$$\beta_{MF} = \frac{1}{2}$$

A $\theta = 0$, SE GUARDO COME LA MAGNETIZZAZIONE CRESCE CON IL CAMPO HO

$$m(h, \theta = 0) \sim_{h \rightarrow 0^+} h^{1/\delta}$$

* NOTA: DIMENSIONALMENTE PROPRIO NO.
IL LORO RAPPORTO È UNA FUNZIONE REGOLARE, (IV)
 $\sim O(1)$, MA NON DIMENSIONALE.

QUESTO MI DICE CHE h , m^δ , $(-\theta)^\beta$ SONO DIMENSIONALMENTE* ANALOGHE: SCALANO NELLO STESSO MODO.

LE POSSO COLLEGARE CON UN'EQUAZIONE DI STATO COME

$$h = m^\delta f_H(\theta m^{-1/\beta})$$

DEFINIAMO **

$$z \equiv \theta m^{-1/\beta}$$

$$m = z^{-\beta} \theta^\beta$$

$$m^\delta = z^{-\beta\delta} \theta^{\beta\delta}$$

=>

NOTA: IL PRIMO ZERO DI f_H NEL SEMIASSE NEGATIVO DEL SUO DOMINIO DA' LA MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA (INFATTI E' IL PRIMO PUNTO IN CUI $h=0$ BENCHÉ $m \neq 0$). IL VALORE DI f_H IN ZERO (OSSIA PER $\theta=0$) DA' INVECE IL COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITA' DELLA (IV). IL PARAMETRO $\theta m^{-1/\beta}$ E' ADIMENSIONALE E REGOLARE, I.E. $O(1)$, VICINO A $\theta=0$.

NEL SEGUITO, IL PIANO E' ELIMINARE h E TROVARE γ .

$$h = z^{-\beta\delta} \theta^{\beta\delta} f_H(z) \quad (I)$$

USANDO LA (III),

$$h = \chi^{-1}(\theta) m = \chi^{-1}(\theta) z^{-\beta} \theta^\beta \quad (VI)$$

$$\tilde{f}_H(z) \chi^{-1}(\theta) = z^{-\beta(\delta-1)} \theta^{\beta(\delta-1)} \quad =>$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_H(z) &\equiv (f_H(z))^{-1} \\ \tilde{f}_H(z) &= z^{-\beta(\delta-1)} \end{aligned}$$

DOVE SI SONO CONFRONTATE* LA (V) E LA (VI). SI OTTIENE

$$\chi^{-1}(\theta) = \theta^\gamma = \theta^{\beta(\delta-1)} \quad => \quad \underline{\gamma = \beta(\delta-1)}$$

* UN CONTO ANALOGO PER IL CALORE SPECIFICO DA'

$$\underline{2 - \alpha - 2\beta\delta = -\gamma}$$

ABBIAMO COSI' RICAVATO 4 RELAZIONI PER I 6 ESPONENTI CRITICI:

$$\begin{cases} \alpha = 2 - \gamma D \\ \gamma = \gamma(2 - \eta) \\ \gamma = \beta(\delta - 1) \\ \gamma = 2\beta\delta + \alpha - 2 \end{cases}$$

=>

$$\begin{cases} \alpha = 2 - \gamma D \\ \beta = \frac{\gamma}{2}(D - 2 + \eta) \\ \gamma = \gamma(2 - \eta) \\ \delta = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \end{cases}$$

DOVE ABBIAMO ESPRESSO TUTTI I COEFFICIENTI IN FUNZIONE DI γ (LUNGHEZZA DI CORRELAZIONE) E η (FUNZIONE DI GREEN).

* NOTA: ESSE SONO CALCOLATE RISPETTIVAMENTE PER $\theta > 0$ E $\theta < 0$, MA IL COMPORTAMENTO DEVE ESSERE LO STESSO AL PUNTO CRITICO. E' QUESTO CHE SI INTENDEVA PRIMA PARLANDO DI REGOLARITA'.

** NOTA: THOPPI CONTI, SI FA IN MENO PASSAGGI.

$$z \equiv \theta m^{-1/\beta} \rightarrow m = \left(\frac{\theta}{z}\right)^\beta$$

$$m = \chi \cdot h = \chi m^\delta f_H(z)$$

$$\chi f_H(z) = m^{1-\delta} = \left(\frac{\theta}{z}\right)^{\beta(1-\delta)}$$

$$\chi^{-1} f_H(z)$$

GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE NELLO SPAZIO REALE

(RELAZIONI DI RICORRENZA NELLO SPAZIO REALE)

VOGLIAMO STUDIARE IL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA VICINO AL PUNTO CRITICO ($\theta \rightarrow 0$, $m^2 \rightarrow 0$). VOGLIAMO CAPIRE CHE COSA SUCCEDDE SOTTO DELLE TRASFORMAZIONI DI SCALA (DILATAZIONI) O DE, CON DEGLI "ISPESSIMENTI", PORTO UN LINK SU UN ALTRO.



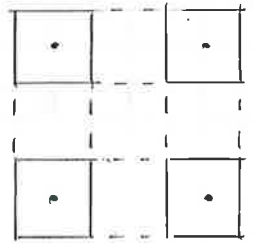
TECNICA DEL BLOCK SPIN (SPIN DI BLOCCO)

DATO UN LATTICE SPACING a , APPLICO LA TRASFORMAZIONE

$$a \rightarrow a' = \lambda a$$

λ INTERO

VOGLIO ASSOCIARE UNA VARIABILE A CIASCUNO DEI BLOCCHI IN FIGURA. UNA REGOLA POSSIBILE E' QUELLA DELLA MAGGIORANZA:



$$\sigma_b = \text{sign} \left(\sum_{i \in b} \sigma_i \right)$$

SE $\lambda a \ll \xi$, MI ASPETTO CHE LE FLUTTUAZIONI ALL'INTERNO DI CIASCUN BLOCCO SIANO IRRILEVANTI. ABBIAMO

$$P(a) \sim e^{S(a)}$$

$$S(a) = -\beta H(a) = \beta \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i$$

METTIAMO AD h PICCOLO E $\beta \sim \beta_c$. CERCHIAMO UNA NUOVA HAMILTONIANA PER DESCRIVERE I BLOCCHI ($a \rightarrow \lambda a$): IN TERMINI DI QUESTA, LA FUNZIONE DI PARTIZIONE SI SCRIVE

$$Z = \sum_{\{\sigma_b = \pm 1\}} e^{S(\lambda a)[\sigma_b]}$$

$$= \sum_{\{\sigma_b = \pm 1\}} \left\{ \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \left[\prod_{\text{BLOCCHI}} \delta \left(\sigma_b - \text{sign} \left(\sum_{i \in b} \sigma_i \right) \right) \right] e^{S(a)[\sigma_i]} \right\}$$

DOVE STO FISSANDO $\{\sigma_b\}$ E SOMMANDO SU TUTTE LE VARIABILI $\{\sigma_i\}$ CHE DANNO QUEL RISULTATO; FACCIO QUESTO PER OGNI SCELTA DELLE $\{\sigma_b\}$.

NOTA: E' SOLO UN CAMBIO DI VARIABILI, E INFATTI $S(\lambda a)$ NON SEMPLIFICA IL PROBLEMA ORIGINALE.

PER COME L'HO COSTRUITA, $S(\lambda a)$ HA LE STESSA SIMMETRIE GLOBALI DI $S(a)$.

λ E' INTERO, MA SE ASSUMO CHE POSSA VARIARE CON CONTINUITA' MI ASPETTO

$$S(\lambda a) \underset{\lambda \rightarrow 1}{\sim} S(a)$$

PROVIAMO AD APPROSSIMARE (VISTO CHE IL PROBLEMA VERO NON LO SO TRATTARE)

$$S(\lambda a) \approx \beta_\lambda \sum_{b,b'} \sigma_b \sigma_{b'} + h_\lambda \sum_b \sigma_b + \underline{S_0}$$

NOTA: VEDREMO CHE EVENTUALI CORREZIONI AGGIUNTIVE SARANNO IRILEVANTI.

(S_0 NON CONTERA', QUINDI LA IGNORO). PONIAMO PER IL MOMENTO $h=0$.

RITROVO UN NUOVO MODELLO DI ISING, CON INTERAZIONI A PRIMI VICINI E CON

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \underline{x}$$

CALCOLO CIOE' LE LUNGHEZZE IN UNITA' DI λ . ALLORA θ VA IN

$$\theta \rightarrow \theta_\lambda = g(\lambda, \theta)$$

DOVE θ E' LA TEMPERATURA RIDOTTA. ASSUMIAMO CHE θ_λ SIA UNA FUNZIONE REGOLARE: TUTTE LE TRASFORMAZIONI CHE EFFETTIAMO SUI PARAMETRI DEL GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE SONO REGOLARI (CI PERMETTONO DI SEGUIRE LE TRAIETTORIE DEL GRUPPO), MENTRE LE SINGOLARITA' PROVENGONO SOLO DALLE FUNZIONI TERMODINAMICHE.

ALLORA

$$Z = \sum_{\{\sigma_b\}} e^{S(\lambda a)} \approx \sum_{\{\sigma_i\}} e^{S(a)}$$

$$\underset{\text{REGOLARE}}{\sim} \int e^{f(\theta_\lambda) \frac{V}{\lambda^D}} \approx e^{f(\theta) V}$$

NOTA: STIAMO CERCANDO L'ENERGIA LIBERA PER SITO.
 $f \sim \frac{1}{V} \ln Z \rightarrow Z \sim e^{-f \cdot V}$

DALL'UGUAGLIANZA DELLE Z CALCOLATE NEI DUE MODI RICAVIAMO UNA RELAZIONE TRA LE ENERGIE LIBERE.
 HO POSTO $h=0$, QUINDI f E' SOLO FUNZIONE DI θ .

DOVE $\underset{\sim}{\int}_{\text{REGOLARE}}$ CONTIENE LA SOMMA DI TUTTE LE σ CHE UCCIDO. QUINDI

$$\lambda^D f(\theta) \approx f(\theta_\lambda) + \underset{\sim}{\int}_{\text{REGOLARE}}$$

INVECE

$$S_{\text{COMPLETA}}(\lambda a) \approx -\beta \left\{ \alpha' \sum^I \sigma\sigma + \alpha'' \sum^{II} \sigma\sigma + \dots + \gamma' \sum \sigma\sigma\sigma + \dots \right\}$$

DOVE DOVREI INSERIRE INTERAZIONI A PRIMI, SECONDI... VICINI E A PIU' CORPI.

★ COSA SUCCEDDE SE ITERO IL PROCEDIMENTO?

METTIAMO A $T \neq T_c$, $\theta \neq 0$. ITERANDO, I BLOCCHI CRESCONO E DOPO K PASSI (PER UN CERTO K) TROVERO

$$\lambda^K \alpha \sim \xi$$

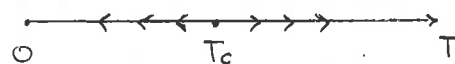
NOTA: LE H CHE DESCRIVONO COMPLETO ORDINE ($T=0$) O DISORDINE ($T=\infty$) RESTANO LE STESSA SE GUARDO I BLOCCHI: PER QUESTO SONO PUNTI FISSI!

IN UNITA' DI $\alpha_K \equiv \lambda^K \alpha$, ξ STA DECRESCENDO E AD UN CERTO PUNTO AVERO' UNO SPIN IN UN VOLUME ξ^d . CIO' SIGNIFICA CHE HO DEVIAZIONI VIA VIA MAGGIORI DAL COMPORTAMENTO CRITICO (CHE AVERE A $\theta=0$).

SE $\beta < \beta_c$, $\beta_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ ($T \rightarrow \infty$).

IL SISTEMA SI DISORDINA E HO UN PUNTO FISSO ATTRATTIVO DI ALTE T. IL SISTEMA SI RIORDINA, INVECE,

SE $\beta > \beta_c$, $\beta_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$ ($T \rightarrow 0$)



OSSIA LA RINORMALIZZAZIONE AMPLIFICA LE DEVIAZIONI DA T_c .

T_c E' UN PUNTO FISSO MA INSTABILE NON BANALE.

SI NOTI CHE LA REGOLA DELLA MAGGIORANZA AMPLIFICA L'ORDINE O IL DISORDINE GIA' PRESENTI.

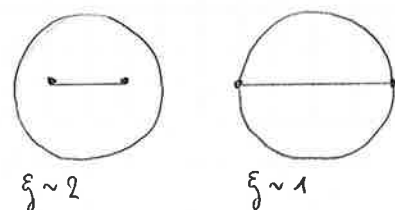
PRENDENDO λ CONTINUO, NELLA REGIONE CRITICA MI ASPETTO

$$\theta_\lambda = \lambda^{\gamma_\theta} \theta$$

$$\gamma_\theta > 0, \lambda \sim 1$$

DOVE γ_θ SI DICE ESPOLENTE TERMICO E MI DICE COME REAGISCE LA TEMPERATURA A UNA DILATAZIONE DEL LATTICE SPACING. PER UNA LUNGHEZZA, SO CHE

$$\xi(\theta_\lambda) = \xi_\lambda(\theta)$$



SE ITERO FINO A QUANDO $\xi(\theta_\lambda)$, $\theta_\lambda \sim O(1)$, TROVO $\lambda \sim \theta^{-\frac{1}{\gamma_\theta}}$ E

$$\xi(\theta) \sim \lambda \sim |\theta|^{-\frac{1}{\gamma_\theta}} \approx |\theta|^{-\nu}$$

ABBIAMO COSI' COLLEGATO

$$\nu = \frac{1}{\gamma_\theta}$$

NOTA: SECONDO ME E' MOLTO IMPORTANTE. NEL LIMITE CRITICO, $\theta=0$ E $\xi \rightarrow \infty$: IO MI DEFINISCO θ_λ COSI' CHE LUI E $\xi(\theta_\lambda)$ RESTINO FINITI E CIO' IDENTIFICA IL REGIME $\theta \rightarrow 0^+$. PERCHÉ SCELGO $\lambda \sim 1$ E POI ITERO, INVECE DI PRENDERE λ GIÀ' GROSSO? E' COME QUANDO PRENDI TRASFORMAZIONI INFINITESIMAMENTE VICINE ALL' IDENTITA' E POI ITERI:

$$U(E) \equiv U(NE) = (U(E))^N = (1 - i \frac{E}{N} G)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-iEG}$$

L'ESPONENTE γ_θ SI DETERMINA NOTANDO CHE

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda = \gamma_\theta \lambda^{\gamma_\theta - 1} \theta = \gamma_\theta \frac{1}{\lambda} \theta_\lambda$$

NOTA: ANCORA MEGLIO, $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \ln \lambda}$
E TI PUOI RISCRIVERE

$$\theta_\lambda = \lambda^{\gamma_\theta} \theta = \theta e^{\gamma_\theta \ln \lambda}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda = \gamma_\theta \cdot \theta_\lambda$$

$$\gamma_\theta = \frac{1}{\gamma} = \frac{\lambda}{\theta_\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda \Big|_{\lambda=1}$$

ASSUMENDO LA REGOLARITA' DELLE TRASFORMAZIONI DEL g_{dr} , A $T=T_c$ DOVRO' AVERE

$$\gamma_{DESTRO} = \gamma_{SINISTRO}$$

SI E' VISTO CHE, A MENO DI CONTRIBUTI REGOLARI,

$$\lambda^D f_{SING}(\theta) = f_{SING}(\theta_\lambda)$$

USANDO PERCIO' ANCORA $\lambda \sim 10|^{-1/\gamma_\theta} \sim 10|^{-\gamma}$, SI OTTIENE*

$$f_{SING} \sim f_{\pm} 10|^{\pm \gamma D} = f_{\pm} 10|^{2-\alpha}$$

NOTA: PER DEFINIZIONE, ESSENDO $C_V = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \sim \theta^{-\alpha}$

ABBIAMO COSI' RITROVATO, PER L'ESPONENTE α DEL CALORE SPECIFICO,

$$2 - \alpha = \gamma D$$

*NOTA: QO' DIMOSTRA, EN PASSANT, L'IPOTESI DI HYPERSCALING.

* GENERALIZZIAMO AL CASO CON $h \neq 0$. AVREMO

$$\beta_\lambda(\beta, h), \quad h_\lambda(\beta, h)$$

PER $\theta \sim 0$, $h \neq 0$. INTRODUCENDO L'ESPONENTE MAGNETICO γ_h ,

$$\begin{cases} \theta_\lambda = \lambda^{\gamma_\theta} \theta \\ h_\lambda = \lambda^{\gamma_h} h \end{cases}$$

NOTA: AL PUNTO CRITICO STANNO SVANENDO SIA θ CHE h .

E POSSO RISCRIVERE

$$f_{SING}(\theta, h) \sim \lambda^{-D} f_{SING}(\lambda^{\gamma_\theta} \theta, \lambda^{\gamma_h} h) \approx 10|^{\gamma D} f_{SING}(1, h 10|^{-\gamma \gamma_h})$$

DOVE HO PRESO NUOVAMENTE

$$\lambda^{\gamma_\theta} \cdot \theta \sim 1$$

$$\Rightarrow \lambda \sim \theta^{-\frac{1}{\gamma_\theta}} \sim \theta^{-\gamma}$$

DERIVANDOLA RISPETTO AD h ,

$$\text{NOTA: } \partial_h = \lambda^{\gamma_h} \partial_{h_\lambda} \sim \theta^{-\gamma \gamma_h} \partial_{h_\lambda}$$

$$\frac{\partial f_{SING}}{\partial h} = m \sim 10|^{\gamma(D - \gamma_h)} = 10|^\beta \Rightarrow \beta = \gamma(D - \gamma_h)$$

EIL DERIVANDO LA DI NUOVO SI TROVA

$$\chi = \theta + \gamma(D - 2\gamma_h) \equiv \theta - \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \gamma(2\gamma_h - D)$$

TUTTI GLI ESPONENTI CRITICI SI POSSONO COSÌ ESPRIMERE IN TERMINI DI

$$\gamma_0 = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma_h = \frac{1}{2} \left(D + \frac{\gamma}{\gamma} \right)$$

* CONSIDERIAMO UNA GENERICA HAMILTONIANA CON ACCOPPIAMENTI $\{K_i\}$,

$$K_1 \sum' \sigma_i \sigma_{i+\hat{\mu}} + K_2 \sum'' \sigma_i \sigma_{i+2\hat{\mu}} + \dots + \tilde{K}_1 \sum' \sigma \sigma \sigma + \dots$$

TUTTI QUESTI ACCOPPIAMENTI SARANNO SOGGETTI ALLE LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL GOLIA; LINEARIZZANDO ATTORNO A $\lambda = 1$,

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} K_i(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \gamma_{ij} K_j$$

NOTA: IL PUNTO CRITICO È QUELLO IN CUI $K_i = 0$.
IN TERMINI DI SISTEMI DINAMICI, ATTORNO A $K=0$ ESPANDO
 $\lambda \frac{d}{d\lambda} K_i(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda} f(K) \Big|_{K=0} \cdot K \rightarrow \gamma_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial K_j}$

DOVE γ_{ij} È UNA MATRICE, λ È IL PARAMETRO DI SCALA E

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} = \frac{d}{d \ln \lambda}$$

NOTA: CONFRONTA QUANTO APPENA DETTO CON
 $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda = \gamma_0 \cdot \theta_\lambda$
TROVATA NEL CASO DI UN SOLO ACCOPPIAMENTO.

IN ACCORDO CON IL CARATTERE Moltiplicativo DELLE DILATAZIONI,

$$\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

(È IL LOG CHE È ADDITIVO).

NOTA: SE $\tilde{K}$ È AUTOVETTORE CON AUTOVALORE α ,
 $\frac{d}{d \ln \lambda} \tilde{K}_i(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \alpha \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}_i \sim \lambda^\alpha$
SE $\alpha < 0$, $\tilde{K}_i$ VA A ZERO CON LA RINORMALIZZAZIONE.

GLI AUTOVETTORI DI γ_{ij} DEFINISCONO DELLE COMBINAZIONI LINEARI DEI K_i DETTI * SCALING FIELDS. ESSI SI DIVIDONO IN

1) RILEVANTI: $\lambda_i > 0$

2) IRRELEVANTI: $\lambda_i < 0$

3) MARGINALI: $\lambda_i = 0$

*NOTA: SONO LE COMBINAZIONI LINEARI DELLE INTERAZIONI A ESSERE CHIAMATE SCALING FIELDS, O OPERATOR FIELDS. I K_i NON SONO FIELDS. OCCHIO CHE QUI λ_i RICORDA INFELICEMENTE λ .

I NOSTRI θ, h SONO OPERATORI RILEVANTI.

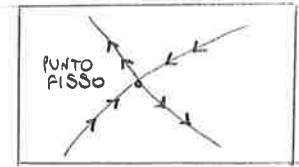
QUESTO GIUSTIFICA IL SUPPORRE UN NUMERO FINITO DI OPERATORI NELL' HAMILTONIANA: GLI ALTRI GENERANO SOLAMENTE CORREZIONI AI TERMINI DOMINANTI NEL LIMITE CRITICO.

NEL CASO MARGINALE L'APPROSSIMAZIONE LINEARE È INSUFFICIENTE.

AVREMO UN LUOGO DI PUNTI CHE CHIAMEREMO VARIETA' CRITICA ;

SU DI ESSA, DISTINGUIAMO DIREZIONI STABILI O INSTABILI.*

PER I PUNTI FISSI CHE DESCRIVONO UNA folc DEL II° ORDINE, I PARAMETRI RILEVANTI SONO T E h .



CIÒ SPIEGA L'UNIVERSALITA': HAMILTONIANE CHE

APPARISCONO MOLTO DIVERSE POSSONO TALVOLTA DIFFERIRE TRA LORO

PER OPERATORI IRRAILEVANTI.

NOTA: I PUNTI FISSI SONO PUNTI DI SELLA DELLA DINAMICA.

NELLA TEORIA DI L-G, IN $D > 4$ IL PUNTO FISSO GAUSSIANO E'

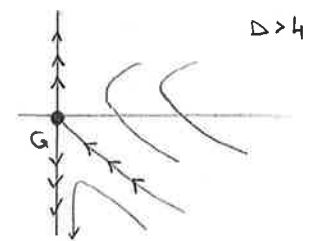
ATTRATTIVO IN UNA PARTICOLARE DIREZIONE SOLTANTO.

IN $D < 4$, QUELLA STESSA LINEA E' REPULSIVA

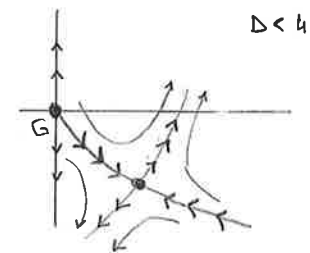
E MI PORTA SULL' ALTRO PUNTO FISSO NON

BANALE, QUELLO INTERAGENTE (GENERICAMENTE

REPULSIVO, MA CON UNA LINEA ATTRATTIVA).



$D > 4$



$D < 4$

* LA LEGGE DI SCALA PER LA folc A m PUNTI E'

$$G(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta, h) = \lambda^{-m(D-\gamma_h)} G\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_2}{\lambda}, \dots, \frac{x_m}{\lambda}; \theta_\lambda, h_\lambda\right)$$

$\uparrow$
 $\lambda^{-m(D-2+\eta)/2}$

NOTA: LA DIMOSTRO NEL FOCUS QUI A FIANCO.

PER LA TEORIA LIBERA, SI ERA VISTO CHE

$$[\psi] = \frac{D-2}{2}$$

MA IN QUELLA INTERAGENTE

$$[\psi] = D - \gamma_h = \frac{D-2}{2} + \frac{\eta}{2}$$

OGNI CAMPO VIENE RINORMALIZZATO DA

$$(\lambda^{-(D-\gamma_h)}) \equiv Z(\lambda)^{1/2}$$

* NOTA: OCCHIO CHE IN REALTA' LA VARIETA' CRITICA NON E' LO SPAZIO DEI PARAMETRI, MA IL BACINO DI ATTRAZIONE DEL PUNTO CRITICO, SU DI ESSA NON CI SONO DIREZIONI INSTABILI, VEDI FOCUS QUI SOTTO.

NOTA: DETTA COSI' SEMBRA PIUVUTA DAL CIELO. VEDI FOCUS, DIMOSTRO ANCHE QUESTA NELLA PROSSIMA PAGINA.

NOTA: IN QUESTO MODO SI RICAVA, CON IL GOLR, CIÒ CHE SI ERA SUPPOSTO CON L'IPOTESI DI SCALING.

* FOCUS: VARIETA' CRITICA. CHE COSA C'ENTRA IL PUNTO FISSO DELLA RINORMALIZZAZIONE CON IL PUNTO CRITICO DELLA TEORIA? ABBIAMO VISTO CHE SE $T > T_c$ LA RINORMALIZZAZIONE MI PORTA A $T = \infty$ E SE $T < T_c$ MI PORTA A $T = 0$. NELLO "SPAZIO DELLE HAMILTONIANE" C'E' UN IPERPIANO CHE SEPARA QUESTI DUE DIVERSI COMPORTAMENTI ED E' LA VARIETA' CRITICA (V. BINNEY S.3.1).

FOCUS: LEGGE DI SCALA PER LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE (DAGUPE, ITZYKSON, BINNEY)

RICORDIAMO CHE*

$$G(x-y) = \frac{\partial}{\partial h(x)} \frac{\partial}{\partial h(y)} \ln \left\{ \sum_{\{\sigma_i\}} e^{S(\sigma)[\sigma, h]} \right\} = \frac{\partial}{\partial h(x)} \frac{\partial}{\partial h(y)} \ln \int \delta \sigma_i e^{S(\sigma)[\sigma, h]}$$

PARTIAMO DALL'EQUIVALENZA TRA LA Z INIZIALE E QUELLA COSTRUITA CON LE VARIABILI DI BLOCCO

$$\sum_{\{\sigma_i\}} e^{S(\sigma)} = \sum_{\{\sigma_b\}} e^{S(\lambda \sigma)} = Z \quad (I)$$

$$G(x_1, \dots, x_m; \theta, h) = \frac{\delta^m}{\delta h(x_1) \dots \delta h(x_m)} \ln \int \delta \sigma_i e^{S(\sigma)[h]} \quad (II)$$

$$G(x'_1, \dots, x'_m; \theta_\lambda, h_\lambda) = \frac{\delta^m}{\delta h_\lambda(x'_1) \dots \delta h_\lambda(x'_m)} \ln \int \delta \sigma_b e^{S(\lambda \sigma)[h_\lambda]}$$

DOVE

$$h_\lambda = \lambda^{\gamma_h} \cdot h$$

$$x' = \frac{x}{\lambda}$$

FORMALMENTE, DEVE VALERE

$$\frac{\partial}{\delta h_\lambda(z)} = \lambda^{-\gamma_h} \frac{\partial}{\delta h(z)}$$

*NOTA: MANCA, RISPETTO AL SOLITO, IL FATTORE $\left(\frac{1}{\beta}\right)^m$,
MA IL MOTIVO È CHE QUI
 $S = \beta \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i$ (INVECE DI $\beta h \sum_i \sigma_i$).

ORA OSSERVIAMO CHE

$$\frac{\delta h(x')}{\delta h(y')} = \delta^\Delta(x' - y') = \delta^\Delta\left(\frac{1}{\lambda}(x - y)\right) = |\lambda|^\Delta \delta^\Delta(x - y) = \lambda^\Delta \frac{\delta h(x)}{\delta h(y)}$$

USANDO QUESTI CAMBI DI VARIABILE NELLA (II) E RICORDANDO LA (I),

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_m; \theta, h) &= (\lambda^{\gamma_h} \lambda^{-\Delta})^m \frac{\delta^m}{\delta h_\lambda(x'_1) \dots \delta h_\lambda(x'_m)} \ln \int \delta \sigma_b e^{S(\lambda \sigma)[h_\lambda]} \\ &= \lambda^{m(\gamma_h - \Delta)} G(x'_1, \dots, x'_m; \theta_\lambda, h_\lambda) \end{aligned} \quad (III)$$

RICORDIAMO ORA L'IPOTESI DI SCALING (CHE, DI FATTO, ABBIAMO APPENA DIMOSTRATO!):

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-(D-2+\eta)}$$

AMMETTENDO CHE LE 'G' AI DUE MEMBRI DELLA (III) DESCRIVANO LO STESSO SISTEMA FISICO (COME D'ALTRONDE GIÀ FACCIAMO NELLA (I)),

$$\frac{G(x' = x/\lambda, \theta_\lambda, h_\lambda)}{G(x, \theta, h)} = \lambda^{(D-2+\eta)} \equiv \lambda^{2(D-\gamma_h)} \quad (IV)$$

↑
(III) CON $m=2$

OCCHIO CHE HO USATO $m=2$ ANCHE SE SI TRATTA DI UNA $G(x)$: IL MOTIVO E' CHE, PER INVARIANZA TRANSLAZIONALE,

$$G(x_1, x_2) = G(|x_1 - x_2|) \equiv G(x)$$

DALLA (IV) SI DEDUCE LA RELAZIONE CHE DEFINISCE η IN TERMINI DI γ_n :

$$D - \gamma_n = \frac{1}{2} (D - 2 + \eta)$$

FOCUS: MATRICE DI TRASFERIMENTO

$$q^L Z_L = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{m=1}^L e^{p(2\delta_{\sigma_m, \sigma_{m+1}} - 1)} = \sum_{\sigma_1=1}^q \sum_{\sigma_2=1}^q \dots \sum_{\sigma_L=1}^q \prod_{m=1}^L \underbrace{T_{\sigma_m, \sigma_{m+1}}}_{\text{MATRICE } q \times q}$$

$$= \prod_{m=1}^L \sum_{\sigma_{m+1}=1}^q T_{\sigma_m, \sigma_{m+1}} = \sum_{\sigma_1=1}^q \dots \sum_{\sigma_L=1}^q T_{\sigma_1, \sigma_2} T_{\sigma_2, \sigma_3} \dots T_{\sigma_L, \sigma_{L+1}} \quad \underbrace{\sigma_{L+1} \equiv \sigma_1}$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^q \sum_{\sigma_3=1}^q \dots \sum_{\sigma_L=1}^q \left(\sum_{\sigma_2=1}^q T_{\sigma_1, \sigma_2} T_{\sigma_2, \sigma_3} \right) T_{\sigma_3, \sigma_4} \dots T_{\sigma_L, \sigma_1}$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^q \sum_{\sigma_3=1}^q (T^2)_{\sigma_1, \sigma_3} T_{\sigma_3, \sigma_4} \dots T_{\sigma_L, \sigma_1} = \dots = \sum_{\sigma_1=1}^q (T^L)_{\sigma_1, \sigma_1} = \text{Tr } T^L$$

MODELLO DI POTTS

NELLA FASE DI SIMMETRIA ROTTA, HO q STATI INVECE DEI 2 DI ISING.

$$H_{\text{Potts}}^{(q)} = - \sum_{\langle i,j \rangle} (2\delta_{\sigma_i, \sigma_j} - 1) \quad \sigma_i = 1, 2, \dots, q$$

HO DUE DIVERSI PESI A SECONDA SE I DUE SITI SONO UGUALI O DIVERSI:

$$\sigma_i = \sigma_j \Rightarrow -(2-1) = -1 \quad (\text{CASO FAVORITO})$$

$$\sigma_i \neq \sigma_j \Rightarrow -(-1) = 1$$

PER $q=2$ RITROVO IL MODELLO DI ISING.

IN $D=1$, DEFINISCO PER LA CATENA

$$Z_L = q^{-L} \sum_{\{\sigma=1,2,\dots,q\}} e^{\beta \sum_{m=1}^L (2\delta_{\sigma_m, \sigma_{m+1}} - 1)}$$



IN CUI q^{-L} SERVE A RENDERE $Z_L(\beta=0)=1$. SI NOTI CHE HO UN SOLO LEGAME PER OGNI SITO.

DECOMONGO

NOTA: PUOI VERIFICARE IL PRIMO PASSAGGIO SEMPLICEMENTE PROVANDOLO PER CASI.

$$e^{\beta(2\delta_{\sigma\sigma'} - 1)} = e^{\beta} \delta_{\sigma\sigma'} + e^{-\beta} (1 - \delta_{\sigma\sigma'})$$

$$= \left[\frac{1}{q} e^{\beta} (q \delta_{\sigma\sigma'}) - \frac{1}{q} e^{-\beta} (q \delta_{\sigma\sigma'}) \right] + \left[\frac{e^{-\beta}}{q} (q-1) + \frac{e^{-\beta}}{q} \right] + \left[\frac{e^{\beta}}{q} - \frac{e^{-\beta}}{q} \right]$$

$$= \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} (q \delta_{\sigma\sigma'}) - \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} + \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q}$$

$$= \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \cdot 1 + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} (q \delta_{\sigma\sigma'} - 1) \equiv T_{\sigma\sigma'} \quad (I)$$

SI TRATTA DI UNA DECOMPOSIZIONE ORTONORMALE: SE MOLTIPLICO TRA LORO DUE DI QUESTI PEZZI OTTENDO LA SOMMA DEI DUE QUADRATI, CIASCUNO MOLTIPLICATO PER IL SUO ELEMENTO DELLA BASE. AD ESEMPIO,

$$\sigma, \sigma', \tau = 1, 2, \dots, q$$

$$A_{\sigma, \sigma'} = a + \tilde{a} (q \delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$

$$B_{\sigma, \sigma'} = b + \tilde{b} (q \delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$

NOTA: PUOI ANCHE VEDERLA COME

$$\hat{A} = a \hat{x} + \tilde{a} \hat{y}$$

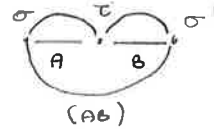
$$\hat{x} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right) \Bigg\} q, \quad \hat{y} = \left(\begin{array}{cccc} (q-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (q-1) & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & (q-1) \end{array} \right)$$

IN EFFETTI (MA E' SCOMODO FARE I CONTI)

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = q \hat{x}, \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \quad \hat{y} \cdot \hat{y} = q \hat{y}.$$

ALLORA

$$\begin{aligned}
 (AB)_{\sigma\sigma'} &= \sum_{\tau} A_{\sigma,\tau} B_{\tau,\sigma'} = \sum_{\tau=1}^q [a + \tilde{a}(q\delta_{\sigma\tau} - 1)] [b + \tilde{b}(q\delta_{\tau\sigma'} - 1)] \\
 &= qab + (a\tilde{b} + \tilde{a}b) \sum_{\tau=1}^q (q\delta_{\sigma\tau} - 1) + \tilde{a}\tilde{b} \sum_{\tau=1}^q (q^2\delta_{\sigma\tau}\delta_{\tau\sigma'} - q\delta_{\sigma\tau} - q\delta_{\tau\sigma'} + 1) \\
 &= qab + \tilde{a}\tilde{b} [q^2 \sum_{\tau=1}^q \delta_{\sigma\tau}\delta_{\tau\sigma'} - 2q + q] \\
 &= q \{ ab + \tilde{a}\tilde{b}(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \}
 \end{aligned}$$



LA (I) SI DICE MATRICE DI TRASFERIMENTO.

NOTA:
 $Z_L = \text{Tr} Z_L^{(1)} = q^{-L} \text{Tr}(T^L)$.
 VEDI FOCUS DUE PAGINE ADDIETRO.

SU UNA CATENA DI L SITI,

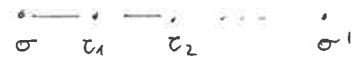
$$\begin{aligned}
 Z_L^{(1)} &= \left[\frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \cdot 1 + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \right]^L \cdot \frac{1}{q^L} \\
 &= q^L \left[\left(\frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^L \cdot 1 + \left(\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} \right)^L (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \right] \cdot \frac{1}{q^L}
 \end{aligned}$$

SI NOTI CHE NON MI SERVE CERCARE GLI AUTOVALORI IN QUESTA BASE. INOLTRE, SE HO CONDIZIONI PERIODICHE AL BORDO (CATENA CHIUSA), IL PRIMO SPIN E' UGUALE ALL'ULTIMO, PRENDO ALLORA LA TRACCIA DELLA MATRICE, CHE COINCIDE CON IL SOMMARE SUI SOLI ELEMENTI DIAGONALI.

NOTA: GUARDA MOLTO IL FOCUS DI QUI SOPRA.

SI TROVA COSI'

$$Z_L^{(1)} = a^L + \tilde{a}^L (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$



E LA MATRICE HA LA FORMA

$$\begin{pmatrix} a^L + (q-1)\tilde{a}^L & a^L - \tilde{a}^L \\ & a^L + (q-1)\tilde{a}^L \\ & & \ddots \\ & & & a^L + (q-1)\tilde{a}^L \end{pmatrix} = Z_L^{(1)}$$

$$\text{Tr} Z_L^{(1)} = q(a^L + (q-1)\tilde{a}^L) = q \left[\left(\frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^L + (q-1) \left(\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} \right)^L \right]$$

PER $L \rightarrow \infty$, FACCIAMO UN PUNTO DI SELLA E TRASCURO IL SECONDO

TERMINE:

$$f = \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta L} \ln \text{Tr} Z_L^{(q)} = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q}$$

PER $q=2$ (ISING), RITHOVO

$$f = -\frac{1}{\beta} \ln \cosh \beta$$

NOTA:

$$\frac{1}{q} (e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}) = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} + e^{-\beta}$$

QUINDI È PIÙ GRANDE DEL SECONDO TERMINE.
IN GENERALE, SE $\alpha > \beta$,

$$\begin{aligned} f_{\infty} &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta L} \ln [\alpha^L + \beta^L] \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta L} \left\{ \ln \alpha^L + \ln \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^L \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln \alpha - \underbrace{\frac{1}{\beta} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^L}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

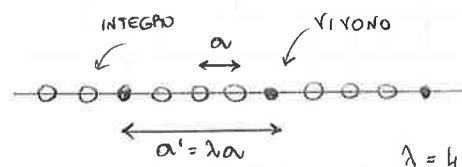
PROCESSO DI DECIMAZIONE ESATTA

METTIAMO IN $D=1$: IN TAL CASO, INFATTI,

L'INTERAZIONE NON CAMBIA FORMA (RIMANE

A PRIMI VICINI A 2 PUNTI). È SUFFICIENTE RINORMALIZZARE

$$\beta \rightarrow \beta_{\lambda}$$



NEL MODELLO DI ISING, DEFINIAMO

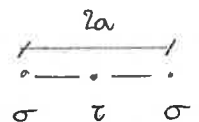
$$t \equiv \tanh(\beta)$$

$$t_{\lambda} \equiv \tanh(\beta_{\lambda})$$

SOMMANDO SU τ ,

$$\sum_{\tau=1}^q \left[(a + \tilde{a}(\delta_{\sigma\tau} - 1)) (b + \tilde{b}(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)) \right]$$

$$= [ab + \tilde{a}\tilde{b}(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)] q$$



OVVERO (COME ABBIAMO VISTO CON LA MATRICE DI TRASFERIMENTO)

$$\begin{cases} \frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \rightarrow \left(\frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^{\lambda} \\ \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} \rightarrow \left(\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{q} \right)^{\lambda} \end{cases}$$

NOTA: DA QUI, RACCOGLI IL PRIMO TERMINE,
OVVERO MOLTIPLICA Z_L PER
 $\left(\frac{e^{\beta} + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^L$
E SALTA DIRETTAMENTE ALLA (II).

METTIAMO IN EVIDENZA UN FATTORE e^{β} (CHE VA RIMESSO DAVANTI A Z).

TRAVIAMO

$$\begin{cases} \frac{1 + (q-1)e^{-2\beta}}{q} \rightarrow (\cdot)^\lambda \\ \frac{1 - e^{-2\beta}}{q} \rightarrow (\cdot)^\lambda \end{cases}$$

METTENDO IN EVIDENZA

$$\frac{1 + (q-1)e^{-2\beta}}{q}$$

TRAVIAMO

$$\begin{cases} 1 \rightarrow 1^\lambda = 1 \\ \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}} \rightarrow (\cdot)^\lambda \end{cases}$$

(II)

DEFINIAMO (GENERALIZZANDO QUELLO DI ISING, $t = \tanh(\beta)$, $q = 2$)

$$t \equiv \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}}$$

(III)

LA (II) CI DICE ALLORA CHE, QUANDO APPLICHO LA DECIMAZIONE DI λ ,

$$t(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \rightarrow t^\lambda(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \equiv t_\lambda(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)$$

DOVE SI È DEFINITO

$$t_\lambda \equiv t(\beta_\lambda) = t^\lambda$$

(IV)

ABBIAMO TROVATO

NOTA: SI TRATTA DEL FATTORE CHE HO RACCOLTO PER SCRIVERE LA (II). β_λ È DEFINITA IMPLICITAMENTE DALLA (IV).

$$Z_L(\beta) \left(\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right)^{-L} = Z_{L/\lambda}(\beta_\lambda) \left(\frac{e^{\beta_\lambda} + (q-1)e^{-\beta_\lambda}}{q} \right)^{-L/\lambda}$$

QUESTA TRASFORMAZIONE* AMMETTE UN PUNTO FISSO ATTRATTIVO DI ALTE T A $t=0$, $\beta=0$, E UN PUNTO FISSO REPULSIVO DI BASSE T A $t=1$, $\beta=\infty$.

*NOTA: OVEVERO LA (IV). β È DATO DALLA (III).

IN $D=1$, $(T=0) \cong (T=T_c)$, CIOÈ HA A CHE FARE CON UNA T_c : LÌ ξ DIVERGE E HO IN EFFETTI UN PUNTO FISSO. PER VEDERLO MEGLIO,

METTIAMO VIANO A $t=1$, $\beta=\infty$. ALLORA

$$t = \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}} \sim (1 - e^{-2\beta}) [1 - (q-1)e^{-2\beta}] \approx (1 - e^{-2\beta}) - (q-1)e^{-2\beta}$$

$$= 1 - qe^{-2\beta} + O(e^{-4\beta})$$

(V)

PERCIO'

$$t_\lambda \approx (1 - qe^{-2\beta})^\lambda \approx 1 - \lambda qe^{-2\beta}$$

$$1 - t_\lambda \approx \lambda qe^{-2\beta} \approx \lambda \underset{\uparrow}{(1-t)}$$

(X)

$$(1-t) \leftrightarrow \vartheta$$

OSSIA, $(1-t)$ GIOCA IL RUOLO DI ϑ NELLA DISCUSSIONE GENERALE*. SE ITERO FINO A CHE $(1-t_\lambda) \sim O(1)$, TROVO

$$\lambda \sim (1-t)^{-1}$$

$$\xi \sim (1-t)^{-1} \sim \frac{e^{2\beta}}{q}$$

CHE DIVERGE PER $\beta \rightarrow \infty$.

* NOTA: PUOI VEDERLO COSI'.

$$1-t \approx qe^{-2\beta} = qe^{-2\beta_c} e^{-2(\beta-\beta_c)} \approx qe^{-2\beta_c} (1-2(\beta-\beta_c))$$

QUINDI

$$(1-t) - (1-t)_c \approx \frac{-2qe^{-2\beta_c}}{\cos t} (\beta - \beta_c)$$

NOTA: ERIAMO

$$\vartheta_\lambda = \lambda^{\gamma_0} \cdot \vartheta$$

$$\xi(\vartheta_\lambda) = 1/\lambda \cdot \xi(\vartheta)$$

E SE ITERO ANCHE $\xi(\vartheta_\lambda)$, $\vartheta_\lambda \sim O(1)$ TROVO

$$\xi(\vartheta) \sim \lambda \sim \vartheta^{-1/\gamma_0} \equiv \vartheta^{-\gamma}$$

QUI $\gamma = 1$.

• APPROSSIMAZIONE DI MIGDAL-KADANOFF

IN $D > 1$, LA DECIMAZIONE GENERA NUOVE INTERAZIONI.

CONSIDERIAMO

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathcal{S}[\sigma]}$$

**

NOTA: VALE SEMPRE, NON SOLO SE $\langle \Delta \rangle = 0$. TRA L'ALTRO IN QUESTO CASO E' BANALE, BASTA GUARDARE LO SVILUPPO IN CUMULANTI:

$$1 + \frac{1}{2} \langle \Delta^2 \rangle + \dots \geq 1.$$

E UN FUNZIONALE $\Delta[\sigma]$ DEGLI SPIN CON VALORE DI ASPETTATIVA Nullo,

$$\langle \Delta[\sigma] \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \Delta[\sigma] e^{\mathcal{S}[\sigma]} = 0$$

VALE** PER $\Delta[\sigma]$ LA DISUGUAGLIANZA DI CONVESSITA'

$$\langle e^{\Delta[\sigma]} \rangle \geq e^{\langle \Delta[\sigma] \rangle}$$

(NON LA DIMOSTREMO).

NOTA: PARLANDO DI CAMPO MEDIO, SI ERA MOSTRATO CHE

$$\int d\mu e^{-\beta H} \geq \int d\mu e^{-\beta H_0} e^{-\beta \langle H - H_0 \rangle}$$

BASTA MANDARE $\beta \rightarrow -\beta$ E SCEGLIERE $H = \mathcal{S} + \Delta$, $H_0 = \mathcal{S}$.

INDI CHIAMO CON

$$Z_{\Delta} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\Delta[\sigma] + \Delta[\sigma]}$$

$$Z_{\Delta} \stackrel{(*)}{=} Z_{(s)} \langle e^{\Delta[\sigma]} \rangle_s = Z_{(s)} e^{\langle \Delta[\sigma] \rangle_s} = Z_{(s)} e^0 = Z_{(s)}$$

IN $(*)$ SI È MOLTIPLICATO E DIVISO PER $Z_{(s)} (= Z)$. SI È TROVATO

$$Z_{\Delta} = Z \quad (I)$$

* NOTA: CAPITO? OGNI LINK È UN BASTONCINO; QUELLI $\parallel \hat{\mu}$ RESTANO DOVE SONO, QUINDI IN DIREZIONE $\hat{\mu}$ USO LA DECIMAZIONE. QUELLI $\perp \hat{\mu}$ SI SPACCHIANO E SI SOVRAPPONGONO: LE LORO "FORZE" SI SOMMANO.

* LAVORIAMO SUL MODELLO DI POTTS IN DIMENSIONE D , IPERCUBICO. INTRODUCIAMO UNA TRASFORMAZIONE CHE TRATTI SEPARATAMENTE LE VARIE DIMENSIONI

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_D$$

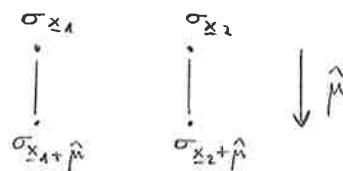
L'AZIONE È

$$S[\sigma] = \sum_{\underline{x}} \sum_{\mu=1}^D \beta_{\mu} (2\delta_{\sigma_{\underline{x}}, \sigma_{\underline{x}+\hat{\mu}}} - 1)$$

NOTA: AMMETTIAMO, CIOÈ, ACCOPPIAMENTI DIVERSI NELLE VARIE DIREZIONI. OCCORRE CHE QUI β_{μ} NON È LA TEMPERATURA; È L'ACCOPPIAMENTO, CIOÈ LA "FORZA" DI CIASCUN LEGAME (LINK) PARALLELO ALLA DIREZIONE $\hat{\mu}$.

USIAMO Δ PER "SPOSTARE" DEI LEGAMI: S' CONTERANNO MENO LEGAMI, MA RAFFORZATI. DEFINIAMOLO COSÌ:

$$\Delta \propto (2\delta_{\sigma_{\underline{x}_1}, \sigma_{\underline{x}_1+\hat{\mu}}} - 1) - (2\delta_{\sigma_{\underline{x}_2}, \sigma_{\underline{x}_2+\hat{\mu}}} - 1) \\ \langle (2\delta_{\sigma_{\underline{x}_1}, \sigma_{\underline{x}_1+\hat{\mu}}} - 1) - (2\delta_{\sigma_{\underline{x}_2}, \sigma_{\underline{x}_2+\hat{\mu}}} - 1) \rangle = 0$$

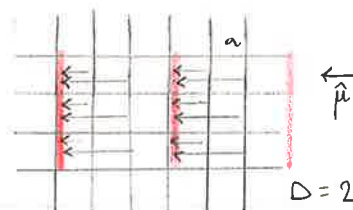


(DISCENDE DALL' INVARIANZA PER TRASLAZIONI). PROCEDIAMO IN QUESTO MODO:

1) SCELGO μ E SPOSTO I LINK PARALLELI A TUTTE LE $\nu \neq \mu$ PER CAMBIARE IL LATTICE SPACING DA a_{μ} A (λa_{μ}) IN DIREZIONE $\hat{\mu}$.

USANDO LUNGO $\hat{\mu}$ LA DECIMAZIONE ESATTA OTTENGO*

$$\left| \begin{array}{l} t(\beta_{\mu}^{(\lambda)}) = t(\beta_{\mu})^{\lambda} \quad (\text{DECIMAZIONE ESATTA}) \quad \text{PER LA DIREZIONE } \mu. \\ \beta_{\nu}^{(\lambda)} = \lambda \beta_{\nu} \rightarrow t(\beta_{\nu}^{(\lambda)}) = t(\lambda \beta_{\nu}) \quad \text{PER } \nu \neq \mu. \end{array} \right.$$



2) RIPETO IN TUTTE LE DIREZIONI PER AVERE $a \rightarrow (\lambda a)$.

ALLA FINE DEL PROCESSO AVRO' ANCORA UN RETICOLO IPERCUBICO, MA CON ACCOPPIAMENTI DIVERSI. È UNA TRASFORMAZIONE ASIMMETRICA:

TRATTA IN MODO DIVERSO LE VARIE DIREZIONI (MA NON LE MISCHIA).

SI DICONO RELAZIONI DI MIGDAL-KADANOFF*

$$t(\lambda^{D-\mu} \beta_\mu(\lambda)) = [t(\lambda^{\mu-1} \beta_\mu)]^\lambda \quad 1 \leq \mu \leq D \quad (II)$$

VEDIAMO PERCHÉ. SE $\mu=1$, LA PRIMA VOLTA TRASFORMO t ,

$$t(\beta_1(\lambda)) = t(\beta_1)^\lambda \quad (III)$$

E POI TRASFORMO β PER $(D-1)$ VOLTE:

$$\beta_1' = \lambda \beta_1^{(0)}(\lambda)$$

$$\beta_1'' = \lambda \beta_1'(\lambda) = \lambda^2 \beta_1^{(0)}(\lambda)$$

...

(III)

$$\Rightarrow t(\lambda^{-1} \beta_1') = t(\beta_1)^\lambda$$

$$\Rightarrow t(\lambda^{-2} \beta_1'') = t(\beta_1)^\lambda$$

$$\Rightarrow t(\lambda^{1-D} \beta_1(\lambda)) = t(\beta_1)^\lambda$$

SE PRENDO INVECE $\mu=2$, NEL PRIMO PASSO TRASFORMO β ,

$$t(\beta_2(\lambda)) = t(\lambda \beta_2)$$

E NEL SECONDO USO LA DECIMAZIONE,

$$t(\beta_2(\lambda)) = t(\lambda \beta_2)^\lambda$$

*NOTA: SI TRATTA DI RELAZIONI APPROSSIMATE PERCHÉ ABBIAMO IDENTIFICATO Z CON Z_Δ , QUANDO LE DUE ERANO INVECE LEGATE DALLA DISUGUAGLIANZA (I). L'ORDINE $\mu=1 \dots D$ È QUELLO CON CUI HO APPLICATO L'ALGORITMO.

NEI SUCCESSIVI $(D-2)$ PASSI METTO UN λ^{-1} NEW ESPONENTE A SINISTRA.

MIGDAL-KADANOFF SUL MODELLO DI ISING

METTIAMOCI NEL MODELLO DI ISING

$$D=2, \quad q=2, \quad \lambda=2$$

E CHIAMIAMO

$$\gamma_1 = e^{-2\beta_1}$$

$$\gamma_2 = t(\beta_2) = \frac{1 - e^{-2\beta_2}}{1 + e^{-2\beta_2}}$$

LE RELAZIONI (II) DI M-K CI DICONO ALLORA CHE

$$\begin{cases} t\left(\frac{\beta_1}{2}\right) = t(\beta_1)^2 \\ t(\beta_2) = t(2\beta_2)^2 \end{cases}$$

OVVERO

$$\left\{ \frac{1 - e^{-\beta_1}}{1 + e^{-\beta_1}} = \left(\frac{1 - e^{-2\beta_1}}{1 + e^{-2\beta_1}} \right)^2 \right. \quad (\text{Ia})$$

$$\left\{ \frac{1 - e^{-2\beta_2}}{1 + e^{-2\beta_2}} = \left(\frac{1 - e^{-4\beta_2}}{1 + e^{-4\beta_2}} \right)^2 \right. \quad (\text{Ib})$$

VERIFICHIAMO CHE LA TRASFORMAZIONE DI M-K SI PUO' ESPRIMERE COME

$$\begin{cases} \gamma_\mu (\lambda=2) = F_{\lambda=2}(\gamma_\mu) \\ F_{\lambda=2}(\gamma)_{q=2} = \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \right)^2 \end{cases} \quad \mu=1,2$$

OVVERO CHE QUESTI DUE OGGETTI SODDISFANO LA STESSA RELAZIONE.

VEDIAMOLO: SE $\mu=2$, CHIAMANDO $t = \gamma_2 = t(\beta_2)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 &= \left\{ 2 \cdot \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}} \right)^2 \right]^{-1} \right\}^2 \\ &= 4 \left\{ \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}} \cdot (1 + e^{-2\beta})^2 \cdot \left[(1 + e^{-2\beta})^2 + (1 - e^{-2\beta})^2 \right]^{-1} \right\}^2 \\ &= 4 \left\{ \frac{(1 - e^{-2\beta})(1 + e^{-2\beta})}{2(1 + e^{-2\beta})} \right\}^2 = \left(\frac{1 - e^{-4\beta}}{1 + e^{-4\beta}} \right)^2 \end{aligned}$$

QUINDI ABBIAMO TROVATO, PER LA SECONDA COMPONENTE,

$$\gamma_2 = t(\beta_2) \stackrel{(\text{Ib})}{=} \left(\frac{1 - e^{-4\beta_2}}{1 + e^{-4\beta_2}} \right)^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 = F_{\lambda=2}(\gamma_2)$$

PER LA PRIMA COMPONENTE, $\mu=1$, VOGLIAMO

$$t\left(\frac{\beta_1}{2}\right) = t(\beta_1)^2 \quad \gamma_1 \equiv e^{-2\beta_1} \equiv \gamma$$

$$\frac{1 - \sqrt{\gamma}}{1 + \sqrt{\gamma}} = \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2$$

NOTA: HO USATO LA (Ia).

$$(1 - \sqrt{\gamma}) = (1 + \sqrt{\gamma}) \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2$$

$$1 - \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 = \sqrt{\gamma} \left[1 + \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \right]$$

$$\frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} = 2\sqrt{\gamma} \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma)^2}$$

$$16\gamma^2 = 4\gamma (1+\gamma^2)^2 \Rightarrow \gamma = \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \right)^2$$

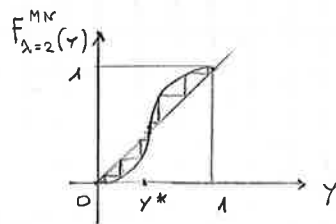
L'EQUAZIONE CHE DETERMINA γ_1 HA CIOE' LA STESSA FORMA (E GLI STESSI PUNTI FISSI) DI QUELLA CHE DETERMINA γ_2 .

★ CERCHIAMO QUINDI IL PUNTO FISSO

$$\gamma^* = F_{\lambda=2}^{MK}(\gamma^*)$$

IN 0 E 1 HO DUE PUNTI FISSI ATTRATTIVI ($T=0$ E $T=\infty$); NE HO POI UNO REPULSIVO IN

$$\gamma^* = 0.2956$$



VICINO AL PUNTO FISSO, POSSO LINEARIZZARE

$$(\gamma_\lambda - \gamma^*) \simeq F'_\lambda(\gamma^*)(\gamma - \gamma^*)$$

RICORDIAMO CHE, VICINO A $\lambda = 1$,

$$\vartheta_\lambda = \lambda^{\gamma_0} \vartheta = \lambda^{1/2} \vartheta$$

QUINDI

$$F'_\lambda(\gamma^*) = \lambda^{1/2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\log \lambda}{\log F'_\lambda(\gamma^*)}$$

NOTA: E QUESTO CHE CI AZZECCA CON IL COEFFICIENTE DI $\vartheta \sim (T-T_c)$? BASTA SVILUPPARE LA $\gamma(\vartheta)$ VICINO A $\vartheta=0$ (LE $\gamma(\vartheta)$ DEVONO AVERE IL TERMINE LINEARE IN ϑ NEL LORO SVILUPPO). AD ESEMPIO
 $\gamma_1 = e^{-2\beta_1} = e^{-2\beta_c} e^{-2(\beta_1 - \beta_c)} \simeq e^{-2\beta_c} [1 - 2(\beta_1 - \beta_c)]$
 $\gamma_1 - \gamma_1^* \simeq 2e^{-2\beta_c} (\beta_c - \beta_1)$
 L'IMPORTANTE E' CHE NON CAMBI L'ESPONENTE DI $\vartheta \sim (\beta_c - \beta)$

CHE POSSO MISURARE NUMERICAMENTE. SI TROVANO, IN SINTESI,

$$q=2, D=2, \lambda=2$$

$$\gamma^* \simeq 0.2956$$

$$F'_2(\gamma^*) \simeq 1.6786$$

$$\gamma \simeq 1.3383$$

CHE NON E' UN GRANONÉ CONFRONTATO CON LA SOLUZIONE DI ONSAGER

$$\gamma_{\text{Ons}} = 1$$

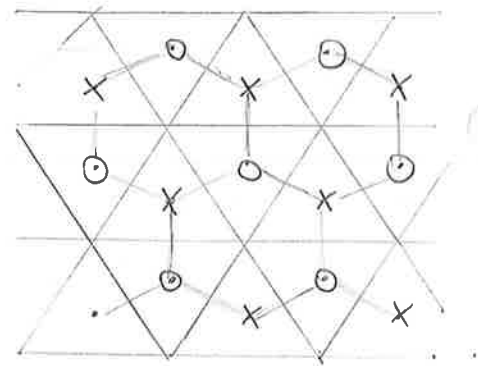
ANCHE MANDANDO $\lambda \rightarrow 1$, NON FA MOLTO MEGLIO:

$$\gamma_1 \simeq 1.327$$

RESTA COMUNQUE UN' APPROSSIMAZIONE UTILE.

• REGOLA DELLA MAGGIORANZA, PT. 1

ISING $q=2, D=2$. RETICOLO TRIANGOLARE.
OGNI SITO HA 6 VICINI. È UN RETICOLO NON
SELF-DUALE: IL SUO DUALE È UN RETICOLO
ESAGONALE CON TRE PRIMI VICINI PER SITO.
CHIAMANDO



$$C_2 = \cosh(2\beta)$$

$$S_2 = \sinh(2\beta)$$

SI TROVA (MA NOI NON LO FAREMO)

$$F(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2\theta}{(2\pi)^2} \ln \left\{ C_2^3 + S_2^3 - S_2 [\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2)] \right\}$$

$$\beta_c = \frac{1}{4} \ln 3 \approx 0.2747$$

MI ASPETTO CHE GLI ESPONENTI CRITICI SIANO GLI STESSI CHE IN UN
RETICOLO QUADRATO (UNIVERSALITÀ).

VI È UNA DUALITÀ TRA TRIANGOLARE/ESAGONALE (CHE NON
APPROFONDIREMO) t.c.

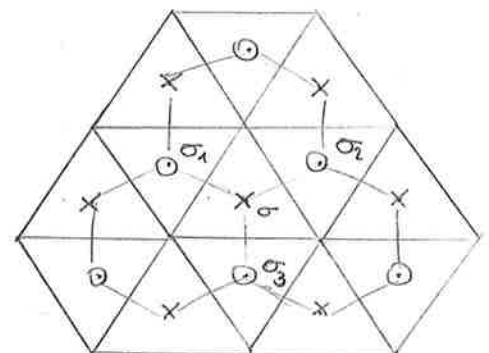
$$e^{-2\beta'} = \tanh(\beta)$$

$$\beta'_{cs} = -\frac{1}{2} \ln \tanh(\beta_{th})$$

USEREMO, SUL RETICOLO ESAGONALE, LA DECIMAZIONE ESATTA

STAR TRIANGLE: LO DIVIDO COSÌ IN DUE
SOTTORETICOLI TRIANGOLARI 'O' E 'X'.

LE 'X' INTERAGISCONO SOLO TRA LORO E
COSÌ LE 'O'. POSSO ELIMINARE UNO DEI
DUE SOTTORETICOLI SOMMANDO SUGLI SPIN
CHE VIVONO SU QUEL RETICOLO:



$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta' \sigma (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}$$

SE SOMMO SU σ , DOBBLIO ATROVARE IL MODELLO TRIANGOLARE INIZIALE:

$$A e^{\beta''(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}$$

NOTA: QUESTA È LA FORMA CHE AVREBBE IL PEZZO DI Z RIFERITO A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. β'' È IL COUPLING SUL RETICOLO TRIANGOLARE FINALE.

RICORDANDO CHE

$$e^{\beta'\sigma\sigma'} = C'(1 + t'\sigma\sigma')$$

CALCOLIAMO

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta'\sigma(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} = \frac{C'^3}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} (1 + t'\sigma\sigma_1)(1 + t'\sigma\sigma_2)(1 + t'\sigma\sigma_3)$$

$$= C'^3 [1 + t'^2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] = C'^3 + C'S'^2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

PERCHÉ LA SOMMA AMMAZZA LE POTENZE DISPARI DI σ_i .

INVECE

$$e^{\beta''(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} = C''^3 (1 + t''\sigma_1\sigma_2)(1 + t''\sigma_1\sigma_3)(1 + t''\sigma_2\sigma_3)$$

$$= C''^3 [1 + (t'' + t''^2)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) + t''^3]$$

$$= (C''^3 + S''^3) + (C''^2 S'' + C'' S''^2)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

ABBIAMO COSÌ TROVATO

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta'\sigma(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} = C'^3 [1 + t'^2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

$$A e^{\beta''(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} = A(C''^3 + S''^3) \left[1 + \frac{C''^2 S'' + C'' S''^2}{C''^3 + S''^3} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]$$

RICHIEDO CHE SIANO UGUALI, COE' CHE

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta'\sigma(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} = A e^{\beta''(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}$$

CON UN PO' DI CONTI, USANDO LA RELAZIONE DI DUALITA'

$$e^{-2\beta'} = \tanh(\beta)$$

TROVO

$$\left\{ \begin{aligned} e^{4\beta''} &= \frac{\cosh 3\beta'}{\cosh \beta'} = 2\cosh(2\beta') - 1 = 2 \frac{\cosh(2\beta)}{\sinh(2\beta)} - 1 \end{aligned} \right. \quad (Ia)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A^4 &= \cosh(3\beta') (\cosh \beta')^3 \end{aligned} \right. \quad (Ib)$$

LA (Ia) SI PUO' RISOGLIVERE COME

$$(e^{4\beta} - 1)(e^{4\beta''} - 1) = 4$$

(Ic)

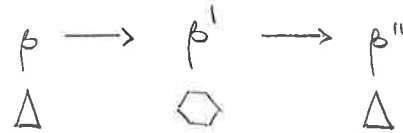
$$\beta_c = \beta_c'' = \frac{1}{4} \ln 3$$

$\beta \rightarrow$ TRIANGOLARE

$\beta' \rightarrow$ ESAGONALE (DUALITA')

$\beta'' \rightarrow$ TRIANGOLARE (DECIMAZIONE)

NOTA: QUESTO E' IL PUNTO FISSO DELLA TRASFORMAZIONE APPENA TROVATA, LA (Ic). COINCIDE CON IL PUNTO CRITICO DEL MODELLO DI PARTENZA (SONO LO STESSO MODELLO!).



SONO PASSATO DALLA (Ia) ALLA (Ic) COSI':

$$(\tanh \beta')^2 = \frac{C''^2 S'' + C'' S''^2}{C''^3 + S''^3}$$

NOTA: SONO CONTI BRUTTI E PHINI DI ANIMA, FATE SE PROPRIO VOI; RICORDA CHE $(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

$$\frac{1 - 2e^{-2\beta'} + (e^{-2\beta'})^2}{1 + 2e^{-2\beta'} + (e^{-2\beta'})^2} = \frac{e^{4\beta''} - 1}{e^{4\beta''} + 3}$$

USANDO ORA

$$e^{-2\beta'} = \tanh \beta$$

TROVO

$$e^{4\beta} = \frac{e^{4\beta''} + 3}{e^{4\beta''} - 1}$$

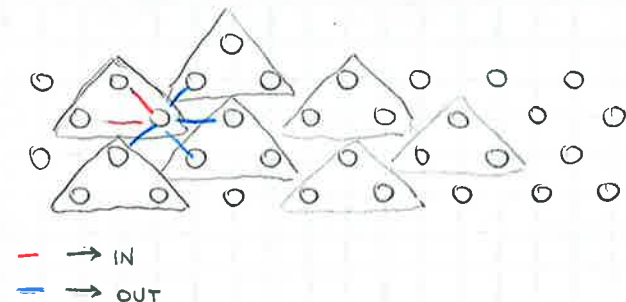
E OTTENGO LA (Ic) SOTTRAENDO 1 IN ENTRAMBI I MEMBRI.

REGOLA DELLA MAGGIORANZA, PT.2

USIAMO ANCORA LA REGOLA DELLA
MAGGIORANZA SU DI UN RETICOLO

TRIANGOLARE; PER OGNI GRUPPO DI 3
SPIN, NE CREO UNO NUOVO

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \mu_b$$



$$\mu = \text{sign}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \pm 1$$

CHE E' ANCORA UNA VARIABILE DI 1 SING. QUI

$$\lambda = \sqrt{3}$$

NOTA: SIAMO IN D=2 E DIVIDIAMO PER 3 IL
NUMERO DI SITI.

E DATA

$$S[\sigma] \rightarrow Z$$

VOGLIAMO PASSARE A $S[\mu]$ CON QUESTA TRASFORMAZIONE APPROSSIMATA:

$$Z = \sum_{\{\mu_b = \pm 1\}} e^{S[\mu]}$$

$$= \sum_{\{\mu_b = \pm 1\}} \left\{ \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \left(\prod_b \delta_{\text{sign}(\sigma_1^b + \sigma_2^b + \sigma_3^b), \mu_b} \right) \cdot e^{S[\sigma]} \right\}$$

FIN QUI ESATTO, MA DOVREMO APPROSSIMARE SE VOGLIAMO SAPERLO
CALCOLARE.

* PRENDIAMO UN BLOCCO CON 3 SPIN (UN SOLO μ), CON UN TOTALE DI
 $2^3 = 8$

CONTRIBUTI IN Z :

$$4 \text{ TRIPLE} \rightarrow \mu = +1$$

$$4 \text{ TRIPLE} \rightarrow \mu = -1$$

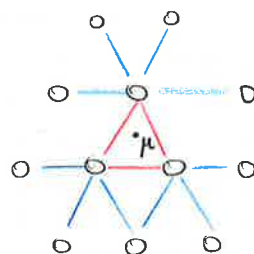
μ E' UGUALE AL VALORE DELLA MAGGIORANZA DELLE σ NEL BLOCCO.

APPROSSIMIAMO $S[\sigma]$ DIVIDENDOLA INNANZITUTTO NELLE SUE PARTI DI
INTERAZIONE NEL BLOCCO "IN" O "OUT":

$$S[\sigma] = S_0[\sigma] + S_1[\sigma]$$

(IN) (OUT)

TRATTEREMO $S_1[\sigma]$ PERTURBATIVAMENTE.



INIZIAMO CALCOLANDO $Z_0[\mu]$, DEFINITA COME

$$S_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \beta(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

NOTA: BASTA OSSERVARE CHE

$$\sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} (\cdot) = \prod_{\alpha} \sum_{\{\sigma_{\alpha}\}} (\cdot)$$

$$Z_0[\mu] \equiv \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} \delta_{\text{sign}(\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha} + \sigma_3^{\alpha}), \mu_{\alpha}} e^{-S_0[\sigma]}$$

$$= \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} \left\{ \delta_{\mu, 1} e^{\beta(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} + \delta_{\mu, -1} e^{\beta(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \right\}_{(\alpha)}$$

GUARDIAMOLO PER CASI:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = +1 \rightarrow e^{3\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = +1 \text{ (2 PERM.)} \rightarrow e^{-\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1 \rightarrow e^{3\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = -1 \text{ (2 PERM.)} \rightarrow e^{-\beta}$$

PERCIO'

$$Z_0[\mu] = \prod_{\alpha} \left[\delta_{\mu_{\alpha}, 1} (e^{3\beta} + 3e^{-\beta}) + \delta_{\mu_{\alpha}, -1} (e^{3\beta} + 3e^{-\beta}) \right]$$

$$= \prod_{\alpha} (e^{3\beta} + 3e^{-\beta}) = (e^{3\beta} + 3e^{-\beta})^{N/3}$$

DOVE N E' IL NUMERO DI SPIN DEL RETICOLO.

SCHIVEREMO

$$\langle \cdot \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} \delta_{\mu_{\alpha}, \text{sign}(\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha} + \sigma_3^{\alpha})} e^{S_0[\sigma]} (\cdot)$$

NOI STIAMO CERCANDO DI CALCOLARE $S'[\mu]$ CHE E' DEFINITA DA

$$e^{S'[\mu]} = \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{\alpha} \delta_{\mu_{\alpha}, \text{sign}(\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha} + \sigma_3^{\alpha})} e^{S[\sigma]} \right) = Z_0 \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{\alpha} \delta_{\mu_{\alpha}, \text{sign}(\cdot)} e^{S_0[\sigma]} e^{S_1[\sigma]} \right)$$

$$= Z_0 \langle e^{S_1[\sigma]} \rangle_0$$

DOVE

$$Z_0 = (e^{3\beta} + 3e^{-\beta})^{N/3}$$

APPROSSIMIAMO ADORA

$$\log \langle e^{S_1} \rangle \simeq \log \left(1 + \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle S_1^2 \rangle + \dots \right)$$

$$\simeq \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle S_1^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle S_1 \rangle^2 + \dots \simeq \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} (\langle S_1^2 \rangle - \langle S_1 \rangle^2)$$

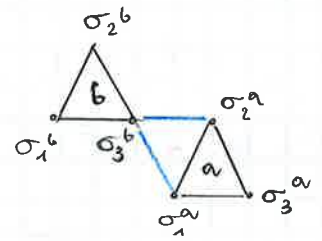
SE TENIAMO SOLO IL PRIMO TERMINE DELL' ESPANSIONE IN CUMULANTI,

$$\langle e^{\sigma_1} \rangle_0 \approx e^{\langle \sigma_1 \rangle_0}$$

I BLOCCHI AVRANNO SOLO INTERAZIONI A PRIMI VICINI.

NEL DISEGNO A FIANCO, HO GIÀ USATO LE

INTERAZIONI INTERNE PER CALCOLARE Z_0 .



L'INTERAZIONE TRA I DUE BLOCCHI FATTORIZZA NEL PRODOTTO DI TERMINI

$$\beta \langle (\sigma_1^a + \sigma_2^a) \sigma_3^b \rangle_0 = \beta (\langle \sigma_1^a \rangle_0 + \langle \sigma_2^a \rangle_0) \langle \sigma_3^b \rangle_0 \quad (I)$$

PERCHÉ Z_0 È FATTORIZZATA SUI BLOCCHI. CALCOLIAMOCI ALLORA

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^a \rangle_0 &= \frac{1}{Z_0^{(a)}} \sum_{\{\sigma^a\}} \delta_{\mu_a, \text{sign}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a)} e^{\beta_0[\sigma]} \cdot \sigma_1^a \\ &= (e^{3\beta} + 3e^{-\beta})^{-1} \sum_{\{\sigma^a\}} \delta_{\mu_a, \text{sign}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a)} e^{\beta_0[\sigma]} \cdot \sigma_1^a \end{aligned} \quad (II)$$

(LA $Z_0^{(a)}$ È SOLO QUELLA DEL PEZZETTO CHE HO DISEGNATO, POI NE PRENDERO' IL PRODOTTO PER AVERE IL SISTEMA TOTALE*). STUDIANDOLO

ANCORA PER CASI,

$$e^{3\beta} \rightarrow \mu e^{3\beta}$$

$$e^{-\beta} \rightarrow 2\mu e^{-\beta} - \mu e^{-\beta} = \mu e^{-\beta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = +1$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = +1$$

PERCHÉ

$$\langle \sigma_1^a \rangle_0 = \frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \mu_a$$

NEI 4 CASI POSITIVI, TROVO CIOÈ

$$e^{3\beta} + e^{-\beta}$$

CHE SCRIVO COME $(e^{3\beta} + e^{-\beta})\mu$. NEI 4 CASI NEGATIVI HO

$$-e^{3\beta} - e^{-\beta}$$

CHE SCRIVO COME $(e^{3\beta} + e^{-\beta})\mu$, CON $\mu = -1$.

LA NUOVA AZIONE CONTERRA' IL NUOVO ACCOPPIAMENTO

$$\beta_a \mu_a \mu_b$$

$$\beta_a = \beta_b = 2 \left(\frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \right)^2 \beta$$

(IL FATTORE 2 SEGUE DALLA (I)).

*NOTA: INFATTI NELLA (II) NON HO MESSO LA Π .
 TRA L'ALTRO QUANDO P FATTORIZZA NON SEGREVE
 NEMMENO MEDIARE SU TUTTO IL SISTEMA (VEDI
 CAMPO MEDIO).

$\beta_{\lambda=\sqrt{3}}$ COSÌ TROVATO È IL FLUSSO DELL'ACCOPIAMENTO PER IL MODELLO DI ISING TRIANGOLARE.

CHIAMIAMO IL PUNTO ASSO, t.c.

$$\beta_{\lambda=\sqrt{3}} \equiv \beta \equiv \beta^*$$

DOE'

NOTA: NON SONO TUTTI QUESTI PASSAGGI.

$$\beta^* = 2\beta^* \left(\frac{e^{3\beta^*} + e^{-\beta^*}}{e^{3\beta^*} + 3e^{-\beta^*}} \right)^2$$

$$\frac{e^{3\beta^*} + e^{-\beta^*}}{e^{3\beta^*} + 3e^{-\beta^*}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e^{3\beta^*} + e^{-\beta^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{3\beta^*} + 3e^{-\beta^*})$$

$$(e^{2\beta^*})^2 + 1 = \sqrt{\frac{1}{2}} [(e^{2\beta^*})^2 + 3]$$

$$(e^{2\beta^*})^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1$$

$$e^{2\beta^*} = \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right)^{1/2}$$

$$\beta^* = \frac{1}{4} \log \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{4} \log (1 + 2\sqrt{2}) \approx 0.336$$

MENTRE SAPPIAMO CHE

$$\beta_c^{(\text{EXACT})} \approx 0.275$$

★ PER CALCOLARE β , ESPANDO ATTORNO AL PUNTO CRITICO (CHE ORA CONOSCO) LA RELAZIONE

$$\beta_{\lambda=\sqrt{3}} = 2\beta \left(\frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \right)^2 = 2((\beta - \beta^*) + \beta^*) \left(\frac{e^{3(\beta - \beta^*) + 3\beta^*} + e^{-(\beta - \beta^*) - \beta^*}}{\dots} \right)^2$$

COSÌ DA LINEARIZZARLA. SI TROVA

$$(\beta_{\lambda} - \beta^*) \approx (\beta - \beta^*) [1 + 2\beta^* (8 - 5\sqrt{2})] + \dots$$

RICORDANDO CHE

$$\vartheta_{\lambda=\sqrt{3}} = \lambda^{\gamma_0} \cdot \theta \Big|_{\lambda=\sqrt{3}} = \lambda^{1/2} \theta \Big|_{\lambda=\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^{1/2} \cdot \theta$$

BASTA PORRE

$$(\sqrt{3})^{1/2} \theta = \theta [1 + 2\beta^*(8 - 5\sqrt{2})]$$

DA CUI

$$\gamma \simeq 1.134$$

DA CONFRONTARSI CON $\gamma^{(\text{EXACT})} = 1$.

VOGLIAMO CALCOLARE

$$Z[h] = \int \delta\varphi e^{-\beta H[\varphi]} = \int \delta\varphi e^{-S[\varphi] + \int d^D x h(x)\varphi(x)} \quad (I)$$

$$S[\varphi] = \int d^D x \left\{ \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2\Lambda^2} (\partial^2\varphi)^2 \right\} \quad (II)$$

COMINCIAMO FATTORIZZANDO LA DIPENDENZA DALLA SORGENTE h : USO UN METODO STANDARD IN TEORIA DEI CAMPI. DALLA (II), RICAVO LE EQUAZIONI DEL MOTO TRAMITE LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

$$\partial_\nu \frac{\delta S}{\delta(\partial_\nu \varphi)} = \frac{\delta S}{\delta \varphi} \Rightarrow \left(-\partial^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} \partial^4 \right) \varphi = 0 \quad (III)$$

DOVE HO INTEGRATO PER PARTI SUL VOLUME INFINITO, NOTANDO CHE

$$\int \partial^2 \varphi \partial^2 \varphi = - \int \partial^3 \varphi \partial \varphi = \int (\partial^4 \varphi) \cdot \varphi$$

PRIMA DI PRENDERE LA VARIAZIONE DI $S[\varphi]$. ORA CERCO IL PROPAGATORE:

$$\left(-\partial_x^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} \partial_x^4 \right) G_\Lambda(x-z) = \delta^D(x-z) \quad (IV)$$

TROVO LA SOLUZIONE PASSANDO IN TRASFORMATTA DI FOURIER,

$$G_\Lambda(x-z) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{G}_\Lambda(p) e^{-i p(x-z)}$$

$$\left(p^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} p^4 \right) \tilde{G}_\Lambda(p) = 1 \Rightarrow \tilde{G}_\Lambda(p) = \frac{1}{p^2 + \mu + \frac{p^4}{\Lambda^2}} \quad (V)$$

ORA APPLICO ALL'INTEGRALE (I) IL METODO DEL PUNTO DI SELLA. SIA $\tilde{\varphi}$ IL CAMPO CHE SODDISFA

$$\left(-\partial^2 + \mu + \frac{1}{\Lambda^2} \partial^4 \right) \tilde{\varphi} = h \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \int d^D y G_\Lambda(x-y) h(y) \quad (VI)$$

CHE HO RISOLTO CON LA TECNICA DELLA FUNZIONE DI GREEN. PONGO QUINDI

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \eta$$

COSÌ DA CAMBIARE VARIABILI E RISCRIVERE $Z[h]$ IN TERMINI DI

$$\begin{aligned} Z[h] &= \int \delta\eta e^{-S[\tilde{\varphi}+\eta] + \int d^D x h(x)[\tilde{\varphi}(x)+\eta(x)]} \\ &= \underbrace{\int \delta\eta e^{-S[\eta]}}_{\equiv Z[h=0]} \cdot e^{+\frac{1}{2} \int d^D x h(x) \tilde{\varphi}(x)} = Z[0] e^{\frac{1}{2} \int d^D x d^D y h(x) G_\Lambda(x-y) h(y)} \quad (VII) \end{aligned}$$

LA (VII) SI OTTIENE CON QUALCHE PASSAGGIO IN CUI BASTA APPLICARE LA DEFINIZIONE DI $\tilde{q}$.

AI FINI DEL CALCOLO DI VALORI MEDI, HO FINITO: $Z[0]$ SARA' UN SEMPLICE FATTORE DI NORMALIZZAZIONE CHE SI SEMPLIFICA QUANDO CERCO

$$\langle A \rangle = \frac{\int \delta\varphi e^{-S} A[\varphi]}{\int \delta\varphi e^{-S}}$$

$Z[0]$ NON E', AD E', FISICAMENTE OSSERVABILE. TUTTAVIA ESSA CONTRIBUISCE A

$$F[h] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[h] = -\frac{1}{2\beta} \int d^D x d^D y h(x) G_\Lambda(x-z) h(z) - \frac{1}{\beta} \ln Z[0] \quad (\text{VIII})$$

CHE CI STA, PERCHÉ COME SAPPIAMO L'ENERGIA E' DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE. VEDREMO CHE E' LEI A DIVERGERE; IL SUO CALCOLO E' ISTRUTTIVO E UN PO' DELICATO.

• TECNICA DEL DETERMINANTE FUNZIONALE

(BINNEY, APPENDICE L)

SIA DATO L'INTEGRALE FUNZIONALE GAUSSIANO

$$G = \int \delta\phi e^{-\int d^D x d^D y \phi(x) M(x,z) \phi(z)} \quad (\text{IX})$$

$M(x,z)$ E' L'ANALOGO, IN DIMENSIONE INFINITA, DI UNA FORMA BILINEARE CHE AGISCE SUI VETTORI $\phi(x), \phi(z)$. SUPPOSTO CHE ESSA SIA REALE E SIMMETRICA, E RESTRINGENDO L'INTEGRAZIONE IN $d^D x$ E $d^D y$ NELLA (IX) A UNA REGIONE FINITA L^D DELLO SPAZIO, POSSO TROVARNE UN SET DISCRETO DI AUTOFUNZIONI

$$\int d^D y M(x,z) \psi_m(z) = \lambda_m \psi_m(x) \quad \hat{M} \underline{\psi}_m = \lambda_m \underline{\psi}_m, \quad \lambda_m \in \mathbb{R}$$

ESPANDENDO $\phi(x)$ IN QUESTA BASE ORTONORMALE,

$$\underline{\phi} = \sum_m \phi_m \underline{\psi}_m \quad \phi_m = \int d^D x \psi_m^*(x) \phi(x) \equiv (\underline{\psi}_m, \underline{\phi})$$

POSSIAMO RISOVRIVERE

$$\int d^D x d^D y \phi(x) M(x,z) \phi(z) = (\underline{\phi}, \hat{M} \underline{\phi}) = \sum_{\alpha\beta} (\phi_\alpha \underline{\psi}_\alpha, \phi_\beta \hat{M} \underline{\psi}_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \phi_\alpha^* \phi_\beta \lambda_\beta (\underline{\psi}_\alpha, \underline{\psi}_\beta) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \phi_\alpha^2 \quad (\text{X})$$

RESTA DA SPECIFICARE SU CHE FUNZIONI STIAMO INTEGRANDO QUANDO PRENDIAMO $\int \delta\phi$:

SE INTEGRIO SU TUTTE LE FUNZIONI OVVIAMENTE DIVERGE TUTTO, INVECE FERMIAMOCI A

$$\phi(x) = \sum_{m=1}^N \phi_m \psi_m(x)$$

E CALCOLIAMO L'INTEGRALE (NUMERICO)

$$G_N = \int d\phi_1 \dots d\phi_N \exp \left[- \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha}^2 \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} G$$

$$= \frac{\pi^{N/2}}{\left(\prod_{m=1}^N \lambda_m \right)^{1/2}} = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{(\det \hat{M})_N}} \quad (\text{XI})$$

CON PROCEDIMENTI DEL TUTTO ANALOGHI, POTREI VERIFICARE CHE INSERENDO UN CAMPO h

$$G[h] = \int \delta\phi e^{-\int d^D x d^D y \phi(x) M(x, y) \phi(y) + \int d^D x h(x) \phi(x)}$$

$$G_N[h] = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{(\det \hat{M})_N}} e^{\sum_{\alpha=1}^N \frac{h_{\alpha}^2}{4\lambda_{\alpha}}} = G_N[0] e^{\sum_{\alpha=1}^N \frac{h_{\alpha}^2}{4\lambda_{\alpha}}}$$

OSSIA CHE LA DIPENDENZA DAL CAMPO ESTERNO h FATTOORIZZA. SI APPLICA QUANTO OSSERVATO PRIMA: I VALORI MEDI DELLE OSSERVABILI SONO BEN DEFINITI ANCHE PER $N \rightarrow \infty$ (A PATTO CHE I COEFFICIENTI DI FOURIER $h_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, IL CHE È VERO PER CAMPI FISICI), PERCHÉ LO È IL RAPPORTO $G_N[h]/G_N[0]$.

CALCOLO DI $Z[0]$

VOGLIAMO CALCOLARE

$$Z[0] = \int \delta\varphi e^{-\mathcal{S}[\varphi]} = \int \delta\varphi e^{-\int d^D x \cdot \frac{1}{2} \left\{ \mu \varphi^2 + (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{\Lambda^2} (\partial^2 \varphi)^2 \right\}} \quad (\text{XII})$$

PRIMA DI TUTTO LO PORTIAMO NELLA FORMA DI UN INTEGRALE GAUSSIANO:

$$Z[0] = \int \delta\varphi e^{-\frac{1}{2} \int d^D x d^D y \varphi(y) \left[\delta(x-y) \cdot \left(\mu - \partial_x^2 + \frac{1}{\Lambda^2} \partial_x^4 \right) \right] \varphi(x)} = \int \delta\varphi e^{-\frac{1}{2} (\varphi, \hat{M} \varphi)}$$

DOVE HO INTEGRATO PER PARTI QUA E LÀ. RICONOSCIAMO COSÌ

$$M(x, y) = \delta(x-y) \left(\mu - \partial_x^2 + \frac{1}{\Lambda^2} \partial_x^4 \right)$$

SI NOTI CHE È LO STESSO OPERATORE DIFFERENZIALE TROVATO NELLA (III)

DAVE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE: SAPPIAMO TUTTO DI LUI. TRA L'ALTRO È

UN OPERATORE LINEARE, QUINDI È IMMEDIATO TROVARE IL SUO SPETTRO:

$$\Psi_k(x) = e^{ik \cdot x} \quad \lambda_k = \mu + k^2 + \frac{k^4}{\Lambda^2} = \left[\tilde{G}_\Lambda(k) \right]^{-1} \quad (\text{XIII})$$

(MOLTIPLICARE UN OPERATORE $\mathcal{L}_x$ PER $\delta(x-y)$ IN GENERE È UN BUON MODO PER RENDERSI MATRICIALE)

LAVORARE SUL VOLUME FINITO L^D (CON CONDIZIONI PERIODICHE) RENDE DISCRETO LO SPETTRO: LE COMPONENTI DI $\underline{k}$ SONO MULTIPLI INTERI DI $2\pi/L$ (MA CO' NON VUOL DIRE CHE SONO IN NUMERO FINITO). INVECE DI PRENDERNE N , FISSO UN CUTOFF:

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{L^D} \sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \tilde{\phi}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \tilde{\phi}(\underline{k}) \psi_{\underline{k}}(\underline{x})$$

FISSARE COSI' UN CUTOFF ENERGETICO Λ È EQUIVALENTE A INSERIRE IL REGOLATORE $\frac{1}{\Lambda^2} (\partial^2 \psi)^2$ NELLA LAGRANGIANA, COME NOI ABBIAMO FATTO ALL'INIZIO. DALLA (XI),

$$\int d\underline{x} d\underline{z} \phi(\underline{z}) M(\underline{k}, \underline{z}) \phi(\underline{x}) = \frac{1}{V^2} \sum_{\underline{k}, \underline{q}}^{(n)} \tilde{\phi}^*(\underline{k}) \tilde{\phi}(\underline{q}) \lambda_{\underline{q}} \underbrace{(\psi_{\underline{k}}, \psi_{\underline{q}})}_{= V \delta_{\underline{k}, \underline{q}}} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}}^{(n)} |\tilde{\phi}(\underline{k})|^2 \lambda_{\underline{k}} \quad (\text{XIV})$$

IN ANALOGIA ALLA (XII), POSSIAMO CALCOLARE

$$Z[0] = \int \delta \psi e^{-S[\psi]} \rightarrow Z_{\Lambda}[0] = \prod_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \int d\tilde{\psi}(\underline{k}) e^{-S[\psi]}$$

L'UNICO INGHIPPO È CHE $\psi(\underline{x})$ È REALE, QUINDI $\tilde{\psi}(-\underline{k}) = \tilde{\psi}^*(\underline{k})$ E SE FACCIAMO COSI' STO INTEGRANDO SU SOLTANTO METÀ DEI GRADI DI LIBERTÀ'. DIVIDENDO PERÒ

$$\tilde{\psi}(\underline{k}) = \tilde{\psi}_R(\underline{k}) + i \tilde{\psi}_I(\underline{k}) \Rightarrow |\tilde{\psi}(\underline{k})|^2 = \tilde{\psi}_R^2(\underline{k}) + \tilde{\psi}_I^2(\underline{k})$$

OSSERVO CHE PARTE REALE E IMMAGINARIA SONO VARIABILI INDIPENDENTI, QUINDI SE INTEGRA SU TUTTE E DUE (SEPARATAMENTE) RIPPARTISTO IL NUMERO COMPLETO DI MODI. POSSO ANCHE VEDERLA AL CONTRARIO: PASSO DA $\psi(\underline{x})$ REALE ALLA SUA TRASFORMATA $\tilde{\psi}(\underline{k})$ COMPLESSA; COSI' FACENDO RADDOPPIEREI I MODI ARBITRARIAMENTE SE NON FOSSE CHE $\tilde{\psi}(-\underline{k}) = \tilde{\psi}^*(\underline{k})$.

USANDO INFINE LA (XIV),

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}[0] &= \prod_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \int d\tilde{\psi}_R(\underline{k}) d\tilde{\psi}_I(\underline{k}) e^{-\frac{1}{2}(\underline{\psi}, \hat{M} \underline{\psi})} \\ &= \prod_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \int d\tilde{\psi}_R(\underline{k}) d\tilde{\psi}_I(\underline{k}) e^{-\frac{1}{V} \sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \lambda_{\underline{k}} (\tilde{\psi}_R^2(\underline{k}) + \tilde{\psi}_I^2(\underline{k}))} \\ &= \prod_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \frac{2\pi V}{\lambda_{\underline{k}}} = e^{\sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} \ln\left(\frac{2\pi V}{\lambda_{\underline{k}}}\right)} = e^{\frac{1}{2} \sum_{\underline{k}: |\underline{k}| < \Lambda} (\ln 2\pi V - \ln \lambda_{\underline{k}})} \end{aligned}$$

NELLE $\sum'$ E $\prod'$ SI SONO PRESI SOLTANTO METÀ DEI MODI, QUELLI INDIPENDENTI, PER POI USARE GLI INTEGRALI GAUSSIANI.

IL FATTORE $\ln 2\pi V$ È DA VERO UNA COSTANTE E LA TRASCURIAMO.

PASSANDO AL CONTINUO NELLO SPAZIO DEI MOMENTI,

$$Z[0] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{L^D}{(2\pi)^D} \int_0^\Lambda d^D k \ln(\lambda_k) \right\}$$

I λ_k SONO DATI DALLA (XIII) A MENO DEL TERMINE $\frac{k^4}{\Lambda^2}$. INFATTI INTRODURRE UN REGOLATORE IN $\mathcal{O}[\varphi]$ E' UN MODO ALTERNATIVO DI SVOLGERE IL CALCOLO PRESENTATO; POSSO PENSARE DI ESTENDERE L'INTEGRAZIONE IN $d^D k$ A TUTTO LO SPAZIO E INTRODURRE IL REGOLATORE. SI TROVA

$$Z[0] = \exp \left\{ +\frac{1}{2} \frac{L^D}{(2\pi)^D} \int d^D k \ln \tilde{G}_\Lambda(k) \right\}$$

★ IN CONCLUSIONE,

$$F = -\frac{V}{\beta 2(2\pi)^D} \int d^D k \ln \tilde{G}_\Lambda(k) - \frac{1}{2} \int d^D x d^D y h(x) G_\Lambda(x-y) h(y) \quad (XV)$$

COME VOLEVAMO DIMOSTRARE. CHE $G_\Lambda(x)$, IL PROPAGATORE, SIA ANCHE LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE A DUE PUNTI NON E' OVVIO A PRIORI, MA LO SI VEDE USANDO LE DUE DEFINIZIONI (I) E (VII) DI $Z[h]$:

$$G_\Lambda(\underline{z}_1 - \underline{z}_2) = \frac{1}{Z[h]} \frac{\delta^2 Z[h]}{\delta h(\underline{z}_1) \delta h(\underline{z}_2)} \Big|_{h=0} = \frac{1}{Z[h=0]} \int \delta\varphi \varphi(\underline{z}_1) \varphi(\underline{z}_2) e^{-S[\varphi]} = \langle \varphi(\underline{z}_1) \varphi(\underline{z}_2) \rangle$$

SE C'E' UN CAMPO h ACCESO, I VALORI $\langle \varphi(x) \rangle$ NON SONO NULLI: LI DEVO SOTTRARRE. LA STESSA G_Λ ASSUME IL SIGNIFICATO DI FUNZIONE DI CORRELAZIONE CONNESSA,

$$G_\Lambda(\underline{z}_1 - \underline{z}_2) = \frac{\delta^2 \ln Z[h]}{\delta h(\underline{z}_1) \delta h(\underline{z}_2)} = \frac{\delta}{\delta h(\underline{z}_1)} \frac{1}{Z[h]} \int \delta\varphi \varphi(\underline{z}_2) e^{-S[\varphi] + \int h\varphi} = \langle \varphi(\underline{z}_1) \varphi(\underline{z}_2) \rangle_c$$

(VOLENDO, HO USATO IL TEOREMA DI FLUTTUAZIONE-DISSIPAZIONE).

• CONFRONTO CON IL MODELLO GAUSSIANO DISCRETO

$$Z[h] = (\det \hat{A})^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \beta^2 (h, \hat{A}^{-1} h)}$$

$$\hat{A} = -\beta \hat{J} + 1I, \quad \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = A_{ij}^{-1}$$

USANDO $\det \hat{A}^{-1} = (\det \hat{A})^{-1}$ E $\det A = e^{\text{Tr} \ln A}$, SI TROVA (CONFRONTALA CON (XIV))

$$F[h] = -\frac{1}{2\beta} \text{Tr} (\ln \hat{A}^{-1}) - \frac{\beta}{2} \sum_{ij} h_i A_{ij}^{-1} h_j$$