

DAVIDE VENTURELLI

MATR. 1594191

UNIVERSITA' SAPIENZA, ROMA

AGOSTO 2018

CORSO DI ONDE NON LINEARI E SOLITONI

L'EQUAZIONE DI KORTEWEG - DE VRIES

INDICE

I. TECNICHE E GENERALITA'

II. L'EQUAZIONE DI KdV LINEARIZZATA

III. LA KdV COME EQUAZIONE MODELLO

IV. ONDE D'ACQUA

V. IL METODO DELLA TRASFORMATTA SPETTRALE

TECNICHE E GENERALITÀ

I

ONDE DISPERSIVE LINEARI

CONSIDERIAMO LA GENERICA PDE LINEARE DEFINITA TRAMITE

$$P(\partial_t, \partial_x) u = 0 \quad (1)$$

DOVE P È UN POLINOMIO FORMALE NELLE DERIVATE SPAZIOTEMPORALI.

LA (1) SI DICE DISPERSIVA SE AMMETTE SOLUZIONI IN FORMA DI ONDA PIANA MONOCROMATICA

$$u(x,t) = a e^{i\vartheta(x,t)}$$

$$\vartheta(x,t) = kx - \omega t$$

IL NUMERO D'ONDA $k \in \mathbb{R}$ E LA PULSAZIONE ω SONO RADICI DELL'EQUAZIONE

$$P(-i\omega, ik) = 0 \quad (2)$$

LA QUALE DEFINISCE LOCALMENTE LA RELAZIONE DI DISPERSIONE

$$\omega = \omega(k)$$

(QUALORA LA (2) AMMETTA PIÙ DI UNA RADICE, SI PARLA DI MODI).

PERCHÉ VI SIA DISPERSIONE, RICHIEDIAMO

$$\omega(k) \in \mathbb{R}$$

$$\omega''(k) \neq 0 \quad \text{q.o.}$$

LA FUNZIONE $\omega''(k)$ SI DICE DISPERSIONE.

DAL LEMMA DI SCHWARTZ, RISULTA INFINE

$$\partial_x = k, \quad \partial_t = -\omega \quad \Rightarrow \quad k_t + \omega_x = 0 \quad (3)$$

CHE ESPRIME LA CONSERVAZIONE DEL NUMERO DI CRESTE D'ONDA.

METODO DI FOURIER PER IL PROBLEMA DI CAUCHY

SPRUTTANDO LA LINEARITÀ DELLA (1), POSSO SCRIVERNE LA SOLUZIONE GENERALE MEDIANTE UNA SORRAPPOSIZIONE DI ONDE PIANE:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (4)$$

DATO ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY CON DATO INIZIALE $u(x,0) = u_0(x)$,

LO SCHEMA RISOLUTIVO È IL SEGUENTE:

$$\begin{array}{ccc} u_0(x) & \xrightarrow{\text{FT}} & \hat{u}_0(k) \\ | & & | \\ u(x,t) & \xleftarrow{(\text{FT})^{-1}} & \hat{u}_0(k,t) \end{array}$$

OVVERO:

- 1) DATA $u_0(x)$, TRAMITE LA TRASFORMATTA DI FOURIER PASSO DALLO SPAZIO FISICO (DELLE COORDINATE) A QUELLO DI FOURIER ($\hat{u}_0(k)$).
 - 2) RISOLVO L'EQUAZIONE DI EVOLUZIONE, CHE È PIÙ SEMPLICE DI QUELLA ORIGINALE (LE DERIVATE DIVENTANO PRODOTTI E LE PDE DIVENTANO ODE).
 - 3) CON UNA TRASFORMATTA INVERSA RITORNO ALLO SPAZIO FISICO.
- TALI PASSAGGI RISULTANO BEN DEFINITI SOTTO OPPORTUNE IPOTESI SULLE FUNZIONI IN GIOCO (POSSIAMO RICHIEDERE CHE APPARTENGANO ALLO SPAZIO DI SCHWARTZ DELLE FUNZIONI RAPIDAMENTE DECROSCENTI).

RESTA COSÌ DEFINITA LA COPPIA

$$\begin{cases} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \\ \hat{u}_0(k) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ikx} u(x, 0) \end{cases} \quad (5)$$

CHE PRENDE IL NOME DI RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DELLA SOLUZIONE.

CI PONIAMO ORA IL PROBLEMA DI ESTRARNE INFORMAZIONI, QUALORA L'INTEGRALE CHE DEFINISCE $u(x, t)$ NON AMMETTA SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA.

PACCHETTI D'ONDE E METODO DELLA FASE STAZIONARIA

LA SOLUZIONE (4) È DETTA PACCHETTO D'ONDE. POICHÉ $\omega''(k) \neq 0$, NE RISULTA CHE LA VELOCITÀ DI FASE DI OGNUNA COMPONENTE

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k}$$

È DIVERSA DALLE ALTRE PERCHÉ DIPENDE DA k . IL PACCHETTO, CHE AL TEMPO $t = 0$ È LOCALIZZATO (BENCHÉ NON LO SIANO LE ONDE PIANE CHE LO COSTITUISCONO), SI DISPERDE AI t SUCCESSIVI. STUDIAMONE IL COMPORTAMENTO PER TEMPI LUNGI E PER $x \gg 1$, DAL PUNTO DI VISTA CIOÈ DI UN OSSERVATORE CHE "VIAGGIA INSIEME ALL'ONDA". PIÙ PRECISAMENTE, CI PONIAMO NEL LIMITE

$$x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{t} = O(1)$$

RISCRIVIAMO ALLORA LA (5) METTENDO IN EVIDENZA

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i\phi(k; \frac{x}{t})t}, \quad \phi(k; \frac{x}{t}) = k \frac{x}{t} - w(k)$$

A PICCOLE VARIAZIONI DI k CORRISPONDE UNA RAPIDA OSCILLAZIONE DELL'INTEGRANDO, AD AMPIEZZA $\hat{u}_0(k)$ QUASI COSTANTE. IL CONTRIBUTO PRINCIPALE ALL'INTEGRALE È DATO PERCIÒ DA QUEI PARTICOLARI k_0 PER CUI È MINIMA TALE VARIAZIONE, OSSIA PER CUI ϕ È STAZIONARIA:

$$\left. \phi'(k) \right|_{k=k_0} \equiv 0 = \frac{x}{t} - w'(k_0) \quad (6)$$

LA (6) DEFINISCE IMPLICITAMENTE $k_0 = k_0(\frac{x}{t})$ COME FUNZIONE DEL RAPPORTO FINITO $\frac{x}{t} = O(1)$. SVILUPPIAMO ATTORNO A TALE VALORE

$$\phi(k) = \phi(k_0) + \underbrace{\phi'(k_0)}_{=0}(k-k_0) + \frac{1}{2}\phi''(k_0)(k-k_0)^2 + O((k-k_0)^3)$$

SUPPONENDO CHE k_0 SIA UNICO, $u(x, t)$ SI PUÒ ESPRIMERE COME

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \hat{u}_0(k_0) e^{i\phi(k_0)t} \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} \frac{dk}{2\pi} e^{i\frac{\phi''(k_0)}{2}(k-k_0)^2t} \\ &\approx \hat{u}_0(k_0) e^{i\phi(k_0)t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i\frac{\phi''(k_0)}{2}(k-k_0)^2t} \\ &= \frac{\hat{u}_0(k_0)}{\sqrt{2\pi |\phi''(k_0)|t}} e^{i\phi(k_0)t + i\frac{\pi}{4}\text{sign}(\phi''(k_0))} \end{aligned} \quad (7)$$

DOVE SI È USATA LA NOTA FORMULA PER L'INTEGRALE DI FRESNEL.

DETTA ALLORA

$$A(k_0) = \frac{\hat{u}_0(k_0(\frac{x}{t}))}{\sqrt{2\pi |w''(k_0(\frac{x}{t}))|}}$$

POSSIAMO ESPRIMERE

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} A(k_0) e^{-i\frac{\pi}{4}\text{sign}(w''(k_0))} e^{i[k_0 x - w(k_0)t]} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

RICONOSCIAMO NELLA FORMA ASINTOTICA DI $u(x,t)$ UN' ONDA PIANA

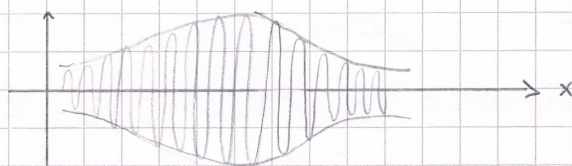
$$u(x,t) \approx A(x,t) e^{i\theta(x,t)}$$

$$\theta(x,t) = k_0\left(\frac{x}{t}\right) \cdot x - \omega(k_0\left(\frac{x}{t}\right))t$$

DOVE L'AMPIEZZA DECRESCE COME $\frac{1}{\sqrt{t}}$ E LA FASE DIPENDE IN MODO NON BANALE DAL RAPPORTO $\frac{x}{t} = O(1)$.

PER MOSTRARE COME k_0 SIA UNA FUNZIONE LENTAMENTE VARIABILE DI x E t , BASTA OSSERVARE CHE

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial k_0}{\partial x}, \frac{1}{k_0} \frac{\partial k_0}{\partial t} \ll 1$$



SI OTTIENE COSÌ UN' ONDA PORTANTE MODULATA DA UN' ONDA DI INVILUPPO. I CONCETTI DI NUMERO D'ONDA E PULSAZIONE SI GENERALIZZANO COSÌ:

$$\theta_x = k_0' \frac{1}{t} x + k_0 - \omega'(k_0) k_0' \frac{1}{t} \cdot t = k_0\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\theta_t = k_0'\left(-\frac{x}{t^2}\right)x - \omega'(k_0) k_0'\left(-\frac{x}{t^2}\right)t - \omega(k_0) = -\omega(k_0)$$

SI È USATA IN ENTRAMBI I CASI LA (6). IN ANALOGIA CON LA (3),

$$k_{0,t} + \omega'(k_0) k_{0,x} = 0$$

È L'EQUAZIONE IPERBOLICA CHE DESCRIVE LA PROPAGAZIONE DEL NUMERO D'ONDA k_0 , LA QUALE AVVIENE CIOÈ ALLA VELOCITÀ DI GRUPPO

$$v_g = \omega'(k_0)$$

CON QUE VELOCITÀ SI SPOSTA UN MASSIMO? IL LUOGO IN CUI $\theta = \text{cost.}$ È

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_x \frac{dx}{dt} + \theta_t \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{\omega(k_0)}{k_0} := v_g$$

(VELOCITÀ DI FASE).

UN OSSERVATORE IN MOTO CON $v = \frac{x}{t}$:

- 1) $v = v_g$. SEGUE UNA CRESTA MANTENENDOSI SUL SUO MASSIMO, MA VEDE LE CRESTE AVVICINARSI O ALLONTANARSI TRA LORO.
- 2) $v \neq v_g$. VEDE SEMPRE LO STESSO NUMERO D'ONDA, MA NON CON LA STESSA AMPIEZZA. LE CRESTE LIMITROFE POSSONO SUPERARLO O ESSERE DA LUI SUPERATE.

• PARTI FONDAMENTALE DELLA SOLUZIONE

RIPRENDIAMO LA RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DELLA SOLUZIONE (5) DEL P. DI CAUCHY. SUPPONENDO POSSIBILE LO SCAMBIO DELL'ORDINE DI INTEGRAZIONE,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i[kx - w(k)t]} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \left(\int d\gamma u(\gamma, 0) e^{-ik\gamma} \right) e^{i[kx - w(k)t]} \\ &= \int d\gamma \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{i[k(x-\gamma) - w(k)t]} \right) u(\gamma, 0) \end{aligned} \quad (8)$$

LA FUNZIONE

$$G(x-\gamma, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{i[k(x-\gamma) - w(k)t]} \quad (9)$$

È DETTA PARTE FONDAMENTALE DELLA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEFINITA NELLA (1). ESSA NE RISOLVE IL PROBLEMA DI CAUCHY IL CUI DATO INIZIALE È $u(x, 0) = \delta(x)$, COME SI OSSERVA PRENDENDONE IL LIMITE PER $t \rightarrow 0$.

LA (8) DEFINISCE UN OPERATORE (EVOLUTORE) $\hat{U}_t$ DI CUI LA (9) COSTITUISCE IL NUCLEO INTEGRALE, COSÌ CHE

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-\gamma, t) u(\gamma, 0) d\gamma = \hat{U}_t u(x, 0)$$

APPROSSIMAZIONE DI INTEGRALI

IL METODO DI LAPLACE

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda f(t)} g(t) dt$$

$$\lambda \gg 1, f(t) \in \mathbb{R}$$

SUPPONIAMO CHE $f(t)$ AMMETTA UN PUNTO DI MASSIMO $t_0 \in (a, b)$,
 $f'(t_0) = 0, f''(t_0) < 0$

POICHÉ IL CONTRIBUTO DOMINANTE ALL'INTEGRALE DERIVA DA UN INTORNO DI t_0 , POSSIAMO APPROSSIMARE (SENZA QUI PRETENDERE RIGORE)

$$I(\lambda) \approx \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{\lambda [f(t_0) - \frac{1}{2} |f''(t_0)| (t-t_0)^2]} g(t_0) dt$$

$$\approx e^{\lambda f(t_0)} g(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2} |f''(t_0)| (t-t_0)^2} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)| \cdot \lambda}} e^{\lambda f(t_0)} g(t_0) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

IL METODO DEL PUNTO DI SELLA

$$I(\lambda) = \int_C e^{\lambda f(z)} g(z) dz$$

$$\lambda \gg 1$$

LE FUNZIONI $f(z)$ E $g(z)$ SIANO ANALITICHE IN UN DOMINIO $D \subseteq \mathbb{C}$
E SIA C UNA CURVA CONTENUTA IN D . ESPRIMIAMO

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$z = x + iy$$

DOVE u, v SONO FUNZIONI ARMONICHE CONIUGATE.

CERCHIAMO UN CONTORNO $\gamma \in D$ IN MODO TALE CHE :

- 1) $u(x, y)$ PRESENTI UN MASSIMO IN $z_0 = (x_0, y_0) \in \gamma$;
- 2) $v(x, y)$ SIA COSTANTE LUNGO γ .

SE CI RIVISSIMO,

$$I_\gamma(\lambda) = \int_\gamma e^{\lambda [u + i v]} g(z) dz = e^{i \lambda v(z_0)} \int_\gamma e^{\lambda u(z)} g(z) dz$$

E L'ULTIMO INTEGRALE È TRATTABILE CON IL METODO DI LAPLACE.

SE AD ESEMPIO γ HA ESTREMI IN $z_0, z_2 \in \mathbb{C}$, DEFINENDO

$$\tau = \operatorname{Re} [f(z) - f(z_0)] > 0$$

$$I_f(\lambda) = e^{\lambda f(z_0)} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau \quad z(0) = z_0$$

CHE È UN INTEGRALE SULL'ASSE REALE.

SI TRATTERÀ QUINDI DI DEFORMARE IL CAMMINO ORIGINALE C COSÌ DA OTTENERE QUESTE PROPRIETÀ.

NOTIAMO INNANZITUTTO CHE NON ESISTONO PUNTI DEL DOMINIO D IN CUI $u(x, y)$ DECRESCA IN TUTTE LE DIREZIONI. INFATTI $u(x, y)$ È UNA FUNZIONE ARMONICA, OSSIA CHE SODDISFA

$$\Delta u(x, y) = 0$$

SE NE DEDUCE CHE u_{xx} E u_{yy} HANNO SEGNO DISCORDE, IMPLICANDO CHE OGNI PUNTO CRITICO DI u È UN PUNTO DI SELLA: INFATTI

$$u_{xx} u_{yy} < 0 < u_{xy}^2 \quad \Rightarrow \quad (u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2)|_{z_0} < 0$$

IN CUI RICONOSCIAMO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE HESSIANA DI $u(x, y)$ IN z_0 .

INOLTRE γ È UNA CURVA DI LIVELLO DI v :

$$\nabla v \perp \gamma$$

DALE CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN,

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v &= u_x v_x + u_y v_y \\ &= v_y v_x - v_x v_y = 0 \end{aligned}$$

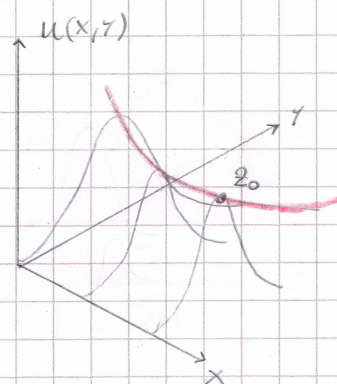
DA CUI

$$\nabla u \parallel \gamma$$

OVVERO γ È LA CURVA DI MASSIMA VARIAZIONE DI u .

SE IL PUNTO DI SELLA z_0 È DI ORDINE 1, HO DUE SOLE SCELTE POSSIBILI (VEDI FIGURA). IN QUESTO CASO SI SCRIVE

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$



ESPRIMENDO IN COORDINATE POLARI

$$\left. \begin{aligned} (z-z_0) &= r e^{i\theta} \\ \frac{1}{2} f''(z_0) &= p e^{i\phi} \end{aligned} \right\}$$

$$f(z) - f(z_0) \approx p r^2 e^{i(2\theta+\phi)}$$

SEPARANDONE PARTE REALE E IMMAGINARIA,

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = p r^2 \cos(2\theta + \phi)$$

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = p r^2 \sin(2\theta + \phi)$$

IMPONIAMO LA COSTANZA DI v SU γ ,

$$2\theta + \phi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

E RICHIEDIAMO CHE $(u(z) - u(z_0)) < 0$ E IN MODULO LA PIÙ GRANDE POSSIBILE,

$$2\theta + \phi = \pi, 3\pi$$

NOTO CHE, COME IN FIGURA, $\cos(2\theta + \phi)$ CAMBIA SEGNO 1 VOLTE SU OGNI GIRO. MI RIDUCO QUINDI A 2 POSSIBILI CASI:

$$\tilde{\theta} = -\frac{\phi}{2} + \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

CORRISPONDENTI AI DUE VERSI DI PERCORRENZA DI γ .

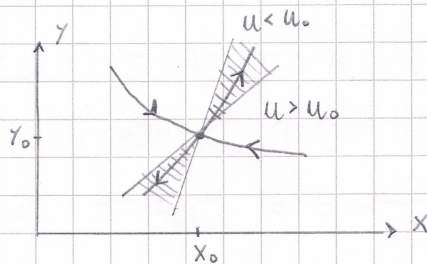
APPLICANDO INFINE IL METODO DI LAPLACE,

$$I_\gamma(\lambda) = \int_\gamma e^{\lambda f(z)} g(z) dz$$

$$dz = d(re^{i\tilde{\theta}}), \quad e^{i(2\tilde{\theta}+\phi)} = 1$$

$$\approx e^{\lambda f(z_0)} g(z_0) \int e^{-\lambda p r^2} e^{i\tilde{\theta}} dr$$

$$\approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} e^{\lambda f(z_0) + i\tilde{\theta}} g(z_0) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$



L'EQUAZIONE DI KORTEWEG-DE VRIES LINEARIZZATA

II

LA PDE NON LINEARE

$$v_t + v_{xxx} = -vv_x$$

SI CHIAMA EQUAZIONE DI KORTEWEG-DE VRIES (KdV). IL TERMINE vv_x È QUADRATICO, PERCIÒ LA DINAMICA DI UNA PICCOLA PERTURBAZIONE u DALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO $v_0 = \text{cost.}$,

$$v(x,t) = v_0 + u(x,t)$$

SI DESCRIVE CON LA KdV LINEARIZZATA

$$u_t + u_{xxx} + v_0 u_x = 0$$

LA RELAZIONE DI DISPERSIONE

$$\omega(k) = -k^3 + v_0 k$$

$$\omega''(k) = -6k$$

CI DICE CHE L'EQUAZIONE È DISPERSIVA, MA LA DISPERSIONE È DEBOLE PER PICCOLI k .

SENZA PERDERE DI GENERALITÀ PONIAMO $v_0 = 0$ (BASTA EFFETTUARE IL CAMBIO DI VARIABILI $x' = x - v_0 t$), COSÌ CHE

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

CERCHIAMONE INNANZITUTTO LA SOLUZIONE FONDAMENTALE, OSSIA QUELLA $G(x,t)$ TALE PER CUI, ASSEGNATA $u(x,0) \in L^2(\mathbb{R})$, SI ABBIAMO

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t) u(y,0) dy$$

NEL NOSTRO CASO

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{i[kx - \omega(k)t]} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx + k^3 t)} \\ &= \frac{1}{(3t)^{1/3}} \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{2\pi} e^{i\left[\frac{x}{(3t)^{1/3}} \cdot s + \frac{s^3}{3}\right]} \end{aligned} \quad (2)$$

DOVE SI È INTRODOTTTO IL CAMBIO DI VARIABILI

$$k^3 t = \frac{s^3}{3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{s}{(3t)^{1/3}}$$

RICORDIAMO ORA CHE LA FUNZIONE DI AIRY $A_i(\xi)$ HA UNA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DATA DA

$$A_i(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{2\pi} e^{i(\xi s + \frac{s^3}{3})}$$

CONFRONTANDOLA CON LA (2), POSSIAMO SCRIVERE

$$G(x, t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} A_i\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right) \quad (3)$$

RICONOSCIAMO CHE SI TRATTA DI UNA SOLUZIONE DI SIMILARITÀ. IN EFFETTI, UNA STRADA ALTERNATIVA PER DERIVARE LA (3) È SUPPORRE CHE $G(x, t)$ SIA NELLA FORMA

$$G(x, t) = \frac{1}{(3t)^p} f\left(\frac{x}{(3t)^q}\right)$$

PER OPPORTUNI p, q . SOSTITUENDOLA NELLA (1) E CHIAMANDO $\eta = \frac{x}{(3t)^q}$

$$\frac{f'''}{(3t)^{p+3q}} - \frac{1}{(3t)^{p+1}} (3p f + 3q \eta f') = 0 \quad (4)$$

PERCHÉ SCOMPAIA LA DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO SCELGO $q = \frac{1}{3}$.
 p È LIBERA; SE FISSO $p = \frac{1}{3}$ E INTEGRO LA (4) TROVO

$$f'' - \eta f = C_1 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f'' = \eta f \quad (5)$$

DOVE C_1 È SCELTA IN MODO CHE $f \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0$. LA (5) È APPUNTO L'EQUAZIONE DI AIRY.

Sviluppo asintotico a sinistra, $x < 0$

RISCRIVIAMO LA RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DELLA SOLUZIONE DELLA (1)

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i\phi(k; \frac{x}{t})t}$$

$$\phi(k; \frac{x}{t}) = k \frac{x}{t} + k^3$$

VOLENDO STUDARLA CON IL METODO DELLA FASE STAZIONARIA, NOTIAMO CHE $\phi(k; \frac{x}{t})$ HA DERIVATA NULLA NEI PUNTI

$$k_0^{\pm} = \pm \left(-\frac{x}{3t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

POICHÉ IL METODO IN QUESTIONE SI APPLICA SOLO A $k_0 \in \mathbb{R}$, RICHIEDIAMO

$$\frac{x}{t} = O(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad k_0^\pm = \pm \sqrt{\frac{x}{3t}} \in \mathbb{R}$$

ENTRAMBI I $k_0^\pm$ CONTRIBUISCONO ALLO SVILUPPO ASINTOTICO DI $u(x, t)$ CON UN TERMINE ANALOGO ALLA (7) DEFINITA NELLO SCORSO CAPITOLO. IN PARTICOLARE

$$\phi(k_0^\pm) = \mp 2 \left| \frac{x}{3t} \right|^{3/2}$$

$$\phi''(k_0^\pm) = \pm 2 \left| \frac{3x}{t} \right|^{1/2}$$

COSÌ CHE

$$u(x, t) \approx \left[\frac{\hat{u}_0 \left(\left| \frac{x}{3t} \right|^{1/2} \right)}{2\sqrt{\pi t} \left| \frac{3x}{t} \right|^{1/4}} e^{-2i \left| \frac{x}{3t} \right|^{3/2} t + i \frac{\pi}{4}} + \frac{\hat{u}_0 \left(- \left| \frac{x}{3t} \right|^{1/2} \right)}{2\sqrt{\pi t} \left| \frac{3x}{t} \right|^{1/4}} e^{2i \left| \frac{x}{3t} \right|^{3/2} t - i \frac{\pi}{4}} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

LA QUANTITÀ TROVATA È REALE SE LO È LA CONDIZIONE INIZIALE $u(x, 0)$. USANDO INFATTI LA NOTA PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATTA DI FOURIER,

$$\hat{u}_0(k) = \hat{u}_0^*(-k) \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_0(-k_0) = \hat{u}_0^*(k_0)$$

D'ALTROONDE DEVE ESSERE REALE ANCHE LA SOLUZIONE "VERA":

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i(kx + k^3 t)}$$

?

$$u^*(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0^*(k) e^{-i(kx + k^3 t)} \stackrel{k' = -k}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk'}{2\pi} \hat{u}_0^*(-k') e^{i(k'x + k'^3 t)}$$

CIÒ DISCENDE DAL FATTO CHE SIA DISPARI $W(k)$.

DETTA ALLORA

$$\varphi = \arg \hat{u}_0 \left(\left| \frac{x}{3t} \right|^{1/2} \right)$$

ABBIAMO

$$u(x, t) \approx \frac{|\hat{u}_0 \left(\left| \frac{x}{3t} \right|^{1/2} \right)|}{\sqrt{\pi t} \left| \frac{3x}{t} \right|^{1/4}} \cos \left[2 \left| \frac{x}{3t} \right|^{3/2} t - \frac{\pi}{4} - \varphi \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) \quad (6)$$

$$\frac{x}{t} = O(1) < 0, \quad t \gg 1$$

Sviluppo asintotico a destra, $x > 0$

CONSIDERIAMO NUOVAMENTE

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i(k \frac{x}{t} + k^3)t}$$

E STUDIAMOLA STAVOLTA CON IL METODO DEL PUNTO DI SELLA. IN ANALOGIA ALLA NOTAZIONE DEL CAPITOLO PRECEDENTE, IDENTIFICHIAMO

$$f(k) = i \left(k \frac{x}{t} + k^3 \right)$$

$$\lambda = t \gg 1$$

PENSIAMO k NEL PIANO COMPLESSO, ESPLIATIAMO

$$k = \alpha + i\beta$$

$$f(k) = u(\alpha, \beta) + i v(\alpha, \beta)$$

$$= \left(\alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - \beta \frac{x}{t} \right) + i \alpha \left(\alpha^2 - 3\beta^2 + \frac{x}{t} \right) \quad (7)$$

VOGLIAMO COSTRUIRE UN CAMMINO IN $\mathbb{C}$ CHE SIA CURVA DI LIVELLO

PER $v(\alpha, \beta)$ E SU CUI $u(\alpha, \beta)$ PRESENTI UN MASSIMO. NOTIAMO CHE

$f(k)$ È ANALITICA, PERCIÒ IL VALORE DI $f'(k)$ È INDIPENDENTE DALLA DIREZIONE IN CUI SCELGO DI CALCOLARLA. IN PARTICOLARE

$$f'(k) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

E, USANDO LE CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = u_\alpha + i v_\alpha = u_\alpha - i u_\beta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_\alpha = 0 \\ u_\beta = 0 \end{cases}$$

PERCIÒ I PUNTI CRITICI DI $u(\alpha, \beta)$ SONO

$$f'(k) = i \left(\frac{x}{t} + 3k^2 \right) = 0 \Rightarrow k_0^\pm = \pm i \sqrt{\frac{x}{3t}}$$

SI TRATTA DI PUNTI IMMAGINARI PURI SE CONSIDERIAMO

$$\frac{x}{t} > 0$$

OVVERO UNO SVILUPPO "A DESTRA" DELLA KdV LINEARIZZATA.

DALLA (7) LEGGIAMO CHE $v(k_0^\pm) = 0$. CERCHIAMO ALLORA I

LUOGHI IN CUI

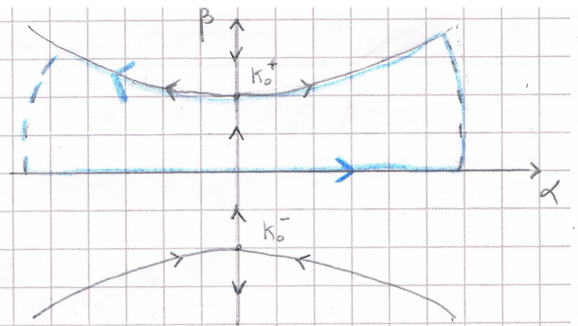
$$V(\alpha, \beta) = 0 = \alpha \left(\alpha^2 - 3\beta^2 + \frac{x}{t} \right)$$

OVVERO L'ASSE $\alpha=0$ E L'IPERBOLE

$$\alpha^2 - 3\beta^2 + \frac{x}{t} = 0$$

CHE INTERSECA L'ASSE $\alpha=0$ NEI PUNTI $k_0^\pm$.

NEL GRAFICO SONO MOSTRATE TALI CURVE, INSIEME CON L'ANDAMENTO DI $u(\alpha, \beta)$ LUNGO ESSE (IL VERSO DELLE FRECCIE INDICA UNA DECRESCITA).



NON RESTA CHE SCEGLIERE IL CAMMINO INDICATO IN BLU IN FIGURA E APPLICARE IL TEOREMA DI CAUCHY - GOURSAT. SIA I_γ IL VALORE DELL'INTEGRALE SUL RAMO DI IPERBOLE IN ALTO; SE $\hat{u}_0(k)$ È UNA FUNZIONE ANALITICA (ALMENO NEL SEMIPIANO SUPERIORE), IL CONTRIBUTO DELL'INTEGRALE SUGLI ARCHI È TRASCURABILE PER $|k| \gg 1$ E

$$u(x, t) - I_\gamma(t) = 0$$

(SE $\hat{u}_0(k)$ NON FOSSE ANALITICA, DOVREMMO CONSIDERARNE I RESIDUI). PERCIÒ

$$\begin{aligned} u(x, t) &= I_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \hat{u}_0(k) e^{t f(k)} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{t |f''(k_0^+)|}} e^{t f(k_0^+) + i\tilde{\theta}} \hat{u}_0(k_0^+) \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) \end{aligned}$$

NON RESTA CHE OSSERVARE CHE $\tilde{\theta} = 0$ SE PARAMETRIZZATO COME

$$k = k_0 + r e^{i\tilde{\theta}}$$

IL CAMMINO (PER PICCOLI SPOSTAMENTI DA k_0). INOLTRE

$$f''(k) \Big|_{k_0^+} = (6ik) \Big|_{k_0^+} = -2\sqrt{\frac{3x}{t}}$$

QUINDI

$$u(x, t) = \frac{\hat{u}_0\left(i\sqrt{\frac{x}{3t}}\right)}{2\sqrt{\pi t} \left(\frac{3x}{t}\right)^{1/4}} e^{-2\left(\frac{x}{3t}\right)^{3/2} t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) \quad (8)$$

$$t \gg 1, \quad \frac{x}{t} = O(1) > 0$$

Sviluppo al centro, $\frac{x}{t} \rightarrow 0$

Le espressioni (6) e (8) sono sviluppi asintotici validi per $t \gg 1$

e $\frac{x}{t} = O(1)$, con rispettivamente $\frac{x}{t} < 0$ e $\frac{x}{t} > 0$. Dove $\frac{x}{t} \sim 0$,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_0(k) e^{i(kx + k^3 t)} \\ &= \frac{1}{2\pi (3t)^{1/3}} \int \hat{u}_0\left(\frac{s}{(3t)^{1/3}}\right) e^{i\left[s \frac{x}{(3t)^{1/3}} + \frac{s^3}{3}\right]} ds \quad t \gg 1 \quad \hat{u}_0(0) \quad \frac{1}{2\pi} \int e^{i\left[s\eta + \frac{s^3}{3}\right]} ds \\ &= \frac{\hat{u}_0(0)}{(3t)^{1/3}} A_i(\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

Dove si è adottato nuovamente il cambio di variabili $k^3 t = \frac{s^3}{3}$ e si è definita $\eta = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$. In effetti la (9) è valida per

$$t \gg 1, \quad \frac{x}{(3t)^{1/3}} = O(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{t} \rightarrow 0$$

Non resta che riscrivere la (6) e la (8) come

$$u(x, t) \approx \frac{|\hat{u}_0(|\frac{x}{3t}|^{1/2})|}{(3t)^{1/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} |\eta|^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3} |\eta|^{3/2} - \frac{\pi}{4} - \arg \hat{u}_0(|\frac{x}{3t}|^{1/2})\right], \quad \frac{x}{t} < 0$$

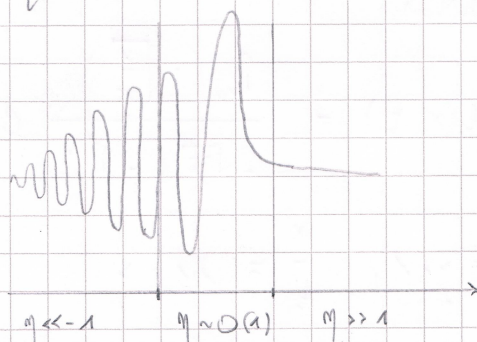
$$u(x, t) \approx \frac{\hat{u}_0(i\sqrt{\frac{x}{3t}})}{(3t)^{1/3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \eta^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} \eta^{3/2}}, \quad \frac{x}{t} > 0$$

e riconoscervi degli sviluppi asintotici della funzione di Airy, il cui comportamento asintotico per $\eta \rightarrow \pm\infty$ (ottenibile a sua volta tramite il metodo del punto di sella) è dato da

$$A_i(\eta) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} \eta^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} \eta^{3/2}} \quad \eta \rightarrow +\infty$$

$$A_r(\eta) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} |\eta|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} |\eta|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \eta \rightarrow -\infty$$

Nel grafico a destra è infine mostrato l'andamento della soluzione nelle tre regioni studiate.



LA KdV COME EQUAZIONE MODELLO

III

ABBIAMO VISTO, PARLANDO DI ONDE DISPERSIVE LINEARI, COME LA RELAZIONE DI DISPERSIONE $\omega(k)$ PER UNA SOLUZIONE NELLA FORMA $e^{i(kx - \omega t)}$ DELL'EQUAZIONE DEFINITA FORMALMENTE DA

$$P(\partial_t, \partial_x) u(x, t) = 0 \quad (1)$$

SI A OTTENIBILE RISOLVENDO

$$P(-i\omega, ik) = 0$$

SE IL POLINOMIO (1) È DI GRADO 1 IN ∂_t , DERIVATE RISPETTO A x DI ORDINE DISPARI INTRODURRANNO IN $\omega(k)$ POTENZE DISPARI DI k , RESPONSABILI DEGLI EFFETTI DISPERSIVI. DERIVATE RISPETTO A x DI ORDINE PARI INTRODUCONO INVECE TERMINI IMMAGINARI PURI IN $\omega(k)$, FONTE DI EFFETTI DISSIPATIVI.

UN'AMPIA CLASSE DI MODELLI NON LINEARI CON EFFETTI DISPERSIVI È DESCRITTA PERCHÉ DALL'EQUAZIONE

$$u_t + C(u) u_x + K_1(u) \{ K_2(u) [K_3(u) u_x]_x \}_x = 0 \quad (2)$$

DOVE K_1, K_2, K_3 SONO FUNZIONI ARBITRARIE. POSTE

$$D(u) = K_1 K_2 K_3$$

$$E(u) = K_1 [3K_2 K_3' + K_3 K_2']$$

$$H(u) = K_1 K_2' K_3' + K_1 K_2 K_3''$$

LA (2) PUO' ESSERE RISCRISSA COME

$$u_t + C(u) u_x + D(u) u_{xxx} + E(u) u_x u_{xx} + H(u) u_x^3 = 0 \quad (3)$$

PICCOLE PERTURBAZIONI DI UNA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO (QUALE AD ESEMPIO $u_0 = \text{cost.}$) SONO OPPORTUNAMENTE DESCRITTE DA UNO SVILUPPO ASINTOTICO DEL TIPO

$$u(x, t) = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, t) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u^{(m)}(x, t) \quad (4)$$

OVE

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon u^{(m+1)}(x, t)}{u^{(m)}(x, t)} = 0 \quad \forall m, \text{ UNIFORMEMENTE IN } (x, t).$$

NEW IPOTESI DI PICCOLA AMPIEZZA, SOSTITUISCO PERCHÉ LO

Sviluppo (4) nella (3) e solo i termini di ordine ε , ottenendo

$$u_t^{(1)} + C_0 u_x^{(1)} + D_0 u_{xxx}^{(1)} = 0 \quad (5)$$

$$C_0 = C(u_0), \quad D_0 = D(u_0)$$

Riconosciamo nella (5) l'equazione KdV linearizzata. Sappiamo che essa ammette soluzioni ondulatorie con

$$\omega(k) = C_0 k - D_0 k^3 \quad (6)$$

Per $k \sim 0$ avremo quindi dispersione debole: infatti

$$\omega(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} C_0 k \quad v_g = \frac{\omega(k)}{k} \underset{k \rightarrow 0}{\sim} C_0 = O(1)$$

Ossia non vi è, per $k \rightarrow 0$, dipendenza della velocità di fase dal numero d'onda.

Approfondiamo lo studio introducendo l'ipotesi di onde lunghe

$$k = \varepsilon^\gamma \tilde{k}$$

con $\gamma > 0$ da determinare. Ciò significa supporre una dipendenza lenta di $u^{(1)}$ dallo spazio e dal tempo, che possiamo trattare con la tecnica multiscale. La scelta delle scale opportune è suggerita dalla forma dell'esponente

$$\theta = kx - \omega(k)t$$

che compare nella soluzione di prova $e^{i\theta} = e^{i(kx - \omega t)}$, che possiamo inserire nella (5) nell'ipotesi di debole non linearità, usando la relazione di dispersione (6),

$$\begin{aligned} \theta &= kx - (C_0 k - D_0 k^3)t \\ &= \varepsilon^\gamma x \tilde{k} - C_0 \varepsilon^\gamma t \tilde{k} + D_0 \varepsilon^{3\gamma} t \tilde{k}^3 \\ &= \tilde{k} (x_1 - C_0 t_1) + D_0 \tilde{k}^3 t_3 \end{aligned} \quad x_1 = \varepsilon^\gamma x, \quad t_1 = \varepsilon^\gamma t, \quad t_3 = \varepsilon^{3\gamma} t$$

Sostituiamo quindi lo sviluppo perturbativo (4) con uno in cui i singoli termini dipendono in modo indipendente dalle scale trovate:

$$u^{(m)} = u^{(m)}(x_1, t_1, t_3) \quad \forall m \geq 1$$

Le derivate in x e t diventano quindi

$$\partial_x \rightarrow \varepsilon^\gamma \partial_{x_1} \quad \partial_t \rightarrow \varepsilon^\gamma \partial_{t_1} + \varepsilon^{3\gamma} \partial_{t_3}$$

TORNIAMO A LORO ALA (3). OTTENIAMO, ALL' ORDINE PRINCIPALE,

$$O(\varepsilon^{1+\gamma}): u_{t_1}^{(1)} + c_0 u_{x_1}^{(1)} = 0$$

CHE DESCRIVE UN' ONDA IPERBOLICA CHE TRASLA RIGIDAMENTE IN UNA DIREZIONE. LA SOLUZIONE HA LA FORMA

$$u^{(1)} = f(x_1 - c_0 t_1, t_3)$$

DOVE LA DIPENDENZA DA t_3 È ARBITRARIA. PER DETERMINARLA, ANDIAMO ALL' ORDINE SUCCESSIVO; SOSTITUIAMO TERMINI DI ORDINE

$$O(\varepsilon^{2+\gamma}), O(\varepsilon^{1+3\gamma})$$

APPLICHIAMO IL PRINCIPIO DEL MASSIMO BILANCIO: SCEGLIAMO γ IN MODO DA MANTENERLI ENTRAMBI E NON PERDERE LA RICCHEZZA DEL PROBLEMA.

$$2 + \gamma = 1 + 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

AVREMO PERCIÒ, ALL' ORDINE $O(\varepsilon^{5/2})$,

$$u_{t_1}^{(2)} + c_0 u_{x_1}^{(2)} = - (u_{t_3}^{(1)} + c_0' u^{(1)} u_{x_1}^{(1)} + D_0 u_{x_1 x_1 x_1}^{(1)}) \quad (7)$$
$$= g(x_1 - c_0 t_1, t_3)$$

DOVE SI SONO SVILUPPATI

$$C(u) \approx C(u_0) + \varepsilon C'(u_0) u^{(1)}$$

$$C(u_0) := c_0, \quad C'(u_0) := c_0'$$

$$D(u) \approx D(u_0) + \varepsilon D'(u_0) u^{(1)}$$

$$D(u_0) := D_0, \quad D'(u_0) := D_0'$$

NOTIAMO CHE IL MEMBRO A DESTRA DELLA (7) RAPPRESENTA UNA FORZANTE RISONANTE PER L'EVOLUZIONE DI $u^{(2)}$; ESSA GENERA UN TERMINE "SECOLARE"

$$u_2 \sim h(x_1 - c_0 t_1) + t_1 l(x_1 - c_0 t_1)$$

CHE RENDE DIVERGENTE LO SVILUPPO PER TEMPI $t_1 \sim O(\frac{1}{\varepsilon})$, DOVE

$$\frac{\varepsilon u^{(2)}}{u^{(1)}} \sim O(1)$$

CONTRADDICENDO IL REQUISITO DI ASINTOTICITÀ DELLO SVILUPPO.

LA DIPENDENZA DI $u^{(2)}$ DA t_3 SI FISSA PERCIÒ IN MODO DA ANNULLARE IL TERMINE RISONANTE; CIÒ ACCADE QUANDO

$$u_{t_3}^{(1)} + c_0' u^{(1)} u_{x_1}^{(1)} + D_0 u_{x_1 x_1 x_1}^{(1)} = 0$$

IN CUI RICONOSCIAMO L'EQUAZIONE DI KdV: ESSA È QUINDI UNA EQUAZIONE MODELLO CHE DESCRIVE L'EFFETTO DI NON

LINEARITA' E DISPERSIONE DEBOLI COME MODULAZIONE LENTA DELLA
PICCOLA AMPIEZZA DI UN'ONDA IPERBOLICA LINEARE.

ONDE D'ACQUA

IV

COME ESEMPIO FISICO DI APPLICAZIONE DELL'EQUAZIONE KdV, STUDIAMO IL CASO DELLE ONDE D'ACQUA DI SUPERFICIE.

PARTIAMO DALLE EQUAZIONI CHE NE DESCRIVONO LA DINAMICA:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (\text{CONSERVAZIONE MASSA}) \quad (1)$$

$$\underline{v}_t + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla (U + p) + \nu \Delta \underline{v} \quad (\text{CONSERVAZIONE QUANTITA' DI MOTO}) \quad (2)$$

$$p = p(\rho, S) \quad (\text{EQUAZIONE DI STATO}) \quad (3)$$

DOVE ρ È LA DENSITA', $\underline{v}$ LA VELOCITA' DEL FLUIDO, p LA PRESSIONE, S L'ENTROPIA, $\nu > 0$ IL COEFFICIENTE D'ATTRITO E U IL POTENZIALE DELLE FORZE ESTERNE (IN GENERE LA GRAVITA', $U = \rho g z$).

NEL CASO DI FLUIDO INVISCIDO PONIAMO $\nu = 0$. SE È ANCHE $\rho = \rho_0 = \text{cost.}$ (FLUSSO INCOMPRESSIBILE), DALLA (1) RISULTA

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (4)$$

USANDO INOLTRE L'IDENTITA'

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \frac{1}{2} \nabla |\underline{v}|^2 - \underline{v} \wedge (\nabla \wedge \underline{v})$$

POSSIAMO RISCRIVERE LA (2), CON $\nu = 0$, COME

$$\underline{v}_t + \frac{1}{2} \nabla |\underline{v}|^2 - \underline{v} \wedge (\nabla \wedge \underline{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla (U + p) \quad (5)$$

DEFINENDO LA VORTICITA'

$$\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{v}$$

E PRENDENDO IL ROTORE DELLA (5), SI OTTIENE CHE $\underline{\omega}$ EVOLVE SECONDO

$$\underline{\omega}_t - \nabla \wedge (\underline{v} \wedge \underline{\omega}) = 0$$

ED È PERCIO' NULLA $\forall t$ SE $\underline{\omega}(t=0) = 0$.

AGGIUNGAMO PERCIO' L'IPOTESI DI FLUIDO IRROTAZIONALE

$$\nabla \wedge \underline{v} = 0 \quad (6)$$

CHE, INSIEME ALLA (4), IMPLICA L'ESISTENZA DI UN POTENZIALE SCALARE PER LA VELOCITA', SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE:

$$\exists \phi: \underline{v} = \nabla \phi$$

$$\Delta \phi = 0$$

(7)

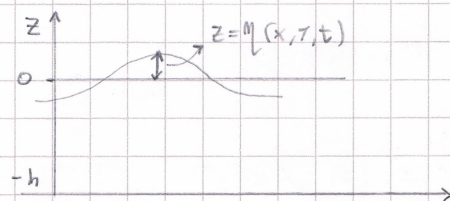
ESSENDO ϕ DEFINITO A MENO DI UNA $f(t)$ (GAUGE), POSSO RISOVRIVERE LA (5) IN TERMINI DI ϕ COSÌ DA OTTENERE L'EQUAZIONE DI BERNOLLI

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho_0} (U + P - P_0) = 0 \quad (8)$$

• ONDE DI SUPERFICIE

CONSIDERIAMO UN BACINO D'ACQUA DI PROFONDITÀ h . DESCRIVIAMO L'INTERFACCIA CON L'ARIA TRAMITE

$$z = \eta(x, y, t)$$



E LA VELOCITÀ DEL FLUIDO SIA NULLA A CONTATTO CON IL FONDALE, COSÌ CHE

$$\phi_z(z = -h) = 0 \quad (9)$$

DEFINIAMO LA SUPERFICIE LIBERA TRAMITE LA PROPRIETÀ CHE UNA PARTICELLA CHE VI SIA POSATA VI RIMANGA INDEFINITAMENTE A CONTATTO. PER IMPORRE TALE CONDIZIONE AL CONTORNO, DEFINIAMO LA VARIABILE

$$\xi = \xi(\underline{r}(t), t) = z - \eta(x, y, t)$$

E IMPONIAMO CHE SIA $\xi = 0$ $\forall t$ SULLA SUPERFICIE, OSSIA

$$\frac{d\xi}{dt} \equiv 0 = \xi_t + \underline{v} \cdot \nabla \xi = \xi_t + (\nabla \phi) \cdot \nabla \xi = -\eta_t - \eta_x \phi_x - \eta_y \phi_y + \phi_z \quad (10)$$

LE EQUAZIONI (7) ÷ (10) DEFINISCONO IL PROBLEMA. LE PRIME DUE SONO VALIDE OVUNQUE ($-h \leq z \leq \eta$), LA (9) SUL FONDALE E LA (10) SULLA SUPERFICIE. NEL NOSTRO CASO, $U = \rho g z$ NELLA (8).

NELL'IPOTESI DI PICCOLA AMPIEZZA ($|\phi|, |\eta| \ll 1$), TRASCURO I TERMINI QUADRATICI NELLA (8) E (10); ESSENDO LA (7) E (9) GIÀ LINEARI, OTTENDO

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \phi_t + g\eta \sim 0 \\ \phi_z = 0 \\ \phi_z - \eta_t \sim 0 \end{cases}$$

$$-h \leq z \leq \eta \quad (7)$$

$$z = \eta \sim 0 \quad (8a)$$

$$z = -h \quad (9)$$

$$z = \eta \sim 0 \quad (10a)$$

IL PROBLEMA LINEARIZZATO COSÌ OTTENUTO CONSISTE NEL RISOLVERE L'EQUAZIONE DI LAPLACE (7) CON LE CONDIZIONI (8a), (9), (10a); NON SONO RIDONDANTI PERCHÉ NON SOLO ϕ , MA ANCHE η È INCOGNITA.

CERCHIAMONE UNA SOLUZIONE NELLA FORMA (SEPARAZIONE DELLE VARIABILI)

$$\phi(r, t) = R(z) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} + c.c. \quad (11)$$

$$\eta(r, t) = \eta_0(k) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} + c.c. \quad (12)$$

INIZIAMO UTILIZZANDO LA (7) E LA (9) PER DETERMINARE LA DIPENDENZA DA z (LE ALTRE DUE VALGONO SOLO PER $z \sim 0$). SOSTITUENDOCI L'ANSATZ (11),

$$\begin{cases} R''(z) = (k_1^2 + k_2^2) R(z) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} R'(z)|_{z=-h} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

LA (13) HA SOLUZIONE GENERALE

$$R(z) = A \cosh[k(z + \alpha)] \quad k = [k_1^2 + k_2^2]^{1/2}$$

k_1 E k_2 SONO ARBITRARIE (COME AUSPICABILE, VOLENDO COSTRUIRE UNA BASE PER LA SOLUZIONE), MENTRE α SI FISSA IMPONENDO LA (14). SI TROVA

$$R(z) = A \cosh[k(z + h)]$$

LE DUE EQUAZIONI UTILIZZATE NON CONTENGONO t . DALLA (8a) E (10a) RICAVO

$$\phi_{tt} + g \eta_t \sim \phi_{tt} + g \phi_z \sim 0 \quad z \sim 0$$

CHE SI PUO' USARE PER FISSARE $\omega(k)$: SOSTITUENDOCI LA (11) SI HA

$$g R'(0) - \omega^2 R(0) = 0$$

$$g k \sinh(kh) - \omega^2 \cosh(kh) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2(k) = g k \tanh(kh) \quad (15)$$

POICHÉ $kh > 0$, SI HA $\omega \in \mathbb{R}$: LE ONDE DI SUPERFICIE COSÌ OTTENUTE SONO NON LINEARI E DISPERSIVE. NE DISTINGUIAMO DUE REGIMI:

a) ONDE CORTE (FLUIDO PROFONDO): $kh \gg 1$

$$\omega^2(k) \sim gk \quad \Rightarrow \quad \omega(k) \sim \sqrt{gk}$$

$$\omega'(k) \sim \frac{1}{2} \sqrt{g/k}$$

PERCIÒ LE ONDE PIÙ LUNGHE VIAGGIANO PIÙ VELOCI (MA È SEMPRE $k \gg \frac{1}{h} > 0$).

b) ONDE LUNGHE (SHALLOW WATERS): $kh \ll 1$

RICORDANDO CHE $\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$, SVILUPPIAMO LA (15) COME

$$\omega^2(k) = gk \tanh(kh) = gk \left[kh - \frac{1}{3}(kh)^3 + O(k^5) \right] = ghk^2 \left[1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + O(k^4) \right]$$

$$\omega(k) = \sqrt{gh} k \left[1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + O(k^4) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{gh} \left[k - \frac{h^2}{6} k^3 + O(k^5) \right] \quad (16)$$

AL PRIMO ORDINE NON C'E' DISPERSIONE: ONDE CON k DIVERSO VIAGGIANO CON LA STESSA VELOCITA', $v \sim \sqrt{gh}$. AD ESEMPIO UNO TSUNAMI E' UN'ONDA BASSISSIMA ($\eta \sim 1m$, $\lambda \sim 100km$, $h \sim 6km$) CHE VIAGGA AD ALTISSIMA VELOCITA' ($v = \omega'(k) \sim 2h^2 m/s$, CIRCA COME UN AEREO DI LINEA).

PER PICCOLI k SIAMO NEL LIMITE DEBOLMENTE DISPERSIVO. SUPPONENDO PER SEMPLICITA' DI AVERE PROPAGAZIONE IN UNA SOLA DIMENSIONE ($k = k_x$), CI ASPETTIAMO CHE $\eta(x,t)$ EVOLVA SECONDO LA KdV LINEARIZZATA

$$\eta_t + () \eta_x + () \eta_{xxx} = 0 \quad (17)$$

I COEFFICIENTI SI RICAVANO IMPONENDO CHE LA (17) SIA RISOLTA DA $\eta(x,t)$ NELLA FORMA (12) E CON LA RELAZIONE DI DISPERSIONE (16), COSI' CHE

$$\eta_t + \sqrt{gh} \left(\eta_x + \frac{h^2}{6} \eta_{xxx} \right) = 0$$

PER TROVARE LA TEORIA NON LINEARE, SI RIPARTE DALLE (7)-(10) E LE SI STUDIA PERTURBATIVAMENTE CON LA TECNICA MULTISCALE NELL'IPOTESI DI ONDE LUNGHE; LE VARIABILI LENTE OPPORTUNE SI OTTENGONO PONENDO $k = \varepsilon \tilde{k}$ IN $\vartheta = kx - \omega(k)t$, CON $\omega(k)$ DATA DALLA (16), MENTRE ε E' FISSATA DAL PRINCIPIO DEL MASSIMO BILANCIO. SI OTTIENE LA KdV

$$\eta_t + \sqrt{gh} \left(\eta_x + \frac{h^2}{6} \eta_{xxx} + \frac{3}{2h} \eta \eta_x \right) = 0 \quad (18)$$

DOVE L'ACQUA E' PIU' PROFONDA, IL TERMINE NON LINEARE NELLA (18) DIVENTA TRASCURABILE (VA COME $\sim \frac{1}{\sqrt{h}}$) E TROVAMO LA (17). VICINO A RIVA h E' PICCOLO:

$$\eta_t + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \eta_x = 0(\sqrt{h})$$

RI Troviamo CIOE' L'EQUAZIONE DI HOPF, IL CUI PROFILO SI ROMPE ABBINANDO A RIVA (E' LA COSIDDETTA "CATASTROFE DEL GRADIENTE").

IL METODO DELLA TRASFORMATTA SPETTRALE

V

NEL SECONDO CAPITOLO ABBIAMO STUDIATO L'EQUAZIONE KdV LINEARIZZATA CON IL METODO DELL'ANALISI DI FOURIER. LA STESSA TECNICA NON PUO' ESSERE APPLICATA, TUTTAVIA, NEL CASO NONLINEARE.

INTRODUCIAMO IN QUEST'ULTIMO CAPITOLO IL METODO DELLA TRASFORMATTA SPETTRALE, GRAZIE A CUI UN'EQUAZIONE DI EVOLUZIONE NONLINEARE E INTEGRABILE PUO' ESSERE RIDOTTA A UN'EQUAZIONE DI EVOLUZIONE LINEARE.

COPPIA DI LAX PER L'EQUAZIONE KdV

L'EQUAZIONE DI KdV SI SCRIVE, RISCALANDO OPPORTUNAMENTE x E t ,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad u(x,0) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1)$$

INTRODUCIAMO LA COPPIA

$$\begin{cases} (-\partial_x^2 + u(x,t))\Psi = E\Psi \\ \Psi_t = -4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3u_x\Psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{L}\Psi = E\Psi \\ \Psi_t = \hat{M}\Psi \end{cases} \quad \begin{matrix} (2a) \\ (2b) \end{matrix}$$

LA CUI INTEGRABILITA' SIMULTANEA EQUIVALE ALLA (1): BASTA RICHIEDERE

$$(\hat{L}\Psi)_t = \hat{L}_t\Psi + \hat{L}\Psi_t = \hat{L}_t\Psi + \hat{L}\hat{M}\Psi$$

$$(E\Psi)_t = E_t\Psi + E\Psi_t = E_t\Psi + E\hat{M}\Psi = E_t\Psi + \hat{M}\hat{L}\Psi$$

(CONDIZIONE DI COMPATIBILITA'), EQUIVALENTE ALL'EQUAZIONE OPERATORIALE

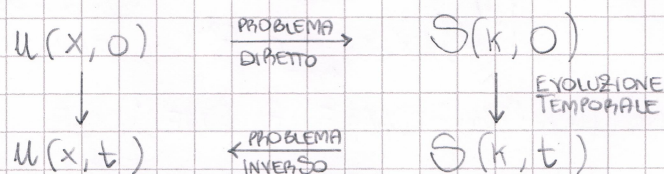
$$(\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{M}])\Psi = E_t\Psi \quad \forall \Psi$$

(EQUAZIONE DI HEISENBERG). SE $E_t = 0$, SEGUE

$$\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{M}] = 0 \quad (3)$$

E' ELEMENTARE MOSTRARE CHE LA (3) EQUIVALE ALLA KdV (1).

LA CONDIZIONE INIZIALE $u_0(x)$ PER LA KdV DIVENTA COSI' IL POTENZIALE PER IL PROBLEMA DI STURM-LIOUVILLE (2a). SEGUIREMO QUESTO PERCORSO:



DOVE $S(k)$ SONO I "DATI SPETTRALI", OVERO GLI AUTOVALORI PER LO SPETTRO DISCRETO E ALTRI DATI DI SCATTERING PER LO

SPETTRO CONTINUO. SI NOTI CHE NON SI TRATTA DI UNA TRASFORMAZIONE LINEARE: AL POTENZIALE $(u_1 + u_2)$ NON CORRISPONDE $(\sigma_1(k) + \sigma_2(k))$.

IL VANTAGGIO È CHE L'EVOLUZIONE TEMPORALE DI $\psi(k)$ SARÀ BANALE.

IL PROBLEMA DIRETTO: LO SPETTRO CONTINUO

$$\begin{cases} \psi_{xx} = (u - E)\psi \\ u = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (4)$$

DALLA MECCANICA QUANTISTICA SAPPIAMO CHE IL SEGNO DI $(u - E)$ NELLA (4) DETERMINA IL TIPO DI SOLUZIONI. SUPPONENDO $u(\pm\infty) = 0$, DISTINGUIAMO:

a) $E > 0$: SPETTRO CONTINUO. ψ È LIMITATA A $\pm\infty$ (OSILLA).

b) $E < 0$: $\psi \sim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\pm\sqrt{E}x} \sim \cosh(), \sinh()$.

TALI SOLUZIONI ESPLODONO A $\pm\infty$, OPPURE VANNO A ZERO ($\psi \in L^2$) PER ALCUNI VALORI DI 'E': È LO SPETTRO DISCRETO E TALI 'E' SONO AUTONALORI.

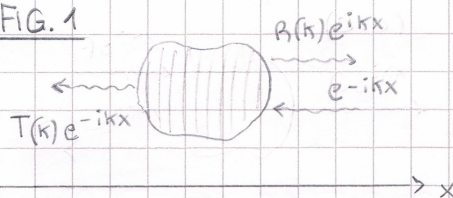
CONCENTRIAMOCI SUL CASO (a) E SIA $E = k^2 > 0$, CON k NUMERO D'ONDA. PER VISUALIZZARLO, PENSIAMO A UN PROBLEMA DI SCATTERING DOWE UN FASCO È LANCIATO DA $+\infty$ SU DI UN BERSAGLIO: SIAMO INTERESSATI, AD ESEMPIO, AI COEFFICIENTI DI TRASMISSIONE E DI RIFLESSIONE AL VARIARE DI k .

CI ASPETTIAMO, PER LA FUNZIONE D'ONDA ψ DEL SISTEMA, IL SEGUENTE COMPORTAMENTO ASINTOTICO:

$$\psi \sim_{x \rightarrow -\infty} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi \sim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

FIG. 1



COME POSSIBILI BASEI PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI (DI DIMENSIONE 2), INTRODUCIAMO LE FUNZIONI DI JOST, DEFINITE UNIVOCAMENTE DALLE CONDIZIONI

$$\begin{cases} \psi_1(x, k) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} & (C=0, D=1) \\ \psi_2(x, k) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{ikx} & (C=1, D=0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x, k) \sim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} & (A=0, B=1) \\ \psi_2(x, k) \sim_{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} & (A=1, B=0) \end{cases}$$

USANDO LE SIMMETRIE DELL'EQUAZIONE (4) PER RIDURLE A DUE: SE

$\psi(x, k)$ È SOLUZIONE, LO SONO ANCHE $\psi(x, -k)$ E $\psi^*(x, k)$. RIDEFINIAMO

$$\begin{cases} \psi(x, k) \equiv \psi_1(x, k) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} \\ \psi_2(x, k) \equiv \psi(x, -k) = \psi^*(x, k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(x, k) \equiv \psi_1(x, k) \sim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} \\ \psi_2(x, k) = \psi(x, -k) = \psi^*(x, k) \end{cases}$$

IL CAMBIAMENTO DI BASE TRA I DUE STATI ASINTOTICI E' DATO DALLA MATRICE DI SCATTERING

$$\begin{pmatrix} \psi(x, k) \\ \psi^*(x, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ a^*(k) & b^*(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x, k) \\ \psi^*(x, k) \end{pmatrix} \quad (5)$$

RICORDIAMO INOLTRE IL TEOREMA DEL WRONSKIANO. DEFINENDO FORMALMENTE

$$W(f_1, f_2) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_{1x} \\ f_2 & f_{2x} \end{pmatrix} = f_1 f_{2x} - f_{1x} f_2$$

VALE LA SEGUENTE PROPRIETA': SE f_1, f_2 RISOLVONO L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER,

$$\frac{d}{dx} W(f_1, f_2) = 0$$

POSSO PERCO' CALCOLARE W A $\pm\infty$ E UGUAGLIARE I RISULTATI:

$$W(\psi, \psi^*)|_{x \rightarrow -\infty} = \psi \psi_x^* - \psi_x \psi^* = 2ik$$

$$W(\psi, \psi^*)|_{x \rightarrow +\infty} = W(a\psi + b\psi^*, a^*\psi + b^*\psi^*) = (|a|^2 - |b|^2) W(\psi, \psi^*) = (|a|^2 - |b|^2) 2ik$$

DA CUI DISCENDE LA CONDIZIONE DI UNITARIETA'

$$|a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (6)$$

DEFINIAMO INFINE I COEFFICIENTI DI TRASMISSIONE E RIFLESSIONE

$T(k)$ E $R(k)$, IN ACCORDO CON LA FIG. 1 :

$$R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$$

$$T(k) = \frac{1}{a(k)}$$

LA CONDIZIONE (6) DIVENTA ALLORA

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (7)$$

PASSAGGIO ALLA FORMULAZIONE INTEGRALE

VOGLIAMO RISCRIVERE LA (4) COME UN' EQUAZIONE INTEGRALE, POICHE':

i) A DIFFERENZA DEGLI OPERATORI DIFFERENZIALI, QUELLI INTEGRALI SONO LIMITATI.

ii) RACCOGLIAMO IN UNA SOLA EQUAZIONE ANCHE LE CONDIZIONI AL CONFINO.

LO STRUMENTO PER FARLO E' LA FUNZIONE DI GREEN.

PER L'AUTOFUNZIONE DI SINISTRA ABBIAMO

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] \psi = u(x) \psi \\ \psi \sim e^{-ikx} \end{cases} \quad (8)$$

CERCHIAMO LA FUNZIONE DI GREEN, OSSIA QUELLA $G(x, k)$ CHE SODDISFA

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G(x, k) = \delta(x) \quad (9)$$

POSSO ALLORA COSTRUIRE L'EQUAZIONE INTEGRALE NELL' INCOGNITA $\psi(x, k)$

$$\psi(x, k) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y, k) u(y) \psi(y, k) dy + \psi_0(x, k) \quad (10)$$

DOVE ψ_0 RISOLVE L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) \psi_0(x, k) = 0$$

LA (9) È UN'EQUAZIONE DEL II ORDINE (HO DUE PARAMETRI LIBERI); SODDISFO LE CONDIZIONI AL CONTOURNO DELLA (8) SCEGLIENDO

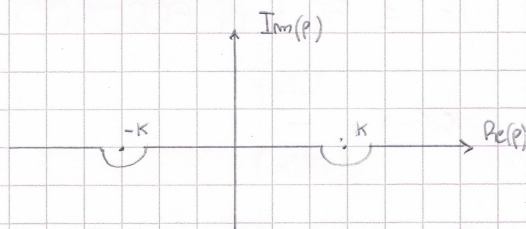
$$\begin{cases} \psi_0(x, k) = e^{-ikx} \\ G(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{cases} \quad (11)$$

APPLICANDO LA TRASFORMATTA DI FOURIER AI DUE MEMBRI DELLA (9),

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi} (k^2 - p^2) \hat{G}(p) e^{ipx} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \Rightarrow \hat{G}(p) = \frac{1}{k^2 - p^2}$$

RICAVO QUINDI $G(x, k)$ INTEGRANDO NEL PIANO COMPLESSO

$$G(x, k) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ipx}}{p^2 - k^2}$$



DEFORMO IL CAMMINO COME IN FIGURA,

INDENTANDOLO ATTORNO AI DUE POLI SEMPLICI SULL' ASSE REALE E CHIUDENDOLO CON UN ARCO NEL SEMIPIANO $\text{Im}(p) > 0$ SE $x > 0$, OPPURE IN QUELLO INFERIORE SE $x < 0$. OTTENGO

$$G^+(x, k) = \theta(x) \frac{\sin kx}{k}$$

CHE SODDISFA LE CONDIZIONI (11). POSSO COSTRUIRE

$$\psi(x, k) = \int_{-\infty}^x dy \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi(y, k) + e^{-ikx}$$

PER AGGIUNGERE LA SINGOLARITA' ESSENZIALE DI e^{-ikx} PER $k \in \mathbb{C} \rightarrow \infty$, PONGO

$$\mu^+(x, k) := \psi(x, k) e^{ikx}$$

COSÌ DA POTER RISOVRIVERE

$$\mu^+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x dy \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik} u(y) \mu^+(y, k) \quad (12)$$

SOSTITUENDO ITERATIVAMENTE NEL MEMBRO A DESTRA L'ESPRESSIONE DI μ^+ IN APPROSSIMAZIONE VIA VIA MIGLIORE, HO LA SERIE DI NEUMANN

$$\mu^+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik} u(y) dy + \dots \quad (13)$$

CONVERGE? INNANZITUTTO NOTO CHE NELLA (12) IL TERMINE

$$e^{2ik(x-y)} = e^{2i(k_R + i k_I)(x-y)} \sim e^{-2k_I(x-y)}$$

ESPLODE PER k IMMAGINARIO PURO NEL SEMIPIANO INFERIORE (NEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE E' SEMPRE $(x-y) > 0$): QUI NON C'E' SPERANZA CHE LA (13) CONVERGA. ALTROVE, INVECE, INTEGRA LA (13) PER PARTI E OTTENDO

$$\begin{aligned} \mu^+(x, k) &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x u(y) dy + \frac{1}{2ik} \left[-\frac{1}{2ik} e^{2ik(x-y)} u(y) \Big|_{-\infty}^x - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x e^{2ik(x-y)} u(y) dy \right] + \dots \\ &\quad \sim O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x u(y) dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad |k| \gg 1 \end{aligned} \quad (14)$$

DOVE SI E' ITERATA L'APPROSSIMAZIONE NELL'ULTIMO MEMBRO E SI E' USATA $u(y=-\infty)=0$. STUDIANDO SINGOLARMENTE I TERMINI DELLA (14) SI SCOPRE CHE SONO ANALITICI PER $\text{Im}(k) > 0$ E CHE LA SERIE E' UNIFORMEMENTE CONVERGENTE IN TALE DOMINIO, DOVE $\mu^+(x, k)$ E' ANALITICA.

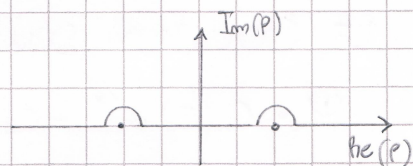
RIPETO L'INTERO STUDIO PER L'AUTOFUNZIONE DI DESTRA, CHE DEVE SODDISFARE

$$\Psi(x, k) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-ikx}$$

DEFORMANDO IL CAMMINO COME IN FIGURA, COSTRUISCO LA $G(x, k)$

CHE SODDISFA $G(x, k) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$:

$$G^-(x, k) = - \int_{\Gamma} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ipx}}{p^2 - k^2} = -\theta(-x) \frac{\sin(kx)}{k}$$



DA CUI RICAVO L'EQUAZIONE INTEGRALE PER Ψ

$$\Psi(x, k) = e^{-ikx} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin k(x+y)}{k} u(y) \Psi(y, k) dy$$

DI NUOVO, DEFINISCO

$$\mu^-(x, k) := \Psi(x, k) e^{ikx}$$

$$\mu^-(x, k) = 1 - \int_x^{+\infty} \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ik} u(y) \mu^-(y, k) dy$$

$$= 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^{+\infty} u(y) dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad |k| \gg 1 \quad (15)$$

DOVE SI È SVILUPPATO IN SERIE E INTEGRATO PER PARTI IN MODO ANALOGO ALLA (14); LA DIFFERENZA È CHE ORA $(x-y) < 0$, PERCIÒ PROLUNGO ANALITICAMENTE $\mu^-(x, k)$ NEL SEMIPIANO INFERIORE $\text{Im}(k) < 0$.

LA (15) PUÒ ESSERE INVERTITA, PER ALTE ENERGIE, A DARE

$$u(x) = -2i \partial_x \lim_{k \rightarrow \infty} [k(\mu^-(x, k) - 1)] \quad (16)$$

IL PROBLEMA DIRETTO: LO SPETTRO DISCRETO

ABBIAMO VISTO COME I VALORI DI $k \in \mathbb{R}$ DANO LUOGO ALLO SPETTRO CONTINUO PER L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER. DOPO AVER INTRODOTTO LE FUNZIONI DI JOST, ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA DELLO SCATTERING RICAVANDO LA MATRICE (5), CHE LEGA I DUE STATI ASINTOTICI DEL PROBLEMA PER $x \sim \pm\infty$. È SEMPLICE MOSTRARE CHE I COEFFICIENTI $a(k)$ E $b(k)$ CHE VI FIGURANO SODDISFANO

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W(\Psi(k), \Psi^*(k)) \quad (17)$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} W(\Psi(k), \Psi(k)) \quad (18)$$

SIAMO PRONTI A STUDIARE CHE COSA SUCCEDER QUANDO

$$E = k^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad k = ip \in \mathbb{C}, \quad p > 0$$

LE SOLUZIONI DELLA (4) AVRANNO LA FORMA

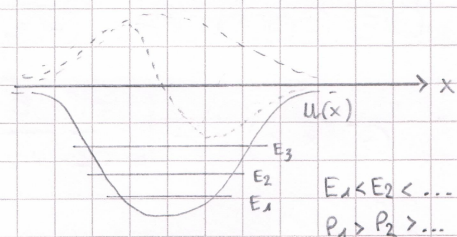
$$\Psi \sim C_1(E) e^{ix} + C_2(E) e^{-ix}$$

E SOLAMENTE PER PARTICOLARI VALORI DI 'E'

I DUE RAMI DI ESPONENZIALE SI RACCORDERANNO,

DANDO LUOGO A SOLUZIONI $\Psi \in L^2$ CHE VANNO A ZERO ALL' ∞ E NON

OSILLANO. TALI VALORI DI 'E' FORMANO LO SPETTRO DISCRETO,



PER STUDIARE CHE COSA SUCCEDDE PER $k \in \mathbb{C}$, PRENDIAMO IL PROLONGAMENTO DELLE FUNZIONI DI JOST CON CUI ABBIAMO RISOLTO, PER $k \in \mathbb{R}$, IL PROBLEMA DI SCATTERING. NOTIAMO PREVENTIVAMENTE CHE LA (17) SI MODIFICA COME

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W(\psi(k), \psi^*(k^*)) = \frac{1}{2ik} [\psi \partial_x \psi^* - \psi^* \partial_x \psi] \quad (19)$$

RICORDIAMO CHE $\psi(k)$ È ANALITICA PER $\text{Im}(k) > 0$ E $\psi(k)$ PER $\text{Im}(k) < 0$, PERCIÒ $\psi^*(k^*)$ È ANCH'ESSA ANALITICA PER $\text{Im}(k) > 0$. POICHÉ ∂_x AGISCE SOLO SUL PARAMETRO x , SEGUE CHE $a(k)$ È ANALITICA PER $\text{Im}(k) > 0$. OSSERVANDO LA (14) E (15) NOTIAMO CHE

$$\mu^+, \mu^- \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$$

USANDO LE DEFINIZIONI

$$\mu^+ = \psi e^{ikx}$$

$$\mu^- = \psi e^{ikx}$$

SEGUE DALLA (19) CHE

$$a(k) \xrightarrow[|k| \gg 1]{} 1$$

(20)

INVECE $b(k)$ NON HA PARTICOLARI PROPRIETÀ DI ANALITICITÀ.

DATO IL CAMBIAMENTO DI BASE (5), DIVIDENDO PER $a(k)$ L'ESPRESSIONE PER ψ

$$\frac{\psi}{a} = \psi + \frac{b}{a} \psi^*$$

$$T(k)\psi(x, k) = \psi(x, k) + b(k)\psi^*(x, k^*) \quad (21)$$

IL MEMBRO A SINISTRA È ANALITICO PER $\text{Im} k > 0$ AD ECCEZIONE DEGLI ZERI DI $a(k)$; $\psi(k)$ È ANALITICA PER $\text{Im} k < 0$ E $\frac{b}{a} \psi^*$ NON LA È IN GENERALE.

MOSTRIAMO ORA CHE GLI ZERI DI $a(k)$ COSTITUISCONO LO SPETTRO DISCRETO. PER VEDERLO, PONIAMO

$$k_0 = i\rho_0 \quad \text{t.c.} \quad a(k_0) = 0$$

DALLA (5) LEGGAMO

$$\psi(k_0) = a(k_0)\psi(k_0) + b(k_0)\psi^*(k_0^*) = b(i\rho_0)\psi^*(-i\rho_0) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} b(i\rho_0)e^{-\rho_0 x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\psi(k_0) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-ik_0 x} = e^{\rho_0 x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0$$

CIÒ SIGNIFICA CHE $\psi_0(x, k_0)$ E $\psi^*(x, k_0^*)$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI (IN EFFETTI $a(k)$ È IL LORO WRONSKIANO, UNA MISURA DELL'INDIPENDENZA);

INOLTRE LA $\varphi(x, k_0)$ COSÌ OTTENUTA VA A ZERO A $\pm\infty$ ED HO $\varphi(x, k_0) \in L^2(\mathbb{R})$.

QUANTI SONO QUESTI ZERI? DOVE $a(k)$ È ANALITICA (COE' PER $\text{Im}(k) > 0$), I SUOI ZERI NON POSSONO AVERE PUNTI DI ACCUMULAZIONE. POTREI AVERNE:

i) ALL' INFINITO; MA SI È VISTO NELLA (20) CHE $a(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 1$.

ii) SULL' ASSE REALE; MA LA CONDIZIONE DI UNITARIETÀ' (6) DAREBBE

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -|b(k)|^2 = 1$$

HO PERCIÒ UN NUMERO FINITO DI ZERI DI $a(k)$, CON $\text{Im}(k) > 0$,

$$k_m = i p_m, \quad m = 1, \dots, N$$

$$p_1 > p_2 > \dots > p_N > 0$$

SU CUI VALE

$$\varphi(x, i p_m) = b_m \varphi^*(x, -i p_m)$$

$$\varphi(x, i p_m) \sim \begin{cases} e^{p_m x} & x \sim -\infty \\ b_m e^{-p_m x} & x \sim +\infty \end{cases}$$

φ È REALE PER $x \sim -\infty$, QUINDI LO RIMANE SEMPRE (L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER È A COEFFICIENTI REALI): SE NE DEDUCE CHE

$$b_m = b(k_m) \in \mathbb{R}$$

È INFINE POSSIBILE MOSTRARE CHE I k_m SONO ZERI SEMPLICI DI $a(k)$ E CHE

$$b_m \cdot i a'(i p_m) > 0 \quad \forall m = 1, \dots, N \quad \Rightarrow \quad i a'(i p_m) \in \mathbb{R} \quad \text{E} \quad p_m := \frac{b_m}{i a'(i p_m)} > 0$$

IL PROBLEMA DIRETTO È COSÌ CONCLUSO: DATO IL POTENZIALE $u(x)$, HO TROVATO

$$u(x) \rightarrow \mathcal{S}[u](k) = \left\{ \begin{array}{l} R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \\ p_m > 0 \text{ E } \beta_m > 0, \quad m = 1, \dots, N \quad (2N \text{ NUMERI REALI}) \end{array} \right\}$$

• IL PROBLEMA INVERSO

SI TRATTA STAVOLTA DI RICOSTRUIRE $u(x)$ A PARTIRE DALLA SUA TRASFORMATTA SPETTRALE $\mathcal{S}[u](k)$.

RIPARTIAMO DALLA (21), CHE IN TERMINI DI $\mu^+(k)$ E $\mu^-(k)$ SI SCRIVE

$$\frac{\mu^+(k)}{a(k)} = \mu^-(k) + R(k) \mu^{-*}(k^*) e^{2ikx} \quad k \in \mathbb{R} \quad (22)$$

LA FUNZIONE A SINISTRA DELL' UGUALE È PROLUNGABILE NEL SEMIPIANO $\text{Im}(k) > 0$, DOVE È MEROMORFA (OSSIA ANALITICA AD ESCLUSIONE

DI POLI ISOLATI, CHE QUI SONO GLI ZERI DI $a(k)$). COME TALE, ESSA AMMETTE UNO SVILUPPO DI MITTAG-LEFFLER

$$\frac{\mu^+(k)}{a(k)} = \varphi^+(k) + \sum_{m=1}^N \frac{\text{Res}\left(\frac{\mu^+}{a}, ip_m\right)}{(k - ip_m)} = \varphi^+(k) + \sum_{m=1}^N \frac{1}{(k - ip_m)} \frac{\mu^+(ip_m)}{a'(ip_m)}$$

DOVE $\varphi^+(k)$ È UNA FUNZIONE ANALITICA PER $\text{Im}(k) > 0$. USANDO OPA

$$\mu^+(ip_m) = \varphi(k_m) e^{ik_m x} = b_m \varphi^*(k_m^*) e^{ik_m x} = b_m \mu^-(k_m^*) e^{2ik_m x} = b_m \mu^*(-ip_m) e^{-2ip_m x}$$

POSSO RISCRIVERE

$$\begin{aligned} \frac{\mu^+(k)}{a(k)} &= \varphi^+(k) + \sum_{m=1}^N \frac{b_m}{a'(ip_m)} \frac{\mu^*(-ip_m) e^{-2ip_m x}}{(k - ip_m)} \\ &= \varphi^+(k) + i \sum_{m=1}^N b_m \mu^*(-ip_m) \frac{e^{-2ip_m x}}{(k - ip_m)} \end{aligned} \quad (23)$$

IN QUESTO MODO LA SOMMATORIA A DESTRA DEFINISCE UNA FUNZIONE ANALITICA PER $\text{Im}(k) < 0$. NOTIAMO INOLTRE CHE

$$\mu^+(k), a(k) \xrightarrow{|k| \gg 1} 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi^+(k) \xrightarrow{|k| \gg 1} 1$$

INTRODUCIAMO I DUE PROIETTORI DI ANALITICITÀ

$$P^\pm f(k) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(k')}{k' - (k \pm i\varepsilon)} dk' \quad (24)$$

IL CUI DOMINIO È COSTITUITO DALLE $f(k)$ FUNZIONI DI HÖLDER, OIÈ E.C.

$$\exists \mu \in (0, 1], C > 0: |f(k_2) - f(k_1)| < C |k_2 - k_1|^\mu \quad \forall k_1, k_2$$

E PER LE QUALI

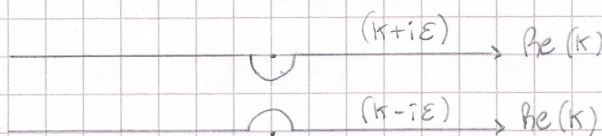
$$f(k) \underset{|k| \gg 1}{\sim} O\left(\frac{1}{|k|^{1+\delta}}\right)$$

ESPLICIAMO LA (24) INDENTANDO I CAMMINI COME IN FIGURA; SI OTTIENE

$$P^\pm f(k) = \frac{1}{2} f(k) \pm \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int \frac{f(k')}{k' - k} dk' \quad (25)$$

QUESTE SONO LE FORMULE DI

PLEMELY - SOKHOTSKI.



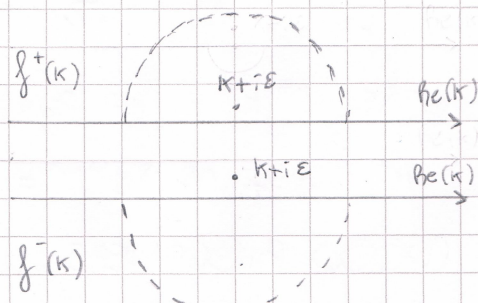
SI PUÒ MOSTRARE CHE LE $P^\pm f(k)$ SONO ANALITICHE RISPETTIVAMENTE PER $\text{Im}(k) \gtrless 0$ E CHE VANNO COME $\sim \frac{1}{k}$ PER $|k| \rightarrow \infty$.

MOSTRIAMO CHE SI TRATTA DI PROIETTORI. PRESA $f^+(k)$ ANALITICA "SOPRA",

$$P^+ f^+(k) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^+(k')}{k' - (k + i\varepsilon)} dk' = \text{Res} \left(\frac{f^+(k')}{k' - k}, k + i\varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f^+(k)$$

SE $f^-(k)$ È ANALITICA "SOTTO", CHIUDO SOTTO:

$$P^+ f^-(k) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^-(k')}{k' - (k + i\varepsilon)} dk' = 0$$



SI SONO COSÌ MOSTRATE

$$(P^+)^2 = P^+, (P^-)^2 = P^-$$

$$P^+ P^- = P^- P^+ = 0$$

USANDO INFINE LA (25), SEGUE LA RELAZIONE DI COMPLETEZZA

$$P^+ + P^- = 1 \quad (26)$$

GRAZIE ALLA (26) POSSIAMO RISCRIVERE LA (22) COME

$$\frac{\mu^+(k)}{a(k)} = \mu^-(k) + (P^+ + P^-) b(k) \mu^{-*}(k^*) e^{2ikx}$$

ESPRIMENDO IL MEMBRO DI SINISTRA TRAMITE LA (23) SI TROVA

$$[\psi^+(k) - 1] - P^+ [b(k) \mu^{-*}(k^*) e^{2ikx}] = \mu^-(k) - \sum_{m=0}^N i p_m \frac{\mu^{-*}(-ip_m) e^{-2ip_m x}}{(k - ip_m)} + P^- [b(k) \mu^{-*}(k^*) e^{2ikx}] - 1$$

DOVE SI SONO RACCOLTI, A DESTRA E SINISTRA DELL' UGUALE, I TERMINI CON LO STESSO SEMIPIANO DI ANALITICITÀ. SI NOTI CHE

$$[\psi^+(k) - 1] \xrightarrow{|k| \gg 1} 0$$

APPARTENENDO COSÌ AL DOMINIO DEI PROIETTORI $P^\pm$, APPLICANDO P^- A DESTRA E SINISTRA DELL' UGUALE SI TROVA INFINE

$$\mu^-(k) = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{i p_m \mu^{-*}(-ip_m)}{(k - ip_m)} e^{-2ip_m x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{b(k') \mu^{-*}(k'^*) e^{2ik'x}}{k' - (k - i\varepsilon)} dk' \quad (27)$$

CHE È UN'EQUAZIONE INTEGRALE LINEARE PER $\mu^-(k)$. LE INCOGNITE CHE VI FIGURANO, $\mu^-(ip_m)$, SI CALCOLANO TRAMITE LA (27) STESSA:

$$\mu^-(ip_m) = 1 - \sum_{m=1}^N \frac{p_m \mu^-(ip_m)}{p_m + ip_m} e^{-2ip_m x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{b(k') \mu^{-*}(k'^*) e^{2ik'x}}{k' + ip_m} dk' \quad (28)$$

IL PROBLEMA INVERSO SI CONCLUDE USANDO LA (16) PER RICAVARE DALLA (27)

$$u(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} (-2ik) [\mu^-(k) - 1] \right\}$$

$$= \frac{d}{dx} \left\{ 2 \sum_{m=1}^N \beta_m \mu^-(-i p_m) e^{-2 p_m x} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} B(k) \mu^{-*}(k^*) e^{2ikx} dk \right\} \quad (29)$$

NELLA (29), LA SOMMATORIA CORRISPONDE ALLO SPETTRO DISCRETO E L'INTEGRALE A QUELLO CONTINUO. NOTIAMO UNA SOSTANZIALE SEMPLIFICAZIONE IN ASSENZA DI SPETTRO DISCRETO (LIMITE DI CAMPO DEBOLE, $\lim k \ll 1$):

$$u(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} B(k) e^{2ikx} \right), \quad (30)$$

RITROVIAMO UNA TRASFORMATA DI FOURIER (CHE LA TRASFORMATA SPETTRALE GENERALIZZA NEL CASO NON LINEARE).

EVOLUZIONE TEMPORALE

NON RESTA CHE STUDIARE COME EVOLGONO NEL TEMPO I DATI DI SCATTERING. INTRODUCIAMO LA COPPIA DI LAX (EQUIVALENTE ALLA (2))

$$\begin{cases} \psi_{xx} = (u^2 - k^2) \psi \end{cases} \quad (31a)$$

$$\begin{cases} \psi_t = [C(k) - u_x] \psi + (ik^2 + 2u) \psi_x \end{cases} \quad (31b)$$

LA CONDIZIONE DI COMPATIBILITA' $(\psi_{xx})_t = (\psi_t)_{xx}$ RESTITUISCE IL PROBLEMA KdV (1), CON $C(k)$ COSTANTE ARBITRARIA.

RICORDIAMO CHE $u(\pm\infty) = 0$ E CHE

$$\psi \underset{x \sim -\infty}{\sim} e^{-ikx}$$

$$\psi = a\psi + b\psi^* \underset{x \sim +\infty}{\sim} ae^{-ikx} + be^{ikx}$$

CALCOLIAMO ALLORA LA (31b) PER $x \sim -\infty$,

$$(e^{-ikx})_t \sim C(k) e^{-ikx} + ik^2 (-ik) e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow C(k) = ik^3$$

E PER $x \sim +\infty$, DOVE

$$a_t e^{-ikx} + b_t e^{ikx} \sim ik^3 (ae^{-ikx} + be^{ikx}) + ik^2 (ik) (-ae^{-ikx} + be^{ikx})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a(k))_t = 0 \\ (b(k))_t = 8ik^3 b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(k) = \text{cost.} \Rightarrow p_m = p_m(0) \\ b(k, t) = b(k, 0) e^{8ik^3 t} \end{cases}$$

SEGUONO QUINDI

$$b(k, t) = b(k, 0) e^{8ik^3 t}$$

$$\beta_m(t) = \beta_m(0) e^{8p_m^3 t} \quad (32)$$

NEL LIMITE DI CAMPO DEBOLE, USANDO LA (30) SI OTTIENE

$$u(x, t) \approx \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} b(k, 0) e^{2ikx + 8ik^3 t} dk \right)$$

DALL'O STUDIO EFFETTUATO NEL SECONDO CAPITOLO, SAPPIAMO CHE QUESTO OGGETTO SI DISSPERDE A SINISTRA CON AMPIEZZA CHE DECRESCIE COME $\frac{1}{\sqrt{t}}$. STUDIAMO ALLORA IL COMPORTAMENTO DELLO SPETTRO DISCRETO: VEDREMO CHE SI TRATTA DEL CONTRIBUTO PIÙ INTERESSANTE.

SOLITONI

METTIAMO NELL'IPOTESI DI SPETTRO PURAMENTE DISCRETO: $b(k) = 0$. LA (28) NE RISULTA SEMPLIFICATA:

$$\mu^-(x, -ip_m) + \sum_{m=1}^N \beta_m \frac{\mu^-(x, -ip_m)}{p_m + p_m} e^{-2p_m x} = 1 \quad m = 1, \dots, N \quad (28a)$$

SI TRATTA DI UN SISTEMA NELLE INCOGNITE $\mu^-(x, -ip_m) := \mu_m(x)$.

DATA ALLORA UNA CONDIZIONE INIZIALE $u_0(x)$ PER LA KdV, RISOLVO IL PROBLEMA DIRETTO RICAVANDONE I DATI SPETTRALI

$$u_0(x) \rightarrow S[u_0](k) = \{p_m > 0, \beta_m > 0, m = 1, \dots, N\}$$

RISOLVO QUINDI IL SISTEMA (28a) E TROVO, USANDO LA (16),

$$u(x, t) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^N \beta_m(t) \mu_m(x) e^{-2p_m x} \quad (16a)$$

CON $\beta_m(t)$ DATO DALLA (32).

RISOLVIAMO, A TITOLO DI ESEMPIO, IL CASO $N=1$. LA (28a) SI RIDUCE A

$$\mu_1 \left[1 + \frac{\beta_1(t)}{2p_1} e^{-2p_1 x} \right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 (1 + e^{-\eta_1}) = 1 \quad (33)$$

DOVE SI È DEFINITA

$$e^{-\eta_1} := \frac{\beta_1(t)}{2p_1} e^{-2p_1 x} = \frac{\beta_1(0)}{2p_1} e^{-2p_1 x + 8p_1^3 t} =: e^{-2p_1(x - 4p_1^2 t - \gamma_1)}$$

E SI È CHIAMATA γ_1 LA FASE

$$\gamma_1 := \frac{1}{2p_1} \ln \left(\frac{\beta_1(0)}{2p_1} \right)$$

$$e^{2p_1 \gamma_1} := \frac{\beta_1(0)}{2p_1}$$

USANDO INFINE LA (16a) E RICAVANDO μ_1 DALLA (33), SI OTTIENE

$$u(x,t) = 2 \frac{d}{dx} p_1(t) e^{-2p_1 x} \mu_1 = 2(2p_1) \frac{d}{dx} \frac{e^{-\mu_1}}{1 + e^{-\mu_1}} = \frac{-2p_1^2}{\cosh^2[p_1(x - 4p_1^2 t) - \gamma_1]}$$

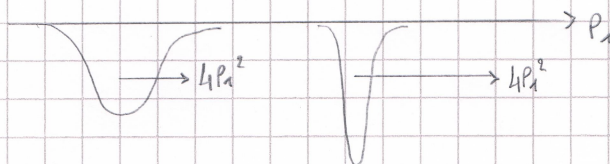
SI TRATTA DI UNA FUNZIONE CHE

TRASLA RIGIDAMENTE IN x NEL TEMPO

CON VELOCITÀ $4p_1^2$. L'AMPIEZZA VA

COME p_1^2 E LA LARGHEZZA COME p_1 , PERCIÒ AL CRESCERE DI p_1 SI HA

UN OGGETTO PIÙ ALTO E STRETTO E CHE VIAGGIA PIÙ VELOCE.



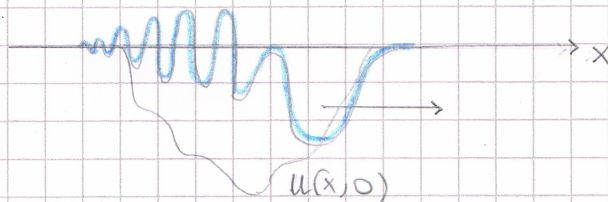
DATA ALLORA UNA CONDIZIONE INIZIALE $u(x,0)$, IMMAGINIAMO CHE LA SUA TRASFORMATTA SPETTRALE DIA UNO STATO LEGATO E UNO SPETTRO CONTINUO: $N=1$, $R(k) \neq 0$.

LO SPETTRO CONTINUO VIAGGIA VERSO

SINISTRA E SI DISPENDE, MENTRE LO

SPETTRO DISCRETO VIAGGIA VERSO

DESTRA DANDO LUOGO A UN SOLITONE.



L'EVOLUZIONE DI UN'ONDA D'ACQUA SI TROVA MANDANDO $u \rightarrow -u$

NELL'EQUAZIONE DI KdV, COSÌ DA CAMBIARE SEGNO AL TERMINE uu_x .

IL MODELLO SPIEGA ALLORA LE OSSERVAZIONI DI J.S. RUSSEL SU

ONDE LUNGHE RISPETTO ALLA PROFONDITÀ DEL CANALE (ABBIAMO

VISTO COME NEL LIMITE DI ACQUE POCO PROFONDE SI TROVA UNA

DEBOLE DISPERSIONE DESCRITTA DALLA KdV): EGLI DESCRISSE

"a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed."

(1834)