SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla realtà della funzione d'onda

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Candidato
Davide Venturelli
Matricola 1591191

Relatore
Prof. Fabio Sciarrino

Anno Accademico 2016/2017

Tesi discussa il 19 Ottobre 2017

Sulla realtà della funzione d'onda
Tesi di Laurea. Sapienza – Università di Roma

Questa tesi è stata composta con LaTeX e la classe Sapthesis.

Versione: 12 Ottobre 2017

Email dell'autore: venturelli.1591191@studenti.uniroma1.it

Ai miei genitori, che secondo me non hanno capito bene che cosa sia una funzione d'onda ma che non per questo hanno smesso di credere in me e in quello che faccio.

«Do you really believe the moon exists only when you look at it?»
Albert Einstein

Indice

Introduzione

In Meccanica Quantistica lo stato di un sistema fisico è rappresentato da una funzione d'onda. Non si tratta di un'onda fisica, ma è piuttosto definita in uno spazio astratto: è una funzione complessa delle coordinate spaziali e del tempo e il suo modulo quadro rappresenta la densità di probabilità dello stato sulle posizioni.
D'altra parte sono molti i fenomeni peculiarmente quantistici (primo tra tutti l'esperimento di Young sulla doppia fenditura) che ben si prestano ad essere descritti in termini di interferenza tra onde vere e proprie. Un approccio puramente pragmatico (*For All Practical Purposes*, o *FAPP*) suggerisce di adottare tale visione per la sua efficacia nelle applicazioni pratiche, lasciando però in sospeso il problema se sia il caso o meno di attribuire *realtà* alla funzione d'onda. Un'alternativa è infatti quella di considerare quest'ultima come uno *stato di conoscenza*: la funzione d'onda rappresenterebbe cioè non tanto la realtà del sistema descritto, quanto l'informazione che lo sperimentatore ne possiede in un dato momento. Tra i vantaggi di questo approccio c'è che fornisce una possibile interpretazione del *collasso* dello stato quantico, fenomeno altrimenti inspiegabile in termini di onde fisiche.
La questione è profonda e la necessità di venirne a capo si fa sempre più incalzante: riportando le parole di E. Jaynes,

> *«our present (quantum mechanical) formalism is not purely epistemiological; it is a peculiar mixture describing in part realities of Nature, in part incomplete human information about Nature — all scrambled up by Heisenberg and Bohr into an omelette that nobody has seen how to unscramble. Yet we think that the unscrambling is a prerequisite for any further advance in basic physical theory.»*[10]

In queste pagine ripercorriamo i momenti fondamentali che dalla nascita della Meccanica Quantistica ad oggi hanno arricchito il sopracitato dibattito. Iniziando dal noto paradosso EPR e dalla sua spiegazione, da parte di A. Einstein, in termini di *variabili nascoste*, inglobiamo questa visione all'interno della definizione moderna di *modello ontologico*. Dedichiamo quindi alcune pagine ad edificare l'impianto formale e teorico su cui poggia le basi il modello ontologico della Meccanica Quantistica. Mostriamo successivamente, sulle orme di J. Bell, come un modello a variabili nascoste *locali* conduca, quando confrontato con situazioni fisiche reali, a previsioni che contraddicono quelle della Meccanica Quantistica, concludendo quindi come quest'ultima sia incompatibile con il modello in questione. A questo punto abbandoniamo il requisito di *località* impiegato da Einstein e Bell per sostituirlo con quello più debole di *indipendenza* tra stati quantici preparati in modo autonomo; con una prova più elaborata, mostriamo come anche in questo caso si giunga a una contraddizione se si accetta il modello ontologico nella sua forma forte (ψ-*epistemico*). Nell'ultimo capitolo lasciamo cadere anche il requisito di indipendenza e mostriamo, con una prova puramente matematica, come i problemi sorgano non appena si ponga l'attenzione su sistemi di dimensione $d > 3$.

Capitolo 1

Richiami teorici

In questo capitolo sono esposti alcuni degli strumenti della Meccanica Quantistica[11][14] e della teoria dell'Informazione Quantistica[3] di cui faremo largo impiego nelle prossime pagine.

1.1 Sistemi a due livelli

Considerata una particella di spin $\frac{1}{2}$, la misura della proiezione del suo spin lungo una direzione dello spazio denotata con $\hat{z}$ restituisce come possibili valori solamente $\pm\frac{\hbar}{2}$: ecco un esempio di un sistema a due livelli. Come di consueto in Meccanica Quantistica, associamo a ciascuno dei possibili risultati della misura di s_z un vettore in uno spazio di Hilbert:

$$s_z \left|0\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left|0\right\rangle , \qquad s_z \left|1\right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \left|1\right\rangle \ . \tag{1.1}$$

Definendo l'operatore vettoriale $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ di modo che $\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, notiamo che $\left|0\right\rangle$ e $\left|1\right\rangle$ sono autovettori di σ_z di autovalori ± 1. Fissata allora la base

$$\left|0\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \left|1\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

(rappresentazione di Pauli), associamo una matrice a ciascuna delle tre componenti cartesiane di $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ . \tag{1.3}$$

Lavorando in coordinate sferiche (Fig 1.1), osserviamo che è possibile individuare lo stato del sistema tramite i due parametri angolari $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} \left|\psi\right\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \left|0\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \left|1\right\rangle \\ &\equiv \cos\frac{\theta}{2} \left|0\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \left|1\right\rangle \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove nell'ultimo passaggio si è raccolta una fase globale priva di significato fisico. Per visualizzare geometricamente $\left|\psi\right\rangle$, scegliamo una direzione generica nello spazio

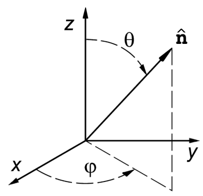


Figura 1.1. Misura della proiezione di $\boldsymbol{\sigma}$ sull'asse $\hat{\boldsymbol{n}}$ in coordinate sferiche.

individuata dal versore $\hat{\boldsymbol{n}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ e scriviamo la matrice associata alla proiezione

$$\sigma_n = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix} . \tag{1.5}$$

È immediato verificare che i suoi autostati, corrispondenti rispettivamente agli autovalori ± 1, sono proprio

$$\begin{aligned} |+\rangle_n &= \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} |0\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} |1\rangle = |\psi\rangle \\ |-\rangle_n &= -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} |0\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} |1\rangle = P|\psi\rangle \end{aligned} \tag{1.6}$$

dove si è chiamato P l'operatore che implementa la trasformazione $\boldsymbol{r} \mapsto -\boldsymbol{r}$. Se il sistema è in $|\psi\rangle$, una misura di σ_z restituirà il risultato ± 1 con probabilità data da

$$\mathcal{P}(+1) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}\,, \qquad \mathcal{P}(-1) = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}\,. \tag{1.7}$$

Usando le matrici di Pauli (1.3) e le definizioni degli operatori di salita e discesa $\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$, è infine possibile studiare le altre due componenti di $\boldsymbol{\sigma}$. Ad esempio σ_x ha come autovettori

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

corrispondenti rispettivamente agli autovalori ± 1. La (1.8) può essere riscritta in forma compatta per il ket $|x\rangle$, $x = \{0, 1\}$ e chiamando H la matrice che implementa il cambiamento di base $\sigma_z \to \sigma_x$:

$$H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{x\cdot k}|k\rangle \tag{1.9}$$

1.2 Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert

Consideriamo due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ di rispettive dimensioni d_1, d_2. Ad ogni coppia di vettori $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_2$ associamo un terzo vettore $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$: quest'ultimo vive nello spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ che prende il nome di *prodotto tensoriale* degli spazi $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Non è difficile dimostrare che $\mathcal{H}$ è a sua volta uno spazio di Hilbert di dimensione $d_1 \cdot d_2$.

Siano $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d_1}$ una base di $\mathcal{H}_1$ e $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d_2}$ una base di $\mathcal{H}_2$. Possiamo esprimere ogni vettore $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ nella forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle := \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle \tag{1.10}$$

e il prodotto scalare tra due vettori $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ come

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \sum_{ij} c_{ij}^* d_{ij} \ . \tag{1.11}$$

dove i d_{ij} sono i coefficienti di Fourier di $|\Phi\rangle$ nella base $|ij\rangle$.
Infine notiamo che ciascun operatore lineare O che agisce su $\mathcal{H}$ è esprimibile come una combinazione lineare di prodotti tensoriali tra operatori lineari A_m e B_n che agiscono rispettivamente su $\mathcal{H}_1$ o su $\mathcal{H}_2$:

$$O = \sum_{mn} \gamma_{mn} A_m \otimes B_n. \tag{1.12}$$

L'azione di O su un generico vettore di $\mathcal{H}$ è allora data da

$$O|\Psi\rangle = \left(\sum_{mn} \gamma_{mn} A_m \otimes B_n\right)\left(\sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle\right) = \sum_{ijmn} \gamma_{mn} c_{ij} (A_m |i\rangle) \otimes (B_n |j\rangle) \ . \tag{1.13}$$

1.3 Stati entangled

Per semplicità e per l'ampio uso che ne faremo nel seguito, mettiamoci nel caso $d_1 = d_2 = 2$ e costruiamo esplicitamente, a partire dalle basi $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$ e $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$ di $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$,

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\ |01\rangle &= |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \\ |10\rangle &= |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\ |11\rangle &= |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \end{aligned} \tag{1.14}$$

ossia una base di $\mathcal{H}$: lo stato più generale di $\mathcal{H}$ si scrive allora come nella (1.10). È possibile ridurre alcuni di questi vettori nella forma

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2 \tag{1.15}$$

dove compare il prodotto tensoriale tra due vettori $|\alpha\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ e $|\beta\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$: si parla allora di stati *separabili*. Ad esempio, è separabile lo stato

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1) \otimes |1\rangle_2 \ . \tag{1.16}$$

Basta tuttavia una rapida ispezione dello stato

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \tag{1.17}$$

per convincersi che non tutti i vettori di $\mathcal{H}$ sono separabili. Stati come $|\phi\rangle$ si dicono *entangled*, o *non-separabili*.

1.4 Il qubit

Il formalismo delle matrici di Pauli che abbiamo introdotto nel paragrafo 1.1 si presta agevolmente a descrivere non soltanto il caso delle particelle di spin $\frac{1}{2}$, ma di fatto un qualsiasi sistema quantistico a due livelli. Questo costrutto prende il nome, in Informazione Quantistica, di *qubit* e costituisce una generalizzazione del concetto di *bit*: se quest'ultimo può assumere solamente i valori 0 e 1, si è visto infatti come invece il qubit risieda in uno spazio di Hilbert bidimensionale e come sia possibile individuare il suo stato tramite due parametri reali (come abbiamo fatto nella (1.4)). Lo stato di un registro a n-bit classici è descritto da un intero $i \in [0, 2^n - 1]$; invece lo stato di un sistema di n-qubit è un vettore nello spazio di Hilbert 2^n-dimensionale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_{n-1}$ ed è perciò descritto da $2(2^n - 1)$ parametri reali e indipendenti (ogni stato è infatti definito a meno di una fase globale e dev'essere normalizzato).
È possibile implementare il qubit in un sistema fisico reale a condizione che:

(i) Possa essere preparato in uno stato ben definito detto *di fiducia* (come $|0\rangle$);

(ii) Ogni stato possa essere trasformato in qualsiasi altro stato;

(iii) Lo stato del qubit possa essere misurato nella base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$: ciò significa in pratica poter misurare la sua polarizzazione lungo l'asse $\hat{z}$.

Ma come si trasforma uno stato in un altro? Definiamo gli operatori di singolo qubit:

Definizione 1.1. *Hadamard gate. È la matrice del cambiamento di base da quella dell'operatore σ_z definita nella* (1.2) *a quella di σ_x definita nella* (1.8)*:*

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| \tag{1.18}$$

Definizione 1.2. *Phaseshift gate. È una rotazione di un angolo β attorno all'asse $\hat{z}$ della direzione $\hat{n}$ su cui è proiettata la polarizzazione del qubit:*

$$R_\beta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\sigma_z} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} |1\rangle\langle 1| \tag{1.19}$$

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.2, le trasformazioni si estendono a un sistema di più qubit prendendo il prodotto tensoriale di operatori di singolo qubit. Concludiamo citando, senza dimostrarli, due importanti risultati.

Teorema 1.3 (Holevo)**.** *Avendo a disposizione n qubit, è possibile rappresentare al massimo l'informazione contenuta in n bit classici.*

Se è vero che in generale servono infiniti bit per specificare i due parametri reali della (1.4), d'altro canto per recuperare quest'informazione è necessaria una proiezione sulla base computazionale: si ottiene quindi un bit. Per ricavare θ e φ servono infinite misure su infinite copie del qubit preparate in quello stato.

Teorema 1.4. *Ogni trasformazione unitaria di singolo qubit può essere costruita utilizzando unicamente i due gate Hadamard e Phaseshift definiti sopra.*

In particolare, partendo da $|0\rangle$ è possibile raggiungere lo stato generico definito nella (1.4) applicando $R_{\frac{\pi}{2}+\varphi} H R_\theta H |0\rangle$.

Capitolo 2

Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen

Il titolo *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* dell'articolo che A. Esistein, B. Podolsky e N. Rosen pubblicano nel 1935 lascia presagire la loro risposta negativa al quesito in esame[9]. È bene quindi chiarire innanzitutto quale requisito debba possedere una teoria per poter essere definita *completa*: per dirlo con le parole degli autori,

> *«Every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.»*

Ma chi sono gli *elementi della realtà fisica*? Ha senso definirli *a priori* o al contrario è necessario che la nostra nozione di *realtà* si fondi sui risultati di misure e esperimenti? La portata filosofica del problema trova riscontro nella ricchezza del dibattito che già a partire dal XVI secolo infuriava in Europa tra le posizioni razionaliste e quelle empiriste, per poi dipanarsi nei secoli a venire tra le diverse correnti epistemiologiche. Addentrarci in tale dibattito esula tuttavia dallo scopo di questa dissertazione: seguendo i passi di Einstein *et al.*, ci limitiamo qui a enunciare due principi che assumeremo provvisoriamente come criterio per la nostra ricerca.

(i) *Principio di realtà.* Se siamo in grado, senza disturbare il sistema in alcun modo, di predire con certezza (ossia con probabilità pari a 1) il valore di una certa quantità fisica, allora a questa corrisponde un elemento della realtà fisica indipendentemente dalla nostra osservazione.

(ii) *Principio di località.* Dati due sistemi che non sono connessi causalmente, il risultato di una misura eseguita su uno dei due sistemi non può influenzare il risultato di una misura effettuata sull'altro sistema.

Mostriamo con un esempio cosa si intende con il principio di realtà. Scelto un sistema la cui funzione d'onda $|\psi\rangle$ è un autostato di un operatore $\hat{A}$, cioè $\hat{A}\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle$, si è certi di trovare a ogni volta che si effettua sul sistema una misura dell'osservabile A a cui $\hat{A}$ è associato. Se ne deduce che esiste un elemento della realtà fisica corrispondente alla quantità fisica A. Vale la pena di sottolineare che il criterio così esposto è inteso come una condizione sufficiente, ma non necessaria, di realtà.

Il principio di località discende invece dalla teoria della relatività[1]. Mettiamoci in un sistema di riferimento inerziale e siano $E_1 = (\boldsymbol{x}_1, t_1), E_2 = (\boldsymbol{x}_2, t_2)$ le coordinate di due eventi nello spaziotempo di Minkowski. Definiamo l'intervallo spazio-temporale

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \parallel \Delta \boldsymbol{x} \parallel^2 \tag{2.1}$$

($\parallel \cdot \parallel$ è l'usuale norma euclidea, mentre Δs^2 rappresenta una distanza). Distinguiamo, in base al segno di Δs^2, intervalli di tipo

- Tempo: $\Delta s^2 > 0$
- Spazio: $\Delta s^2 < 0$

In questo quadro, due eventi si dicono causalmente disconnessi se a separarli è un intervallo di tipo spazio: assumendo infatti che nessun segnale possa propagarsi con velocità superiore a quella della luce, osserviamo che non esistono vettori che connettano i punti E_1 e E_2, per i quali perciò siamo portati ad escludere qualsiasi rapporto di causa e effetto.

2.1 Il problema

Una delle peculiarità della Meccanica Quantistica è il fatto che, detti $\hat{A}$ e $\hat{B}$ gli operatori corrispondenti a due diverse osservabili fisiche, se questi non commutano (ossia se $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$) allora una misura simultanea di A e B non è possibile: infatti, nota con certezza A, una misura di B altera lo stato del sistema al punto da vanificare la nostra conoscenza di A. Forti della sopracitata nozione di completezza, siamo allora costretti a dedurre che

(a) le due quantità A e B non possono avere realtà simultanea, oppure

(b) la descrizione quanto-meccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa.

Vediamo perché le due ipotesi sono incompatibili. Se A e B fossero simultaneamente elementi di realtà e se allo stesso tempo potessimo applicare la definizione di completezza, allora i loro valori dovrebbero rientrare nella descrizione data dalla funzione d'onda e risultare, di conseguenza, predicibili: da qui la contraddittorietà delle due affermazioni.
Assumiamo allora l'ipotesi (a) e mostriamo con un *gedanken experiment*[4] che, subordinatamente ai due principi esposti sopra, questa nasconde una contraddizione.

2.2 Un esperimento mentale

Immaginiamo che una sorgente S emetta una coppia di particelle di spin $\frac{1}{2}$ e che inizialmente il sistema complessivo si trovi nello stato di singoletto descritto dalla funzione d'onda

$$|\psi\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \, . \tag{2.2}$$

[1]Questo principio è implicitamente assunto nel derivare il paradosso, seppur mai espressamente citato nell'articolo di EPR.

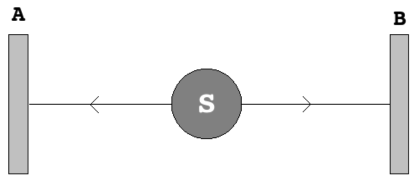


Figura 2.1. Schema dell'esperimento EPR.

Nel seguito, chiameremo $|\psi\rangle_z$ semplicemente stato EPR; notiamo che si tratta di uno stato entangled. Le due particelle sono ora separate e inviate a due osservatori arbitrariamente lontani tra loro (Fig 2.1): supponiamo che l'intervallo spazio-temporale che li separa sia di tipo spazio e che perciò le misure che i due effettuano non siano causalmente connesse. Ora Alice, la prima osservatrice, misura la componente lungo l'asse $\hat{z}$ dello spin della sua particella. Se ad esempio Alice ottiene $\sigma_z^{(A)} = +1$, lo stato EPR collassa nello stato $|01\rangle$. Supponiamo che adesso Bob, il secondo osservatore, decida di misurare σ_z sulla sua particella: sappiamo con certezza che otterrebbe $\sigma_z^{(B)} = -1$ (le misure di Alice e Bob sono cioè perfettamente anticorrelate). Stando al principio di realtà, concludiamo che alla quantità $\sigma_z^{(B)}$ corrisponde un elemento della realtà fisica.
Al lettore attento non sarà sfuggito che quanto affermato finora ha ben poco di paradossale. Immaginiamo infatti che la sorgente S emetta non più due particelle, ma due biglie, di cui una bianca e una nera. Alice riceve la sua biglia, la osserva e scopre che è nera: allora sa anche, istantaneamente e con certezza, che quando Bob osserverà la sua biglia troverà che è bianca!
Supponiamo invece di voler misurare σ_x, che non commuta con σ_z e i cui autovettori sono dati dalla (1.8). Come abbiamo visto nel paragrafo 1.1, per spostarci dalla base di σ_z a quella di σ_x applichiamo l'operatore del cambiamento di base definito nella (1.9); poiché il nostro stato EPR vive nello spazio prodotto tensoriale $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, tale operazione va ripetuta in ciascuno dei due spazi genitori. Forti degli strumenti introdotti nel paragrafo 1.2, possiamo scrivere[2]

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_x &= (H_A \otimes H_B)\,|\psi\rangle_z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A \otimes |-\rangle_B - |-\rangle_A \otimes |+\rangle_B\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Torniamo ora da Alice e supponiamo che ella misuri sulla sua particella $\sigma_x^{(A)} = +1$: questa volta lo stato EPR collassa su $|+-\rangle$. Se anche Bob misura σ_x, stavolta sappiamo che otterrà con certezza il risultato $\sigma_x^{(B)} = -1$. Concludiamo che è possibile associare a $\sigma_x^{(B)}$ un elemento della realtà fisica.

[2] Rifacendoci alle (1.6), potremmo in realtà dimostrare che lo stato di singoletto (2.2) è un invariante rotazionale: infatti assume, qualunque sia la direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ su cui lo si proietta, la forma

$$|\psi\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle_n - |-+\rangle_n)\,. \tag{2.3}$$

In effetti il singoletto, a cui è associato spin totale zero, non ha nello spazio una direzione preferenziale.

Analizziamo quanto è appena accaduto. Quando Alice sceglie di misurare $\sigma_x^{(A)}$ piuttosto che $\sigma_z^{(A)}$ sulla sua particella, sta influenzando anche lo stato della particella di Bob: questo infatti collassa rispettivamente in un autostato di $\sigma_x^{(B)}$ o di $\sigma_z^{(B)}$ e possiamo associare, in ciascuno dei due casi, un elemento di realtà fisica all'una o all'altra grandezza.
Nel paragrafo 2.1 abbiamo visto che due grandezze fisiche che non commutano non possono avere realtà fisica simultanea, pena l'incompletezza della teoria quanto-meccanica: dobbiamo dedurre che la scelta di Alice ha un effetto sugli elementi fisici di realtà su cui Bob effettua misure, in piena violazione del principio di località. La conclusione di EPR è inesorabile: la Meccanica Quantistica non è una teoria completa.

2.3 Le origini del dibattito

Alla luce di quanto visto, torniamo a considerare il caso di due osservabili che non commutano, come ad esempio l'impulso e la coordinata di una particella. Seguendo l'interpretazione dominante del fenomeno, quella di Copenhagen, affermiamo che quando l'impulso di una particella è noto, la sua coordinata non ha alcuna realtà fisica. Tale posizione, argomentano EPR, appare a prima vista ragionevole perché

> *«the information obtainable from a wave function seems to correspond exactly to what can be measured without altering the state of the system.»*

Celebre è in tal senso il punto di vista di Niels Bohr, che in un articolo del 1935 in risposta a quello di EPR scrive:

> *«Indeed the finite interaction between object and measuring agencies conditioned by the very existence of the quantum of action entails - because of the impossibility of controlling the reaction of the object on the measuring instruments if these are to serve their purpose - the necessity of a final renunciation of the classical ideal of causality [...].»*[5]

Eppure Einstein ha mostrato come sia possibile effettuare una misura su un sistema senza interagire direttamente con esso, sfruttando ad esempio le proprietà di due sistemi entangled. Alla luce di questo la posizione di Bohr appare poco soddisfacente: non si può ridurre il problema dell'indeterminazione a un mero risultato dell'interazione tra il misurando e lo strumento di misura.
La soluzione proposta da Einstein è che sia la teoria della Meccanica Quantistica stessa, e in particolare la presunta natura intrinsecamente probabilistica dei suoi enti, a necessitare di una diversa interpretazione:

> *«Assuming the success of efforts to accomplish a complete physical description, the statistical quantum theory would, within the framework of future physics, take an approximately analogous position to the statistical mechanics within the framework of classical mechanics.»*[8]

Capitolo 3

La natura della funzione d'onda

L'analisi di Einstein ci introduce a una questione più ampia: che cos'è la funzione d'onda? Che relazione c'è tra questa e il sistema fisico che ci proponiamo di descrivere? Affrontiamo la questione iniziando dall'analisi di un semplice esperimento[11].

3.1 Un esperimento reale

Una sorgente di luce polarizzata linearmente lungo una direzione $\hat{\epsilon}$ dirige un fascio luminoso di intensità I_0 verso un polaroid, così che $\hat{\epsilon}$ formi un angolo θ con la direzione $\hat{z}$ del suo asse ottico (come in figura 3.1(a)). Il fenomeno è ben descritto dalla legge di Malus, che predice un'intensità I del fascio uscente dal polaroid pari a

$$I = I_0 \cos^2 \theta \ . \tag{3.1}$$

Riduciamo ora l'intensità I_0 fino ad avere, in media, un solo fotone per volta nel percorso tra sorgente e polaroid; posizioniamo quindi un fotomoltiplicatore dietro al polaroid così da poter contare i fotoni che lo attraversano. Dopo aver inviato N fotoni possiamo costatare che:

1. se $\theta = 0°$ tutti i fotoni attraversano il polaroid;
2. se $\theta = 90°$ nessun fotone lo attraversa;
3. per θ generico, in media $N \cos^2 \theta$ fotoni passano e $N \sin^2 \theta$ non passano.

I primi due punti ci confermano che ha senso parlare di polarizzazione anche quando ci riferiamo a un singolo fotone. Ma cosa succede a un fotone con polarizzazione generica quando questo arriva sul polaroid? Ne passa una frazione soltanto? L'ipotesi è da scartare, perché la sua frequenza (e perciò la sua energia) rimane invariata. Possiamo unicamente affermare che la *probabilità* che il fotone passi attraverso il polaroid vale $\cos^2 \theta$, mentre quella che non passi vale $\sin^2 \theta$: non siamo in grado di esprimere una previsione esatta.
Mettiamo ora in evidenza un secondo fenomeno. Invece di una sorgente luminosa, consideriamone due (diciamo A e B): la prima emette luce polarizzata a $\theta = 0°$ e la seconda a $\theta = 90°$, così che in Meccanica Quantistica possiamo assegnare ai due fasci due stati quantici ortogonali. Se si osserva un fotone attraversare il polaroid, non c'è dubbio che questo provenga dalla sorgente A e non da B. Supponiamo ora di modificare l'angolo che la polarizzazione $\hat{\epsilon}_B$ della luce proveniente da B forma con

(a) (b)

Figura 3.1. Polarizzazione della luce nell'esperimento con il polaroid.

l'asse ottico del polaroid (Fig 3.1(b)), così che anche $\hat{\epsilon}_B$ abbia una componente non nulla lungo $\hat{z}$: gli stati quantici associati alle due sorgenti non sono più ortogonali. Ecco allora che non è più possibile distinguere con una singola misurazione da quale delle due sorgenti provenisse un fotone che ha attraversato il polaroid: avremmo bisogno di ripetere la misura su infinite copie del sistema per poterlo determinare con certezza.

3.1.1 L'interpretazione di Copenhagen

Secondo l'interpretazione di Copenhagen della Meccanica Quantistica, le affermazioni probabilistiche ivi contenute sono irriducibili: non riflettono, cioè, la nostra conoscenza limitata di qualche variabile nascosta. In fisica classica si ricorre talvolta alla probabilità anche se il processo è deterministico, così da sopperire a una nostra conoscenza incompleta delle condizioni iniziali: se ad esempio lanciamo un dado e affermiamo che vi è probabilità $\frac{1}{6}$ che esca un certo numero, ciò non toglie che sarebbe in linea di principio possibile, note con precisione le forze e le caratteristiche del dado, prevederne la traiettoria. Di contro, il carattere probabilistico della misura sul fotone descritta nell'esperimento sopra è *ineliminabile*: anche conoscendo tutti i dati iniziali è impossibile prevedere il risultato di un singolo esperimento, poiché è l'esperimento stesso a influenzarne il risultato.
Il polaroid che abbiamo descritto è uno strumento che misura la polarizzazione dei fotoni incidenti *subito dopo* che questi lo abbiano attraversato. Paradossalmente, non ha senso chiedersi quale fosse questa polarizzazione durante il percorso del fotone tra la sorgente e il polaroid: la Meccanica Quantistica studia esclusivamente quantità osservabili, ottenibili mediante processi di misurazione. L'atto della misurazione causa il *collasso* della funzione d'onda, in cui quest'ultima è costretta ad assumere uno soltanto dei valori permessi, secondo una probabilità verificabile solo attraverso più misurazioni.

3.2 Verso un modello ontologico

È proprio al fine di attaccare l'interpretazione appena esposta che Einstein presenta il suo paradosso: la Meccanica Quantistica non è *completa* perché è soltanto il nostro modo di descrivere quella realtà oggettiva suggiacente a cui le nostre attuali teorie non permettono di accedere. L'idea di un *vero stato* in cui far risiedere il sistema indipendentemente dalle nostre misure si concilia invece in maniera naturale con quel preconcetto secondo cui la *realtà*, in fondo, esista e sia deterministica (da qui il famoso *«God does not play dice with the universe»*). La convinzione di fondo è che non sia necessario supporre la natura intrinsecamente probabilistica del sistema per dare conto dei fenomeni che si osservano in Meccanica Quantistica: vediamone in dettaglio un esempio.

3.2.1 Quando gli stati non sono ortogonali

Stati quantici non ortogonali non possono essere distinti con certezza effettuando una singola misura. Mentre di primo acchito il fenomeno sembra peculiarmente quantistico, non è difficile individuare un'analogia con il mondo classico[1]. Consideriamo un mazzo da 52 carte e immaginiamo un dispositivo che possa funzionare con due diverse modalità:

- Modalità 1: è estratta a caso una carta rossa ($p = \frac{1}{26}$);
- Modalità 2: è estratto a caso uno degli assi ($q = \frac{1}{4}$).

È possibile determinare con certezza in quale delle due modalità sta operando la macchina estraendo solamente una carta? No, perché c'è sempre il rischio che capiti un asso di cuori. In altre parole, le due distribuzioni p e q non sono disgiunte, ma si sovrappongono parzialmente così da risultare entrambe non nulle in corrispondenza dell'asso di cuori.
Ciò suggerisce che, in modo analogo, sarebbe possibile spiegare l'indistinguibilità degli stati quantici se a questi corrispondessero distribuzioni parzialmente sovrapposte sullo spazio degli stati che il sistema fisico può assumere.

3.2.2 Due scuole di pensiero

Anche ammettendo il modello proposto da Einstein, ancora non si è definito il rapporto che sussiste tra il sistema e la funzione d'onda con cui lo rappresentiamo. Distinguiamo a tale scopo due possibili scenari.

(I) Modelli *ψ-ontici*: la funzione d'onda rappresenta lo stato fisico del sistema.

(II) Modelli *ψ-epistemici*: la funzione d'onda rappresenta la conoscenza o l'informazione che lo sperimentatore possiede del fenomeno in esame.

Vi sono ottime ragioni per adottare il secondo punto di vista. Per citarne uno, in quest'ottica il gatto di Schrödinger potrebbe ben essere vivo *oppure* morto: la sovrapposizione dei due stati rappresenterebbe semplicemente la nostra ignoranza di come stiano realmente le cose prima che effettuiamo la misura[13]. Inoltre resterebbe così spiegato l'altrimenti misterioso *collasso* della funzione d'onda. In statistica Bayesiana, ad esempio, utilizziamo delle distribuzioni per descrivere la probabilità che associamo al verificarsi di un evento: non c'è nulla di paradossale nel fatto che queste si aggiornino istantaneamente nel momento in cui abbiamo accesso a nuova informazione sul sistema[7].
Infine, è il secondo scenario ad offrire un'immediata connessione con la fisica classica. In Meccanica Classica, lo stato di un sistema soggetto all'Hamiltoniana $\mathcal{H}$ è rappresentato, a un certo tempo t, da un punto (x, p) nello spazio delle fasi. Talvolta

questo stato non è ben noto, ma è comunque possibile definire una distribuzione di probabilità $\mu(x, p)$ che evolve secondo l'equazione di Liouville

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \{\mu, \mathcal{H}\} = 0 \tag{3.2}$$

Tale distribuzione non rappresenta direttamente la realtà, ma piuttosto l'incertezza dello sperimentatore sullo stato fisico del sistema.

3.3 Il modello ontologico della Meccanica Quantistica

Ci proponiamo ora di riformulare in maniera organica e rigorosa le osservazioni fino ad ora elencate[1]. Iniziamo inquadrando l'idea di *stato fisico* di un sistema nel concetto di *stato ontico*.

Definizione 3.1 (Stato ontico)**.** *È la "variabile nascosta". Denotiamo con λ la variabile che definisce univocamente lo stato fisico del sistema.*

La preparazione di un sistema in un certo stato quantico $|\psi\rangle$ non fissa tuttavia univocamente lo stato ontico λ, ma definisce piuttosto una distribuzione di probabilità su tutti i possibili λ.

Definizione 3.2 (Stato epistemico)**.** *Dato lo spazio Λ degli stati ontici λ, si dice stato epistemico associato allo stato $|\psi\rangle$ la distribuzione μ_ψ tale che*

$$\mu_\psi(\lambda) \geq 0 \quad e \quad \int_\Lambda \mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 1\ . \tag{3.3}$$

Quando si effettua una misura dell'osservabile M, la probabilità di ottenere ciascuno dei suoi possibili risultati f dipende solamente dallo stato ontico λ. Descriviamo il processo tramite una seconda distribuzione di probabilità,

Definizione 3.3 (Funzione risposta)**.** *Si dice $\xi_M(f|\lambda)$ la probabilità di ottenere, nello stato λ, il risultato f da una misura di M. Valgono*

$$\xi_M(f|\lambda) \geq 0 \quad e \quad \sum_f \xi_M(f|\lambda) = 1\ . \tag{3.4}$$

Il valore atteso di M sullo stato ontico λ sarà quindi dato da

$$M(\lambda) = \sum_f \xi_M(f|\lambda) \cdot f \tag{3.5}$$

così che valga in senso classico

$$\langle M\rangle = \int_\Lambda M(\lambda)\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_f \left(\int_\Lambda \xi_M(f|\lambda)\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right) \cdot f\ . \tag{3.6}$$

In Meccanica Quantistica associamo invece a ciascuno dei possibili risultati f della misura di M uno stato $|f\rangle$: l'insieme $\{|f\rangle, \forall f\}$ di tutti questi stati forma una base ortonormale dello spazio di Hilbert in cui lavoriamo. Possiamo allora esprimere

$$|\psi\rangle = \sum_f \langle f|\psi\rangle\,|f\rangle\ . \tag{3.7}$$

Associamo inoltre a M l'operatore $\hat{M}$ per cui vale $\hat{M}\,|f\rangle = f\,|f\rangle$ per ciascuno dei vettori di base $|f\rangle$. Il suo valor medio si calcola come

$$\langle\hat{M}\rangle = \langle\psi|\hat{M}|\psi\rangle = \sum_f |\,\langle f|\psi\rangle\,|^2 \cdot f \tag{3.8}$$

(nell'ultimo passaggio f non è l'indice muto, bensì l'autovalore associato a $|f\rangle$). Se vogliamo che il modello ontologico riproduca le previsioni della Meccanica Quantistica, dobbiamo richiedere che

$$\langle M\rangle = \langle\hat{M}\rangle \tag{3.9}$$

e confrontando la (3.6) con la (3.8) notiamo che ciò si ottiene imponendo che per ogni $|\psi\rangle$ e per ogni f sia soddisfatta

$$\int_\Lambda \xi_M(f|\lambda)\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = |\,\langle f|\psi\rangle\,|^2\ . \tag{3.10}$$

3.4 Il teorema di Bell

Fu solo nel 1964 che J. S. Bell mostrò come il modello fin qui esposto non sia compatibile con gli stessi principi di realtà e di località proposti da Einstein[2].
Torniamo al *gedanken experiment* descritto nel paragrafo 2.2 e inseriamo la variante per cui Alice e Bob misurano la polarizzazione della particella lungo due direzioni $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ a loro scelta; chiamiamo quindi $A(\boldsymbol{a},\lambda)$ e $B(\boldsymbol{b},\lambda)$ i risultati delle loro misure. Se assumiamo il principio di località, questi ultimi sono da considerarsi indipendenti: possiamo allora calcolare il valor medio del prodotto AB semplicemente come

$$C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \int_\Lambda A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\ . \tag{3.11}$$

Ci riferiremo a C come alla *funzione di correlazione media.* Ci aspettiamo in questo modo di ritrovare risultati analoghi a quelli della Meccanica Quantistica, come ad esempio $C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})_{quantum} = -1$. Date altre due direzioni $\boldsymbol{a'},\boldsymbol{b'}$,

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b'}) &= \int_\Lambda [A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda) - A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b'},\lambda)]\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_\Lambda A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)[1 \pm A(\boldsymbol{a'},\lambda)B(\boldsymbol{b'},\lambda)]\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &- \int_\Lambda A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b'},\lambda)[1 \pm A(\boldsymbol{a'},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)]\mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{3.12}$$

dove si sono sommate e sottratte le quantità precedute dal simbolo $\pm$.
Sfruttiamo ora il fatto che $\mu_\psi(\lambda) \geq 0$ (infatti è una distribuzione di probabilità); inoltre, dal momento che si tratta di misure di polarizzazioni, avremo sempre $|A(\boldsymbol{a},\lambda)| = |B(\boldsymbol{b},\lambda)| = 1$ e di conseguenza anche il termine tra parentesi quadre è

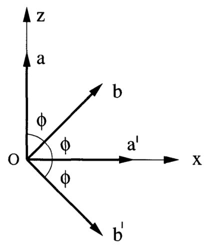


Figura 3.2. Scelta delle direzioni per cui è violata la disuguaglianza CHSH, con $\phi = \frac{\pi}{4}$ (immagine tratta da [3]).

sempre positivo[1]. Si trova allora[2]

$$\begin{aligned} |C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'})| &\leq \int_\Lambda [1 \pm A(\boldsymbol{a'}, \lambda) B(\boldsymbol{b'}, \lambda)] \mu_\psi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \\ &+ \int_\Lambda [1 \pm A(\boldsymbol{a'}, \lambda) B(\boldsymbol{b}, \lambda)] \mu_\psi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \pm [C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'}) + C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b})] + 2 \int_\Lambda \mu_\psi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Considerando infine che $\mu_\psi(\lambda)$ è normalizzata, otteniamo

$$|C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'})| \leq -|C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'}) + C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b})| + 2 \tag{3.14}$$

$$|C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'})| + |C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b}) + C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'})| \leq 2 \tag{3.15}$$

quest'ultima nota come disuguaglianza CHSH dal nome dei suoi scopritori[3].

La preannunciata contraddizione si manifesta in tutte quelle situazioni fisiche in cui le previsioni della Meccanica Quantistica violano questa disuguaglianza. Lavorando ad esempio sullo stato EPR definito in (2.2), è possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che

$$C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_{quantum} = \langle \psi | (\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}^{(B)} \cdot \boldsymbol{b}) | \psi \rangle = -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ . \tag{3.16}$$

Scegliendo le direzioni $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'})$ come in Fig 3.2 abbiamo

$$|C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'})| + |C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b}) + C(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'})| = 2\sqrt{2} > 2 \tag{3.17}$$

in netta violazione della (3.15). Non resta che interrogare la Natura, disegnando esperimenti volti a verificare quale dei due modelli riproduca correttamente i dati sperimentali: i risultati ad oggi ottenuti testimoniano unanimemente a favore della Meccanica Quantistica.

[1] Un modello più sofisticato, proposto da Bell stesso, prevede che parte delle variabili nascoste λ dipendano dallo strumento di misura e che quindi $A(\boldsymbol{a}, \lambda)$ e $B(\boldsymbol{b}, \lambda)$ vadano anzitutto mediate su queste variabili. Troveremmo in questo caso $|\bar{A}|, |\bar{B}| \leq 1$ e la dimostrazione procederebbe indisturbata.

[2] Si sono usate la disuguaglianza triangolare nella forma $|x - y| \leq |x| + |y|$ e la disuguaglianza integrale $\left| \int f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int |f(x)||g(x)|\, \mathrm{d}x$.

[3] Clauser, Horne, Shimony, Holt.

Capitolo 4

Oltre la località

Abbiamo osservato come il teorema di Bell metta in crisi ogni modello ontologico della Meccanica Quantistica in cui è previsto che non venga violato il principio di località (si parla in questo caso di modello a *variabili nascoste locali*). Ci proponiamo ora di valutare se un modello ontologico sia invece plausibile a condizione di lasciar cadere tale principio: ammettiamo, cioè, relazioni di causa più veloci della luce (o al limite istantanee) tra entità fisiche separate, o più semplicemente rinunciamo a stabilire a priori *dove si trovino* gli stati ontici. Indagheremo quindi se il modello sia sufficiente a spiegare il motivo dell'indistinguibilità tra stati quantici non ortogonali.

4.1 Modelli ψ-ontici e modelli ψ-epistemici

Il legame tra i valori di aspettazione calcolati attraverso il modello ontologico e la Meccanica Quantistica è definito dall'equazione (3.10), con la quale avevamo messo in relazione un integrale su distribuzioni classiche di probabilità con un prodotto scalare tra stati quantici. Caratterizziamo innanzitutto questi due spazi su cui lavoriamo con le rispettive nozioni di distanza.

Definizione 4.1 (Distanza, overlap classico)**.** *Date due distribuzioni $p(x)$ e $q(x)$, definiamo la loro distanza*

$$\delta_C(p,q) := \frac{1}{2}\int |p(x) - q(x)|\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

e il loro overlap come

$$\omega_C(p,q) := 1 - \delta_C(p,q) = \int \min\{p(x), q(x)\}\,\mathrm{d}x\ . \tag{4.2}$$

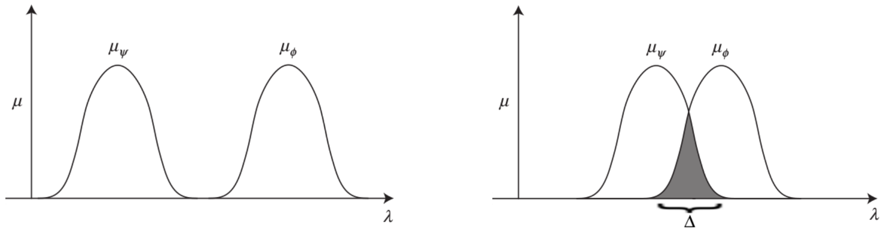
La definizione data risulta intuitiva osservando il grafico in Fig 4.1(b), dove l'overlap corrisponde alla regione annerita.

Definizione 4.2 (Distanza, overlap quantistico)**.** *Dati due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, definiamo la loro distanza*

$$\delta_Q(\psi,\phi) := \sqrt{1 - |\langle\psi|\phi\rangle|^2} \tag{4.3}$$

e il loro overlap come

$$\omega_Q(\psi,\phi) := 1 - \delta_Q(\psi,\phi)\ . \tag{4.4}$$



(a) Modello ψ-ontico. (b) Modello ψ-epistemico.

Figura 4.1. Rappresentazione degli stati epistemici per i modelli ontologici.

Rifacendoci alle definizioni date nel paragrafo 3.3, osserviamo che se lo stato quantico ψ fosse univocamente determinato dallo stato ontico λ, allora ψ stesso sarebbe un elemento della realtà fisica: si parla in questo caso di modelli *ψ-ontici*. In questo scenario, gli stati epistemici (ossia le distribuzioni di probabilità) μ_ψ e μ_ϕ corrispondenti a due stati puri distinti $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ sono necessariamente disgiunti a meno di regioni a misura nulla (Fig 4.1(a)). Se infatti μ_ψ e μ_ϕ si sovrapponessero anche soltanto parzialmente (come in Fig 4.1(b) per $\lambda \in \Delta$), avremmo in quei punti due diverse funzioni d'onda compatibili con lo stesso stato ontico λ: la funzione d'onda andrebbe allora trattata come un'espressione della conoscenza limitata dello stato in cui si trova il sistema. Modelli come quello appena descritto sono detti *ψ-epistemici*.
Formalizziamo quanto appena detto con una

Definizione 4.3 (Modelli ψ-epistemici)**.** *Un modello ontologico è detto ψ-epistemico se esiste almeno una coppia di stati distinti $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ i cui corrispondenti stati epistemici μ_ψ e μ_ϕ hanno overlap non nullo, ossia $\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi) > 0$. In caso contrario il modello è detto ψ-ontico.*

Osserviamo che, a differenza del modello ψ-epistemico, quello ψ-ontico non è sufficiente a spiegare il motivo per cui non riusciamo a distinguere stati quantici non ortogonali: si tratta quindi di una forma *debole* del modello ontologico.

4.2 Come confutare i modelli ψ-epistemici

In un articolo del 2012 di M. F. Pusey, J. Barrett e T. Rudolph è presentato un tentativo di mostrare che un modello ψ-epistemico conduce in alcuni casi a previsioni che contraddicono quelle della Meccanica Quantistica[12]. Seguendo il pensiero degli autori, ammettiamo i due seguenti assunti:

(i) Ogni sistema ha uno stato fisico reale, oggettivo e indipendente dall'osservatore;

(ii) Due sistemi che sono preparati in modo indipendente hanno stati fisici indipendenti.

4.2.1 Atto primo: un caso particolare

Analizziamo innanzitutto il caso in cui sia $|\langle\psi_0|\psi_1\rangle| = 1/\sqrt{2}$. Fissata una base dello spazio di Hilbert come nella (1.2) e rifacendoci alla (1.8) per la definizione degli stati

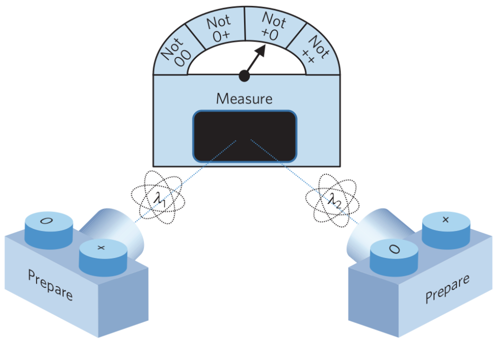


Figura 4.2. Misura dello stato dei due sistemi preparati in modo indipendente (immagine tratta da [12]).

$|+\rangle$ e $|-\rangle$, siano

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |0\rangle \\ |\psi_1\rangle &= |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Possiamo far corrispondere a $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ due diversi modi di preparare un sistema; detti $\mu_0(\lambda)$ e $\mu_1(\lambda)$ i relativi stati epistemici, indichiamo con Δ la regione dello spazio Λ in cui questi si sovrappongono (come in Fig 4.1(b)).
Consideriamo ora due sistemi i cui stati sono scorrelati: ad esempio, immaginiamo di possedere due copie di un dispositivo che prepara il sistema in uno dei due stati $|\psi_0\rangle$ o $|\psi_1\rangle$, come mostrato in Fig 4.2. Se i due stati epistemici non sono disgiunti (ossia se $\omega(\mu_0, \mu_1) > 0$), allora con probabilità non nulla $q > 0$ può accadere che la preparazione di uno dei due stati restituisca un λ che appartiene alla regione di overlap Δ. Poiché i due sistemi sono preparati in modo indipendente, ci aspettiamo che con probabilità $q^2 > 0$ che gli stati ontici λ_A e λ_B dei due sistemi derivino entrambi dalla regione di overlap: quando questo accade, lo stato fisico complessivo del sistema è compatibile con uno qualsiasi dei quattro stati quantici

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \,, \quad |0\rangle \otimes |+\rangle \,, \quad |+\rangle \otimes |0\rangle \,, \quad |+\rangle \otimes |+\rangle \ . \tag{4.6}$$

I due sistemi sono raccolti dall'apparato in Fig 4.2 e il loro stato è misurato proiettando sulla base ortogonale data da

$$\begin{aligned} |\xi_1\rangle &= NOT(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle\right) \\ |\xi_2\rangle &= NOT(|0\rangle \otimes |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |-\rangle + |1\rangle \otimes |+\rangle\right) \\ |\xi_3\rangle &= NOT(|+\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |1\rangle + |-\rangle \otimes |0\rangle\right) \\ |\xi_4\rangle &= NOT(|+\rangle \otimes |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle\right) \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

L'operatore (gate) NOT manda lo stato su cui agisce in un altro ortogonale al primo; esso è da intendersi agente nello spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ nel senso dato nel paragrafo 1.2 ed è definito come

$$NOT = (NOT)_A + (NOT)_B \ . \tag{4.8}$$

Questo significa che, stando alle previsioni della Meccanica Quantistica, la probabilità di ottenere $|\xi_1\rangle$ come risultato di una misura è nulla se il sistema si trovava nello stato $|0\rangle \otimes |0\rangle$; lo stesso si può dire per ciascuna delle altre tre coppie di stati $|i\rangle$ e $|\xi_i\rangle = NOT\,|i\rangle$.
Ecco allora la contraddizione cercata: per una frazione delle misure pari almeno a q^2, il dispositivo è incerto su quale dei quattro metodi di preparazione sia stato utilizzato e corre il rischio di restituire come risultato della sua misura un valore vietato dalla Meccanica Quantistica. Notiamo infine che non ci è servito conoscere il valore di q per giungere a questa conclusione.

4.2.2 Atto secondo: estensione a due stati arbitrari

Data una coppia qualsiasi di stati quantici distinti e non ortogonali $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, scegliamo una base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ dello spazio di Hilbert in cui si possa scrivere

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \\ |\psi_1\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \end{aligned} \tag{4.9}$$

con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $|\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2 = \cos^2\theta$. Per convincerci che questo è possibile, osserviamo che il primo dei due stati è analogo a $|\psi\rangle$ definito nella (1.4) a meno di una rotazione del sistema di riferimento attorno all'asse $\hat{z}$, scelta in modo tale che risulti $\varphi = 0$. Lo *span* di questi due vettori è un sottospazio a due dimensioni dello spazio di Hilbert di partenza: per quanto detto nel paragrafo 1.4, lo possiamo da qui in avanti trattare come un qubit.
Come prima, assumiamo vi sia una probabilità non nulla q che, dopo la preparazione del sistema, il suo stato fisico sia compatibile con entrambi i metodi di preparazione $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, ovvero che sia $\lambda \in \Delta$.
Mostriamo come anche in questo caso sia possibile derivare una contraddizione; stavolta sarà necessario preparare in modo indipendente abbastanza copie (diciamo per ora n) del sistema. Notiamo innanzitutto che possiamo descrivere lo stato collettivo di n sistemi con la funzione d'onda

$$|\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle = |\Psi(x_1, ..., x_n)\rangle = |\psi_{x_1}\rangle \otimes |\psi_{x_2}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{x_n}\rangle \tag{4.10}$$

dove si è chiamato $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, ..., x_n)$ il multi-indice $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}^n$, con $x_i \in [0, 1]$ che specifica quale dei due metodi di preparazione sia stato utilizzato. Posto che i due sistemi siano scorrelati, ci aspettiamo che, con probabilità almeno q^n, lo stato fisico complessivo $\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ del sistema sia compatibile con tutti i 2^n stati quantici che si ottengono dalla (4.10) variando in modo indipendente le x_i.
In analogia a quanto fatto sopra, vogliamo dimostrare che esiste una misura congiunta dei nostri n sistemi tale che ciascuno dei possibili risultati abbia su almeno uno dei $|\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle$ probabilità nulla di essere misurato: se ci riusciamo, abbiamo trovato una contraddizione con le previsioni della Meccanica Quantistica. Usando la terminologia introdotta da Caves, Fuchs e Schack in [6], si tratta equivalentemente di mostrare che i 2^n stati definiti nella (4.10) sono *post-Peierls* incompatibili:

Definizione 4.4 (Stati PP-incompatibili)**.** *Sia $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ un set di stati puri e sia $V = span\{|i\rangle\}_{i=1}^n$. Gli $|i\rangle$ si dicono PP-incompatibili se esiste una base ortonormale $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^n$ del sottospazio V tale che $\langle f_i|i\rangle = 0\ \ \forall i = 1, ..., n$.*

La misura in questione è eseguita tramite il circuito quantistico rappresentato in Fig 4.3. Costruiamo innanzitutto la base computazionale

$$|\vec{\mathbf{x}}\rangle = |x_1 ... x_n\rangle = |x_1\rangle \otimes ... \otimes |x_n\rangle \tag{4.11}$$

ottenuta come semplice generalizzazione al caso di n qubit di quella definita nella (1.14) per un sistema con $n = 2$. I due gate R_β (Phaseshift) e H (Hadamard) sono stati definiti nel paragrafo 1.4; il terzo gate, Z_α, può essere definito mediante la sua azione sui vettori che formano la base computazionale nel seguente modo:

$$Z_\alpha |\vec{\mathbf{x}}\rangle = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} |\vec{\mathbf{x}}\rangle & se\ |\vec{\mathbf{x}}\rangle = |0...0\rangle \\ |\vec{\mathbf{x}}\rangle & se\ |\vec{\mathbf{x}}\rangle \neq |0...0\rangle \end{cases} \tag{4.12}$$

Il processo di misura è riassumibile nell'evoluzione unitaria

$$U_{\alpha,\beta} = H^{\otimes n} Z_\alpha R_\beta^{\otimes n} \tag{4.13}$$

seguita dalla misura di ciascun qubit nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. L'azione di $H^{\otimes n}$ sul vettore di base $|\vec{\mathbf{x}}\rangle$ si ottiene generalizzando la (1.9) al caso dei multi-indici $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$ di modo che

$$H^{\otimes n} |\vec{\mathbf{x}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{\mathbf{k}}} (-1)^{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{k}}} |\vec{\mathbf{k}}\rangle \tag{4.14}$$

dove la somma corre su tutti i possibili $\vec{\mathbf{k}}$ (sono in totale 2^n).
Se il sistema è preparato in $|\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle$, la probabilità di misurare quel risultato a cui corrisponde il vettore di base $|\vec{\mathbf{x}}\rangle$ è data dal modulo quadro di

$$\begin{aligned}
&\langle\vec{\mathbf{x}}| U_{\alpha,\beta} |\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle = \langle\vec{\mathbf{x}}| H^{\otimes n} Z_\alpha R_\beta^{\otimes n} |\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\sum_{\vec{\mathbf{k}}} (-1)^{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{k}}} \langle\vec{\mathbf{k}}| \right) Z_\alpha R_\beta^{\otimes n} |\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \langle 0...0| + \sum_{\vec{\mathbf{k}}\neq(0...0)} (-1)^{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{k}}} \langle\vec{\mathbf{k}}| \right) R_\beta^{\otimes n} (|\psi_{x_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{x_n}\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \langle 0...0| + \sum_{\vec{\mathbf{k}}\neq(0...0)} (-1)^{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{k}}} \langle\vec{\mathbf{k}}| \right) \bigotimes_{j=1}^{n} \left(\cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + (-1)^{x_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n + \sum_{\vec{\mathbf{k}}\neq(0...0)} (-1)^{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{k}}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-|\vec{\mathbf{k}}|} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{|\vec{\mathbf{k}}|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\vec{\mathbf{k}}|\beta} (-1)^{\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{k}}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-k} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\beta} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \tan\frac{\theta}{2}\right)^n - 1 \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

dove si è chiamato $k = |\vec{\mathbf{k}}| = \sum_j k_j$. Nel penultimo passaggio si è introdotto il coefficiente binomiale per contare tutte le possibili realizzazioni di k a partire dalle sequenze $\vec{\mathbf{k}}$; nell'ultimo si è usata la formula del binomio di Newton.

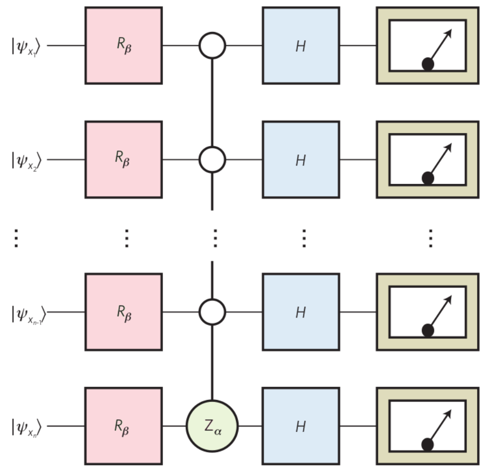


Figura 4.3. Misura dello stato di n sistemi preparati in modo indipendente (immagine liberamente tratta da [12]).

Non ci resta che trovare due angoli α e β per cui si annulli questa quantità. Chiamiamo

$$f(\beta) = 1 - \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \tan\frac{\theta}{2}\right)^n := 1 - \left(1 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)^n \tag{4.16}$$

con $t = \tan\frac{\theta}{2}$, $0 < t < 1$ all'interno del dominio $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Notiamo che se fosse $|f(\beta)| = 1$ potremmo scrivere

$$f(\beta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \tag{4.17}$$

per qualche $\gamma \in [0, 2\pi[$: per annullare la (4.15) basterebbe allora scegliere $\alpha = \gamma$. Questo è possibile a condizione che il grafico di $f(\beta)$ nel piano complesso intersechi la circonferenza di raggio unitario: poiché $f(\beta)$ è analitica, è sufficiente a tal scopo esibire due punti di cui uno interno e uno esterno alla circonferenza. Data la simmetria del problema, limitiamoci all'asse reale scegliendo

$$f(0) = 1 - (1+t)^n \,, \qquad f(\pi) = 1 - (1-t)^n \,. \tag{4.18}$$

Sappiamo già che $0 < f(\pi) < 1$, perciò tale punto si trova all'interno della circonferenza unitaria. Inoltre $f(0) < 0$; perché giaccia all'esterno della circonferenza, richiediamo che sia $f(0) < -1$, ovvero

$$t > 2^{\frac{1}{n}} - 1 \,. \tag{4.19}$$

Questo conclude la dimostrazione: l'esperimento che abbiamo pensato è possibile a condizione che il numero n di copie del sistema prese in esame sia sufficientemente elevato[1] da soddisfare

$$2^{\frac{1}{n}} < 1 + \tan\frac{\theta}{2} \,. \tag{4.20}$$

[1] Un calcolo variazionale permette di stabilire che non è possibile scendere ulteriormente al di sotto del limite su n che abbiamo ricavato.

4.2.3 Atto terzo: effetti del rumore

Per usare un'espressione cara a Popper[2], quanto abbiamo visto finora è mera metafisica fino a che non stabiliamo un modo per corroborarlo o falsificarlo sperimentalmente. Nella prova che abbiamo presentato si è fatto uso di valori di aspettazione quantistici che valgono esattamente zero: è necessario preparare la teoria all'introduzione di errori sperimentali, altrimenti la nostra conclusione (che lo stato quantico sia una proprietà fisica del sistema) rimarrebbe un artificio legato alla teoria esatta, ma irrilevante nel mondo reale. Ci proponiamo in questo paragrafo di riscrivere la prova in maniera formale e di renderla robusta rispetto a piccole quantità di rumore.
Sia ancora $\vec{\lambda} \in \Lambda^n$ il multi-indice che rappresenta lo stato fisico complessivo delle n copie del sistema descritte poco fa, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Il requisito di indipendenza nella preparazione dei singoli sistemi permette di esprimere lo stato epistemico complessivo nella forma

$$\mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda}) = \mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mu_{x_1}(\lambda_1) \times ... \times \mu_{x_n}(\lambda_n) \tag{4.21}$$

dove $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}^n$. Ricordiamo che $x_i = \{0, 1\}$ a seconda che il sistema i-esimo sia stato preparato nello stato quantico $|\psi_0\rangle$ o $|\psi_1\rangle$ (li abbiamo definiti nella (4.9)) e che μ_0 e μ_1 sono gli stati epistemici che rispettivamente vi associamo. Riprendendo allora la definizione di overlap in senso classico data nella (4.2), possiamo scrivere

$$\omega(\mu_0, \mu_1) = \int_\Lambda \min\{\mu_0(\lambda), \mu_1(\lambda)\} \, \mathrm{d}\lambda \ . \tag{4.22}$$

Per generalizzarlo a Λ^n, il prodotto cartesiano degli spazi Λ_i in cui vivono gli stati ontici dei singoli sistemi, scriviamo

$$\omega(\{\mu_{\vec{\mathbf{x}}}\}) = \int_{\Lambda^n} \min_{\vec{\mathbf{x}}} \mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda}) \, \mathrm{d}\vec{\lambda} \ . \tag{4.23}$$

Osserviamo che dalla (4.21) discende

$$\min_{\vec{\mathbf{x}}} \mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda}) = \min\{\mu_0(\lambda_1), \mu_1(\lambda_1)\} \times ... \times \min\{\mu_0(\lambda_n), \mu_1(\lambda_n)\} \tag{4.24}$$

che integrata membro a membro restituisce quindi

$$\omega(\{\mu_{\vec{\mathbf{x}}}\}) = [\omega(\mu_0, \mu_1)]^n \ . \tag{4.25}$$

Consideriamo ora un sistema nello stato iniziale $|\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle$ e eseguiamo una misura usando l'apparato di Fig 4.3, come descritto nello scorso paragrafo. Si è già mostrato come la Meccanica Quantistica predica probabilità nulla di ottenere quel risultato a cui si associa il vettore di base $|\vec{\mathbf{x}}\rangle$. Dato il nostro modello ontologico, ammettiamo invece che in un esperimento reale questo risultato si possa ottenere con probabilità *piccola*, diciamo $\mathcal{P}(|\vec{\mathbf{x}}\rangle) \leq \varepsilon$, $\forall \vec{\mathbf{x}}$. Usando la simbologia introdotta nel paragrafo 3.3 e riferendoci in particolare alla (3.10), ciò equivale ad affermare che

$$\int_{\Lambda^n} \xi_M(\vec{\mathbf{x}}|\vec{\lambda}) \mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda}) \, \mathrm{d}\vec{\lambda} \leq \varepsilon \ . \tag{4.26}$$

[2]Karl Raimund Popper (Vienna, 1902 – Londra, 1994) è stato un filosofo e epistemologo.

Osservando che sia $\xi_M(\vec{\mathbf{x}}|\vec{\lambda})$, sia $\mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda})$ sono non-negative, deduciamo che

$$\int_{\Lambda^n} \xi_M(\vec{\mathbf{x}}|\vec{\lambda}) \min_{\vec{\mathbf{x}}} \mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda})\, \mathrm{d}\vec{\lambda} \leq \varepsilon \ . \tag{4.27}$$

Sommando ora su tutti i possibili $\vec{\mathbf{x}}$ (sono in totale 2^n) e usando la condizione di normalizzazione $\sum_{\vec{\mathbf{x}}} \xi_M(\vec{\mathbf{x}}|\vec{\lambda}) = 1$, otteniamo

$$\int_{\Lambda^n} \min_{\vec{\mathbf{x}}} \mu_{\vec{\mathbf{x}}}(\vec{\lambda}) \sum_{\vec{\mathbf{x}}} \xi_M(\vec{\mathbf{x}}|\vec{\lambda})\, \mathrm{d}\vec{\lambda} \leq \sum_{\vec{\mathbf{x}}} \varepsilon \tag{4.28}$$

$$\omega(\{\mu_{\vec{\mathbf{x}}}\}) \leq 2^n \varepsilon \ . \tag{4.29}$$

Usando infine la (4.25) si ricava

$$\omega(\mu_0, \mu_1) \leq 2 \sqrt[n]{\varepsilon} \ . \tag{4.30}$$

$\cdot \sim \cdot$

Tiriamo le fila di quanto abbiamo scoperto. Supponiamo di eseguire l'esperimento descritto su un sistema nello stato $|\Psi(\vec{\mathbf{x}})\rangle$ e, come previsto dalla Meccanica Quantistica, di misurare per il risultato $|\vec{\mathbf{x}}\rangle$ probabilità nulla entro l'incertezza ε. Possiamo dedurne che μ_0 e μ_1 non si sovrappongono, come speravamo? Quasi: possiamo maggiorare il loro overlap grazie alla (4.30). Un paio di considerazioni:

(a) Meglio si progetta ed esegue l'esperimento (così da rendere ε il più piccolo possibile) e con più sicurezza si può affermare che l'overlap tende a zero.

(b) Per esplorare lo spazio degli stati bisogna però progressivamente ridurre il valore dell'angolo θ che compare nella definizione (4.9). Perché continui a valere la nostra dimostrazione, questo significa incrementare mano a mano il valore di n così che sia soddisfatta la (4.20). Questo non può che peggiorare la nostra maggiorazione, dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon} = 1 \ . \tag{4.31}$$

Chiediamoci tuttavia: serve davvero che n cresca fino a ∞ ? Osservando ancora i due stati definiti nella (4.9), notiamo che scegliendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ otteniamo due funzioni d'onda ortogonali. Al diminuire di θ i due stati diventano sempre più *vicini* (così che distinguerli sperimentalmente risulta sempre più difficile), fino a che per $\theta = 0$ otteniamo... lo stesso stato preso due volte. Non c'è allora da stupirsi se, in corrispondenza di questo valore, il modello presenta una singolarità.

Capitolo 5

Sistemi a più dimensioni

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato come un modello ontologico di tipo ψ-epistemico non sia compatibile con la Meccanica Quantistica: assumendo l'esistenza di stati epistemici (le distribuzioni di probabilità $\mu_\psi(\lambda)$) associati a ciascuno stato ontico λ, non è possibile che questi si sovrappongano anche solo parzialmente. Ciò significa che, volendo rimanere in un'ottica ontologica, dobbiamo ammettere che lo stato quantico ψ possa essere inferito in modo univoco dallo stato ontico λ: si è già visto come questo lasci inspiegata l'indistinguibilità di stati non ortogonali.
Tuttavia la prova condotta da Pusey *et al.* faceva perno su un'importante assunzione: quando due sistemi sono preparati in modo indipendente, vi possiamo assegnare due stati ontici separati λ_A e λ_B e lo stato epistemico congiunto assume la forma

$$\mu_{\psi_0 \otimes \psi_1}(\lambda_A, \lambda_B) = \mu_{\psi_0}(\lambda_A) \times \mu_{\psi_1}(\lambda_B) \ . \tag{5.1}$$

Proviamo a lasciare cadere quest'ultimo requisito e seguiamo i passi di J. Barrett *et al.*[1], che nel 2013 mostrano come i modelli ψ-epistemici massimali falliscano nel descrivere sistemi con dimensione $d > 3$.

5.1 Modelli ψ-epistemici massimali

Proseguiamo nell'intento di caratterizzare il modello ontologico della Meccanica Quantistica che abbiamo iniziato a edificare nei paragrafi 3.3 e 4.1.
Ricordiamo che si era indicato con $\omega_Q(\psi, \phi)$ l'overlap tra stati quantici (quelli a cui sperimentalmente abbiamo accesso), mentre con $\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi)$ si intende l'overlap tra le distribuzioni di probabilità associate a ψ e ϕ nello spazio Λ.
Cominciamo dimostrando il seguente

Teorema 5.1. *Perché un modello ontologico possa riprodurre le previsioni della Meccanica Quantistica, deve essere verificata*

$$\omega_Q(\psi, \phi) \geq \omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi) \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{H} \ . \tag{5.2}$$

Dimostrazione. In un esperimento disegnato per distinguere due stati quantici, avremo successo (ossia troveremo un λ che non appartiene alla regione di overlap) con probabilità

$$\mathcal{P}_Q = 1 - \frac{\omega_Q(\psi, \phi)}{2} \ . \tag{5.3}$$

Muovendoci in un modello ontologico, la massima probabilità di indovinare correttamente quale dei due metodi di preparazione è stato utilizzato vale invece

$$\mathcal{P}_C = 1 - \frac{\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi)}{2} \ . \tag{5.4}$$

Ma in un'ottica ontologica il risultato della misura di un qualunque dispositivo quantistico dipende unicamente dallo stato ontico λ: ne segue che $\mathcal{P}_Q$ non può eccedere le prestazioni date da un uso ottimale dell'informazione codificata in λ (ammesso che possiamo averne accesso). In altri termini, $\mathcal{P}_Q \leq \mathcal{P}_C$. □

Analizziamo quindi con più attenzione il caso limite in cui l'uguaglianza è assunta nella (5.2).

Definizione 5.2 (Modello ψ-epistemico massimale)**.** *Un modello ontologico ψ-epistemico si dice massimale se e solo se per ogni coppia di stati ψ e ϕ si verifica*

$$\omega_Q(\psi, \phi) = \omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi) \ . \tag{5.5}$$

Il vantaggio implicato da un modello simile è evidente: se fosse vero che talvolta due stati quantici non ortogonali corrispondono allo stesso stato (ontico) nella realtà fisica, questo spiegherebbe di per sé la nostra incapacità di discriminarli. Tuttavia non appena $\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi) < \omega_Q(\psi, \phi)$ questa spiegazione diverrebbe insufficiente: in linea di principio, infatti, le due distribuzioni classiche μ_ψ e μ_ϕ potrebbero essere distinte da un dispositivo che avesse accesso alla variabile λ.
Introduciamo ora il concetto di basi *mutually unbiased*, che si applica a uno spazio di Hilbert di dimensione d e ha validità non strettamente inerente al modello ontologico qui presentato.

Definizione 5.3 (Basi mutually unbiased)**.** *Due basi ortonormali $\{|a\rangle\}_{i=1}^d$ e $\{|b\rangle\}_{j=1}^d$ in uno spazio di Hilbert di dimensione d si dicono mutually unbiased se vale*

$$|\langle a_i | b_j \rangle|^2 = \frac{1}{d} \quad \forall i, j \ . \tag{5.6}$$

Infine enunciamo, senza dimostrarli, due teoremi che provengono rispettivamente dalla Teoria dei numeri e da quella dei Campi di Galois e che saranno il nostro punto di partenza per gli sviluppi del prossimo paragrafo.

Teorema 5.4 (Bertrand–Chebyshev)**.** *Per ogni numero naturale $n > 1$ esiste un numero primo p che soddisfa $n < p < 2n$.*

Teorema 5.5. *Sia d una potenza prima (ovvero una potenza intera di un numero primo). Preso uno spazio di Hilbert di dimensione d, è sempre possibile costruire al suo interno $(d+1)$ basi mutually unbiased.*

5.2 Come confutare (meglio) i modelli ψ-epistemici

Iniziamo dimostrando il seguente risultato[6], a complemento della definizione 4.4 di stati PP-incompatibili data a pagina 18.

Lemma 5.6. *Siano $|a\rangle$, $|b\rangle$ e $|c\rangle$ tre stati puri e chiamiamo $x_1 = |\langle a|b\rangle|^2$, $x_2 = |\langle b|c\rangle|^2$ e $x_3 = |\langle c|a\rangle|^2$. I tre stati sono PP-incompatibili se e soltanto se*

$$x_1 + x_2 + x_3 < 1 \quad e \quad (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 \geq 4x_1x_2x_3 \ . \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Analizziamo l'unico caso non banale, ovvero quello in cui i tre stati in esame sono distinti e PP-compatibili a due a due[1]. Ciò equivale a richiedere che nessuna coppia sia ortogonale, ossia

$$0 < |\langle a|b\rangle| < 1 \ , \quad 0 < |\langle b|c\rangle| < 1 \ , \quad 0 < |\langle c|a\rangle| < 1 \ . \tag{5.8}$$

Se i tre stati sono PP-incompatibili, allora esisterà una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ per lo spazio $V = span\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ tale che si possa scrivere

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_1}(\cos\theta_1 |2\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\sin\theta_1 |3\rangle) \\ |b\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_2}(\cos\theta_2 |3\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\sin\theta_2 |1\rangle) \\ |c\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_3}(\cos\theta_3 |1\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}\sin\theta_3 |2\rangle) \end{aligned} \tag{5.9}$$

con $0 \leq \gamma_i < 2\pi$, $0 \leq \phi_i < 2\pi$, $0 \leq \theta_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, 3$. Seguono

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_2-\gamma_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \langle b|c\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_3-\gamma_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \langle c|a\rangle &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_1-\gamma_3)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}\sin\theta_3\cos\theta_1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

e quindi

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv |\langle a|b\rangle|^2 = \sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 \\ x_2 &\equiv |\langle b|c\rangle|^2 = \sin^2\theta_2\cos^2\theta_3 \\ x_3 &\equiv |\langle c|a\rangle|^2 = \sin^2\theta_3\cos^2\theta_1 \ . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Viceversa, se sono soddisfatte le (5.11) non è difficile trovare degli angoli γ_i e ϕ_i in modo tale che i prodotti scalari siano dati dalla (5.10). Specificare i prodotti scalari a due a due significa individuare un set di vettori a meno di una trasformazione unitaria: esiste quindi una base ortonormale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ tale che $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$ si scrivono come nella (5.9). Una misura eseguita in questa base mostra che gli stati sono PP-incompatibili.
Chiamiamo ora $z_i \equiv \sin^2\theta_i$ e riscriviamo le (5.11) nella forma

$$\begin{cases} z_1(1 - z_2) = x_1 \\ z_2(1 - z_3) = x_2 \\ z_3(1 - z_1) = x_3 \ . \end{cases} \tag{5.12}$$

[1]Se due dei tre stati fossero PP-incompatibili tra loro, lo sarebbe anche l'intero set.

Si tratta di un sistema di equazioni di secondo grado nelle incognite z_i, soggetto alla condizione $0 < z_i < 1$. È semplice mostrare che esso ammette soluzioni se e soltanto se sono soddisfatte

$$x_1 + x_2 + x_3 < 1 \quad e \quad (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 \geq 4x_1x_2x_3 \ . \tag{5.13}$$

□

Siamo ora pronti a mostrare quanto segue.

Teorema 5.7. *Supponiamo che un modello ontologico riproduca le previsioni della Meccanica Quantistica per un sistema di dimensione $d > 3$ e che esista una costante $h \geq 1$ per cui vale*

$$\omega_Q(\psi, \phi) \leq h\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi) \quad \forall \psi, \phi \ . \tag{5.14}$$

Allora

$$h > \frac{d-1}{4} \ . \tag{5.15}$$

Se inoltre d è una potenza prima, allora

$$h > \frac{d}{2} \ . \tag{5.16}$$

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che d sia una potenza prima. Il teorema 5.5 ci assicura che esistono $d+1$ basi *mutually unbiased* per lo spazio in esame: sia allora $|c\rangle$ un elemento di una di queste basi e denotiamo le d basi rimanenti con $\{|e_i^\gamma\rangle\}_i$, $i, \gamma \in \{1, ..., d\}$ (l'indice γ individua la base, mentre l'indice i specifica l'elemento nella base in questione).
Mostriamo che per $\alpha \neq \beta$ e $d > 3$ il set $\{|e_i^\alpha\rangle, |e_j^\beta\rangle, |c\rangle\}$ è PP-incompatibile. Infatti, rifacendoci al lemma 5.6, notiamo che $x_1 = x_2 = x_3 = 1/d$ e le ipotesi del teorema risultano sempre soddisfatte se $d > 3$.
Segue dalla definizione di stati PP-incompatibili che esiste una misura M i cui quattro possibili risultati f_i, $i = 1...4$ soddisfano

$$\begin{aligned} |\langle f_1|e_i^\alpha\rangle|^2 &= \int_\Lambda \xi_M(f_1|\lambda)\mu_{e_i^\alpha}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0 \\ |\langle f_2|e_j^\beta\rangle|^2 &= \int_\Lambda \xi_M(f_2|\lambda)\mu_{e_j^\beta}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0 \\ |\langle f_3|c\rangle|^2 &= \int_\Lambda \xi_M(f_3|\lambda)\mu_c(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

mentre f_4 proietta sul sottospazio ortogonale a $V = span\{|e_i^\alpha\rangle, |e_j^\beta\rangle, |c\rangle\}$ e ha perciò probabilità nulla di essere misurato sui tre vettori di V.
Abbiamo già visto come questo implichi che i tre corrispondenti stati epistemici non si possano sovrapporre. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una regione $\Delta \subseteq \Lambda$ di misura non nulla tale che al suo interno siano $\mu_{e_i^\alpha}(\lambda), \mu_{e_j^\beta}(\lambda), \mu_c(\lambda) > 0$.
Perché sia soddisfatta la (5.17), deduciamo che per $\lambda \in \Delta$ deve valere

$$\xi_M(f_1|\lambda) = \xi_M(f_2|\lambda) = \xi_M(f_3|\lambda) = 0 \ . \tag{5.18}$$

Inoltre, per costruzione, deve anche essere $\xi_M(f_4|\lambda) = 0$ in tutto Λ. Tuttavia, dalla definizione 3.3 di *funzione risposta* ci aspettiamo che

$$\sum_f \xi_M(f|\lambda) = 1 \tag{5.19}$$

e questo è evidentemente impossibile dati i presupposti sopra.
Se chiamiamo Λ_ψ il supporto della distribuzione μ_ψ associata allo stato quantico $|\psi\rangle$, possiamo riassumere quanto detto affermando che per ogni $\alpha \neq \beta$ e per ogni i, j, l'insieme $\Lambda_{e_i^\alpha} \cap \Lambda_{e_j^\beta} \cap \Lambda_c$ ha misura nulla.
Presa ora una coppia qualsiasi di distribuzioni μ_ψ e μ_ϕ, possiamo scrivere senza ipotesi ulteriori

$$\int_{\Lambda_\phi} \mu_\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \geq \omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi) \tag{5.20}$$

dove come al solito $\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi)$ indica l'overlap classico (4.2) tra distribuzioni. Ricordando invece la definizione (4.4) di overlap quantistico e assumendo l'ipotesi (5.14) del teorema, avremo per ogni γ e i

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda_{e_i^\gamma}} \mu_c(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &\geq \omega_C(\mu_{e_i^\gamma}, \mu_c)\\ &\geq \frac{1}{h}\omega_Q(e_i^\gamma, c)\\ &= \frac{1}{h}\left(1 - \sqrt{1 - |\langle e_i^\gamma|c\rangle|^2}\right) = \frac{1}{h}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{d}}\right) .\end{aligned} \tag{5.21}$$

Scelti $i \neq j$, i vettori $|e_i^\gamma\rangle$ e $|e_j^\gamma\rangle$ sono ortogonali, perciò possono essere distinti eseguendo una singola misura. Ne segue che $\Lambda_{e_i^\gamma} \cap \Lambda_{e_j^\gamma}$ è un insieme di misura nulla: possiamo scrivere

$$\int_{\bigcup_i \Lambda_{e_i^\gamma}} \mu_c(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \geq d \cdot \frac{1}{h}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{d}}\right) . \tag{5.22}$$

Inoltre abbiamo visto che anche $\Lambda_{e_i^\alpha} \cap \Lambda_{e_j^\beta} \cap \Lambda_c$ ha misura nulla, perciò

$$\int_{\bigcup_\gamma \bigcup_i \Lambda_{e_i^\gamma}} \mu_c(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \geq d^2 \cdot \frac{1}{h}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{d}}\right) \tag{5.23}$$

dove la condizione di normalizzazione su $\mu_c(\lambda)$ comporta per il primo membro

$$1 \geq \int_{\bigcup_\gamma \bigcup_i \Lambda_{e_i^\gamma}} \mu_c(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \ . \tag{5.24}$$

Unendo le ultime due equazioni otteniamo, come volevasi dimostrare,

$$\frac{1}{h} \leq \frac{1}{d}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{d}}\right) < \frac{2}{d} \ . \tag{5.25}$$

Tutto questo è vero soltanto sotto l'ipotesi aggiuntiva che d sia una potenza prima. Se così non fosse, ricordiamo che il teorema 5.4 assicura che esista un numero primo compreso tra n e $2n$ per ogni naturale $n > 1$. Scegliamo $n = [\frac{d}{2}]$ e sia $d' \leq d$ il numero primo in questione: avremo rispettivamente

$$\begin{cases} \frac{d}{2} < d' < d & d \text{ pari} \\ \frac{d-1}{2} < d' < d-1 & d \text{ dispari} \end{cases} \tag{5.26}$$

Applichiamo il teorema appena dimostrato a un sottospazio d'-dimensionale dello spazio genitore e deduciamo

$$\omega_Q \leq h' \cdot \omega_C \tag{5.27}$$

con $h' > \frac{d'}{2}$. Se ora completiamo lo spazio ricostruendo quello genitore di dimensione d, la (5.27) non può che uscirne indebolita: si tratta solo di condurre le integrazioni su di un dominio più ampio e il teorema 5.1 ci ricorda che vale in generale $\omega_Q \geq \omega_C$. Scriviamo allora

$$\omega_Q \leq h' \cdot \omega_C \leq h \cdot \omega_C \ , \tag{5.28}$$

ovvero

$$h \geq h' > \frac{d'}{2} > \frac{d-1}{4} \ . \tag{5.29}$$

□

Da qui al nostro traguardo il passo è breve.

Corollario 5.8. *Nessun sistema ontologico ψ-epistemico massimale può riprodurre le previsioni della Meccanica Quantistica per un sistema di dimensione $d > 3$.*

Dimostrazione. Rifacendoci alla definizione 5.2, un modello ψ-epistemico massimale soddisfa le ipotesi del teorema 5.7 appena dimostrato con $h = 1$. Applicando il teorema deduciamo però che $h > 1$, trovando così una contraddizione. □

5.3 Il punto della situazione

Ricapitoliamo quanto appena appurato. Il problema dell'indistinguibilità tra stati quantici non ortogonali parrebbe del tutto appianato adottando un modello ontologico ψ-epistemico massimale: in quest'ottica, l'overlap tra gli stati epistemici $\omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi)$ è non nullo e questo dà luogo di per se all'indistinguibilità; tale effetto si ripercuote (nulla più e nulla meno) sugli stati quantici ed è per questo che le misure sperimentali che effettuiamo su di essi restituicono un overlap $\omega_Q(\psi, \phi) = \omega_C(\mu_\psi, \mu_\phi)$. Abbiamo tuttavia messo in evidenza una contraddizione interna al modello che si manifesta non appena si pone l'attenzione su sistemi fisici di dimensione $d > 3$: siamo costretti perciò a rigettarlo.
Il seguito dell'articolo [1] è dedicato ad estendere la prova da noi condotta a sistemi di dimensione più piccola: senza addentrarci ulteriormente nei dettagli della dimostrazione, osserviamo che questo è possibile con $d = 3$ (ma non con $d = 2$). Infine, come avevamo visto nel paragrafo 4.2.3 per la prova di Pusey *et al.*, anche questa dimostrazione può essere resa stabile rispetto all'introduzione di piccole quantità di rumore.

Conclusioni

Un modello ontologico ψ-epistemico *massimale* non è compatibile con le previsioni della Meccanica Quantistica. Tale costatazione non poggia né sul principio di località (come faceva il teorema di Bell), né sul requisito di indipendenza tra gli stati ontici di sistemi preparati in modo indipendente (come nella prova di Pusey *et al.*[12]).
Benché nella nostra trattazione, svoltasi a livello puramente teorico, non ve ne sia stata fatta menzione, è utile segnalare come tali conclusioni siano supportate da solida evidenza sperimentale (raccolta in tempi recenti tramite esperimenti di ottica quantistica a singolo fotone — si veda ad esempio [13]).
Quanto visto non esclude in toto la possibilità di un modello ψ-epistemico (non massimale): lo priva, tuttavia, della sua principale attrattiva, ossia la capacità di spiegare in modo esauriente perché non riusciamo a distinguere stati quantici non ortogonali. Il modello ontologico della Meccanica Quantistica appare insufficiente a descrivere la Natura... e quello della natura della funzione d'onda rimane tuttora un problema insoluto.
Si evince già da queste pagine come la complessità matematica della questione si intensifichi mano a mano che il modello è rifinito, eliminando una per volta tutte le assunzioni che fanno capo ad osservazioni intuitive sulla realtà: come già accadeva in teoria della Relatività, la fiducia nell'intuito è malriposta se ci si addentra in campi di cui non abbiamo esperienza diretta ed è allora che il rigore matematico si dimostra un valido alleato. Tuttavia, come ben noto dall'adagio *«pluralitas non est ponenda sine necessitate»*[2], il passo è breve affinché una teoria matematicamente complessa si tramuti in un esasperato tentativo di salvare l'irrecuperabile.
Ad oggi si annoverano numerosi tentativi di preservare il modello ontologico ripiegando sull'alternativa ψ-ontica, alcuni più pittoreschi di altri (come la famigerata Teoria del Multi-verso). Sul versante opposto c'è invece chi rinuncia a spiegare le nostre osservazioni sperimentali tramite il riferimento a una qualche realtà oggettiva, abbandonando così il modello ontologico. Un importante esempio in tal senso è il modello Bayesiano[7], dove il concetto stesso di probabilità è reinterpretato in termini del grado di credibilità (*degree of belief*) che ciascun soggetto assegna alla singola realizzazione di un esperimento: non è quindi più necessario alcun riferimento al limite delle frequenze campionarie su esperimenti ripetuti, né tantomeno a qualche realtà oggettiva dato il ruolo centrale dell'osservatore nel determinare le probabilità.
Altri esempi di modelli non-ontologici sono quelli che ammettono la retrocausalità, così che lo stato epistemico stesso possa dipendere dalla misura a cui il sistema è soggetto.

[2] Guglielmo di Ockham (Ockham, 1285 – Monaco di Baviera, 1347), teologo e filosofo.

Quel che è certo è che si tratta di una questione ancora aperta, che non smette di affascinare scienziati e profani per la sua affinità a tematiche filosofiche che da sempre accompagnano la storia dell'uomo. Credo non sia superfluo, tuttavia, concludere questa breve indagine ponendo l'attenzione sul significato del titolo, *Sulla realtà della funzione d'onda*. Al lettore vorace sarà forse sorto l'interrogativo, "devo dedurne che il carattere deterministico della *realtà* si sia dimostrato falso?". A costo di svilirne l'entusiasmo, è utile sottolineare che quelle da noi derivate sono contraddizioni che sussistono tra il modello ontologico e le previsioni della Meccanica Quantistica, motivo per cui siamo portati a dubitare dell'interpretazione ontologica di ciò che la *funzione d'onda* serva a rappresentare. Al contrario, nulla è stato proferito che concernesse la *realtà* in sé: il discorso da noi condotto si svolge interamente sul piano della critica degli strumenti con cui tentiamo di descrivere la realtà. Ne sia perciò rasserenato il suddetto lettore: può ancora dormire sonni tranquilli.

Bibliografia

[1] Barrett, J., Cavalcanti, E., Lal, R., and Maroney, O. No ψ-epistemic model can fully explain the indistinguishability of quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, **112** (2014).

[2] Bell, J. Introduction to the hidden-variable question. In *Speakable and unspeakable in quantum mechanics. Collected Papers on Quantum Philosophy*, chap. 4. Cambridge University Press (1987).

[3] Benenti, G., Casati, G., and Strini, G. *Principles of Quantum Computation and Information*, vol. I. World Scientific (2004).

[4] Bohm, D. *Quantum Theory*, chap. 5 and 22. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1951).

[5] Bohr, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **48** (1935).

[6] Caves, C., Fuchs, C., and Schack, R. Conditions for compatibility of quantum states assignments. *Phys. Rev. A*, **66** (2002).

[7] Caves, C., Fuchs, C., and Schack, R. Quantum probabilities as bayesian probabilities. *Phys. Rev. A*, **65** (2002).

[8] Einstein, A. Reply to criticism. In *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, p. 672. Cambridge University Press (1949).

[9] Einstein, A., Podolski, B., and Rosen, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **47** (1935).

[10] Jaynes, E. Probability in quantum theory. In *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*, p. 381. Addison-Wesley (1990).

[11] Picasso, L. *Lezioni di meccanica quantistica.* ETS (2000).

[12] Pusey, M., Barrett, J., and Rudolph, T. On the reality of the quantum state. *Nat. Phys.*, **8** (2012).

[13] Ringbauer, M., Duffus, B., Branciard, C., Cavalcanti, E., White, A., and Fedrizzi, A. Measurements on the reality of the wavefunction. *Nat. Phys.*, **11** (2015), 249.

[14] Shankar, R. *Principles of Quantum Mechanics.* Springer, ii edn. (1994).